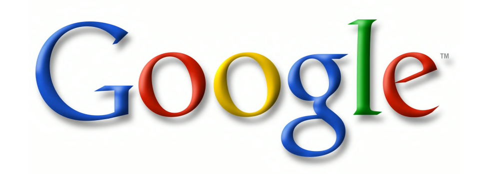




LEHRBUCH DER PHYSIK

LEHRBUCH DER PHYSIK

VON

O. D. CHWOLSON

PROF. ORD. AN DER KAISERL. UNIVERSITÄT ZU ST. PETERSBURG

VIERTER BAND

DIE LEHRE VON DER ELEKTRIZITÄT

ÜBERSETZT VON

H. PFLAUM

ADJ.-PROF. AM POLYTECHNIKUM ZU RIGA

ERSTE HÄLFTE

MIT 336 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1908

LEHRBUCH DER PHYSIK

LEHRBUCH DER PHYSIK

VON

O. D. CHWOLSON

PROF. ORD. AN DER KAISERL. UNIVERSITÄT ZU ST. PETERSBURG

VIERTER BAND

DIE LEHRE VON DER ELEKTRIZITÄT

ÜBERSETZT VON

H. PFLAUM

ADJ.-PROF. AM POLYTECHNIKUM ZU RIGA

ERSTE HÄLFTE

MIT 336 EINGEDRUCKTEN ABBILDUNGEN

BRAUNSCHWEIG

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN

1908

VORREDE ZUR RUSSISCHEN AUSGABE.

Die Lehre von den magnetischen und elektrischen Erscheinungen mußte auf zwei Halbbände verteilt werden. Dieser erste Halbband enthält die Lehre vom konstanten elektrischen Felde und fast die gesamte Lehre vom konstanten Magnetfelde. Der Umfang des zweiten Halbbandes wird bedeutend geringer sein als der des ersten.

Die lange Pause zwischen dem Erscheinen des dritten Bandes (derselbe erschien bereits 1899) und dieses Halbbandes erklärt sich, abgesehen von einigen persönlichen Ursachen, hauptsächlich dadurch, daß es nötig wurde, die zweite Auflage der drei ersten Bände zu besorgen, wobei ich bestrebt war, in dieselbe nicht nur alles das aufzunehmen, was in letzter Zeit an neuem und wichtigem erschienen war, sondern auch einige Abschnitte von Grund aus umzuarbeiten. Während dieser Zeit sind die ersten drei Bände in deutscher Übertragung erschienen (bei Friedr. Vieweg u. Sohn in Braunschweig), und hat der Druck der französischen Ausgabe (bei A. Hermann in Paris) begonnen. Die gewaltige Umwälzung, die sich in letzter Zeit in der Elektrizitätslehre vollzogen hat, läßt es mich nicht bedauern, daß ich diesen Band nicht früher habe erscheinen lassen können.

Die Herren A. N. Himmelmann und A. A. Dobiasch haben die große Mühe der Korrekturen in liebenswürdiger Weise auf sich genommen; ich spreche ihnen für die gewissenhafte und unentwegte Ausführung dieser sehr großen Arbeit den aufrichtigsten und herzlichsten Dank aus. Besonders zu Danke verpflichtet bin ich Herrn A. A. Dobiasch, der mich auf zahlreiche Fehler, Unklarheiten, Fortlassungen und überhaupt auf verschiedene Versehen aufmerksam gemacht hat. Dank der Hilfe

der Genannten wage ich zu hoffen, daß auch dieser Halbband die gleiche freundliche Aufnahme finden wird, wie dies in Rußland und im Auslande mit den vorhergehenden Bänden der Fall war.

Von Herzen danke ich den Nachfolgern des verstorbenen Herrn K. L. Ricker, sowie den Vertretern seiner Verlagsfirma, die alles mögliche getan haben, um die Herausgabe dieses Buches zu fördern.

St. Petersburg, im März 1907.

O. Chwolson.

VORREDE ZUR DEUTSCHEN AUSGABE.

Bei der Bearbeitung dieses Bandes setzte ich voraus, daß der Leser nur mit der Vor-Maxwellschen Theorie der elektrischen Erscheinungen bekannt ist, und dies dürfte wohl auch fast ausnahmslos der Fall sein bei denjenigen, die eben das Gymnasium oder die Realschule verlassen haben. Ich hielt es für notwendig, diese Leser vorerst langsam mit den Grundgedanken der beiden späteren Theorien vertraut zu machen, und ich hoffe, daß der bedeutende, dieser Einführung gewidmete Raum nicht unnütz verschwendet war. In einem Lehrbuche müssen didaktische Erwägungen eine Hauptrolle spielen, und von diesem Gesichtspunkte aus bitte ich den vorliegenden Halbband zu beurteilen. Im übrigen enthält er fast ausnahmslos dasjenige Material von Tatsachen, dessen Darstellung ohne Herbeiziehung der neueren Theorien möglich ist, welche erst im zweiten Halbbande die ihnen zukommende Rolle spielen werden.

Herr Prof. G. C. Schmidt hatte die große Liebenswürdigkeit, auch bei diesem Halbbande Verbesserungen und Zusätze einzuführen, wofür ich ihm zu herzlichstem Danke verpflichtet bin.

Größten Dank schulde ich der geehrten Verlagsbuchhandlung, welche auch bei diesem Bande keine Mühen und Kosten scheute, und Herrn Prof. H. Pflaum, welcher diesen Band mit der gleichen Sachkenntnis und Sorgfalt übersetzte, wie früher Band I und II.

St. Petersburg, im Februar 1908.

O. Chwolson.

INHALTSVERZEICHNIS DES VIERTEN BANDES.

(ERSTE HÄLFTE.)

Sechstes Kapitel. **Innerhalb der Kette auftretende Erscheinungen: Thermoelektrische Erscheinungen.**

Siebentes Kapitel. **Ponderomotorische Wirkungen des Magnetfeldes.**

Achtes Kapitel. **Erregung des magnetischen Zustandes der Körper.**

Einleitung.

Charakteristik des gegenwärtigen Standes der Wissenschaft von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen.

Indem wir mit dem letzten Bande unseres Lehrbuches der Physik beginnen, erscheint es uns unerläßlich, zunächst eine kurze Schilderung der überaus seltsamen und exzeptionellen Lage zu geben, in welcher sich gegenwärtig die Lehre von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen befindet. Man hat in dieser Disziplin, die den umfangreichsten und interessantesten Teil der Physik ausmacht, zurzeit nicht weniger als drei verschiedene Seiten oder Richtungen voneinander zu unterscheiden.

I. Erstens haben wir es mit dem äußeren Gefüge einer sehr großen Zahl verschiedenartiger Erscheinungen zu tun, die, von unseren Sinnesorganen erfaßt, in uns eine mehr oder weniger klare Vorstellung von dem erwecken, was an einem gegebenen Orte und unter gegebenen Bedingungen vorgeht oder, richtiger gesagt, uns vorzugehen scheint. Aus diesem äußeren Gesamtbilde der Erscheinungen, sowie zum Teil aus den Vorstellungen, welche sie in uns erwecken, ergibt sich die Beschreibung der Erscheinungen. In einem für uns untrennbaren Zusammenhange mit den Erscheinungen und ihrer Beschreibung befinden sich jene Gesetze und jene Regeln, durch welche die qualitativen und quantitativen Seiten dieser Erscheinungen verknüpft sind. Diese Gesetze und diese Regeln, wie sie für die gegebene Erscheinung charakteristisch sind, müssen als wichtigster Bestandteil in der Beschreibung derselben enthalten sein, da ohne sie die Beschreibung der Erscheinung nicht denjenigen Grad von Vollständigkeit besitzen würde, der im Hinblick auf den zurzeit vorhandenen Vorrat wissenschaftlicher Kenntnisse erreichbar ist.

Es sei bemerkt, daß die Wissenschaft in dieser ersten Hinsicht eine hohe Stufe der Entwickelung erreicht hat. Es ist uns eine so

gewaltig große Zahl der verschiedenartigsten elektrischen und magnetischen Erscheinungen bekannt, daß eine nur einigermaßen vollständige Beschreibung derselben ein mehrbändiges Werk zu füllen imstande wäre. Gleichzeitig sind uns mit der größten, man kann wohl sagen mit absoluter Gewißheit diejenigen Gesetze bekannt, denen gemäß eine große Zahl jener Erscheinungen erfolgt, also die gesetzmäßigen Beziehungen, in welchen sich die den gegebenen Erscheinungen eigentümlichen Größen untereinander befinden. Mit anderen Worten — wir wissen, unter welchen Bedingungen eine Erscheinung eintritt, können sie daher unserem Willen gemäß hervorrufen und können in einer überaus großen Anzahl von Fällen die kleinsten Einzelheiten der Erscheinung selbst, ihren Verlauf und die Endresultate, zu denen sie führt, vorhersagen. Von großer Bedeutung ist es, daß das ganze wissenschaftliche Material, welches diese Seite der Lehre von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen charakterisiert, durchaus unabhängig ist von der jeweiligen in der Wissenschaft herrschenden Anschauung über das Wesen dieser Erscheinungen. Dafür ist jedoch diese Anschauung von einem großen und leider für die Wissenschaft bisweilen schädlichen Einflusse auf die Terminologie, deren wir uns bei der Beschreibung einer gegebenen Erscheinung und der Formulierung der auf sie bezüglichen Gesetze bedienen. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß eine Terminologie, die sich einmal eingebürgert hat und mit einer ganz bestimmten Vorstellung über die Erscheinungen eng verbunden ist, die Evolution der wissenschaftlichen Ansichten über das Wesen dieser Erscheinungen hemmen kann.

II. Eine zweite Seite der gegenwärtigen Lehre von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen bietet die Betrachtung ihrer zahlreichen und verschiedenartigen praktischen Anwendungen. Daß derartige Anwendungen möglich sind, beruht darauf, daß wir, wie soeben gesagt war, es verstehen, die entsprechenden Erscheinungen hervorzurufen und daß wir sowohl mit ihrem Charakter, als auch mit den Gesetzen, denen sie gehorchen, gründlich und allseitig bekannt sind. In sehr vielen Fällen ist jene Bekanntschaft rein empirischer Natur. Alle praktischen Anwendungen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen herzuzählen ist geradezu unmöglich, denn hierher gehört das ganze, schier grenzenlose Gebiet der Elektrotechnik: die Telegraphie und Telephonie, elektrische Beleuchtung, elektrische Kraftübertragung und elektrische Lastenbeförderung, Galvanoplastik, Elektrometallurgie, Konstruktion von dynamoelektrischen Maschinen und anderen Quellen des elektrischen Stromes, z. B. von thermoelektrischen Batterien und Akkumulatoren, Telegraphie ohne Drahtleitung, zahllose kleinere Instrumente, die durch Elektrizität betrieben werden usf.: hierher gehören auch die zahlreichen auf rein empirischem Wege entstandenen Anwendungen der Elektrizität in der Heilkunde.

Kurz gesagt, wir sind mit den Erscheinungen wohl bekannt und verstehen sie uns zur Erlangung dieses oder jenes Ziels in so hohem Maße dienstbar zu machen, daß man mit Recht schon jetzt das neue Jahrhundert als das Jahrhundert der Elektrizität bezeichnet.

III. Die dritte Seite der Wissenschaft von jenen Erscheinungen, die wir im vorliegenden Bande betrachten werden, bilden die Versuche, die Erscheinungen zu erklären, eine „Theorie" derselben zu schaffen, zu zeigen, daß sie insgesamt die notwendige Folge des Vorhandenseins eines gewissen, wenn auch mehr oder weniger hypothetischen Substrats sind. Diesem Substrat werden einige bestimmte Eigenschaften zugeschrieben, aus denen, unter Anwendung der Gesetze der Mechanik und Thermodynamik, welche auch für dies Substrat gelten sollen, die Erscheinungen, die wir beobachten, abgeleitet, d. h. also „erklärt" werden.

Wir halten es für notwendig, gleich zu Anfang die Lage klarzustellen, in welcher sich die uns beschäftigende Lehre zurzeit befindet und haben dabei die Absicht, dies mit einer Offenheit zu tun, welche von der Überzeugung geleitet wird, daß die Wahrheit das wichtigste und kostbarste Gut ist, dessen Besitz das höchste Ziel der menschlichen Bestrebungen darstellt, — wie wenig tröstlich oder anziehend auch die Form sei, in welcher sich diese Wahrheit uns offenbart.

Nach unserer Ansicht besteht die wahrhaft wissenschaftliche Erkenntnis irgend eines Gebietes der Physik im richtigen Erfassen der Bedeutung, welche im gegebenen Augenblicke diese oder jene Theorien, diese oder jene Hypothesen besitzen.

Nehmen wir an, es finde in einem gegebenen Zeitpunkt ein Kampf zwischen verschiedenen Hypothesen satt, wobei eine jede von ihnen hartnäckig die von ihr in irgend einem Teile der Wissenschaft eingenommene Stellung behauptet, so daß man beim Übergange von einem Teile zum anderen bei den Überlegungen, Ableitungen und Erklärungen, die eine Hypothese oder Theorie durch die andere zu ersetzen hat. Wer bei einem solchen Entwickelungsstadium der Wissenschaft der Meinung ist, der Kampf sei beendet, die eine Theorie habe den vollen Sieg davon getragen und es sei daher vollkommen möglich, alle Teile der gegebenen Wissenschaft auf einer Hypothese aufzubauen, der dürfte wohl kaum als ein wahrer Kenner dieser Wissenschaft zu gelten haben.

Gerade in einer solchen Lage aber befindet sich zurzeit die Wissenschaft von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Ohne übertreiben zu wollen, muß man bei nüchternem Blick auf die Tatsachen eingestehen, daß in dem Teile dieser Wissenschaft, der sich die Erklärung der einschlägigen Erscheinungen zur Aufgabe stellt, augenblicklich keine einzige festgegründete Theorie existiert, die als zuverlässige und völlig klare Grundlage für die Erklärung aller

hierher gehörigen Erscheinungen dienen könnte. Wir glauben, daß wir durch das Bestreben, ein möglichst genaues Bild von der augenblicklichen Sachlage der Dinge zu entwerfen, zugleich für unsere jungen Leser eine feste Grundlage schaffen, auf welche gestützt sie sich vorbereitet finden werden, den ferneren Stadien des Kampfes der verschiedenen Theorien zu folgen und die Entwickelungsphasen der Wissenschaft zu verstehen, welche in der nächsten Zukunft als Frucht der Arbeit der Forscher eintreten werden. Um eine klare Vorstellung von dem augenblicklichen Stande der Frage zu erwecken, braucht man sich keineswegs zuvor mit der Gesamtheit aller derjenigen elektrischen und magnetischen Erscheinungen bekannt zu machen, deren Erklärung sich die Theorie zur Aufgabe stellt. Es genügen zu diesem Zwecke diejenigen Kenntnisse, welche durch die elementare Physik bereits vermittelt sind und wir beschränken uns deshalb an dieser Stelle auf einige wenige Worte, um die grundlegenden, und daher allen bekannten Erscheinungen in Erinnerung zu bringen.

Es gibt erstens gewisse Erscheinungen, welche man als elektrostatische Erscheinungen bezeichnet. Bei gegenseitiger Berührung, beim Reiben und auch bei einigen anderen Manipulationen erlangen die Körper eine ganze Reihe von Eigenschaften, welche sie vorher nicht besessen hatten. Wir sagen in diesen Fällen — die Körper seien elektrisiert. Es gibt zwei Arten der Elektrisierung, die man positive und negative Elektrisierung genannt hat. Gleichnamig elektrisierte Körper stoßen einander ab, ungleichnamig elektrisierte ziehen einander an. Körper, welche sich in der Nähe von elektrisierten (im elektrischen „Felde“) befinden, werden ebenfalls elektrisiert; es ist dies die Erscheinung der Induktion, auf welcher die Einrichtung des Kondensators beruht. Hinsichtlich der Übertragung und Ausbreitung des elektrischen Zustandes teilt man die Körper ein in Leiter und Nichtleiter oder Dielektrika. Die Anwesenheit der letzteren hat einen bedeutenden Einfluß auf die Größe der Kräfte, welche in dem, die elektrischen Körper umgebenden Raume auftreten. Das Verschwinden des elektrischen Zustandes ist stets vom Auftreten eines Quantums von Wärme-, Licht-, Schallenergie usw. begleitet, woraus hervorgeht, daß man es bei Anwesenheit eines elektrischen Körpers mit der Anwesenheit eines Vorrats von Energie einer besonderen Form zu tun hat.

Zweitens haben wir es mit magnetischen Erscheinungen zu tun: die natürlichen Magnete (das Magneteisenerz) und die künstlichen Stahlmagnete ziehen gewisse Substanzen an, stoßen andere ab: die ersteren heißen paramagnetisch (Eisen, Stahl, Nickel u. a.), die letzteren — diamagnetisch (Wismut u. a.). Auf jedem Magneten hat man zwei verschiedene Magnetisierungen zu unterscheiden: die Nord- und die Südmagnetisierung und dementsprechend zwei Pole; die gleichnamigen Pole stoßen einander ab, die ungleichnamigen ziehen einander an.

Einige Körper werden in der Nähe von Magneten selbst zu Magneten, d. h. erlangen zwei Magnetpole (magnetische Induktion). Zerstückelt man einen Magneten, so findet man, daß alle seine Teile vollständige Magneten darstellen, d. h. sie besitzen alle Eigenschaften, welche den Magneten überhaupt zukommen. In dem Raume, welcher einen Magneten umgibt (im magnetischen „Felde“), spielen sich verschiedenartige Erscheinungen ab, von denen wir die Drehung der Polarisationsebene der Lichtstrahlen erwähnen. Mit Hilfe von Magneten kann man Arbeit leisten, d. h. Vorräte verschiedener Arten von Energie erhalten; hieraus folgt, daß das Vorhandensein von Magneten zugleich das Vorhandensein eines Vorrats von einer gewissen besonderen Energieform bedeutet.

Drittens existiert eine unübersehbare Menge von verschiedenen Erscheinungen, welche in dieser oder jener Weise mit dem in Verbindung stehen, was man als elektrischen Strom bezeichnet. In bezug auf diese Erscheinungen teilt man alle Leiter in zwei Klassen ein. Zur ersten Klasse gehören die Metalle und andere Substanzen, die sich in den entsprechenden Fällen wie Metalle verhalten; die zweite Klasse bilden die Elektrolyte. Bei einigen Arten der Stromerzeugung (hydroelektrische Elemente) ist das Vorhandensein letzterer notwendig; werden sie vom Strom durchflossen, so gehen in ihnen chemische Reaktionen vor sich, und zwar wird der Elektrolyt stets zerlegt. Der Raum, welcher die Körper wie z. B. die Drähte umgibt, in welchen die Erscheinung des elektrischen Stromes auftritt, besitzt sämtliche Eigenschaften eines magnetischen Feldes (Wirkung auf einen beweglichen Magneten, Magnetisierung von Eisen und Stahl usw.); die Körper selbst aber unterliegen Kräften, welche ihnen eine Bewegung nach der einen oder anderen Seite hin zu verleihen suchen. Die Erscheinung des elektrischen Stromes wird stets vom Auftreten eines Vorrats an Energie begleitet, meist von Wärmeenergie, Bewegungsenergie usw. Hieraus folgt, daß man es bei der Erscheinung des elektrischen Stromes mit der Gegenwart eines Vorrats einer besonderen Energieform zu tun hat. Bewegt sich ein Leiter im magnetischen Felde oder wird das Feld, in welchem er sich befindet, quantitativen Änderungen unterworfen, d. h. nimmt seine Intensität zu oder ab, so zeigt jener Leiter die Erscheinung eines elektrischen Stromes, der in diesem Falle als induzierter oder Induktionsstrom bezeichnet wird.

Viertens haben wir es mit der Erscheinung der elektrischen Strahlen zu tun, von denen bereits im zweiten Bande dieses Lehrbuches in Kürze die Rede war.

Fünftens gehört hierher die umfangreiche und unendlich mannigfaltige Gruppe der Erscheinungen, welche bei der sogenannten elektrischen

Entladung auftreten; hierzu zählen: der elektrische Funke, der elektrische Lichtbogen und die Entladungserscheinungen in verdünnten Gasen.

Sechstens müssen wir die Erscheinungen der Radioaktivität hierher rechnen, da ihre Zugehörigkeit zu den elektrischen Erscheinungen ganz offenbar ist.

Zu all dem Tatsachenmaterial, welches in der vorhergehenden Aufzählung enthalten ist, hat man als unerschütterlich feststehend eine Reihe absolut genauer Gesetze zu rechnen, welche die magnetischen und elektrischen Erscheinungen beherrschen. Die wichtigsten dieser Gesetze sind die folgenden:

1. Das Gesetz von der Wechselwirkung elektrisierter Körper, d. h. das Gesetz, durch welches die Richtung und Größe derjenigen Kraft, welche auf einen in der Nähe von elektrisierten Körpern befindlichen elektrisierten Körper wirkt, sowie auch die Verteilung des elektrischen Zustandes in Körpern bestimmt wird.

2. Das Gesetz der Wechselwirkung von Magneten.

3. Das Gesetz, welches das Magnetfeld eines Stromes bestimmt; dieses Gesetz sagt aus, welche Ströme und Magnete hinsichtlich aller der im umgebenden Medium auftretenden Erscheinungen miteinander vertauscht werden können. Folgerungen aus diesem dritten Gesetz sind: das Gesetz der Wechselwirkung eines Stromes und Magneten, sowie das Gesetz der Wechselwirkung zweier Ströme.

4. Das Gesetz, nach welchem die Induktionsströme auftreten.

5. Die Gesetze über das Auftreten von Wärme auf Kosten der beiden oben erwähnten Formen von elektrischer Energie.

6. Das Fundamentalgesetz der Elektrolyse, d. h. der chemischen Reaktionen, welche den Durchgang des elektrischen Stromes durch Elektrolyte begleiten.

7. Das Gesetz der Drehung der Polarisationsebene im Magnetfelde. Obigen Gesetzen hat man noch zwei weitere hinzuzufügen; dieselben waren von einer der Theorien vorhergesagt worden und haben sich durch die Versuche in einem solchen Grade bewahrheitet, daß nunmehr eine jede Theorie ihnen Rechnung zu tragen hat, d. h. ihre Notwendigkeit verständlich zu machen suchen muß. Es sind dies die folgenden:

8. Das Gesetz, welches durch die Formel $K = n^2$ ausgedrückt ist; es bezieht sich auf nichtmagnetische Substanzen und ist von uns bereits im zweiten Bande erwähnt worden. Wir wollen an dieser Stelle nur daran erinnern, daß K die Dielektrizitätskonstante und n den Brechungsquotienten für Strahlen von sehr großer Wellenlänge bedeuten. Für magnetische Substanzen wird das Gesetz durch eine kompliziertere Formel ausgedrückt, die wir hier nicht anführen wollen.

9. Das Gesetz, welches wir weiterhin durch die Formel $E_m : E_e = v$ ausdrücken wollen; E_m und E_e bedeuten hierbei zwei bestimmte „Elektrizitätsmengen", v — die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts. Wir wollen uns mit diesem Hinweise begnügen, da es an dieser Stelle verfrüht wäre, das angedeutete Gesetz ausführlich zu behandeln.

Mit dem oben gesagten sind natürlich nicht alle Gesetze, welche sich auf die elektrischen und magnetischen Erscheinungen beziehen, erschöpft, jedenfalls aber sind damit die wichtigsten von ihnen aufgezählt.

Was für eine Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen man auch aufstellen mag, sie muß jedenfalls vor allen Dingen von einer bestimmten Vorstellung über die Grundursachen dieser Erscheinungen ausgehen, von einer realen Grundlage, die als Urquell der Erscheinungen anzusehen ist. Unter Berücksichtigung der Gesetze der Mechanik und Thermodynamik muß die Theorie zeigen, daß die Erscheinungen und Gesetze, welche oben aufgezählt wurden, sich als notwendige logische Folge aus der Hypothese ergeben, von welcher die Theorie ausgeht. Ist die Theorie imstande, diese Aufgabe zu leisten und besitzt zudem die Ausgangshypothese diejenigen Eigenschaften, die, wie wir im ersten Bande sahen, von einer befriedigenden Hypothese gefordert werden müssen, ist sie z. B. nicht allzu kompliziert, so wird dann eine solche Theorie sich in der Wissenschaft eine feste Stellung erringen und die Hypothese selbst einen bestimmten Grad von Wahrscheinlichkeit gewinnen.

Wir müsssen nun aber erklären, daß zurzeit (1907) keine Theorie existiert, welche den genannten Bedingungen entspricht. Wir wollen versuchen, von dem augenblicklichen Stande der Dinge ein klares Bild zu entwerfen.

Bei Betrachtung der Gesamtheit aller Erklärungen für die elektrischen und magnetischen Erscheinungen kommt man zu dem Ergebnis, daß in diesen Erklärungen sich deutlich drei Richtungen oder drei Vorstellungsarten zeigen, die sich wesentlich voneinander unterscheiden; wir wollen sie der Kürze halber mit den Buchstaben A, B und C bezeichnen. Jede dieser drei Richtungen oder Vorstellungsarten läßt ein gewisses Bild vor uns entstehen, welches uns eine mehr oder weniger deutliche Vorstellung von der wahren Ursache der Erscheinung gibt, von dem, was sozusagen hinter den Kulissen vorgeht, während sich die Erscheinung vor unseren Augen abspielt. Diese entsprechenden drei Bilder wollen wir ebenfalls mit den Buchstaben A, B und C bezeichnen. Bevor wir aber jene drei Bilder genauer betrachten, wollen wir sie zuvor in Kürze charakterisieren.

Das Bild A (etwa bis zum Jahre 1870) geht von der Vorstellung aus, daß es zwei Elektrizitäten, zwei besondere Stoffe gibt, unter deren Eigenschaften eine der wichtigsten darin besteht, daß sie

die Fähigkeit der unvermittelten Fernwirkung (actio in distans, vgl. Bd. I) besitzen. Beibehalten hat man dies Bild bis jetzt in der elementaren Physik. Die ernste Wissenschaft hat sich von dieser Vorstellungsart auf immer losgesagt. Nichtsdestoweniger wird sie in unseren Darlegungen eine hervorragende Rolle spielen; wir werden es nicht unterlassen, diesen scheinbar merkwürdigen Umstand zu erklären.

Das Bild B (1870 bis 1900) sagt sich von der Annahme eines besonderen Stoffes als eines Substrats für die elektrischen und magnetischen Erscheinungen vollständig los. Es sucht diese Erscheinungen durch die Eigenschaften des Äthers zu erklären, in welchem verschiedenartige Veränderungen, nämlich Deformationen und Bewegungen auftreten können. Die unmittelbare Wirkung in die Ferne wird bedingungslos verworfen. Dieses Bild hat zur elektromagnetischen Theorie der strahlenden Energie geführt, von welcher im zweiten Bande wiederholt die Rede war; es stellt eine der tiefsinnigsten und geistreichsten Schöpfungen des menschlichen Geistes dar. Obgleich es sich der Wahrheit viel mehr nähert als das Bild A, vermochte es dennoch nicht das umfangreiche Gebiet der verschiedenartigen Erscheinungen zu erklären.

Das Bild C (seit 1900) basiert auf der neuen Elektronentheorie und stellt gewissermaßen eine Kombination der Bilder A und B dar. Die Existenz eines besonderen Substrats wird gelten gelassen und die Vorstellung von den Veränderungen im Äther wird beibehalten, jedoch das Substrat selbst wird als die Ursache angesehen, welche jene Veränderungen im Äther hervorruft. Die Elektronentheorie wird gegenwärtig erst aufgebaut.

Wir wollen nunmehr eine ausführlichere Charakteristik unserer drei Bilder geben.

Bild A.

Die „Imponderabilien“ und die „actio in distans“ sind es vorzugsweise, welche dieses alte und unbedingt unrichtige Bild kennzeichnen. Es nimmt die Existenz besonderer Stoffe an, die bisweilen als Fluida oder Agenzien oder auch direkt als Flüssigkeiten bezeichnet werden. Diese Stoffe sollten unwägbar (richtiger gewichtslos) sein; ihre Zahl schwankt zwischen vier und einem. Vier solcher Stoffe nahmen alle diejenigen an, welche an die Existenz zweier „Elektrizitäten“ und zweier „Magnetismen“ glaubten, diese Stoffe sollten sich tatsächlich auf der Oberfläche oder im Inneren der elektrischen Körper und der Magnete befinden. Als die Entdeckung gemacht wurde, daß jeder Magnet ganz ebenso wirkt wie ein gewisses System von elektrischen Strömen, sagte man sich von den beiden Magnetismen los und ersetzte sie durch die recht unklaren „Molekularströme“, welche die Moleküle der Magnete umkreisen sollten. Auf diese Weise ent-

standen die „dualistischen" Theorien, welche sich auf die Annahme bloß zweier besonderer Stoffe, zweier „Elektrizitäten", der positiven und negativen, beschränkten. Die unitarischen Theorien, welche ein einziges Agens annehmen, müssen ebenfalls in diese Kategorie gerechnet werden, selbst in dem Falle, wo sie die Identität dieses einzigen Agens mit dem Lichtäther annehmen, wofern sie demselben die „actio in distans" zuerkennen, da letztere zugleich mit der Annahme der Imponderabilien, den zweiten und vielleicht den am meisten kennzeichnenden Charakterzug im Bilde A darstellt. Es wird nämlich die Annahme gemacht, daß die hypothetischen Agenzien, z. B. die beiden Elektrizitäten, unmittelbar aus der Ferne aufeinander einwirken, wobei das Zwischenmedium entweder gar keine Rolle spielt oder aber einen nur nebensächlichen, gewissermaßen zufälligen Einfluß auf diese oder jene Erscheinung ausübt; die Wirkungen der Agenzien aufeinander können anziehende und abstoßende sein. In den elektrischen Erscheinungen hat man Äußerungen der im Ruhezustande befindlichen Agenzien vor sich; die als elektrischer Strom bezeichnete Erscheinung stellt ihrem Wesen nach ein wirkliches Strömen eines oder zweier Agenzien im Inneren oder an der Oberfläche eines Leiters — gewöhnlich eines Drahtes — dar.

Auf dem Boden der erwähnten, für das Bild A am meisten bezeichnenden Vorstellungen ist die umfangreiche Anwendung der Lehre vom Potential, mit deren Grundlagen wir uns bereits im ersten Bande bekannt gemacht haben, auf die magnetischen und elektrischen Erscheinungen ersprossen. Eine solche Anwendung war möglich als die Gesetze gefunden waren, nach denen die Kräfte wirken, welchen wir beim Studium dieser Erscheinungen begegnen. Da nun aber diese Kräfte in Wirklichkeit zweifellos vorhanden sind und das umfangreiche Gebiet der Erscheinungen genau so beschaffen ist, als entsprächen die Grundzüge des Bildes A der Wirklichkeit, so zeigt sich, daß die Anwendung der Lehre vom Potential nicht nur zu unzweifelhaft richtigen Ergebnissen führt, sondern auch, daß man diese Lehre auch dann noch anwenden kann, wenn man sich vom Bilde A selbst lossagt. Das Potential eines Punktes drückt eine bestimmte Arbeit zweifellos vorhandener Kräfte aus; diese Arbeit wird geleistet auf Kosten wiederum zweifellos existierender Vorräte gewisser Energieformen besonderer Art und hat zu ihrem Ergebnis das ganz offenkundige Auftreten von Energieformen, die uns in der Mehrzahl der Fälle längst wohl bekannt sind. Die Frage nach der Quelle, nach dem Mechanismus des Entstehens dieser Kräfte und auch die Frage nach der Form des ursprünglichen Energievorrats spielt hierbei gar keine Rolle; die Antwort auf diese Fragen hängt ganz und gar davon ab, bei welchem der „Bilder" wir stehen bleiben. Sagen wir uns vom Bilde A los, so müssen wir uns damit nur von der Vorstellung

lossagen, daß das ursprüngliche Fundament, auf welches wir die Anwendung der Lehre vom Potential gegründet haben, Realität besitzt. Die Anwendung selbst aber bleibt bestehen, als Methode für die Überlegungen, für das Lösen von Aufgaben usw. Wir werden sehen, daß sie zum Begriffe „Potential eines Leiters“ führt, welches den Grad der Elektrisierung darstellt; auch dieser Begriff kann erhalten bleiben unbekümmert darum, welches Vorstellungsbild wir wählen und was wir uns im Zusammenhange mit jenem Bilde unter dem Ausdruck „Elektrisierung“ eines Leiters vorstellen.

Aus dem Gesagten wird es wohl verständlich, weshalb das Bild A bei unseren weiteren Überlegungen keine geringe Rolle spielen wird, obgleich die Wissenschaft sich von ihm abgewandt hat. Wir werden uns desselben bedienen, um die Erscheinungen in den Grenzen, innerhalb deren sie so verlaufen, als ob jenes Bild der Wirklichkeit entspräche, in bequemer und einfacher Weise beschreiben zu können. Diese Grenzen freilich müssen wir genau kennen, da wir sonst offenbar riskieren, die gröbsten Fehler zu begehen. Uns ganz und gar von jenem Bilde A abzuwenden, halten wir außerdem aus zwei Gründen für nicht möglich. Erstens erleichtern wir hierdurch den Anfängern, die sich mit der Schulphysik, welche kein anderes Vorstellungsbild kennt, vertraut gemacht haben, die Arbeit, und zweitens sind wir damit in die Lage versetzt, wenn auch nur zum Teil und fürs erste, die bisher allgemein benutzte und bequeme Terminologie beizubehalten, welche sich im Anschluß an das Bild A ausgebildet hat und an welche sich alle gewöhnt haben.

Bild B.

Faraday, Cl. Maxwell und Hertz haben wir dieses Bild zu verdanken. Das wichtigste Kennzeichen desselben ist, daß eine actio in distans als unmöglich und irgend welche besondere Agenzien außer dem Weltäther als nicht vorhanden gelten, sowie daß der Schwerpunkt der Erscheinungen in das Medium verlegt wird, welches die elektrisierten oder magnetisierten Körper umgibt, und welches mithin bei den in Betracht kommenden Erscheinungen keine zufällige oder nebensächliche, sondern im Gegenteil die Hauptrolle spielt.

Das Vorstellungsbild B setzt voraus, daß das Wesen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen in Veränderungen, wie z. B. in Deformationen und Störungen besteht, die im Äther auftreten. Diese Veränderungen bilden die Quelle jener Kräfte, deren Wirkungen wir unmittelbar beobachten und durch sie werden jene Energieformen bestimmt, deren Vorhandensein bewiesen wird durch die Anwendung des Prinzips der Erhaltung der Energie auf die vorhin erwähnten Fälle, in denen Wärme, chemische Energie und andere bekannte Energieformen auftreten.

Faraday hat das Bild B entworfen; Cl. Maxwell hat seine Details gezeichnet. Er hat die Grundgedanken Faradays in mathematische Form gebracht und eine „elektromagnetische Theorie des Lichts“ geschaffen, welche die strahlende Energie als einen Sonderfall der gleichen Ätherstörungen betrachtet, wie sie in anderen Fällen von uns als die eine oder die andere magnetische oder elektrische Erscheinung wahrgenommen werden. Eben diese Theorie hat Maxwell zur Entdeckung jener beiden Gesetze geführt, welche wir vorhin (S. 6 u. 7) angeführt haben. Daß jene Gesetze durchaus richtig sind, ist durch zahlreiche Versuche bestätigt worden; durch die Theorie, welche sich auf das Bild A gründet, könnten sie nicht vorhergesagt und auch nicht einmal erklärt werden. Endlich stellen auch die Hertzschen elektrischen Strahlen, mit denen wir uns zum Teil schon im zweiten Bande bekannt gemacht haben und auf die wir weiter unten zurückkommen werden, eine Erscheinung dar, welche mit der Maxwellschen Theorie und den Grundvorstellungen, durch welche das Bild B charakterisiert wird, in Übereinstimmung steht.

Der harmonische Bau der Maxwellschen Theorie, die Bestätigung der Gesetze 8 und 9 (S. 6 und 7), die Beseitigung der unwägbaren Agenzien, welche speziell die magnetischen und elektrischen Erscheinungen hervorrufen sollten, die Beseitigung der actio in distans und — was die Hauptsache ist — die Entdeckung der elektrischen Strahlen, hätten, so sollte man meinen, in allen Teilen dieser Wissenschaft den Vorstellungen, auf welchen das Bild B beruht, zu einem vollen Triumphe verhelfen müssen. Es hatte den Anschein, als ob es nur noch erübrigte, das Bild weiter auszumalen, alle seine Details auszuführen, mit anderen Worten — von ihm in allen Teilen unserer Wissenschaft Gebrauch zu machen, zu zeigen, daß die neue Theorie bei allen Gruppen der hierher gehörigen Erscheinungen mit der Wirklichkeit in ebenso guter Übereinstimmung ist, zu ebenso glänzenden Resultaten führt, wie dies der Fall war bei den besonderen Erscheinungsgruppen, auf welche Maxwell und Hertz die neuen Ideen anwandten. Um das Jahr 1890 konnte man denken, daß von Elektrizitätsmengen im Sinne wirklich existierender Substanzen in der ernsten Wissenschaft nicht mehr die Rede sein werde; man konnte hoffen, daß die rein mechanische Seite der Deformationen und Perturbationen im Äther, in denen das wahre, der direkten Beobachtung nicht zugängliche Wesen der elektrischen und magnetischen Erscheinungen bestehen sollte, in kurzer Zeit in allen Details erklärt sein werde und daß jene Formenänderungen und Störungen in allen den Kapiteln erwähnt werden dürften, welche sich auf den entsprechenden Teil der Physik beziehen.

Diese Hoffnungen haben sich nicht verwirklicht. Im Gegenteil hat die Entwickelung der Wissenschaft in den letzten Jahren diese

selbst immer mehr von der Einheitlichkeit, der Klarheit und Einfachheit entfernt, denen sie, wie es schien, schon so nahe war.

Man hat drei verschiedene Ursachen zu unterscheiden, welche die sich allmählich weiter entwickelnde Wissenschaft von dem Wege abgelenkt haben, auf dem das Bild B in allen Teilen der Lehre vom Magnetismus und der Elektrizität zum völligen Siege hätte gelangen können.

Erstens gab es in dieser Lehre einige Abschnitte, welche gerade in theoretischer Hinsicht einen hohen Grad der Entwickelung erreichten, wobei in den entsprechenden Schlüssen und Überlegungen nicht ein einziger Zug, nicht ein einziger Gedanke an das Bild B erinnerte. Hierher gehört insbesondere die Lehre von der Elektrolyse, d. h. von den sogenannten chemischen Stromwirkungen. Beim Studium der elektrolytischen Erscheinungen schienen die Forscher das Bild B gleichsam zeitweilig übersehen, die Arbeiten eines Maxwell und Hertz hinsichtlich der Nichtexistenz einer materiellen „Elektrizität" vergessen zu haben, und sogar, wie es scheinen konnte, — die Unmöglichkeit einer actio in distans. In der Theorie der Ionen (Bd. I und III) wird die Annahme gemacht, daß die gelösten Substanzen immer zum Teil dissoziiert, d. h. in ihre Bestandteile (z. B. NaCl in Na und Cl), welches die Ionen sind, gespalten seien. Jedes Ion ist an eine bestimmte „Elektrizitätsmenge" gebunden, infolgedessen es sich in der Lösung nach der ungleichnamig elektrisierten Elektrode hinbewegt. Die Lehre von den Ionen stellt gegenwärtig einen stattlichen, im Detail ausgearbeiteten, sehr interessanten Teil unserer Wissenschaft dar. Dabei läßt sich in ihm keine Spur des Bildes B entdecken; wer über Elektrolyse schreibt, hat gewissermaßen das Bild B völlig vergessen und ist auch kaum ein ernstlicher Versuch gemacht worden, das Bild B in die Lehre von der Elektrolyse einzuführen, die Erklärungen und Gedanken, sozusagen aus der einen Sprache in die andere zu übersetzen, zu zeigen, daß die „Elektrizitätsmengen", von denen hier die Rede ist, im Sinne des Bildes B, d. h. als Deformationen des sich auf die Ionen stützenden Äthers aufzufassen sind.

Zweitens muß man festhalten, daß es bis jetzt nicht gelungen ist, eine klare mechanische Vorstellung von dem Charakter, selbst derjenigen Deformationen (und vielleicht auch der Störungen) zu gewinnen, welche den elektrostatischen und magnetischen Erscheinungen entsprechen. Es sind verschiedene Versuche gemacht worden, das Wesen der Vorgänge im Äther darzustellen, Versuche, die auf der Annahme beruhen, daß der Äther diese oder jene besonderen Eigenschaften besitzt, diesen oder jenen besonderen inneren Bau hat. Unter diesen Annahmen und Mutmaßungen waren nicht selten recht komplizierte und eigentümliche vertreten. Es genüge, darauf hinzuweisen, daß man dem Äther eine Art Doppelnatur zugeschrieben hat, als bestände er aus zwei Substanzen, von welchen die eine gewissermaßen

von der anderen erfüllt ist, wie z. B. ein Schwamm sich mit Flüssigkeit vollsaugt. Eine derartige oder eine der zahlreichen ähnlichen Annahmen aber macht die Grundhypothesen äußerst verwickelt, während die Einfachheit derselben als eines der Kennzeichen für ihre Wahrscheinlichkeit anzusehen ist (vgl. Bd. I); hierdurch wird das Vorstellungsbild B seiner Hauptvorzüge beraubt, die es gegenüber dem Bilde A besitzt, indem ein metaphysisches Element in dasselbe hineingetragen wird, wodurch ja das Bild A hauptsächlich gegen die Forderungen verstoßen hat, welche wir einer wahrhaft modernen Theorie stellen.

Drittens ist eine neue Reihe von Erscheinungen entdeckt worden, welche, ebenso wie die Ergebnisse einer eingehenderen Untersuchung einiger bereits früher bekannten Erscheinungen, im Rahmen des Bildes B keinen Raum finden konnten.

Bild C.

An der Schwelle des neuen Jahrhunderts ist eine neue Theorie entstanden; man nennt sie die „Elektronentheorie", da ihre Grundlage die Vorstellung vom Elektron bildet. Das dieser Theorie entsprechende Bild C stellt, wenigstens teilweise, eine Kombination der Bilder A und B dar. Es entnimmt dem Bilde A die Annahme, daß in der Natur eine besondere Stoffart existiert, entsprechend der negativen Elektrizität des Bildes A. Dieser Stoff hat atomistischen Bau, d. h. er besteht aus gesonderten kleinsten Teilchen, die Elektronen genannt werden. Aus dem Bilde B behält die neue Theorie die Vorstellung bei, daß gewisse Änderungen im Äther entstanden sind, wenn wir die Erscheinung eines elektrischen oder magnetischen Kraftfeldes beobachten. Sie läßt also keine Fernwirkung zu, sondern nimmt an, daß die unmittelbare Ursache einer elektrischen oder magnetischen Kraft, die man an einem gegebenen Orte im Raume beobachtet, an eben diesem Orte zu suchen ist und zwar in den Veränderungen, denen der Äther an dem gegebenen Orte unterworfen wurde.

Es tritt uns hierbei eine Reihe von Fragen entgegen, wie z. B.: welcher Art ist der Zusammenhang zwischen den Elektronen und den im Äther erfolgenden Veränderungen? wodurch wird im Bilde C der Begriff der positiven Elektrizität repräsentiert? wie verhalten sich die Elektronen und die gewöhnliche Materie zueinander?

Die im Entstehen begriffene neue Lehre hat auf diese Fragen noch keine klaren und endgültigen Antworten erteilt. Es wird angenommen, daß unbewegte Elektronen im umgebenden Äther diejenigen Änderungen hervorrufen, welche dem Vorhandensein von elektrischen Kräften entsprechen. Bewegt sich dagegen ein Elektron, so treten im umgebenden Äther neue Veränderungen auf und es entstehen magnetische Kräfte.

Ein Elektron entsteht beim Zerfall eines Atoms der gewöhnlichen Materie: man könnte denken, daß alle Materie aus Elektronen besteht, die in verschiedener Weise gruppiert und miteinander verbunden sind.

Es tritt nun für uns die kapitale didaktische Frage auf: welche Rolle kann gegenwärtig (1907) die Elektronentheorie in einem Lehrbuche übernehmen? Kann man sich von den Bildern A und B völlig abwenden und von Anfang an alle hierher gehörigen Beschreibungen und Erklärungen allein auf dieser neuen Theorie aufbauen?

Wir müssen diese Fragen entscheiden, indem wir mit der Lage der Dinge im gegebenen Augenblicke rechnen und uns des Risikos klar bewußt sind, welches mit dieser Entscheidung verbunden ist. Jeder Tag kann die Sachlage wesentlich verändern, kann zur Aufhellung und Befestigung dessen beitragen, was zur Stunde noch unaufgeklärt und schwankend erscheint und dann muß sich die Entscheidung, welche wir getroffen haben, als unzeitgemäß erweisen.

Aber, einen anderen Ausweg gibt es nicht! Wir wissen nicht, was uns die Zukunft bringen wird und können nur mit dem rechnen, was vorhanden ist, mit der gegenwärtigen Lage der Dinge. Dieser Umstand läßt uns die folgende Entscheidung treffen. Das Bild C ist noch zu skizzenhaft, um sich desselben als Grundlage für alle Beschreibungen und Erklärungen zu bedienen. Wir werden daher in der ersten Hälfte dieses Bandes nur an den Stellen die neue Theorie heranziehen, wo dies durchaus bequem ist, und wo ihre Überlegenheit gegenüber den anderen Theorien klar hervortritt. Der Anfänger muß sich vor allen Dingen gründlich bekannt machen mit dem weiten Gebiete der Tatsachen, mit den Erscheinungen und Gesetzen, d. h. mit einem solchen wissenschaftlichen Material, welches von keiner Theorie abhängig ist. Die Terminologie, welche sich hier eingebürgert hat, läßt eine Benutzung der Bilder A und B nicht nur äußerst bequem, sondern auch fast unumgänglich erscheinen.

Noch auf einen weiteren Umstand möge hingewiesen werden. Das Bild A — zwei unvermittelt in die Ferne wirkende Elektrizitäten — ist von der gegenwärtigen wissenschaftlichen Theorie völlig beseitigt worden, seine Anwendung kann als Anachronismus erscheinen. Wir werden uns aber dennoch seiner nicht nur dort bedienen, wo es bequem ist. Wir werden uns erlauben noch weiter zu gehen, selbst auf die Gefahr hin, Mißbilligung seitens der Vertreter der Wissenschaft zu erfahren: indem wir uns, wie immer, vor allen Dingen von didaktischen Prinzipien leiten lassen und den Lernenden zu Hilfe zu kommen suchen, werden wir in den ersten Kapiteln dieses Bandes bei Betrachtung der einfachsten elektrischen Erscheinungen die Bilder A und B einander gegenüberstellen. Wir werden hierbei ausschließlich die jüngeren Studierenden, die an das Bild A gewöhnt sind, im Auge haben. Diese

bedürfen vorerst einer Erläuterung des Bildes B und seiner Vorzüge gegenüber dem alten von der reinen Wissenschaft längst verlassenen Bilde A.

Aus dem Gesagten sieht man, daß wir in einer Übergangsepoche leben, in einer Zeit der aufbauenden Arbeit. Das Alte ist zusammengebrochen, am neuen Bau wird noch gearbeitet. Der theoretische Teil der Lehre von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen stellt etwas unfertiges, sich wandelndes und veränderndes dar. Unter solchen Umständen ist es in hohem Grade interessant und wichtig auf die Frage zu antworten, was denn eigentlich in dieser Lehre als unverrückbar feststehend angesehen werden kann, welche Teile derselben in Zukunft keiner wesentlichen Umgestaltung unterliegen können. Die Antwort hierauf lautet folgendermaßen:

Unabhängig von den theoretischen Anschauungen, unabhängig davon, welches die Hypothesen sind, die der Theorie als Grundlage dienen, besitzen wir in der Lehre von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen das folgende unerschütterlich feststehende Material:

1. Die Erscheinungen und Tatsachen in der Gestalt, in welcher sie von unseren Sinnesorganen wahrgenommen werden.

2. Eine Reihe von Gesetzen, welche diese Erscheinungen beherrschen; diese Gesetze verknüpfen miteinander gewisse Größen, deren wahre physikalische Bedeutung in vielen Fällen noch nicht endgültig aufgeklärt ist.

3. Theoretische Ableitungen, welche sich auf diese Gesetze stützen, hierher gehört:

a) Alles, was sich auf die Anwendung der Potentialtheorie stützt; so z. B. die Lehre von der Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche von Leitern. Die Methoden zur Berechnung dieser Verteilung und die Resultate selbst bleiben zu Recht bestehen, unabhängig davon, was man unter den Worten „Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche“ versteht.

b) Die Feststellung der rein mechanischen Bedingungen für das Gleichgewicht oder die Bewegung von Magneten und Strömen, welche sich unter der Einwirkung von Magneten oder Strömen befinden.

c) Die Berechnung der verschiedenen Größen, welche die elektrischen Ströme charakterisieren, die unter bestimmten gegebenen Bedingungen auftreten müssen. Die Ansichten über den physikalischen Sinn dieser Größen können sich wandeln, die Methoden ihrer Berechnung aber sind bekannt und werden für alle Zeiten ein unveränderliches Besitztum der Wissenschaft bleiben.

4. Die Anwendung der beiden Prinzipien der Thermodynamik auf diejenigen der hierher gehörigen Erscheinungen, bei

denen wir ein Verschwinden oder Auftreten irgend welcher Energievorräte bemerken. Wir wissen, daß ein elektrisierter Körper zu einer Wärmequelle werden kann, daß der elektrische Strom immer eine solche Quelle darstellt, daß man mit Hilfe von Magneten oder Strömen oder Kombinationen beider Arbeit zu leisten vermag, daß die zu betrachtenden Erscheinungen nicht selten von einem Auftreten oder Verschwinden eines Vorrats von chemischer Energie begleitet werden usw. Die erhaltenen Resultate werden immer richtig bleiben, wenngleich die Ansichten über die physikalische Bedeutung der in den entsprechenden Formeln auftretenden Größen sich mit der Zeit wandeln können.

5. Es steht unerschütterlich fest, daß das Medium bei den elektrischen und magnetischen Erscheinungen eine wesentliche Rolle spielt. Die „actio in distans" besonderer Agenzien hat sich für immer überlebt. Welche Gestalt die Theorie auch im Laufe der Zeit annehmen mag, es kann in ihr nicht die Rede sein von einer „Elektrizität", welche sich an einer bestimmten Stelle befindet und unvermittelt auf eine andere, an einer anderen Stelle befindliche Elektrizität einwirkt. Unter diesem negativen Resultat verbirgt sich eine der wichtigsten positiven Errungenschaften unserer Wissenschaft. Die Eigenschaften desjenigen Mediums, in welchem sich die Erscheinungen abspielen, müssen an erster Stelle stehen, denn diese Erscheinungen erheben es über jeden Zweifel, daß in dem Medium irgend etwas vor sich geht.

Eine Darstellung der Lehre von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen muß vor allem die soeben aufgezählten fünf Punkte im Auge behalten. Was im gegebenen Augenblicke als sicher feststehend gelten kann, muß hierbei als Grundlage dienen und hierdurch muß die allgemeine Verteilung des ganzen wissenschaftlichen Materials bestimmt werden.

Wir wollen hier einige Worte über diejenige Verteilung des Lehrstoffs vorausschicken, an die wir uns halten werden.

Zu dem unerschütterlich Feststehenden gehört, wie gesagt, die Rolle des Mediums bei den Erscheinungen, welche wir besprechen werden. Daß eine Veränderung im Medium vorliegt, daran kann, wie wiederholt gesagt wurde, keinerlei Zweifel bestehen; aus diesem Grunde stellen wir das, was in ihm beobachtet wird und vorgeht in den Vordergrund, wobei wir das tatsächlich Beobachtete von allem dem streng zu sondern suchen, was einen hypothetischen Charakter trägt.

Deshalb werden wir zuerst die Eigenschaften des Mediums oder wie man zu sagen pflegt, des Feldes betrachten und hierauf erst die Bedingungen, unter denen ein Feld entsteht. Hierauf werden wir gesondert den Einfluß des Feldes auf die in dasselbe gebrachte Materie

betrachten. Offenbar gehört ein derartiger Einfluß ebenfalls zu den Eigenschaften des Feldes; es erscheint uns aber aus vielen Gründen besser angebracht, wenn wir die hierher gehörigen Erscheinungen in einem besonderen Kapitel vereinigen. Ferner wollen wir die Methoden betrachten, nach denen die beim Studium des Feldes auftretenden Größen gemessen werden und zum Schlusse das Feld der Erdkugel.

Man hat zwei Felder zu unterscheiden, das elektrische (genauer das elektrostatische) und das magnetische, die beide die Eigenschaft der Unveränderlichkeit besitzen, indem die Größen, auf die wir bei ihrem Studium treffen, nicht von der Zeit abhängig sind oder aber von ihr in der Weise abhängen, daß sie im Verlaufe einer unbestimmt langen Reihe von aufeinander folgenden und gleichartigen Zeitintervallen proportional der Zeit wachsen (z. B. die Wärmemenge, die vom Strome entwickelt wird, die Substanzmengen, die vom Strome an den Elektroden niedergeschlagen werden, sind der Zeit proportional).

Außer jenen beiden konstanten Feldern haben wir ferner ein veränderliches Magnetfeld, welches treffend als elektromagnetisches Feld bezeichnet werden könnte. Leider aber haben die Ausdrücke „Elektromagnet" und „Elektromagnetismus" bereits eine ganz bestimmte eingebürgerte Bedeutung, von welcher es schwer wäre, sich zu entwöhnen.

In einen besonderen vierten Teil werden wir die Betrachtung derjenigen Erscheinungen verweisen, welche beim Durchgang einer Entladung durch Gase auftreten. Es lassen sich zurzeit keine klaren und logischen Gründe finden, die uns veranlassen könnten, diesen Teil einem der drei vorhergehenden anzugliedern. Endlich werden wir noch die neuen Strahlen und die Erscheinungen der Radioaktivität zu betrachten haben.

Auf diese Weise erhalten wir die folgende Einteilung des gesamten Stoffes:

I. Teil. Elektrisches Feld.	II. Teil. Magnetisches Feld.
Eigenschaften des Feldes.	Eigenschaften des Feldes.
Quellen des Feldes.	Quellen des Feldes.
Einfluß des Feldes auf die Materie.	Einfluß des Feldes auf die Materie.
Messungen.	Messungen.
Erdelektrizität.	Erdmagnetismus.

III. Teil. Veränderliches Magnetfeld.

IV. Teil. Durchgang der Entladung durch Gase.

V. Teil. Neue Strahlen und Radioaktivität.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß dieser Plan sehr weit entfernt ist von einem idealen Plane, von einer solchen Anordnung, wie sie später einer festbegründeten Anschauung über die magnetischen und

elektrischen Erscheinungen entsprechen wird, wenn eine bestimmte, bis ins Detail ausgearbeitete Theorie in gleicher Weise alle Teile unserer Lehre umfassen wird. Der aufmerksame Leser wird gewiß auf Stellen stoßen, in denen die Idee, welche unserem Plane zugrunde liegt, nicht mit streng wissenschaftlicher Konsequenz durchgeführt ist. Wir glauben, daß es gegenwärtig überhaupt nicht möglich ist, die Lehre von der Elektrizität und dem Magnetismus auf einen streng gleichartigen Unterbau zu fundieren; man muß sich darauf beschränken, nach dieser Richtung dem erstrebten Ziele nach Möglichkeit zu nähern, indem man, ohne von dem Entwickelungsgange der Wissenschaft abzuweichen, ein möglichst genaues Bild ihrer dem gegebenen Augenblicke entsprechenden historischen Phase zu geben sucht.

Erster Teil.

Konstantes elektrisches Feld.

Erstes Kapitel.

Eigenschaften des konstanten elektrischen Feldes.

§ 1. Grundlegende Tatsachen. Man kann mit den Körpern, hauptsächlich den festen und flüssigen, gewisse Manipulationen vornehmen, worauf der Raum, welcher diese Körper umgibt, gewisse neue Eigenschaften erlangt; die offenbare Ursache für das Auftreten letzterer hat man in eben diesen Manipulationen zu suchen. Die einfachsten der hierher gehörigen Manipulationen sind aus der elementaren Physik bekannt; sie sollen im folgenden Kapitel eingehend betrachtet werden. Hier wollen wir uns damit begnügen, daran zu erinnern, daß zu ihnen die Berührung von Körpern, Reibung usw. gehören. Wenn man z. B. einen Körper an einem anderen reibt und hierauf beide Körper voneinander entfernt, so zeigen sich im umgebenden Raume unter anderem folgende Erscheinungen: leichte Körper, die zugleich leicht beweglich sind, bewegen sich in der Richtung nach der Oberfläche des Körpers hin, welcher der Reibung unterworfen wurde; nachdem sie diese Oberfläche erreicht haben, entfernen sich die leichten Körper mehr oder weniger schnell von ihr; zwischen dem geriebenen Körper und einem anderen, den man ihm bis auf sehr kleine Entfernungen genähert hat, beobachtet man bisweilen einen kleinen Funken, dessen Auftreten von einem Schall in der Art eines sehr schwachen Knalls oder Knisterns begleitet ist; andere Körper, die man ebenfalls gerieben hat, suchen sich je nach den Umständen (s. u.) dem gegebenen geriebenen Körper zu nähern oder von ihm zu entfernen.

Die Voraussetzung, daß sich in den geriebenen Körpern die unmittelbare Ursache der erwähnten Erscheinungen berge, hat zu der bekannten

Terminologie geführt: von den Körpern, welche der Reibung oder einer der an deren Behandlungsweisen unterworfen waren, sagt man, sie seien elektrisiert. Dieser Ausdruck soll vorläufig nur darauf hinweisen, daß in dem Raume, welcher diese Körper umgibt, gewisse Erscheinungen auftreten. Die Weltanschauung, welche in unserer Wissenschaft im Laufe des ganzen 18. und während der ersten drei Viertel des 19. Jahrhunderts herrschte, ließ die Forscher die oben erwähnten Fälle von Annäherung der Körper aneinander als eine gegenseitige Anziehung derselben auffassen, sowie das Bestreben der Körper, sich voneinander zu entfernen — als ihre beiderseitige Abstoßung und auf diese Weise entstanden die Ausdrücke: „die Körper ziehen einander an", „die Körper stoßen einander ab".

Die bekannte Tatsache, daß ein und derselbe Körper nach Berührung mit einem geriebenen Körper sich einigen Körpern zu nähern, von anderen zu entfernen sucht, hat zu der Vorstellung geführt, daß es zwei Arten der Elektrisierung gibt: die eine von ihnen heißt die positive Elektrisierung, die andere die negative. Dementsprechend pflegt man von einem Vorzeichen der Elektrisierung zu sprechen (+ oder —).

Jede der im Anfange dieses Paragraphen erwähnten Manipulationen hat zum Ergebnis das Auftreten beider Elektrisierungen auf zwei verschiedenen Körpern oder an verschiedenen Stellen eines Körpers, je nachdem die Manipulation an zwei Körpern (Reibung, Berührung u. a.) oder nur an einem einzigen Körper (s. zweites Kapitel: Pyroelektrizität, Piezoelektrizität u. a.) vorgenommen wird.

Die Untersuchung der Bewegungen, welche von elektrisierten, nicht allzu weit voneinander entfernten Körpern ausgeführt werden, führt zu folgender einfacher Regel: elektrisierte Körper sind Kräften unterworfen, unter deren Einwirkung sie sich Körpern nähern, welche ungleichnamig elektrisiert sind und von Körpern entfernen, welche gleichnamig, d. h. ebenso wie sie selbst, elektrisiert sind. Bedient man sich der oben erwähnten Terminologie, so kann man dieselbe Regel auch mit folgenden Worten aussprechen: ungleichnamig elektrisierte Körper ziehen einander an, gleichnamig elektrisierte stoßen einander ab.

Zur Erklärung dieser grundlegenden Tatsachen ist eine gewaltige Menge von verschiedenen Hypothesen und auf dieselben sich stützenden Theorien in Vorschlag gebracht worden. Wir wollen je einen Vertreter aus jeder der beiden Gruppen auswählen, in welche man die Hypothesen und Theorien, die vor dem Jahre 1900 existierten, einteilen kann. Die von uns erwählten Vertreter sind die historisch wichtigsten, sie kennzeichnen in der schärfsten Form die zwei Gruppen der älteren Theorien, denen im Wesen zwei verschiedene Weltanschauungen entsprechen. Jede der beiden von uns ausgewählten

Theorien führt zu einem gewissen Bilde, welches die der unmittelbaren Beobachtung nicht zugängliche Grundlage der sich vor unseren Augen abspielenden Erscheinungen definiert. Die auf diese Weise erhaltenen beiden Bilder werden wir „Bild A“ und „Bild B“ nennen. Bemerkt sei, daß das Bild A bis zum letzten Viertel des letztverflossenen Jahrhunderts in der Wissenschaft dominierte.

Wir werden uns in den ersten Paragraphen mit den grundlegenden elektrischen oder genauer gesagt elektrostatischen Erscheinungen bekannt machen und werden in jedem dieser Paragraphen gesondert die entsprechenden Teile der Bilder A und B betrachten.

Wir beginnen mit denjenigen grundlegenden Tatsachen, welche in diesem Paragraphen bereits erwähnt wurden.

Bild A.

Es gibt in der Natur, außer der den festen, flüssigen und gasförmigen und vielleicht noch andere Zustandsformen annehmenden Materie und außer dem Lichtäther noch zwei Substanzen, welche man positive und negative Elektrizitäten nennt; wir werden in den Fällen, wo wir aus irgend welchen Ursachen (s. Einleitung) für nötig halten, uns des Bildes A zu bedienen, diese Stoffe bisweilen als freie Elektrizitäten bezeichnen, indem wir hierbei dem Usus folgen und keineswegs mit dem Worte „frei“ auf irgend eine besondere Eigenschaft der Elektrizität hinzuweisen beabsichtigen.

Wie ein jeder Stoff, so nimmt auch die Elektrizität zu einer gegebenen Zeit eine bestimmte Lage ein, die sich ändern kann; ferner stellt die Elektrizität eine gewisse Größe dar, weshalb man auch von einer Elektrizitätsmenge sprechen kann. Die gesamte Elektrizitätsmenge, welche sich auf einem gegebenen Körper vorfindet, heißt seine Ladung. Die Elektrizität hat das Bestreben, sich auf der Oberfläche gewisser Körper in einer so dünnen Schicht anzuordnen, daß man sich bei Lösung verschiedener auf sie bezüglicher Fragen der Lehre von den Oberflächenmassen bedienen kann, welche keinen Raum einnehmen und nur zwei geometrische Dimensionen besitzen.

Die zwei Elektrizitäten haben die Fähigkeit der Fernwirkung: sie wirken aufeinander unvermittelt, wobei die gleichnamigen Elektrizitäten einander abstoßen, die ungleichnamigen einander anziehen. Haben sich die beiden ungleichnamigen Elektrizitäten in gleichen Mengen miteinander vereinigt, so bilden sie eine neutrale Mischung, die sich in allen Körpern vorfindet; sie übt keinerlei äußere Wirkung aus, so daß sich ihr Vorhandensein durch nichts verrät. Hierauf beruhen die Ausdrücke: „gleiche Mengen ungleichnamiger Elektrizitäten heben sich gegenseitig auf“ und „neutrale Elektrizität wird in zwei gleiche Mengen positiver und negativer Elektrizitäten zerlegt“.

Wenden wir uns den grundlegenden Tatsachen zu, auf welche im Anfange dieses Paragraphen hingewiesen wurde, so sehen wir, daß wir bei Annahme des Bildes A nichts mehr zu erklären brauchen, da alles das, was zu erklären wäre (ausgenommen die Anziehung leichter Körper, zu der wir noch zurückkehren werden), den beiden hypothetischen Elektrizitäten als immanente Eigenschaft zugeschrieben wird. Alle Manipulationen, von denen oben die Rede war, bewirken eine Zerlegung der neutralen Mischung; solch eine Zerlegung erfolgt z. B. beim Reiben, wobei sich die positive Elektrizität auf dem einen, die negative auf dem anderen Körper anordnet. Natürlich liefern alle diese Manipulationen stets einander gleiche Mengen von positiver und negativer Elektrizität.

Die Wechselwirkung elektrisierter Körper wird „erklärt" durch die Wechselwirkung der Ladungen, welche sich auf diesen Körpern vorfinden.

Der Raum, welcher die elektrisierten Körper umgibt, heißt elektrisches Feld und stellt ein Kraftfeld (Bd. I) dar; in jedem Punkte desselben tritt eine bestimmte Kraft auf, wenn man in diesen Punkt eine gewisse Elektrizitätsmenge, beispielsweise eine kleine vorher geriebene Glaskugel bringt. Die Größe und Richtung dieser Kraft hängen von der vorhandenen Verteilung der Elektrizitäten ab, oder, wie man bisweilen sagt, der elektrischen Massen und von der Lage des in Betracht kommenden Punktes.

Im elektrischen Felde kann man eine unendliche Anzahl von Kurven ziehen, deren Richtung (d. h. die Richtung der zu ihnen gezogenen Tangenten) in jedem Punkte mit der Richtung der Kraft in diesem Punkte zusammenfällt; solche Kurven sind Kraftlinien (Bd. I). Durch jeden Punkt eines elektrischen Feldes kann man eine Kraftlinie hindurchlegen. Sind die Kraftlinien einander parallele Gerade, d. h. haben die Kräfte in allen Punkten des Feldes gleiche Richtung, so heißt das Feld homogen; wir werden weiter unten sehen, daß im homogenen Felde die Kräfte in allen Punkten der Größe nach einander gleich sind. Die Kraftlinien haben im Bilde A eine ausschließlich geometrische Bedeutung.

Sie erlangen einen physikalischen Sinn nur in dem Falle, daß man in einen Punkt des Feldes einen kleinen elektrisierten Körper bringt und auch in diesem Falle beschränkt sich die physikalische Bedeutung auf diesen Punkt, für welchen die Richtung der Linie die Richtung der tatsächlich beobachteten Kraft bestimmt. Für alle übrigen Punkte aber hat die Kraftlinie auch in diesem Falle keinerlei physikalischen Sinn.

Man ist übereingekommen, einer Kraftlinie positive Richtung zuzuerteilen nach der Seite der Kraft, welche auf die positive Elektrizität wirkt; eine Kraft, welche auf die negative Elektrizität einwirkt,

hat die entgegengesetzte Richtung. Unter solchen Bedingungen erhält man offenbar das Resultat, daß die Kraftlinien aus den positiv elektrisierten Körpern hervortreten und in die Körper eintreten, welche negative Elektrizität besitzen.

Eine gewisse, im allgemeinen völlig willkürliche Elektrizitätsmenge wählt man als Einheit der Elektrizitätsmenge; wir werden übrigens im § 4 sehen, auf welche Weise man eine absolute Einheit der Elektrizitätsmenge erhalten kann. Die Kraft, welche in einem gegebenen Punkte des Feldes auf die Einheit der Elektrizitätsmenge wirkt, wählt man als Maß einer neuen Größe, die man die Feldintensität in diesem Punkte nennt (Bd. I). Ist f eine Kraft, welche auf die Elektrizitätsmenge η wirkt, so wird die Feldintensität F durch die Relation

$$F = \frac{f}{\eta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

bestimmt. Ein homogenes Feld hat überall eine nach Größe und Richtung gleiche Intensität.

Mengen positiver Elektrizität werden wir durch positive, Mengen negativer durch negative Zahlen ausdrücken. Rechnet man die Kräfte f positiv, wenn sie nach der positiven Seite der Kraftlinien hin gerichtet sind, so kommt man zu dem Ergebnisse, daß die Feldintensität nur eine positive Größe sein kann, da unter Beachtung dieser Bedingungen die Größen η und f offenbar immer das gleiche Vorzeichen haben werden.

Denken wir uns im elektrischen Felde eine gewisse Fläche und wählen wir auf ihr einen derartigen Teil aus, der mit den Kraftlinien keine gemeinsame Tangente hat, d. h. der von den Kraftlinien durchsetzt wird. Denken wir uns ferner auf dieser Fläche eine sehr kleine geschlossene Kurve von beliebiger Form gezeichnet und durch alle Punkte dieser Kurve Kraftlinien gezogen. Der geometrische Ort dieser Kraftlinien wird dann die Seitenfläche eines röhrenförmigen Gebildes ausmachen, das man Kraftröhre nennt. Im allgemeinen werden diese Röhren gebogen sein und der Flächenraum ihres Querschnittes sich längs der Röhre ändern, d. h. sie werden sich entweder erweitern oder verengern. Im homogenen elektrischen Felde sind die Kraftröhren gerade und haben überall den gleichen Querschnitt. Es ist klar, daß in allen Punkten der Seitenfläche einer Kraftröhre die zu dieser Fläche normale Komponente der Feldintensität F gleich Null ist. Ferner folgt aus allem Vorhergehenden, daß die Kraftröhren im Raume von den positiv elektrisierten zu den negativ elektrisierten Körpern hin verlaufen.

Die Feldintensität in einem gegebenen Punkte nennt man oft, freilich mit Unrecht, die elektrische Kraft in diesem Punkte.

Das Bild A, dessen Grundzüge wir angedeutet haben, ist unzweifelhaft falsch, d. h. es entspricht der Wirklichkeit nicht. Man

kann mit Bestimmtheit behaupten, daß eine unvermittelte Fernwirkung nicht zu den Eigenschaften der Elektrizität gehört. Ungeachtet dessen können wir uns vom Bilde A vorläufig noch nicht völlig frei machen. Es hindert uns hieran erstens die Rolle, welche es in der Geschichte der Wissenschaft gespielt hat, zweitens die vorhandene Terminologie, welche sich auf dieses Bild bezieht und drittens seine relative Einfachheit und die großen Bequemlichkeiten, die es gewährt, wenn wir uns in verhältnismäßig verwickelten, hierher gehörigen Erscheinungen zurecht finden wollen. Es vollzieht sich nämlich eine gewaltig große Zahl von Erscheinungen genau so, **als ob** das Bild A richtig wäre in allen seinen Zügen, von denen einige noch weiter unten angegeben werden sollen. Infolgedessen können wir uns an dasselbe in einem sehr umfangreichen Gebiete verschiedenartiger Erscheinungen halten, ohne uns auch nur im geringsten der Gefahr auszusetzen, den kleinsten Fehler zu begehen. Der Umfang dieses Gebietes muß uns aber genau bekannt sein und können wir aus ihm nur dann heraustreten, wenn das Resultat jeder Schlußfolgerung von uns experimentell geprüft wird. Aber innerhalb jenes Gebietes behalten wir das Bild A bei, als eine sehr anschauliche Fiktion, welche uns eine bequeme Methode für die Überlegungen und anschauliche Beschreibung der Erscheinungen an die Hand gibt und eine bequeme Grundlage für die Rechnung, die Lösung verschiedenartiger Aufgaben usw. liefert. Gestützt auf das Bild A, werden wir in unzähligen Fällen die kleinsten Einzelheiten einer Erscheinung, welche bei der einen oder anderen gegebenen Anordnung auftreten soll, vorhersagen können. Man darf aber hierbei nicht vergessen, daß alles dieses auf jener unzweifelhaften Tatsache beruht, deren Wesen in den Worten „als ob" enthalten ist, welche wir oben durch fetten Druck hervorgehoben haben.

Eine Theorie, welche von dem Bilde A ausgeht, sowie jede andere, welche zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen die Existenz zweier besonderen Stoffe annimmt, heißt dualistische. Außer den dualistischen sind auch unitarische Theorien in Vorschlag gebracht worden, welche die Existenz nur eines besonderen Stoffes annehmen, der jedoch die Fähigkeit der unvermittelten Fernwirkung hat. Es wurde hierbei angenommen, daß jeder Körper im natürlichen Zustande eine bestimmte, sozusagen auf seinen Anteil kommende Menge dieses Stoffes enthalten müsse. Jede Änderung dieser Menge repräsentiert eine Elektrisierung des Körpers, wobei eine Vermehrung (Überschuß) derselben der einen, eine Verminderung (Mangel) der anderen Elektrisierung entspricht. Die zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten Manipulationen rufen eine Ortsveränderung des Stoffes hervor, infolgedessen sich an einer Stelle ein Überschuß, an einer anderen ein Fehlbetrag einstellt. So geht z. B. beim Reiben eine gewisse Menge dieses Stoffes von einem Körper auf den anderen über. Die gegenseitige

Aufhebung beider Elektrizitäten führt auf die Rückkehr des Stoffes zu seinem ursprünglichen Orte zurück, wobei der Überschuß auf dem einen Körper den Fehlbetrag auf dem anderen deckt.

Die unitarische Theorie ist zuerst von Franklin in Vorschlag gebracht worden. Im Jahre 1871 erschien die erste einer Reihe von Arbeiten Edlunds, in welchen er eine interessante Theorie entworfen hat, nach der das einzige Agens, das die elektrischen Erscheinungen hervorruft, der Lichtäther selbst ist; beim weiteren Ausbau seiner Theorie nahm Edlund an, daß dem Äther die Fähigkeit der Fernwirkung zukommt.

Auf die unitarischen Theorien, welche eine actio in distans annehmen, werden wir in diesem Bande nicht mehr zurückkommen.

Bild B.

Von diesem Bilde hatten wir schon vielmals zu reden (Bd. I u. II). Es existiert außer der gewöhnlichen Materie auch noch der Äther, der ebenso den Weltraum, wie auch die Zwischenräume zwischen den materiellen Atomen erfüllt. Die Eigenschaften des Äthers und sein Bau im besonderen sind uns fast völlig unbekannt. Die Prinzipien der theoretischen Mechanik, sowie insbesondere der Elastizitätslehre, kann man auf ihn nur gestützt auf Mutmaßungen und mit einigem Bedenken anwenden. Einige Forscher haben dem Äther Eigenschaften zugeschrieben, welche eine eigentümliche Kombination aus den Eigenschaften der festen und flüssigen Körper bilden. Wir können hier auf eine Betrachtung der zahlreichen auf diese Frage bezüglichen Hypothesen noch nicht eingehen.

Die zu Beginn dieses Paragraphen erwähnten Manipulationen rufen im Äther gewisse Deformationen hervor, die ihrem Charakter nach zumeist an die elastischen Deformationen erinnern, welche in festen Körpern den Spannungen entsprechen. Die Richtung der Spannung fällt in jedem Punkte des Raumes mit der Richtung der in diesem Punkte beobachteten elektrischen Kraft zusammen; das heißt mit anderen Worten, die Spannungslinien fallen mit den Kraftlinien zusammen und in ähnlicher Weise, wie wir oben zu den Kraftröhren gelangten, können wir jetzt den Begriff von Spannungsröhren bilden. Den Spannungslinien und Spannungsröhren des Bildes B kommt eine reale physikalische Bedeutung zu, welche durch die Tatsache definiert ist, daß in allen Punkten des Raumes, der das elektrische Feld darstellt, Ätherdeformationen vorhanden sind. Hierin liegt der wesentliche Unterschied der Bilder A und B; im ersteren haben die Kraftlinien, wie wir sahen, einen rein geometrischen Charakter. Die Spannungsröhren sind im allgemeinen gebogen und der Flächeninhalt des Querschnittes ändert sich längs der Röhre ununterbrochen; eine Ausnahme hiervon machen die Kraftröhren im homogenen elektrischen Felde.

Man muß der Längsspannung, welche in den Röhren herrscht, eine gewisse Richtung zuschreiben, was eigentlich wenig verständlich ist. Man hat sich die Deformation einer solchen Spannung analog der Verschiebung des Stoffes längs der Röhre in einer bestimmten Richtung vorzustellen gesucht; aber man kann nicht sagen, daß man auf diese Weise dazu gelangt ist, eine irgendwie klare Vorstellung von der betreffenden Deformation zu erlangen.

Die Spannungsröhren des elektrostatischen Feldes müssen sich unbedingt auf die Materie stützen. Sie können nur an der Oberfläche irgend eines Körpers endigen, von der sie sich nicht loszulösen vermögen. Ein elektrisierter Körper ist ein solcher, auf den sich Spannungsröhren stützen, wobei das eine Röhrenende der positiven, das andere der negativen Elektrisierung entspricht. Was wir im Bilde A freie Elektrizität nannten, erscheint uns hier als Ende einer Spannungsröhre. Die scheinbare Bewegung der Materie, welche wir als gegenseitige Anziehung ungleichnamig elektrisierter Körper bezeichneten, ist das Ergebnis des Bestrebens der sich von einem Körper zu einem anderen erstreckenden und im Spannungszustande befindenden Röhren, sich zu verkürzen.

Wir wissen, daß sich die Elektrisierung eines gegebenen Körpers vergrößern oder verkleinern kann: im Bilde A wurde dies aufgefaßt als eine entsprechende Änderung der Ladung, d. h. der Menge freier Elektrizität auf dem Körper. Im Bilde B könnte man sich das die Intensität der Elektrisierung eines gegebenen Körpers Bestimmende in zweifacher Weise vorstellen. Man könnte annehmen, daß eine Verstärkung der Elektrisierung bloß eine Vergrößerung der Spannung in den Spannungsröhren sei; man kann aber auch eine andere Annahme machen: man kann sich denken, daß die physikalische Bedeutung der Röhren nicht nur darin besteht, daß sie die Richtung der Spannung im Äther bestimmen, sondern daß eine jede derartige Röhre tatsächlich vorhanden ist als etwas Gesondertes und Selbstständiges, etwa an eine Faser erinnerndes. In diesem Falle könnte eine Verstärkung der Elektrisierung als eine Zunahme der Röhrenanzahl gedacht werden, welche z. B. von einem bestimmten Teile der Oberfläche des elektrisierten Körpers ausgeht. Wenn wir uns einer genaueren Vergleichung der einander in den Bildern A und B entsprechenden Züge zuwenden werden, wird sich zeigen, daß es das Bequemste ist, eine Vereinigung beider Annahmen gelten zu lassen: einer Vergrößerung der Ladung im Bilde A entspricht demnach im Bilde B eine Vergrößerung sowohl der Zahl der Röhren, als auch der Größe der Spannung, welche in verschiedenen Querschnitten jeder Röhre besteht.

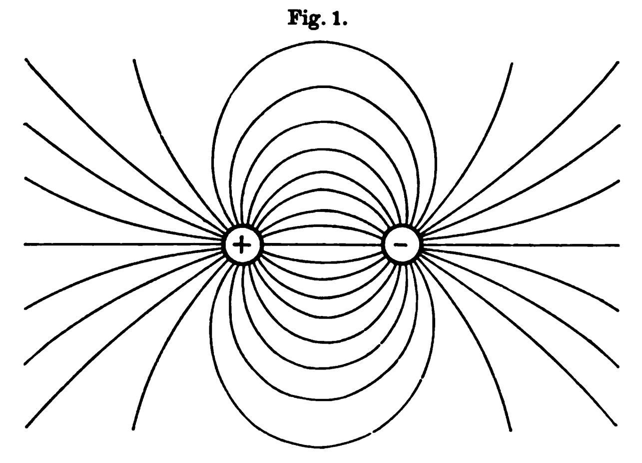
Zur Vervollständigung der Grundzüge des Bildes B müssen wir noch auf folgende beiden Umstände hinweisen: erstens ist die Spannung

selbst eine Größe, welche sich an der Röhre entlang kontinuierlich ändert; eine Ausnahme machen die Spannungsröhren im homogenen Felde. Zweitens müssen wir annehmen, daß in den Röhren nicht nur eine Längsspannung vorhanden ist, sondern auch ein **seitlicher Druck**, d. h., daß die nebeneinander gelegenen Röhren aufeinander einen gewissen Druck ausüben.

Wenden wir uns nunmehr den grundlegenden Tatsachen zu, welche zu Beginn dieses Paragraphen erwähnt worden sind. „Manipulationen", die man an zwei Körpern vornimmt, beispielsweise Reibung, bewirken im umgebenden Äther das Auftreten von Spannungsröhren. Wir wollen zeigen, wie sich diese Röhren in einigen Sonderfällen verteilen.

Gegeben sei ein positiv elektrisierter Körper: die Röhren treten aus ihm nach aller Richtung heraus und enden an den umgebenden

Fig. 1.



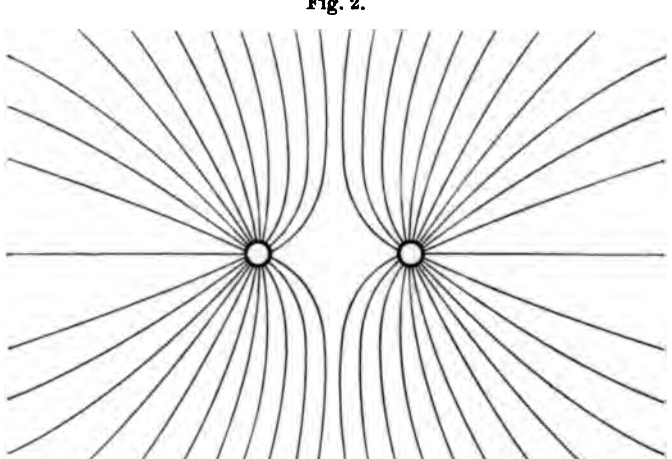
Körpern, wie weit diese Körper auch entfernt sein mögen (die Zimmerwände, Diele, Decke, Erdboden, Wolken usw.). Für einen negativ elektrisierten Körper haben wir dasselbe Bild, jedoch mit dem Unterschiede, daß die Richtung der Röhren die entgegengesetzte ist.

Wir nähern einander **von weitem** zwei Körper P und Q, von denen P positiv, Q negativ elektrisiert ist. Hier haben wir zwei Röhrensysteme vor uns. Das Ende einer Röhre des Systems P trifft an der Oberfläche eines der umgebenden Körper M mit dem Anfange einer der Röhren des Systems Q zusammen und vereinigt sich mit ihm, so daß sich **eine** Röhre bildet, welche sich nach Maßgabe der beiderseitigen Annäherung beider Körper P und Q aneinander schnell verkürzt und sich hierbei vom Körper M entfernt. Sind die Körper P und Q einander nahe, so verläuft die Mehrzahl der Röhren (jedoch nicht alle) von einem Körper zum anderen und nur einige von P

zu den umgebenden Körpern oder von diesen letzteren zum Körper *Q*. Die Röhren, welche von *P* nach *Q* verlaufen, bewirken die scheinbare gegenseitige Anziehung dieser Körper. In Fig. 1 (a. v. S.) ist die Verteilung der Röhren für diesen Fall skizziert.

Nähert man einander zwei Körper *P* und *Q*, welche beide positiv elektrisiert sind, so ordnen sich auf den umgebenden Körpern die Röhrenenden beider Systeme nebeneinander an; von einem Zusammenfließen der Röhren kann natürlich keine Rede sein. Fig. 2 zeigt den allgemeinen Charakter der Röhrenverteilung für diesen Fall. Dieselbe Zeichnung gibt die Verteilung der Spannungsröhren auch für den Fall, daß beide Körper negativ elektrisiert sind. Da die Röhren aufeinander einen seitlichen Druck ausüben, so müssen beide Körper, wie dies direkt

Fig. 2.



aus der Zeichnung zu sehen ist, danach streben, sich voneinander zu entfernen, und hierin liegt das, was wir früher als gegenseitige Abstoßung gleichnamig elektrisierter Körper bezeichneten.

Vergleichung der Bilder A und B.

Vergleicht man die Bilder A und B miteinander, so ist jedenfalls anfänglich nicht einzusehen, daß das zweite von ihnen irgend welche wesentlichen Vorzüge besitzt. Es ist vor allen Dingen nicht einfacher als das Bild A; man könnte eher sagen, daß es viel komplizierter sei. Man muß sich fragen: hat man einen Grund, Spannungen im Äther, welche eine einseitige Richtung haben und von Seitendrucken begleitet werden, jenen beiden elektrischen Fluida vorzuziehen, von denen im Bilde A gesprochen wird? Wie im einen, so im anderen Falle hat man es mit etwas Ungewöhnlichem, Abstraktem und wenig Verständlichem zu tun.

Eine nähere Bekanntschaft mit der Frage führt uns allerdings zu dem Schlusse, daß das Bild B ganz gewaltige Vorzüge vor dem Bilde A hat; wir wollen diese sogleich aufzählen.

1. Im Bilde B ist keine „actio in distans" angenommen, keine unvermittelte Wirkung eines Körpers an einer Stelle, an der er sich nicht selbst befindet. Das Bild B sucht die Ursache einer Kraft dort, wo sich diese Kraft äußert.

2. Das Bild B verlangt keine Einführung neuer Stoffe außer dem Weltäther.

3. Die Deformationen selbst stellen etwas uns Wohlbekanntes dar.

4. Die wichtige Rolle, welche das Medium tatsächlich spielt, und welche wir im § 4 betrachten werden, ist a priori leichter verständlich auf Grund des Bildes B.

5. Die weitere Verfolgung der Züge, welche für das Bild B am meisten charakteristisch sind, hat zu einer neuen Theorie geführt, welche die magnetischen, elektrischen und Lichterscheinungen miteinander vereint.

6. Diese Theorie hat zwei wunderbare Gesetze (s. 8 und 9 auf S. 6 und 7) vorhergesagt, welche sich in Wirklichkeit ganz genau bestätigt haben. Das Bild A konnte nicht einmal die Möglichkeit irgend eines Zusammenhanges zwischen jenen Größen vorhersehen, zwischen welchen jene beiden Gesetze eine ganz genaue Beziehung festgestellt haben, die unzweifelhaft in Wirklichkeit besteht.

7. Diese Theorie hat zu der Entdeckung der Hertzschen elektrischen Strahlen geführt, deren Entstehung eine Theorie, die sich auf das Bild A stützt, nicht zu erklären vermag.

Ungeachtet aller Mängel des Bildes B haben wir das Recht, zu behaupten:

Das Bild B kommt der Wahrheit jedenfalls unvergleichlich näher als das Bild A.

§ 2. Leiter und Nichtleiter oder Dielektrika. Berührt man die Oberfläche irgend eines elektrisierten Körpers M mit einem anderen Körper N, so wird immer auch letzterer elektrisiert. Der Charakter der Erscheinung, welche hierbei auf dem Körper N auftritt, hängt von der Art dieses Körpers ab. In einigen Fällen beobachtet man eine Elektrisierung nur auf demjenigen Teile seiner Oberfläche, welcher in Berührung mit dem Körper M war; in anderen verteilt sie sich augenblicklich auf seiner gesamten Oberfläche. Der Stoff, aus welchem der Körper M besteht, wird in diesem zweiten Falle ein Leiter der Elektrizität genannt, im ersten Falle jedoch ein Nichtleiter oder ein Dielektrikum. Ist N ein Leiter, M dagegen ein Nichtleiter, so verringert sich die Elektrisierung auf dem Körper M nur an den Stellen, welche in Berührung mit dem Körper N gebracht sind; ist jedoch

auch M ein Leiter, so vermindert sich die Elektrisierung auf seiner ganzen Oberfläche. Zu den Leitern gehören die Metalle und ihre Legierungen, Kohle, geschmolzene Salze, Lösungen von Salzen und Säuren, der Körper des Menschen und der Tiere usw.: zu den Nichtleitern gehören: kaltes, trockenes Glas, trockenes Porzellan, Ebonit, Paraffin, Guttapercha, Schwefel, Phosphor, Selen, Glimmer usw. Ein Metalldraht, welcher die Körper M und N verbindet, kann als bester Überträger des elektrischen Zustandes dienen; wir werden in diesem Falle der Kürze halber einfach sagen, daß die Körper M und N miteinander verbunden sind.

Verbindet man einen elektrischen Körper, der für sich genommen ist, d. h. sich nicht in Gegenwart anderer elektrisierter Körper befindet, mit der Erde (erdet man ihn), so verschwindet seine Elektrisierung. Um die Elektrisierung eines Leiters aufrecht zu erhalten, muß man ihn mittels Nichtleiter von dem Erdboden abtrennen, jene Nichtleiter wirken dann als „Isolatoren"; vom Körper selbst sagt man in diesem Falle, er sei isoliert.

Es gibt Stoffe, welche dank ihrer Eigenschaften eine Mittelstellung zwischen den Leitern und den oben erwähnten Dielektrika einnehmen. Hierher gehören z. B. Holz, erhitztes Glas, Marmor, Papier u. a. Es gibt, wie es scheint, unter den festen und flüssigen Körpern keine absoluten Nichtleiter.

Die Leiter besitzen folgende zwei Haupteigenschaften, die sich indes, wie wir in der Folge sehen werden, im engsten Zusammenhange miteinander befinden: der elektrische Zustand der Leiter äußert sich nur an ihrer Oberfläche; im Inneren der Leiter ist die Intensität des elektrischen Feldes gleich Null, d. h. es existiert dort überhaupt kein Feld. Denken wir uns zwei hohle Körper, von denen der eine, M, aus einer leitenden Substanz, der andere, N, aus einem Dielektrikum bestehen möge. Eine alleinige Elektrisierung der Innenfläche, welche die Höhlung umschließt, ist nur beim Körper N möglich; führt man in das hohle Innere des Körpers M einen anderen elektrisierten Leiter m ein und bringt m zur Berührung mit der Innenfläche der Höhlung, so verschwindet der elektrische Zustand auf m und erscheint ausschließlich auf der Außenfläche des Körpers M. Wie stark auch der Leiter M elektrisiert sein mag, auf leichte, in die Höhlung eingeführte Körper wirken keinerlei Kräfte ein, bringt man aber in diese Höhlung den elektrisierten Körper m, so übt die Ladung, welche sich auf der Außenfläche des Körpers M befindet, keinerlei Wirkung auf den Körper m aus. Man kann verschiedene Versuche zur Bestätigung dessen anstellen, daß Leiter nur auf der Außenfläche elektrisiert werden. Aus der elementaren Physik ist der Versuch mit einem elektrisierten Körper O (Fig. 3) bekannt, dessen Elektrisierung verschwindet, wenn man ihn mit zwei zusammengehaltenen Halbkugeln A und B

umgibt, diese mit O zur Berührung bringt, die Berührung aufhebt und die Halbkugeln hierauf entfernt; ebenso bekannt ist der Versuch mit einer elektrisierten Hohlkugel, welche eine Öffnung besitzt; berührt man ihre Außenfläche mit einer kleinen Metallkugel, welche an einem Glasstabe befestigt ist (einem sog. Probescheibchen), so erweist sich dieses Kügelchen als elektrisiert, was jedoch nicht der Fall ist, wenn man das Probescheibchen in das Innere der Hohlkugel einführt und mit ihm die Innenfläche derselben berührt. Faraday hat einen Apparat konstruiert, welcher aus einem kegelförmigen Säckchen besteht (Fig. 4), das man mit Hilfe von Schnüren, die an seiner Spitze befestigt sind, umstülpen kann. Unter Anwendung eines Probescheibchens kann man zeigen, daß bei jeder der beiden Lagen des Säckchens nur die äußere Oberfläche elektrisiert ist, obgleich beim Umstülpen beide Oberflächen gewissermaßen ihre Rollen vertauschen. Sehr lehrreich ist auch folgender

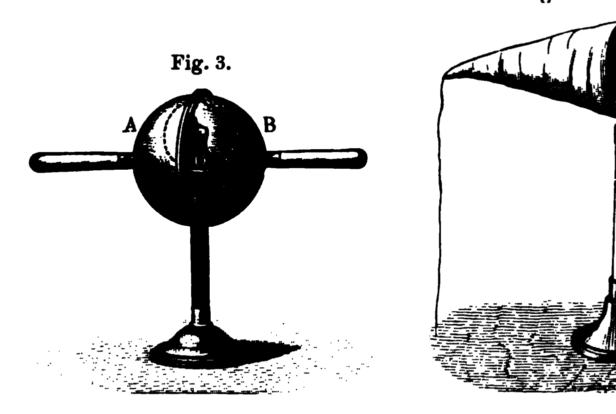


Fig. 3. Fig. 4.

Apparat: an einem Stück Metallgeflecht sind zu beiden Seiten Papierstreifen befestigt, das Metallnetz selbst ist mit zwei gläsernen Griffen versehen, mit deren Hilfe man ihm eine zylindrische Form geben kann, indem man es nach der einen oder anderen Seite ausbiegt, wobei ein und dieselbe Seite des Geflechtes bald zur Innen- bald zur Außenfläche eines Zylinders wird. Hierbei zeigt sich, daß die Papierstreifen immer nur von der Außenfläche abgestoßen werden.

Wir gehen zur Erklärung der in diesem Paragraphen betrachteten Erscheinungen über.

Bild A.

Die beiden Elektrizitäten besitzen in Leitern vollkommene Beweglichkeit, während sie in Dielektrika nicht ihren Ort verändern können. Ein Elektrizitätsteilchen, welches sich im Inneren der Masse irgend eines Leiters M befunden hätte, könnte nur dann in Ruhe sein, wenn es sich gar nicht unter der Einwirkung elektrischer Kräfte befunden

hätte. Außerdem hat man im Inneren eines Leiters eine „Mischung“ aus beiden Elektrizitäten, welche unter der Wirkung jeder elektrischen Kraft, wie klein auch diese Kraft sein mag, in ihre Bestandteile zerlegt wird. Hieraus folgt, daß elektrisches Gleichgewicht, d. h. Ruhe, nur dann in einem Leiter eintritt, wenn in allen Punkten des letzteren die Intensität F des elektrischen Feldes gleich Null ist. Wir werden später einen strengen Beweis dafür geben, daß das Gesetz der Wechselwirkung elektrisierter Körper und die Gleichheit $F = 0$ zu dem Schluß führen, daß das Vorhandensein von freier Elektrizität im Inneren eines Leiters M überhaupt unmöglich ist; diese Elektrizität muß sich auf der Oberfläche ansammeln. Die vollständige Beweglichkeit der Elektrizität zeigt, daß hierbei die Kraft f, welche auf jedes Elektrizitätsteilchen wirkt und von allen übrigen Elektrizitätsmengen ausgeht, die sich auf demselben Leiter M oder auf anderen benachbarten Leitern und Isolatoren befinden, senkrecht zur Oberfläche des Leiters M sein muß, da im entgegengesetzten Falle die tangentiale Komponente der Kraft f eine Bewegung des in Betracht gezogenen Teilchens längs der Oberfläche des Körpers M hervorrufen würde. Die Ladung, welche sich auf dem Leiter befindet, ruft im Außenraume ein gewisses elektrisches Feld hervor; aus dem Gesagten ist ersichtlich, daß die Kraftlinien dieses Außenfeldes normal zu der Leiteroberfläche verlaufen.

Die Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche von Leitern führt zur Vorstellung von Oberflächenmassen und einer Oberflächendichte, die wir mit k bezeichnen wollen; sie wird bei gleichmäßiger Verteilung der Elektrizität durch die Elektrizitätsmenge gemessen, welche sich auf der Oberflächeneinheit befindet; wenn sich auf einer Fläche s die Elektrizitätsmenge η befindet, so ist

$$k = \frac{\eta}{s} \quad \text{. . . . .} \quad (2)$$

Dieselbe Formel gibt bei ungleichmäßiger Verteilung die mittlere Dichte auf der Fläche s an. Befindet sich auf einem unendlich kleinen Flächenelemente Δs die unendlich kleine Elektrizitätsmenge $\Delta\eta$, so heißt der Grenzwert der mittleren Dichte die Dichte im gegebenen Punkte der Fläche: für sie ist

$$k = \lim \frac{\Delta\eta}{\Delta s} = \frac{d\eta}{ds} \quad \text{. . . . .} \quad (3)$$

also ist

$$d\eta = k\,ds \quad \text{. . . . .} \quad (4)$$

Die Gesamtladung η, welche sich auf der Oberfläche s des Leiters befindet, ist gleich

$$\eta = \iint k\,ds. \quad \text{. . . . .} \quad (5)$$

wo sich das Doppelintegral über die ganze Fläche hin erstreckt.

Die Frage nach der Verteilung der Elektrizität auf der Oberfläche eines Leiters wird weiter unten erörtert werden. Hier sei nur bemerkt, daß das Gesetz dieser Verteilung ausschließlich von der Form der Außenfläche des Leiters abhängt.

Die vollkommene Beweglichkeit der Elektrizität auf Leitern ermöglicht eine Teilung der Ladung in zwei gleiche Teile. Zu diesem Zwecke braucht man nur den Leiter M, auf welchem sich die Ladung η befindet, in Berührung mit einem anderen Leiter N zu bringen, welcher M an Größe und Form gleichkommt, und hierauf M und N wieder voneinander zu entfernen; auf jedem von ihnen wird sich dann offenbar die Ladung $\frac{\eta}{2}$ vorfinden.

Wirkt im Inneren eines Dielektrikums eine elektrische Kraft, so erfolgt in jedem Stoffteilchen eine Zerlegung der neutralen Mischung beider Elektrizitäten, welche sich jedoch nicht voneinander entfernen, so daß sie z. B. innerhalb jenes Teilchens verbleiben. Ein Dielektrikum, in welchem eine derartige innere Elektrisierung stattgefunden hat, heißt polarisiert. Clausius und Mossotti haben eine Theorie der elektrischen Erscheinungen in Dielektricis unter der Voraussetzung entwickelt, daß letztere aus Teilchen bestehen, welche die Elektrizität vollkommen leiten und voneinander durch eine absolut nichtleitende Substanz getrennt sind. Unter der Wirkung elektrischer Kräfte erfolgt Zerlegung der neutralen Mischung in jedem der leitenden Teilchen derart, daß sich auf dessen zwei Seiten die positive und negative Elektrizität ansammelt. Im Inneren von dielektrischen Substanzen kann der Annahme nach Elektrizität vorhanden sein, die ein gewisses Volumen erfüllt; dementsprechend führt man den Begriff einer Volumendichte der Elektrizität ein.

Bild B.

Die Leiter sind Stoffe, in deren Inneren Ätherdeformationen, welche dem erwähnten elektrostatischen, d. h. konstanten elektrischen Felde entsprechen, gar nicht vorkommen können. In dieser Beziehung enthalten die Bilder A und B gewisse Züge, die einander sozusagen entgegengesetzt sind. Das Bild A besagt, daß die Leiter diejenigen Stoffe sind, in welchen die betreffenden elektrischen Erscheinungen hauptsächlich vor sich gehen; das Bild B dagegen schreibt diese Rolle den dielektrischen Substanzen zu und rechnet die Leiter gewissermaßen zu Nichtleitern der elektrostatischen Spannungen. Die Spannungslinien und Spannungsröhren endigen an der Oberfläche eines Leiters. Von dieser Oberfläche können sich die Röhren nicht loslösen, aber ihre Enden besitzen volle Beweglichkeit längs der Leiteroberfläche, weshalb sich eine Röhre, in welcher eine Spannung herrscht,

nur dann in Ruhe befinden kann, wenn die an das Ende der Kraftröhre gezogene Tangente senkrecht zur Leiteroberfläche ist und wenn sich alle Seitendrucke, welche die gegebene Röhre von den benachbarten Röhren erleidet, gegenseitig das Gleichgewicht halten. Das Gleiten der Röhrenenden auf der Leiteroberfläche, also auch die Ortsveränderungen der Röhren im Raume, sind von vielen besonderen Erscheinungen begleitet, die wir fürs erste außer acht lassen wollen. Für uns bedeutet dieses Gleiten und diese Bewegung nur einen Übergang von einem aus irgend welchem Grunde gestörten Gleichtgewichte der Röhren, zu einem anderen, welches den veränderten Verhältnissen entspricht.

Fig. 5.



Durch ein Dielektrikum dringen die Spannungsröhren frei hindurch und bewegen sich in ihm frei nach allen Seiten: die Dielektrika, d. h. die Nichtleiter, sind also gewissermaßen Leiter für die Spannungsröhren. Stützt sich aber ein Röhrenende auf ein Dielektrikum, so besitzt es eine ganz geringe Beweglichkeit, so daß die Tangente an das Röhrenende im allgemeinen beliebige Winkel mit der Oberfläche des Dielektrikums bilden kann. Das Röhrenende kann sich an jedem Punkte und auch im Inneren des Dielektrikums befinden.

Fig. 6.

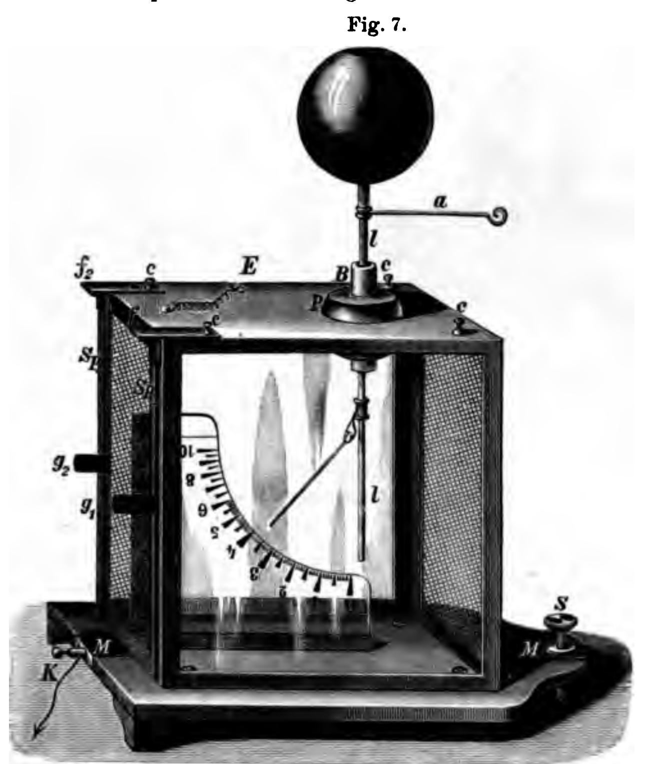


§ 3. Elektroskope; Quadrantenelektrometer; Isolatoren.

Elektroskope dienen dazu, zu erfahren, ob ein gegebener Körper elektrisiert ist, bisweilen auch dazu, das Vorzeichen der Elektrisierung zu bestimmen. Das einfachste Elektroskop besteht aus einem Glasgefäße von der Form einer Flasche, durch deren Hals ein Metallstab hindurchgeht, der am oberen Ende ein Metallkügelchen trägt; an seinem unteren Ende hängen zwei Streifen aus Papier, Blattgold oder zwei Strohhälmchen.

Berührt man das Kügelchen mit einem elektrisierten Körper, so geht ein Teil der Elektrizität durch den Stab nach unten auf die Blättchen über, die nun gleichnamig elektrisiert werden, einander abstoßen und, wie es die Fig. 5 zeigt, auseinander gehen. Statt des Kügelchens schraubt man bisweilen auf den Stab eine horizontale Metallplatte; mit der Bestimmung der letzteren werden wir uns weiter unten bekannt machen. Fig. 6 und 7 stellen von B. Kolbe (in Petersburg) konstruierte Elektroskope dar. Ihre Eigentümlichkeit besteht darin, daß

Fig. 7.

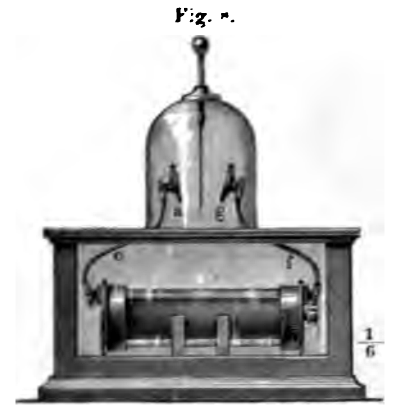


der Stab nach unten verlängert ist und unterhalb der Befestigungsstelle der Blättchen flache Form hat. Bei den in Fig. 6 abgebildeten Elektroskopen hängen zu beiden Seiten des Stabes zwei Papierstreifen, die vom Stabe selbst abgestoßen werden. Bei dem zweiten Apparate (Fig. 7) hängt an dem Stabe nur ein Blättchen aus Aluminium, eine Skala und ein Spiegel dienen zur bequemen Messung des Winkels, um welchen jenes Blättchen abgelenkt wird.

In Fig. 8 (a. f. S.) ist das Fechnersche Elektroskop mit einigem Zubehör dargestellt, dessen Bestimmung wir später kennen lernen werden. Dieser Apparat besteht aus einer sogenannten Trockensäule *cf*,

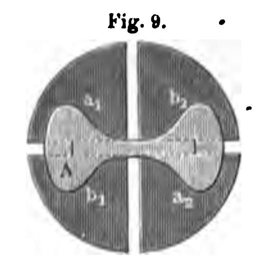
deren Enden mit zwei kleinen Metallplättchen *a* und *g* in Verbindung stehen. Wie wir später sehen werden, sind die Enden einer solchen Säule, also auch jene Plättchen, beständig elektrisiert und zwar ungleichnamig. An einem in die Glasglocke hineinragenden Stäbchen ist ein Blattgoldstreifen aufgehängt. Bringt man den zu prüfenden Körper zur Berührung mit dem oben befindlichen Kügelchen, so zeigt eine Ablenkung des Goldblättchens nach der einen oder anderen Seite nicht nur das Vorhandensein von Elektrizität an, sondern läßt auch deren Vorzeichen erkennen. Verschiedene Formen der beschriebenen Elektroskope stammen von Cavallo, Saussure, Gaugain, Péclet. Bohnenberger hat ein Elektroskop mit zwei vertikalen Trockensäulen konstruiert, zwischen deren oberen Enden ein Goldblättchen hängt. Die Bewegungsrichtung des Blättchens im Fechnerschen und Bohnenbergerschen Elektroskope zeigt das Vorzeichen der Elektrisierung des Blättchens an.

Fig. 8.



Die Methoden zur Messung der verschiedenen Größen, denen wir in der Lehre vom elektrischen Felde begegnen, sowie die hierbei gebräuchlichen Apparate, werden wir in einem besonderen Kapitel behandeln. An dieser Stelle wollen wir uns in Kürze mit der Einrichtung nur eines derartigen Apparates, des Quadrantenelektrometers von W. Thomson (Lord Kelvin) bekannt machen. Dieser Apparat kann nicht nur als sehr empfindliches Elektroskop, sondern auch zum Vergleichen des Grades der Elektrisierung verschiedener Körper dienen. Die Theorie dieses Apparates wird später ausführlich gegeben werden. Hier wollen wir uns auf eine kurze Beschreibung beschränken.

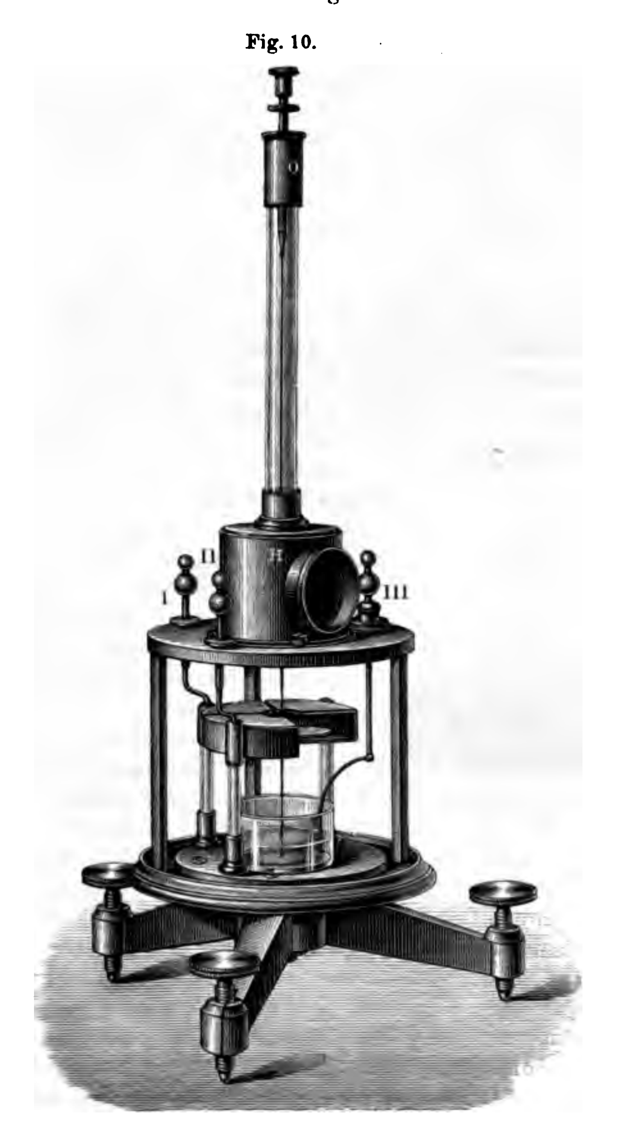
Fig. 9.



Die Hauptbestandteile des Apparates sind vier Quadranten und eine Nadel. Die Quadranten sind horizontal befestigte, in geringem Abstande voneinander befindliche Viertel einer runden Scheibe $a_1 a_2 b_1 b_2$ (Fig. 9); meist treten an ihre Stelle vier Teile einer zylindrischen, allseitig geschlossenen Dose. In Fig. 10 ist ein Elektrometer mit Quadranten der letztgenannten Form abgebildet, wobei einer der Quadranten der Deutlichkeit halber fortgelassen ist. Über den Quadranten oder innerhalb derselben schwebt die sog. Nadel; es ist das ein biskuitförmiges dünnes Aluminiumblättchen. Die einander gegenüberliegenden Quadranten, d. h. a_1 und a_2, b_1 und b_2 (Fig. 9) sind

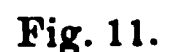
miteinander verbunden. In der normalen Ruhelage liegt die Nadelachse symmetrisch zu den Quadranten, wie es die Fig. 9 zeigt. Auf weitere Einzelheiten wollen wir hier nicht eingehen, um so mehr als die Ein-

Fig. 10.



richtung dieses Apparates in den Details sehr verschieden zu sein pflegt. Hinweisen wollen wir nur darauf, daß man mit Hilfe dreier Klemmschrauben (I, II und III in Fig. 10) je zwei Paar Quadranten und die

Nadel mit verschiedenen Körpern und Elektrizitätsquellen verbinden kann. Denken wir uns z. B. es würden die Quadranten a_1 und a_2 bei einer gewissen konstanten positiven Elektrisierung erhalten, die Quadranten b_1 und b_2 bei einer negativen. Verbindet man dann die Nadel mit einem Körper, dessen Elektrisierung festgestellt werden soll, so dreht sich die Nadel nach der Seite derjenigen Quadranten hin, deren Elektrisierung entgegengesetzt ist der des untersuchten Körpers. Ist letztere z. B. positiv, so wird die Nadel von den Quadranten a_1 und a_2 abgestoßen, von den Quadranten b_1 und b_2 angezogen; die Nadel wird sich daher, von oben gesehen, gegen den Uhrzeiger drehen. Die Größe der Drehung wird mittels Fernrohr und Skala bestimmt, wozu ein kleines, mit der Nadel verbundenes Spiegelchen dient. Man kann auch andere Kombinationen an dem Apparate herstellen. So kann man z. B. die Nadel bei konstanter Elektrisierung erhalten, den zu untersuchenden Körper aber mit den Quadranten verbinden, oder die Nadel und ein Quadrantenpaar untereinander verbinden und elektrisieren, den Körper aber mit dem anderen Quadrantenpaar verbinden.


Fig. 11.



Zur Isolation elektrisierter Leiter verwendet man gegenwärtig hauptsächlich Glas, Ebonit, Paraffin, Bernstein, Schwefel und Quarz, indem man aus diesen Substanzen die Träger herstellt, welche die Leiter halten sollen. Alle diese Substanzen hören jedoch auf isolierend zu wirken, wenn ihre Oberfläche stark bestäubt ist und besonders, wenn sie nicht ganz trocken ist. In Fig. 11 ist der Mascartsche Isolierer abgebildet; er besteht aus einer Glasflasche, an deren Boden ein Glasstab angeschmolzen ist; letzterer trägt den Teller, auf den man die zu isolierenden Gegenstände bringt. In die Flasche wird konzentrierte Schwefelsäure gegossen, hierdurch werden der untere Teil des Glasstabes und die Innenfläche der Glasflasche trocken gehalten, wodurch sie zu vortrefflichen Isolatoren werden.

§ 4. Das Coulombsche Gesetz und Folgerungen aus demselben. Coulomb hat 1785 gezeigt, daß die Wechselwirkung zweier elektrisierter Körper indirekt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung ist; dieses Gesetz ist um so genauer erfüllt, je kleiner die Dimensionen der Körper im Vergleich zu ihrem gegenseitigen Abstande sind. Im Grenzfalle ist es für jede Körperform gültig. Die Wechselwirkung zweier elektrisierter Körper, deren

Dimensionen im Verhältnisse zu ihrem Abstande nicht gering sind, erhält man vollkommen genau, wenn man sich die Körper in unzählige kleine Elemente geteilt denkt (für Leiter genügt es, deren Oberfläche in solche Elemente zu teilen) und die Annahme macht, daß jedes elektrisierte Element eines Körpers, je nach dem Zeichen der Elektrisierung, jedes elektrisierte Element des anderen Körpers anzieht oder abstößt; diese Wechselwirkungen der Elemente ändern sich streng indirekt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung r. Macht man die Elektrisierung eines Leiters zweimal kleiner, indem man verfährt, wie auf S. 33 angegeben wurde, so wird seine Wirkung auf einen anderen elektrisierten Körper ebenfalls zweimal kleiner.

Da wir uns vorläufig nur mit den grundlegenden Erscheinungen bekannt zu machen haben, verlegen wir die Beschreibung der Versuche, durch welche die Richtigkeit beider Teile obigen Gesetzes erwiesen werden kann, in das dritte Kapitel, das von der Wirkung des elektrischen Feldes auf die Körper handelt; zu diesen Wirkungen gehören auch die Erscheinungen, die man bei der experimentellen Prüfung des Coulombschen Gesetzes zu beachten hat.

Die Erfahrung lehrt, daß die Kraft f der Wechselwirkung zwischen zwei gegebenen elektrisierten Körpern von dem Medium abhängig ist, welches diese Körper umgibt. Zum Vergleiche wählt man diejenige Kraft f_0, welche in dem Falle wirkt, daß die Körper von Luft umgeben sind. Es wäre rationeller, von der Kraft auszugehen, welche nicht der Luft, sondern dem Vakuum entspricht; jedoch ist der Unterschied zwischen dieser Kraft und f_0 sehr gering und man verfährt hier, wie man beim Vergleiche der Ausbreitungsgeschwindigkeiten der strahlenden Energie in verschiedenen Medien verfuhr, nämlich beim Vergleiche der Brechungsquotienten, die man für Luft, nicht für das Vakuum, gleich Eins setzt, obgleich das letztere richtiger wäre. Die Versuche lehren, daß die Kraft f im allgemeinen kleiner ist, als die Kraft f_0; das Verhältnis $f_0 : f$ bezeichnet man mit K, so daß

$$f = \frac{f_0}{K} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

ist. Von besonderer Wichtigkeit ist der Umstand, daß Formel (6) sich nur auf den Fall bezieht, wo beide elektrisierten Körper sich innerhalb desselben Mediums befinden. Ist das Medium nicht homogen, so verliert die Formel (6) ihre Gültigkeit.

Der Koeffizient K ist für das gegebene Medium, d. h. für die Substanz, welche den Raum rings um die elektrisierten Körper erfüllt, charakteristisch. Er heißt die Dielektrizitätskonstante oder das Induktionsvermögen dieser Substanz. Im zweiten Bande gaben wir eine andere Definition dieser Größe (Bd. II), wir werden aber

weiter unten sehen, daß sie aus der Definition folgt, die wir soeben gegeben haben. Selbstverständlich müssen die Substanzen, von denen hier die Rede ist, zu den Nichtleitern der Elektrizität, d. h. zu den Dielektrika gehören. Die Größe K ist dieselbe, für welche die Maxwellsche Theorie zu dem Ergebnis führt, daß für Dielektrika, welche keine magnetischen Eigenschaften besitzen, die Relation

$$K = n^2 \quad \text{. . . . .} \quad (7)$$

besteht, wo n der Grenzwert des Brechungsquotienten für strahlende Energie von sehr großer Wellenlänge ist.

Bild A.

Das Coulombsche Gesetz lautet wie folgt: Die Kraft f der Wechselwirkung zweier Elektrizitätsmengen η und η_1, die sich in zwei Punkten befinden, ist direkt proportional jeder der beiden Mengen η und η_1 und indirekt proportional dem Quadrate des Abstandes r dieser beiden Punkte.

Nimmt man an, daß die Elektrizitätsmenge, die sich auf einem gegebenen Körper befindet, etwas in Wirklichkeit Existierendes ist, so muß man zugleich annehmen, daß sich die Elektrizitätsmenge nicht ändert, wenn man den elektrischen Körper in irgend ein Medium einführt.

Das Coulombsche Gesetz wird für Luft durch die Formel

$$f_0 = C\frac{\eta\eta_1}{r^2} \quad \text{. . . . .} \quad (8)$$

ausgedrückt, wo C ein Proportionalitätsfaktor ist, der, wie immer, von der Wahl der Einheiten für die Größen abhängt, welche in der Formel vorkommen (Bd. I). Auf Grund dessen, was soeben von der Unabhängigkeit der Elektrizitätsmengen η und η_1 vom Medium gesagt wurde, erhält man für ein beliebiges homogenes Medium, vgl. (6),

$$f = \frac{C}{K}\cdot\frac{\eta\eta_1}{r^2} \quad \text{. . . . .} \quad (9)$$

Die Formeln (8) und (9) drücken alle drei möglichen Fälle der Wechselwirkung positiver und negativer Elektrizitäten aus, wenn wir übereinkommen, die abstoßenden Kräfte positiv, die anziehenden negativ zu rechnen und wenn wir den Zahlenwerten von η und η_1 die richtigen Vorzeichen geben (vergleiche S. 23). In der Tat ist für den Fall, daß η und η_1 beide positiv oder beide negativ sind, f positiv, d. h. die Kraft eine abstoßende, während bei ungleichen Vorzeichen von η und η_1 die Kraft f negativ ist, also einer Anziehung entspricht.

Wir werden in der Folge sehen, daß man in der Lehre von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen drei Arten von Gesetzen

zu unterscheiden hat, nämlich: Punktgesetze, Differentialgesetze und Integralgesetze. Das Coulombsche Gesetz stellt beispielsweise ein Punktgesetz dar. Wir wollen hier noch das Webersche Gesetz im Hinblick auf seine historische Bedeutung erwähnen. W. Weber machte die Annahme, daß das Coulombsche Gesetz sich nur auf den Fall bezieht, daß die Elektrizitäten η und η_1 in Ruhe sind oder daß überhaupt ihr Abstand r eine konstante Größe ist. Befinden sich die Elektrizitäten in Bewegung, wobei r sich ändert, so hängt ihre Wechselwirkung von ihrer relativen Bewegung, d. h. von der Form der Funktion $r = \varphi(t)$ ab, in welcher t die Zeit bedeutet. Die Webersche Formel hat folgende Gestalt

$$f = C\,\frac{\eta\eta_1}{r^2}\left\{1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2a^2 r\,\frac{d^2 r}{dt^2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (9, a)$$

Ist $r = const$, so geht sie in die Formel (8) über. Die Webersche Formel geht offenbar auf die Annahme einer Fernwirkung zurück.

Setzt man in den Formeln (8) und (9) $C = 1$, so führt man hierdurch eine absolute Einheit für die Elektrizitätsmenge ein (Bd. I). Wie wir später sehen werden, kann man zwei verschiedene Systeme von absoluten Einheiten für die elektrischen und magnetischen Größen aufstellen; das eine von ihnen wird das elektrostatische (el.-st.), das andere das elektromagnetische (el.-mg.) genannt. Auf das erstere von ihnen bezieht sich diejenige Einheit der Elektrizitätsmenge, die man aus den Formeln (8) und (9) erhält, wenn man $C = 1$ setzt, d. h. wenn man schreibt

$$f_0 = \frac{\eta\eta_1}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$f = \frac{1}{K} \cdot \frac{\eta\eta_1}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Die erste Formel gibt $f_0 = 1$ für $\eta = 1$, $\eta_1 = 1$ und $r = 1$: hieraus folgt, daß die el.-st. Einheit der Elektrizitätsmenge diejenige Elektrizitätsmenge ist, welche auf eine ihr gleiche in der Einheit der Entfernung befindiche innerhalb der Luft mit einer Kraft einwirkt, die gleich der Einheit ist. Als besonderen Fall erhält man im C. G. S.-System (Bd. I):

Die el.-st. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge wirkt in Luft auf eine ihr gleiche Elektrizitätsmenge, welche sich im Abstande eines Centimeters von ihr befindet, mit einer Kraft von einer Dyne (etwa 1,02 mg) ein. Es ist, im gewöhnlichen Sinne, eine kleine Elektrizitätsmenge. In der Praxis wird eine andere Einheit gebraucht, die man die praktische Elektrizitätseinheit nennen könnte; sie heißt Coulomb. Ein Coulomb ist gleich einem Zehntel der elekromagnetischen (el.-mg.) C. G. S.-Einheit, mit der wir uns später

bekannt machen wollen. Ein Milliontel eines Coulomb heißt Mikrocoulomb. Wir wollen uns vorläufig auf folgende Definitionen beschränken:

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ el.-mg. C. G. S.-Einheit der El.-Menge} &= 3 \cdot 10^{10} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten der El.-Menge} \\ 1 \text{ Coulomb} &= 3 \cdot 10^{9} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten der El.-Menge} \\ 1 \text{ Mikrocoulomb} &= 3 \cdot 10^{3} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten der El.-Menge} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Wie man durch leichte Rechnung findet, wirken zwei Coulombs Elektrizität, die sich in einem Kilometer Entfernung voneinander befinden, anziehend oder abstoßend aufeinander mit einer Kraft von 918 kg; zwei Mikrocoulombs wirken in einem Decimeter Entfernung aufeinander mit einer Kraft von 91,8 g.

In Bd. I lernten wir Formeln kennen, welche die Dimension der absoluten Einheiten angaben, d. h. ihre Abhängigkeit von den Grundeinheiten der Länge L, Masse M und Zeit T ausdrückten. Während wir dort in den Dimensionsformeln bloß die großen Buchstaben des Alphabets anwandten, werden wir jetzt dieselben Buchstaben gebrauchen, mit denen wir die Zahlenwerte der Größen selbst bezeichnen; so soll z. B. die Dimension der Einheit der Elektrizitätsmenge mit $[\eta]$ bezeichnet werden.

Nimmt man an, daß K eine unbenannte Zahl ist, so erhält man, da $[f] = ML : T^2$ (Bd. I) ist, auf Grund der Formel (11)

$$\frac{ML}{T^2} = \frac{[\eta][\eta]}{L^2};$$

und somit

$$[\eta] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Nimmt man dagegen an, daß K eine physikalische Größe ist, deren Dimension uns noch vorläufig unbekannt ist, so erhält man anstatt (13) die Relation

$$[\eta] = [K]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13, a)$$

Auf S. 32 lernten wir den Begriff der Oberflächendichte der Elektrizität kennen: die el.-st. C. G. S.-Einheit der Oberflächendichte wird erhalten, wenn auf 1 qcm je eine el.-st. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge kommt oder 1 Mikrocoulomb auf 30 qdcm.

Formel (2) liefert die Dimension der Oberflächendichte

$$[k] = \frac{[\eta]}{[s]} = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{L^2} = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad (14)$$

Wie man leicht einsieht, hat k^2 die Dimension eines Druckes oder Zuges, d. h. einer Größe $f : s$, wo f die Kraft ist, die auf die Fläche s einwirkt.

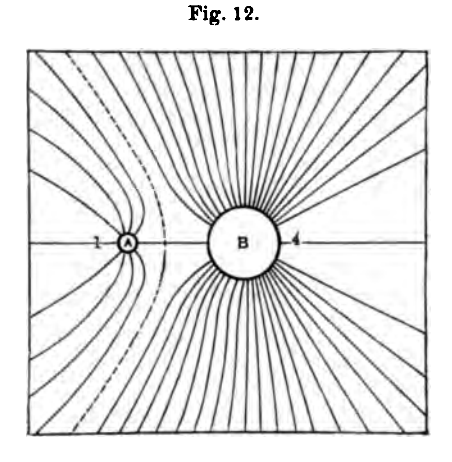
Die absolute el.-st. Einheit der Intensität des elektrischen Feldes ist in einem Punkte vorhanden, in welchem auf die el.-st. Einheit der Elektrizitätsmenge die absolute Krafteinheit wirkt.

Die C. G. S.-Einheit der Intensität des elektrischen Feldes ist in einem Punkte vorhanden, in welchem auf die C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge eine Kraft wirkt, welche gleich einer Dyne ist. Formel (1) auf S. 23 liefert die Dimension der el.-st. Einheit der Intensität des elektrischen Feldes:

$$[F] = \frac{[f]}{[\eta]} = \frac{M L T^{-2}}{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Formeln (14) und (15) zeigen uns, daß die Einheiten der Feldintensität und der Oberflächendichte die gleichen Dimensionen haben.

Fig. 12.



Das Coulombsche Gesetz erinnert seiner Formulierung gemäß sehr an das allgemeine Gravitationsgesetz (Bd. I). Deshalb ist die Anordnung der Kraftlinien im Falle von elektrischen Massen ungleichen Vorzeichens die gleiche, wie im Falle ponderabler Materie, bei analoger Verteilung in beiden Fällen. In Fig. 2 auf S. 28 waren die Kraftlinien für den Fall dargestellt, daß zwei gleiche, gleichnamig elektrisierte Massen vorliegen; Fig. 12 zeigt das Gleiche für den Fall, daß in B viermal mehr Elektrizität vorhanden ist, als in A.

Wir wenden uns jetzt der Herleitung verschiedener Folgerungen aus dem Coulombschen Gesetze zu, wobei wir das Bild A festhalten, d. h. die Elektrizitäten als besondere Stoffarten betrachten.

Stellen wir uns in irgend einem elektrischen Felde eine gewisse geometrische Fläche s (Fig. 13 a. f. S.) vor, die wir in Elemente ds zerlegen. Es sei F die elektrische Kraft (Feldintensität, s. S. 23) an der Stelle, wo sich ds befindet: mit anderen Worten heißt das: BF ist die Tangente in B an die durch B gehende Kraftlinie. Es möge ferner BN senkrecht auf ds stehen, F_n die senkrechte Komponente der Kraft F bedeuten. Die Größe $F_n ds$ heißt dann der Kraftfluß oder die Kraftströmung, welche durch ds hindurchgeht; die Größe $KF_n ds$ aber, wo K die Dielektrizitätskonstante des Mediums an der Stelle bedeutet, an welcher

bekannt machen wollen. Ein Milliontel eines Coulomb heißt Mikrocoulomb. Wir wollen uns vorläufig auf folgende Definitionen beschränken:

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ el.-mg. C. G. S.-Einheit der El.-Menge} &= 3 \,.\, 10^{10} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten der El.-Menge} \\ 1 \text{ Coulomb} &= 3 \,.\, 10^{9} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten der El.-Menge} \\ 1 \text{ Mikrocoulomb} &= 3 \,.\, 10^{3} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten der El.-Menge} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Wie man durch leichte Rechnung findet, wirken zwei Coulombs Elektrizität, die sich in einem Kilometer Entfernung voneinander befinden, anziehend oder abstoßend aufeinander mit einer Kraft von 918 kg; zwei Mikrocoulombs wirken in einem Decimeter Entfernung aufeinander mit einer Kraft von 91,8 g.

In Bd. I lernten wir Formeln kennen, welche die Dimension der absoluten Einheiten angaben, d. h. ihre Abhängigkeit von den Grundeinheiten der Länge L, Masse M und Zeit T ausdrückten. Während wir dort in den Dimensionsformeln bloß die großen Buchstaben des Alphabets anwandten, werden wir jetzt dieselben Buchstaben gebrauchen, mit denen wir die Zahlenwerte der Größen selbst bezeichnen; so soll z. B. die Dimension der Einheit der Elektrizitätsmenge mit $[\eta]$ bezeichnet werden.

Nimmt man an, daß K eine unbenannte Zahl ist, so erhält man, da $[f] = ML : T^2$ (Bd. I) ist, auf Grund der Formel (11)

$$\frac{ML}{T^2} = \frac{[\eta][\eta]}{L^2};$$

und somit

$$[\eta] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Nimmt man dagegen an, daß K eine physikalische Größe ist, deren Dimension uns noch vorläufig unbekannt ist, so erhält man anstatt (13) die Relation

$$[\eta] = [K]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13, a)$$

Auf S. 32 lernten wir den Begriff der Oberflächendichte der Elektrizität kennen: die el.-st. C. G. S.-Einheit der Oberflächendichte wird erhalten, wenn auf 1 qcm je eine el.-st. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge kommt oder 1 Mikrocoulomb auf 30 qdcm.

Formel (2) liefert die Dimension der Oberflächendichte

$$[k] = \frac{[\eta]}{[s]} = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{L^2} = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad (14)$$

Wie man leicht einsieht, hat k^2 die Dimension eines **Druckes oder** Zuges, d. h. einer Größe $f : s$, wo f die Kraft ist, die **auf die Fläche** s einwirkt.

Die absolute el.-st. Einheit der Intensität des elektrischen Feldes ist in einem Punkte vorhanden, in welchem auf die el.-st. Einheit der Elektrizitätsmenge die absolute Krafteinheit wirkt.

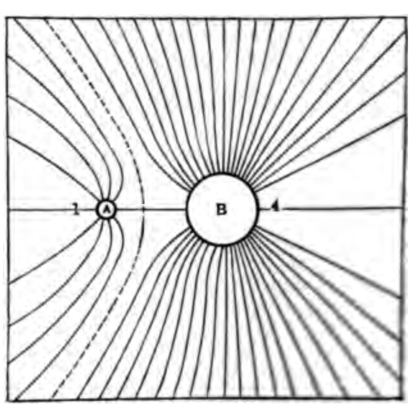
Die C.G.S.-Einheit der Intensität des elektrischen Feldes ist in einem Punkte vorhanden, in welchem auf die C.G.S.-Einheit der Elektrizitätsmenge eine Kraft wirkt, welche gleich einer Dyne ist. Formel (1) auf S. 23 liefert die Dimension der el.-st. Einheit der Intensität des elektrischen Feldes:

$$[F] = \frac{[f]}{[\eta]} = \frac{MLT^{-2}}{M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}} = M^{\frac{1}{2}}L^{-\frac{1}{2}}T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Formeln (14) und (15) zeigen uns, daß die Einheiten der Feldintensität und der Oberflächendichte die gleichen Dimensionen haben.

Das Coulombsche Gesetz erinnert seiner Formulierung gemäß sehr an das allgemeine Gravitationsgesetz (Bd. I). Deshalb ist die Anordnung der Kraftlinien im Falle von elektrischen Massen ungleichen Vorzeichens die gleiche, wie im Falle ponderabler Materie, bei analoger Verteilung in beiden Fällen. In Fig. 2 auf S. 28 waren die Kraftlinien für den Fall dargestellt, daß zwei gleiche, gleichnamig elektrisierte Massen vorliegen; Fig. 12 zeigt das Gleiche für den Fall, daß in B viermal mehr Elektrizität vorhanden ist, als in A.

Fig. 12.



Wir wenden uns jetzt der Herleitung verschiedener Folgerungen aus dem Coulombschen Gesetze zu, wobei wir das Bild A festhalten, d. h. die Elektrizitäten als besondere Stoffarten betrachten.

Stellen wir uns in irgend einem elektrischen Felde eine gewisse geometrische Fläche s (Fig. 13 a. f. S.) vor, die wir in Elemente ds zerlegen. Es sei F die elektrische Kraft (Feldintensität, s. S. 23) an der Stelle, wo sich ds befindet: mit anderen Worten heißt das: BF ist die Tangente in B an die durch B gehende Kraftlinie. Es möge ferner BN senkrecht auf ds stehen, F_n die senkrechte Komponente der Kraft F bedeuten. Die Größe $F_n ds$ heißt dann der Kraftfluß oder die Kraftströmung, welche durch ds hindurchgeht; die Größe $KF_n ds$ aber, [illegible] K die Dielektrizitätskonstante des Mediums an der Stelle bedeutet, [illegible]

sich ds befindet, hat die sehr unglücklich gewählte Benennung Strömung der elektrischen Induktion, welche durch ds hindurchgeht, erhalten. Der Kürze halber werden wir einfach von einem Induktionsflusse sprechen. Bildet man die Summe der Größen $F_n ds$ oder $KF_n ds$ für alle Oberflächenelemente, so erhält man für den Kraftfluß Φ durch die Fläche s

$$\Phi = \iint F_n ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und für den Induktionsfluß Ψ durch die Fläche s

$$\Psi = \iint KF_n ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16,a)$$

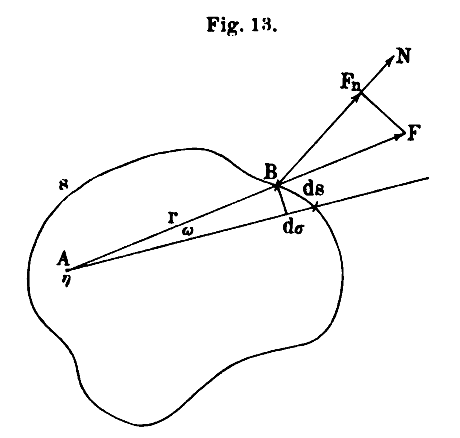
Im homogenen Medium ist offenbar

$$\Psi = K\Phi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16,b)$$

In Luft ist $\Phi = \Psi$, d. h. der Induktionsfluß ist gleich dem Kraftfluß, da in Luft $K = 1$ ist.

Nehmen wir an, das elektrische Feld sei durch irgend welche elektrische Massen hervorgerufen, die wir uns in kleinste Teilchen zerlegt denken. Wir können dann folgenden Satz beweisen:

Fig. 13.



Jeder der Flüsse Φ und Ψ ist gleich der algebraischen Summe der Flüsse, welche man von den einzelnen Elektrizitätsteilchen erhält. Es seien Φ und Ψ Flüsse, welche man erhielte, wenn es nur ein einziges $i$tes Teilchen gäbe und sei hierbei F_i die Kraft im Punkte B (Fig. 13) und $F_{n,i}$ die senkrechte Komponente dieser Kraft. Offenbar ist F die Resultante aller Kräfte F_i. Es ist aber in diesem Falle $F_n = \Sigma F_{n,i}$, falls Σ das Zeichen für eine gewöhnliche algebraische Summe bedeutet; man hat somit

$$\Psi = \iint KF_n ds = \iint (\Sigma KF_{n,i})\, ds = \Sigma \iint KF_{n,i} ds = \Sigma \Psi_i \quad (16,c)$$

Ebenso läßt sich leicht beweisen, daß

$$\Phi = \Sigma \Phi_i$$

ist. Der bewiesene Satz führt die allgemeine Aufgabe der Berechnung von Flüssen auf den besonderen Fall zurück, daß eine gewisse Elektrizitätsmenge η in einem Punkte konzentriert ist, der sich innerhalb,

außerhalb oder auf der in Betracht gezogenen Oberfläche s befinden kann. Beginnen wir mit dem Falle, wo η sich im Inneren der Oberfläche s, z. B. im Punkte A (Fig. 13) befindet. Es sei $AB = r$ die Entfernung zwischen η und ds, ferner $d\omega$ der Raumwinkel, unter welchem das Element ds von A aus erscheint, $d\sigma$ das Flächenelement, welches durch den Raumwinkel $d\omega$ aus der Oberfläche der mit dem Radius r um den Punkt A als Zentrum beschriebenen Kugel herausgeschnitten wird. In diesem Falle ist offenbar $d\sigma = r^2 d\omega$; ferner sind die Winkel $\angle (F, F_n)$ und $\angle (ds, d\sigma)$ einander gleich, da $F \perp d\sigma$ und $F_n \perp ds$ ist. Die Intensität des Feldes F wird durch die Kraft bestimmt, mit welcher η, das sich in A befindet, auf die Einheit der Elektrizitätsmenge in B einwirkt; es folgt daher aus Formel (11), da $\eta_1 = 1$ ist

$$F = \frac{\eta}{K r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man den Kraftfluß berechnen, welcher durch die Fläche s im Falle eines homogenen Feldes dringt, da nur auf letzteres die Formel (17), wie wir gesehen haben, anwendbar ist. Es ist

$$\Phi = \iint F_n ds = \iint F \cos(F, F_n)\, ds = \iint \frac{\eta}{K r^2} \cos(ds, d\sigma)\, ds$$
$$= \frac{\eta}{K} \iint \frac{d\sigma}{r^2} = \frac{\eta}{K} \iint d\omega.$$

Befindet sich der Punkt A innerhalb der Fläche s, so ist das letzte Integral gleich 4π, so daß

$$\Phi = \frac{4\pi\eta}{K} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

wird.

Der Induktionsfluß Ψ im homogenen Medium ist $\Psi = K\Phi$, siehe (16, b), d. h.

$$\Psi = 4\pi\eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18, a)$$

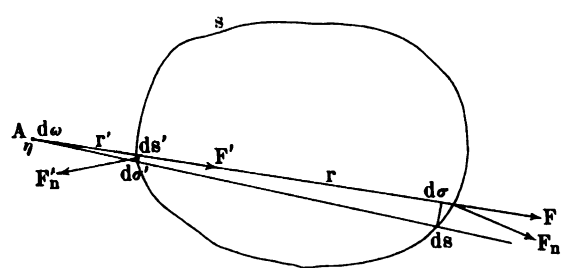
Nehmen wir jetzt an, es befinde sich η auf der Fläche selbst; in diesem Falle bleibt die obige Berechnung richtig, doch wird das letzte Integral, das die Summe der Raumwinkel, unter welchen die Elemente der Fläche s vom Punkte A aus erscheinen, gleich der Summe der Winkel, welche auf einer Seite der Tangentialebene liegen, d. h. es wird gleich 2π. Demgemäß ist, wenn η auf der Fläche s liegt, im homogenen Medium

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \frac{2\pi\eta}{K} \\ \Psi &= 2\pi\eta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18, b)$$

Man nimmt hierbei an, daß im Punkte A eine bestimmte Tangentialebene vorhanden ist.

Endlich möge angenommen werden, daß Punkt A außerhalb der Fläche s liege. Zur Berechnung von Φ benutzen wir die beiden Elemente des Integrals (16, a), welche ein und demselben Raumwinkel $d\omega$ entsprechen, der vom Punkte A ausgeht und aus der Fläche s zwei Elemente ds und ds' herausschneidet; $d\sigma$, r, F und F_n behalten ihre frühere Bedeutung. Die entsprechenden Größen für ds' wollen wir

Fig. 14.



mit $d\sigma'$, F', F'_n und r' bezeichnen; hier ist $\cos(F', F'_n) = -\cos(ds', d\sigma')$, da der erste von diesen Winkeln stumpf, der letztere spitz ist. Die beiden Elemente des Integrals (16, a) sind

$$F_n ds + F'_n ds' = F\cos(F, F_n)ds + F'\cos(F', F'_n)ds'$$
$$= F\cos(ds, d\sigma)ds - F'\cos(ds', d\sigma')ds'$$
$$= \frac{\eta}{Kr^2}d\sigma - \frac{\eta}{K(r')^2}d\sigma' = \frac{\eta d\omega}{K} - \frac{\eta d\omega}{K} = 0.$$

Sämtliche Elemente des Integrals (16, a) können in solche Paare zusammengefaßt werden, deren Summe gleich Null ist. Hieraus folgt für den Fall, daß η außerhalb der Fläche s liegt und der Fluß im homogenen Medium erfolgt,

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= 0\\ \Psi &= 0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18, c)$$

Der oben bewiesene, durch Formel (16, b) ausgesprochene Lehrsatz setzt uns in den Stand, Ψ und Φ für eine beliebige Verteilung irgend welcher elektrischer Massen im homogenen Medium zu bestimmen. Zunächst ist klar, daß die Formeln (18, a), (18, b) und (18, c) zu Recht bestehen bleiben, wenn η irgendwelche Massen repräsentiert, die nur innerhalb oder nur auf oder nur außerhalb der Fläche s sich befinden. Setzen wir im allgemeinsten Falle $\eta = \eta_i + \bar{\eta} + \eta_e$, wo η_i die gesamte Elektrizitätsmenge innerhalb s, $\bar{\eta}$ auf s und η_e außerhalb der Fläche s bedeutet. Unter Anwendung des erwähnten Lehrsatzes erhalten wir dann auf Grund der Formeln (18, a) (18, b) und (18, c) für ein homogenes Medium

$$\left.\begin{aligned}\Phi &= \iint F_n\,ds = \frac{4\pi\eta_i}{K} + \frac{2\pi\bar{\eta}}{K}\\ \Psi &= \iint KF_n\,ds = 4\pi\eta_i + 2\pi\bar{\eta}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

In Luft erhält man

$$\Phi = \Psi = 4\pi\eta_i + 2\pi\bar{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19, a)$$

Diese Formel wird gewöhnlich die Gaußsche Formel genannt. Man kann leicht beweisen, daß sie auch in dem Falle ihre Geltung behält, daß der vom inneren Punkte ausgehende Raumwinkel die Fläche mehr als einmal schneidet oder ganz allgemein, wenn die Zahl der Schnitte ungerade ist; ebenso gilt die Formel auch, wenn der vom außen gelegenen Punkte ausgehende Winkel mehr als zweimal die Fläche schneidet oder allgemein, wenn die Zahl der Schnitte gerade ist.

Die von uns berechneten Ausdrücke für die Flüsse Φ und Ψ beziehen sich nur auf den Fall eines homogenen Mediums, da wir uns bei der Berechnung der Formel (17) bedient hatten, deren Richtigkeit experimentell nur für ein Medium erwiesen worden ist, welches überall denselben Wert für K hat.

Auf inhomogene Medien ist Formel (17) nicht anwendbar und wir werden später sehen, daß man eine Bestimmung der Kraft F, welche im inhomogenen Medium wirkt, nur auf komplizierten Wegen erreichen kann. Der Ausdruck (19) lehrt jedoch, daß der Induktionsfluß Ψ, d. h. die Größe (16, a), von der Art des umgebenden homogenen Mediums, also von K nicht abhängt, sondern allein durch die anwesenden Elektrizitätsmengen bestimmt wird. Von dieser Tatsache ausgehend, hat Maxwell die Hypothese aufgestellt, daß der Induktionfluß, welcher von gegebenen Elektrizitätsmengen hervorgerufen wird, überhaupt nicht von den Eigenschaften des umgebenden Mediums abhängt, daß also auch für ein inhomogenes Medium

$$\Psi = \iint KF_n\,ds = 4\pi\eta_i + 2\pi\bar{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad (19, b)$$

ist. Alle Schlüsse, die aus dieser Annahme gezogen worden sind, haben sich bei der experimentellen Prüfung als richtig erwiesen, weshalb wir auch im weiteren uns der Formel (19, b) bedienen werden. Wir können sie dazu verwenden, weitere, überaus wichtige Formeln herzuleiten. Nehmen wir an, die wirksame elektrische Masse nehme unter anderem auch einen gewissen Raum ein. Es sei A (Fig. 15 a. f. S.) ein in diesem Raume belegener Punkt und ϱ die Raumdichte der Elektrizität in diesem Punkte, d. h. der Grenzwert der mittleren Dichte ϱ_m eines unendlichen kleinen, diesen Punkt umgebenden Raumes. Mit F soll die elektrische Kraft (Feldintensität) im Punkte A bezeichnet werden.

die von sämtlichen vorhandenen, willkürlich verteilten elektrischen Massen ausgeht, darunter natürlicherweise auch von den Massen, in deren Inneren der Voraussetzung nach der Punkt A selbst liegt. Mit

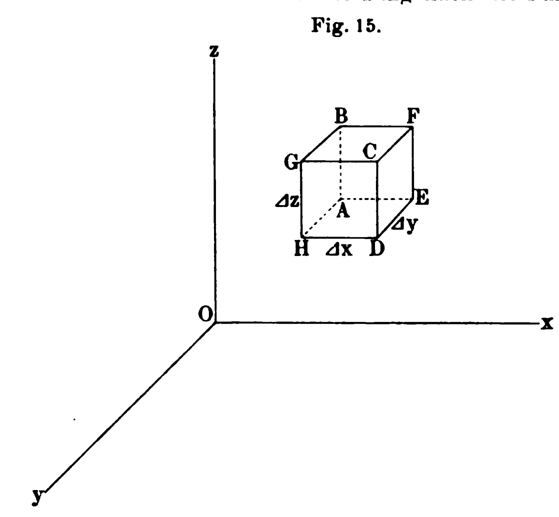


Fig. 15.

x, y, z bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes A, bezogen auf ein rechtwinkeliges Koordinatensystem; ferner bezeichnen wir mit X, Y, Z die in der Richtung der Achsen verlaufenden Komponenten der Feldintensität F, d. h. wir setzen $F_x = X$, $F_y = Y$, $F_z = Z$. Am Punkte A konstruieren wir das unendlich kleine rechtwinkelige Parallelepipedon $ABCDEFGH$, dessen Kanten $\varDelta x$, $\varDelta y$ und $\varDelta z$ seien. Auf dieses wollen wir die Formel (19, b) für den Induktionsfluß anwenden; da sich an seiner Oberfläche keine Massen mit endlicher Oberflächendichte befinden, die innere Masse aber gleich $\varrho_m \,\varDelta x \,\varDelta y \,\varDelta z$ ist, wo ϱ_m die mittlere Dichte im Inneren des in Betracht kommenden Volumens bedeutet, so haben wir

$$\Psi = \iint K F_n ds = 4\pi \varrho_m \varDelta x \varDelta y \varDelta z \quad . \quad . \quad . \quad (19, c)$$

Das Integral enthält in unserem Falle nur sechs Elemente, entsprechend den sechs Seiten des Parallelepipedons. Für die Seitenfläche $ABGH$ ist $ds = \varDelta y \varDelta z$; beziehen sich K und $\varDelta x$ auf den Punkt A, so kann man für die Seitenfläche $ABGH$ das Produkt $KF_n = -KX$ setzen, denn die äußere Normale zu $ABGH$ verläuft nach der Richtung der negativen x-Werte. Auf der Seite $CDEF$ ist die äußere Normale nach der Seite der positiven x hin gerichtet; außerdem geht hier die Koordinate x in $x + \varDelta x$ über. Offenbar ist das Produkt KF_n, das dieser Seitenfläche entspricht, gleich

$$KX + \frac{\partial (KX)}{\partial x} \varDelta x + \text{unendl. kl. Größen höherer Ordnung.}$$

Die Seitenflächen $ABGH$ und $DCFE$ liefern daher zwei Elemente des Integrals Ψ, deren Summe gleich ist

$$\frac{\partial (KX)}{\partial x} \varDelta x \,.\, \varDelta y \,.\, \varDelta z + \text{unendl. kl. Größen höh. Ordn.}$$

Wenn man in derselben Weise die Summe zweier Elementenpaare bildet, von denen das eine den Seitenflächen $ABFE$ und $GCDH$ entspricht, das andere den Seiten $AEDH$ und $BFCG$, alle sechs Elemente summiert, in (19, c) einsetzt und durch Δ_x, Δ_y, Δ_z hebt, so erhält man

$$\frac{\partial (KX)}{\partial x} + \frac{\partial (KY)}{\partial y} + \frac{\partial (KZ)}{\partial z} + \text{unendl. kl. Gr.} = 4\pi\varrho_m.$$

Im Grenzfalle wird ϱ_m gleich der Dichte ϱ in dem Punkte A, auf welchen sich die Werte der drei Differentialquotienten beziehen und man erhält

$$\frac{\partial (KX)}{\partial x} + \frac{\partial (KY)}{\partial y} + \frac{\partial (KZ)}{\partial z} = 4\pi\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Für ein homogenes Dielektrikum ist

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{4\pi}{K}\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20, a)$$

Für Luft ist

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20, b)$$

Für jeden Punkt des Raumes, für welchen $\varrho = 0$ ist, in dem sich also keine Elektrizität befindet, welche eine Volumdichte besitzt, ist

$$\frac{\partial (KX)}{\partial x} + \frac{\partial (KY)}{\partial y} + \frac{\partial (KZ)}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (20, c)$$

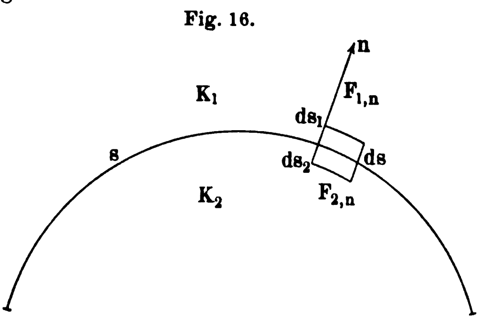
Für jedes homogene Dielektrikum ist, falls $\varrho = 0$ ist,

$$\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20, d)$$

Wir werden die Formel (20, c) die Laplacesche, Formel (20, b) die Poissonsche Gleichung nennen.

Wenden wir uns nunmehr dem Falle zu, wo sich Oberflächenmassen (S. 32) auf einer Fläche s (Fig. 16) befinden; es sei k die Oberflächendichte, die im allgemeinen für verschiedene Oberflächenpunkte verschieden ist. Nehmen wir das Oberflächenelement ds und sei n die Richtung der Normalen zu ds nach der Seite, nach welcher die Kraftlinien, welche durch ds hindurchgehen,

Fig. 16.



verhalten. Wir nehmen ferner ganz allgemein an, daß sich auf beiden Seiten der Fläche s verschiedene Dielektrika befinden, deren Induktionsvermögen K_1 auf der Seite der Normalen n und K_2 auf der anderen Seite von s ist. Die Elektrizitätsmenge η auf ds ist gleich $\eta = k\,ds$. Über ds errichten wir einen niedrigen Zylinder, dessen Seitenlinien senkrecht zu ds sind; beide Grundflächen legen wir parallel zu ds. Es seien $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ die Komponenten der elektrischen Kraft in der Richtung der Normalen n an den Stellen, wo sich diese Grundflächen des Zylinders befinden. Wir können auf die Oberfläche dieses Zylinders, für den $\eta_i = k\,ds$ ist, die Formel (19, b) anwenden. In Formel (19, b) ist die Kraft F_n die Komponente längs der äußeren Normalen zu der Fläche, für welche wir den Induktionsfluß berechnen, d. h. im gegebenen Falle für unseren kleinen Zylinder. Deshalb ist auf ds_1 die Kraft $F_n = F_{1,n}$, auf ds_2 aber $F_n = -F_{2,n}$. Ist der Induktionsfluß durch die Seitenfläche des kleinen Zylinders gleich Ψ, so ist nach (19, b)

$$K_1 F_{1,n} ds_1 - K_2 F_{2,n} ds_2 + \Psi = 4\pi k\,ds \quad . \quad . \quad (20, e)$$

Denken wir uns jetzt die Seitenlinien des kleinen Zylinders unbegrenzt abnehmend, d. h. ds_1 und ds_2 an ds genähert, so verschwindet Ψ im Grenzfalle, ds_1 und ds_2 werden gleich ds; $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ nehmen die speziellen Werte an, welche unendlich nahe zu beiden Seiten der Fläche gelegenen Punkten entsprechen. Formel (20, e) ergibt für den Grenzfall

$$K_1 F_{1,n} - K_2 F_{2,n} = 4\pi k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Befindet sich an der Stelle, welche ds einnimmt und an welcher die Dichte gleich k ist, zu beiden Seiten der Fläche ein und dasselbe Dielektrikum, dessen Induktionsvermögen K ist, so erhält man aus (21)

$$F_{1,n} - F_{2,n} = \frac{4\pi k}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Für Luft ist

$$F_{1,n} - F_{2,n} = 4\pi k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22, a)$$

Diese wichtigen Ausdrücke, die wir der Kürze halber, vielleicht nicht ganz mit Recht, als Greensche Gleichungen bezeichnen wollen, lehren uns, daß die Größe der normalen Komponente der elektrischen Kraft beim Durchgange durch die Oberflächenmasse einen Sprung erleidet; sie hat in zwei zu verschiedenen Seiten der Fläche s gelegenen, ihr unendlich nahen Punkten ungleiche Werte. Die Ursache für diesen Sprung liegt darin, daß die auf dem Elemente ds belegene Masse (für $K_1 = K_2 = K$) in diesen beiden Punkten Kräfte wachruft, die an Größe gleich, normal zu ds, jedoch offenbar nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, während die ganze übrige Masse, welche außerhalb ds liegt, in denselben einander unendlich nahen Punkten

mit Kräften wirkt, welche im Grenzfalle einander an Größe und Richtung gleich sind. Bezeichnet man die beiden ersten Kräfte mit f', die normalen Komponenten der letzteren aber mit f'', so erhält man

$$\left.\begin{aligned} F_{1,n} &= f'' + f' \\ F_{2,n} &= f'' - f' \end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . .} \quad (23)$$

Die senkrechte Komponente der Kraft, welche auf der Oberfläche selbst wirkt, d. h. der Kraft, mit welcher alle Massen, die außerhalb ds liegen, auf die Masse einwirken, die sich auf ds_1 selbst befindet, oder anders ausgedrückt, der Kraft, mit welcher die ganze gegebene Oberflächenmasse auf sich selbst einwirkt, wollen wir mit F_n bezeichnen. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich

$$F_n = f'' \quad \text{. . . . .} \quad (23, a)$$

Die Formeln (22) und (23) geben

$$F_{1,n} - F_{2,n} = 2f' = \frac{4\pi}{K}\,k,$$

hieraus folgt

$$f' = \frac{2\pi}{K}\,k \quad \text{. . . . .} \quad (23, b)$$

Setzt man $f'' = F_n$ in (23) ein, so erhält man

$$F_{1,n} - F_n = F_n - F_{2,n} = \frac{2\pi}{K}\,k \quad \text{. .} \quad (23, c)$$

und für Luft

$$F_{1,n} - F_n = F_n - F_{2,n} = 2\pi k \quad \text{. . .} \quad (23, d)$$

Formel (23, d) gibt

$$F_n = \frac{1}{2}\,(F_{1,n} + F_{2,n}) \quad \text{. . . . .} \quad (23, e)$$

Die letzten Formeln zeigen, daß die normale Komponente der elektrischen Kraft beim Durchgange durch die Oberflächenmasse zwei gleiche Sprünge erleidet; jedesmal beträgt der Sprung $2\pi k : K$, wo k die Oberflächendichte in dem Punkte der Oberfläche ist, durch welchen man beim Übergange von einer Seite der Fläche zur anderen hindurchgelangt. Es sei hier noch bemerkt, daß die Gleichheit der Dimensionen $[F]$ und $[k]$, siehe (14) und (15) auf S. 42 und 43, sich in völliger Übereinstimmung mit den Formeln (23, b), (23, d) u. a. befindet.

Wir wollen die hergeleiteten Formeln auf Leiter in Anwendung bringen. Zu diesem Zwecke läßt es sich nicht umgehen, eine neue und zwar ziemlich seltsame Annahme zu machen, nämlich: alle von uns abgeleiteten Formeln stützen sich offenbar auf das Coulombsche Gesetz, d. h. auf die Formeln (10) und (11), die doch nur für Dielektrika einen Sinn haben; dasselbe muß sich folglich auch auf die

abgeleiteten Formeln beziehen, so daß wir gar kein Recht haben, sie auf Leiter anzuwenden. Dennoch machen wir die Annahme, daß sich die Formeln (10), (20, b), (22, a), (23, e) und andere auch auf Leiter anwenden lassen. Das Einzige, was zugunsten einer solchen Annahme spricht, ist, daß die aus ihr gezogenen Schlüsse vollkommen der Wirklichkeit entsprechen.

Wir haben auf S. 30 gesehen, daß der Zustand des elektrischen Gleichgewichts, d. h. der Ruhe auf einem Leiter, nur unter der Bedingung möglich ist, daß innerhalb desselben die elektrische Kraft F gleich Null ist und daß die Kraft auf der Oberfläche selbst überall senkrecht zur letzteren ist. Formel (20, b) gibt auf Grund der ersten Bedingung ($X = Y = Z = 0$) für alle inneren Punkte des Leiters die Relation

$$\varrho = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (24)$$

An allen Punkten eines Leiters ist die Volumdichte der Elektrizität gleich Null. Elektrizität kann sich nur auf der Oberfläche befinden. Die zweite Gleichgewichtsbedingung zeigt uns, daß die normalen Komponenten der Kräfte, von denen wir oben gesprochen haben, gerade die in den entsprechenden Punkten wirkenden Kräfte sind.

Wenden wir uns nun den vorhin hergeleiteten Formeln zu. Die Oberfläche eines Leiters ist naturgemäß geschlossen; n ist offenbar die Richtung der äußeren Normalen. Im Inneren des Leiters ist die Kraft gleich Null, wir müssen daher $F_{2,n} = 0$ setzen; die Kraft an der Oberfläche selbst bezeichnen wir mit F, die Kraft auf der Fläche mit F_s, so daß $F_{1,n} = F$ und $F_n = F_s$ ist: die Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums bezeichnen wir mit K, d. h. wir setzen $K_1 = K$. In diesem Falle gibt uns Formel (21) den Wert

$$F = \frac{4\pi}{K} k \quad \text{. . . . .} \quad (24, a)$$

und für Luft

$$F = 4\pi k \quad \text{. . . . .} \quad (24, b)$$

Durch diese Formeln wird die Feldintensität im Außenraume unmittelbar an der Leiteroberfläche bestimmt. Aus (23, e) erhalten wir noch

$$F_s = \frac{2\pi}{K} k \quad \text{. . . . .} \quad (24, c)$$

und für Luft

$$F_s = 2\pi k \quad \text{. . . . .} \quad (24, d)$$

Durch diese Formeln wird die Kraft bestimmt, die auf die Ladung des Leiters wirkt, d. h. die Feldintensität in den Punkten seiner Oberfläche. Wäre ein Teil der Oberflächenschicht des Leiters beweglich, so würde er sich unter der Einwirkung der Kräfte,

welche auf die auf jenem Flächenteile befindliche Elektrizität wirken, nach außen bewegen. Die Kraft, welche auf die Oberflächenschicht wirkt und auf die Oberflächeneinheit bezogen ist, werden wir die Oberflächenspannung nennen und mit P bezeichnen: wenn auf das Flächenelement ds die Kraft df wirkt, so ist

$$P = \frac{df}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24, e)$$

Auf die Einheit der Elektrizitätsmenge wirkt die Kraft

$$F_s = \frac{2\pi}{K} k,$$

also auf die Menge kds, die sich in Wirklichkeit auf ds befindet, die Kraft

$$df = F_s k ds = \frac{2\pi k^2 ds}{K}:$$

daher gibt (24, e) den Wert

$$P = \frac{2\pi}{K} k^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

und für Luft

$$P = 2\pi k^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, a)$$

Durch diese wichtigen Formeln wird der Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung P im gegebenen Punkte des Leiters und der Dichte k der Elektrizität in demselben Punkte bestimmt; wie man sieht, wächst P proportional k^2. Vergleicht man die Formeln (25) und (25, a) mit (24, a) und (24, b) und eliminiert aus ihnen k, so erhält man

$$P = \frac{KF^2}{8\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, b)$$

und für Luft

$$P = \frac{F^2}{8\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, c)$$

Durch diese Formeln wird der Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung P und der Feldintensität F unmittelbar an der Leiteroberfläche bestimmt. Aus (24, a) und (25) ergibt sich noch die Formel

$$P = \frac{1}{2} Fk \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, d)$$

welche ihre Geltung für jedes beliebige, den Leiter umgebende Dielektrikum behält.

Zur Herleitung verschiedener Eigenschaften der Kraftröhren, die wir auf S. 23 kennen lernten, wollen wir uns der Formel (19) für den Induktionsfluß, der eine gegebene Fläche s durchsetzt, bedienen. Da die Seitenlinien der Seitenfläche einer Kraftröhre selbst Kraftlinien

abgeleiteten Formeln beziehen, so daß wir gar kein Recht haben, sie auf Leiter anzuwenden. Dennoch machen wir die Annahme, daß sich die Formeln (10), (20, b), (22, a), (23, e) und andere auch auf Leiter anwenden lassen. Das Einzige, was zugunsten einer solchen Annahme spricht, ist, daß die aus ihr gezogenen Schlüsse vollkommen der Wirklichkeit entsprechen.

Wir haben auf S. 30 gesehen, daß der Zustand des elektrischen Gleichgewichts, d. h. der Ruhe auf einem Leiter, nur unter der Bedingung möglich ist, daß innerhalb desselben die elektrische Kraft F gleich Null ist und daß die Kraft auf der Oberfläche selbst überall senkrecht zur letzteren ist. Formel (20, b) gibt auf Grund der ersten Bedingung ($X = Y = Z = 0$) für alle inneren Punkte des Leiters die Relation

$$\varrho = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (24)$$

An allen Punkten eines Leiters ist die Volumdichte der Elektrizität gleich Null. Elektrizität kann sich nur auf der Oberfläche befinden. Die zweite Gleichgewichtsbedingung zeigt uns, daß die normalen Komponenten der Kräfte, von denen wir oben gesprochen haben, gerade die in den entsprechenden Punkten wirkenden Kräfte sind.

Wenden wir uns nun den vorhin hergeleiteten Formeln zu. Die Oberfläche eines Leiters ist naturgemäß geschlossen: n ist offenbar die Richtung der äußeren Normalen. Im Inneren des Leiters ist die Kraft gleich Null, wir müssen daher $F_{2,n} = 0$ setzen; die Kraft an der Oberfläche selbst bezeichnen wir mit F, die Kraft auf der Fläche mit F_s, so daß $F_{1,n} = F$ und $F_n = F_s$ ist: die Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums bezeichnen wir mit K, d. h. wir setzen $K_1 = K$. In diesem Falle gibt uns Formel (21) den Wert

$$F = \frac{4\pi}{K} k \quad \text{. . . . .} \quad (24, a)$$

und für Luft

$$F = 4\pi k \quad \text{. . . . .} \quad (24, b)$$

Durch diese Formeln wird die Feldintensität im Außenraume unmittelbar an der Leiteroberfläche bestimmt. Aus (23, e) erhalten wir noch

$$F_s = \frac{2\pi}{K} k \quad \text{. . . . .} \quad (24, c)$$

und für Luft

$$F_s = 2\pi k \quad \text{. . . . .} \quad (24, d)$$

Durch diese Formeln wird die Kraft bestimmt, die auf die Ladung des Leiters wirkt, d. h. die Feldintensität in den Punkten seiner Oberfläche. Wäre ein Teil der Oberflächenschicht des Leiters beweglich, so würde er sich unter der Einwirkung der Kräfte,

welche auf die auf jenem Flächenteile befindliche Elektrizität wirken, nach außen bewegen. Die Kraft, welche auf die Oberflächenschicht wirkt und auf die Oberflächeneinheit bezogen ist, werden wir die Oberflächenspannung nennen und mit P bezeichnen; wenn auf das Flächenelement ds die Kraft df wirkt, so ist

$$P = \frac{df}{ds} \quad \text{(24, e)}$$

Auf die Einheit der Elektrizitätsmenge wirkt die Kraft

$$F_s = \frac{2\pi}{K}\, k,$$

also auf die Menge kds, die sich in Wirklichkeit auf ds befindet, die Kraft

$$df = F_s k ds = \frac{2\pi k^2 ds}{K};$$

daher gibt (24, e) den Wert

$$P = \frac{2\pi}{K}\, k^2 \quad \text{(25)}$$

und für Luft

$$P = 2\pi k^2 \quad \text{(25, a)}$$

Durch diese wichtigen Formeln wird der Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung P im gegebenen Punkte des Leiters und der Dichte k der Elektrizität in demselben Punkte bestimmt; wie man sieht, wächst P proportional k^2. Vergleicht man die Formeln (25) und (25, a) mit (24, a) und (24, b) und eliminiert aus ihnen k, so erhält man

$$P = \frac{KF^2}{8\pi} \quad \text{(25, b)}$$

und für Luft

$$P = \frac{F^2}{8\pi} \quad \text{(25, c)}$$

Durch diese Formeln wird der Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung P und der Feldintensität F unmittelbar an der Leiteroberfläche bestimmt. Aus (24, a) und (25) ergibt sich noch die Formel

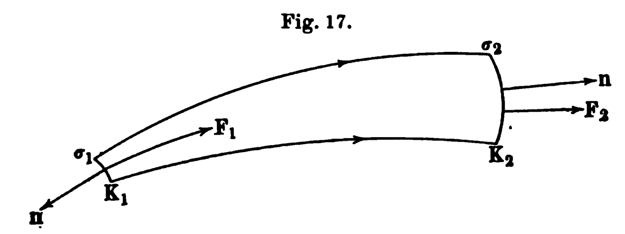
$$P = \frac{1}{2}\, Fk \quad \text{(25, d)}$$

welche ihre Geltung für jedes beliebige, den Leiter umgebende Dielektrikum behält.

Zur Herleitung verschiedener Eigenschaften der Kraftröhren, die wir auf S. 23 kennen lernten, wollen wir uns der Formel (19) für den Induktionsfluß, der eine gegebene Fläche s durchsetzt, bedienen. Da die S[illegible] der Seitenfläche einer Kraftröhre selbst Kraftlinien

darstellen, so ist sowohl der Kraftfluß, als auch der Induktionsfluß durch die Seitenfläche der Kraftröhre gleich Null. Es bezeichne σ den Flächeninhalt des Querschnittes der Kraftröhre an irgend einer

Fig. 17.



Stelle, F die Feldintensität, K die Dielektrizitätskonstante an der Stelle, an welcher sich das Element $d\sigma$ dieser Fläche befindet (Fig. 17). Man nennt in diesem Falle die Größe

$$\psi = \iint KF d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

den Induktionsfluß im Röhrenquerschnitt σ, die Röhre selbst nennt man ebenfalls eine Induktionsröhre. Das Integral erstreckt sich natürlich bloß auf den Flächenraum σ.

Wir wollen zunächst den Röhrenteil betrachten, welcher keine freie Elektrizität enthält; wir begrenzen ihn durch zwei Flächen σ_1 und σ_2, die überall zu den mit F_1 und F_2 bezeichneten elektrischen Kräften senkrecht sein mögen. Wir wenden die Formel (19) S. 47 auf die geschlossene Fläche dieses Röhrenabschnittes an. Da F_n in (19) die Komponente längs der äußeren Normale ist, so ist auf σ_2 offenbar $F_n = F_2$; auf σ_1 hat man $F_n = -F_1$ zu setzen. Der Fluß durch die Seitenfläche ist überall gleich Null; der Gesamtfluß ist ebenfalls gleich Null, da der Voraussetzung nach $\eta_i = 0$ und $\overline{\eta} = 0$ ist. Somit ist

$$\iint K_2 F_2 d\sigma_2 - \iint K_1 F_1 d\sigma_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (26,\text{a})$$

oder

$$\iint K_1 F_1 d\sigma_1 = \iint K_2 F_2 d\sigma_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26,\text{b})$$

Der Induktionsfluß ψ ist konstant längs jedem Teil einer Röhre, welche keine freie Elektrizität besitzt, in welchem Maße sich auch das dielektrische Medium in diesem Teile ändern mag. Anstatt (26, b) kann man

$$\psi_2 = \psi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26,\text{c})$$

schreiben. Befindet sich innerhalb der Röhre die Elektrizitätsmenge η, so hat man anstatt (26, b)

$$\iint K_2 F_2 d\sigma_2 - \iint K_1 F_1 d\sigma_1 = 4\pi\eta$$

oder

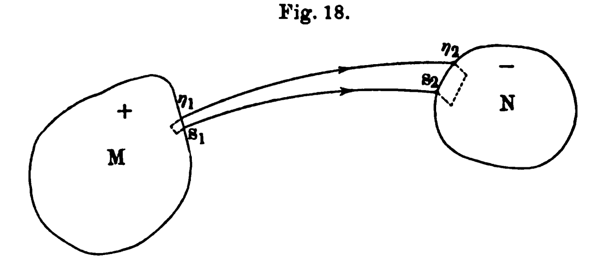
$$\psi_2 - \psi_1 = 4\pi\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26,\text{d})$$

Der Induktionsfluß ändert sich um den Betrag $4\pi\eta$, wenn die Röhre durch die Elektrizitätsmenge η hindurchgeht. Auf Grund von (19) läßt sich leicht beweisen, daß im homogenen Medium ($K_1 = K_2 = K$), wenn in der Röhre keine freie Elektrizität vorhanden ist, sich der Kraftfluß φ an der Röhre entlang nicht ändert, so daß man $\varphi_2 = \varphi_1$ setzen kann; ist aber η von Null verschieden, so wird die Änderung des Kraftflusses bestimmt durch die Formel

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \iint F_2 d\sigma_2 - \iint F_1 d\sigma_1 = \frac{4\pi}{K}\eta \quad . \quad . \quad (26, e)$$

Betrachten wir jetzt die Röhre, welche die Oberfläche zweier Leiter M und N (Fig. 18) verbindet. Sie schneidet aus den Oberflächen der Körper M und N zwei Teile s_1 und s_2 von verschiedener Größe und

Fig. 18.



Form heraus; die Elektrizitätsmengen, die sich auf diesen Teilen befinden, bezeichnen wir mit η_1 und η_2. Verlängern wir die Röhre nach beiden Seiten ins Innere der Leiter hinein und denken wir uns zwei beliebige Flächen gezogen, welche die Röhre gewissermaßen abschließen. Auf diese Weise erhalten wir eine geschlossene Fläche, an deren sämtlichen Punkten die normalen Komponenten der Kraft F gleich Null sind, da im Inneren von Leitern stets $F = 0$ ist. Hieraus folgt, daß für diese Fläche der Induktionsfluß gleich Null ist. Formel (19, a) zeigt uns, daß in diesem Falle $\eta_i = 0$ ist, d. h. $\eta_1 + \eta_2 = 0$ oder

$$\eta_2 = -\eta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

An den beiden Enden einer die Oberflächen zweier Leiter verbindenden Röhre befinden sich gleiche Mengen ungleichnamiger Elektrizitäten. Besonders wichtig ist der Umstand, daß obige Gleichheit bestehen bleibt, wenn M und N von verschiedenen Dielektrika umgeben sind: sie zeigt uns, daß Kraftröhren oder Induktionsröhren nur ungleichnamig elektrisierte Leiter verbinden können.

Wir wollen jetzt abermals bloß einen Teil der Kraftröhre in Betracht ziehen und die Voraussetzung machen, daß die Querschnitte σ der Röhre so klein sind, daß die Feldintensität F in allen Punkten eines solchen

Querschnittes die gleiche ist und daß die Röhre oder ihr in Betracht gezogener Teil sich in einem homogenen Medium befindet. Dann ist nach (26, b), da $K_1 = K_2$, $F_1 = const.$ und $F_2 = const.$ ist, $F_1 \sigma_1 = F_2 \sigma_2$ oder

$$F_1 : F_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Im homogenen Medium ist die Feldintensität in verschiedenen Punkten einer Kraftröhre indirekt proportional dem Flächeninhalt des Röhrenquerschnittes. Mit anderen Worten: die Divergenz der Kraftlinien im homogenen Medium ($K = Const$) entspricht einer Abnahme, ihre Konvergenz einer Zunahme der Feldintensität. Dieser Satz ermöglicht uns mit der Größe, die man als „Kraftlinienzahl" bezeichnet, bekannt zu werden. Wenden wir uns der Fig. 18 auf voriger Seite zu. Durch σ_1 kann man offenbar eine unendliche Anzahl von Kraftlinien hindurchlegen, da durch jeden Punkt eine derartige Linie hindurchgeht. Denken wir uns auf der Fläche σ_1 eine ganz willkürliche Anzahl ν von Punkten möglichst gleichmäßig verteilt und nehmen wir an, daß hierbei auf die Oberflächeneinheit N_1 Punkte kommen, so daß also $\nu = N_1 \sigma_1$ ist. Durch alle diese Punkte ziehen wir Kraftlinien, welche die Fläche σ_2 in ebenfalls ν Punkten treffen. Kommen hier auf die Oberflächeneinheit N_2 Punkte und demnach ebenso viele Kraftlinien, so ist $\nu = N_2 \sigma_2$. Offenbar ist $N_1 \sigma_1 = N_2 \sigma_2$, also

$$N_1 : N_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad \ldots\ldots \quad (28, a)$$

Jede der Zahlen N_1 und N_2 werden wir der Kürze halber die Kraftlinienzahl in σ_1 und σ_2 nennen, obgleich es, weil eine dieser Zahlen willkürlich ist, richtiger wäre zu sagen: die Zahl der Kraftlinien in bezug auf die Flächeneinheit des Querschnittes oder, was offenbar dasselbe ist, in bezug auf gleiche Flächen des Querschnittes der Kraftröhren. Vergleicht man (28, a) mit (28), so findet man

$$N_1 : N_2 = F_1 : F_2 \quad \ldots\ldots \quad (28, b)$$

Im homogenen Medium ist die Kraftlinienzahl (bezogen auf die Flächeneinheit des Querschnittes) an verschiedenen Stellen der Kraftröhre proportional der Feldintensität.

Denken wir uns eine Fläche s_1, welche die Kraftlinien überall senkrecht schneidet, und ziehen wir durch jedes Element σ_1 dieser Fläche $\nu = c\sigma_1 F_1$ Kraftlinien, so daß die Kraftlinienzahl gleich $N_1 = cF_1$ wird, wo c einen beliebigen Proportionalitätsfaktor bedeutet: mit anderen Worten heißt das, wir machen an der Fläche s_1 diese Zahl überall proportional der Feldintensität.

In diesem Falle ist die Kraftlinienzahl N im ganzen Raume, in dem sich überhaupt Kraftlinien befinden, die durch s_1 hindurchgegangen sind, der Feldintensität F proportional, d. h. wir haben

$$N = cF \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28, c)$$

Setzt man $c = 1$, d. h. macht man auf der Fläche s_1 die Werte N_1 und F_1 überall einander gleich, so erhält man überall die Beziehung

$$N = F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28, d)$$

Anstatt auf der Fläche s_1 durch jedes Element σ_1 eine Anzahl $\nu_1 = c\sigma_1 F_1$ Kraftlinien zu ziehen, kann man auch eine ebenso große Zahl von Kraftröhren hindurchlegen, für welche die Summe der Querschnitte an dieser Stelle gleich σ_1 ist. Diese Röhren werden sich im allgemeinen entweder verengern oder erweitern, werden aber natürlich nirgends divergieren, d. h. sie werden den Teil des Raumes ausfüllen, durch den sie hindurchgehen. Die Kraftlinien, von denen wir soeben gesprochen hatten, stellen gewissermaßen die Achsenlinien dieser Röhren dar. Es beziehen sich somit die Formeln (28, c) und (28, d) auch auf sie. Aus dem Vorhergehenden kommen wir zu folgendem Ergebnisse:

Die Kraftlinienzahl und ebenso die Kraftröhrenzahl im homogenen Medium ist proportional oder sogar gleich der Feldintensität, je nachdem der Konstruktion der Linien und Röhren Formel (28, c) oder (28, d) zugrunde gelegt wird.

In der Folge werden wir die Gleichheit $N = F$ gelten lassen, d. h. wir werden annehmen, es sei die Konstruktion vorgenommen, welche zu dieser Gleichheit führt.

Wir wenden uns jetzt dem Induktionsflusse und den Induktionsröhren zu, die im homogenen Medium mit den Kraftlinien identisch sind. Es sei bemerkt, daß im inhomogenen Medium speziell der Induktionsfluß, von dem sich ja leicht zur Feldintensität übergehen läßt, besonders wichtig ist. Auf S. 44 nannten wir die Größe $KF_n ds$ den Induktionsfluß, der das Flächenelement ds durchsetzt.

Die Größe

$$B = KF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28, e)$$

wollen wir die Induktion im gegebenen Punkte des Dielektrikums nennen; sie ist gleich dem Induktionsflusse durch das zu den Kraftlinien senkrechte Element ds dividiert durch ds, d. h. bezogen auf die Oberflächeneinheit. Für eine dünne Induktionsröhre erhält man aus (26, b)

$$K_1 F_1 \sigma_1 = K_2 F_2 \sigma_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

d. h.

$$B_1 \sigma_1 = B_2 \sigma_2$$

oder

$$B_1 : B_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29, a)$$

Diese Formel sieht der Formel (28) ähnlich, sie gilt aber auch für ein inhomogenes Medium; sie besagt, daß die Induktion in verschiedenen Punkten einer Induktionsröhre indirekt proportional dem Flächeninhalte des Querschnittes dieser Röhre ist.

Denken wir uns wiederum eine Fläche s_1, welche überall senkrecht zu den Kraftlinien ist. Durch jedes Element σ_1 derselben ziehen wir $\nu_1 = c\sigma_1 K_1 F_1 = c\sigma_1 B_1$ Induktionsröhren und möge die Summe der Flächeninhalte ihrer Querschnitte an dieser Stelle gleich σ_1 sein; K_1, F_1 und B_1 beziehen sich auf den Punkt, an welchem sich σ_1 befindet. Die Zahl $N_1 = \nu_1 : \sigma_1$ wollen wir die „Induktionsröhrenzahl" an der gegebenen Stelle nennen, wobei wie früher die Worte „bezogen auf die Flächeneinheit" der überall zu diesen Röhren senkrechten Fläche hinzugedacht werden müssen. In diesem Falle ist $N_1 = cB_1$. Längs jeder Röhre ist offenbar $N_1 : N_2 = \sigma_2 : \sigma_1$, siehe (28, a), folglich ist nach (29, a)

$$N_1 : N_2 = B_1 : B_2 \quad \ldots \ldots \quad (29, b)$$

Da wir $N_1 = cB_1$ gemacht hatten, so ist offenbar überall $N = cB$. Setzt man $c = 1$, d. h. macht man auf der Fläche s_1 die Größen N_1 und B_1 einander numerisch gleich, so erhält man überall

$$N = B \quad \ldots \ldots \quad (29, c)$$

Denkt man sich die Induktionsröhren derart konstruiert, wie dies vorhin angegeben war, so ist in jedem Punkte die Induktion B gleich der Induktionsröhrenzahl N. Das heißt, durch eine zu den Röhren senkrechte Fläche σ_1 gehen $N\sigma = B\sigma$ Röhren hindurch. Für Luft erhält man

$$N = F = B \quad \ldots \ldots \quad (29, d)$$

Im weiteren werden wir voraussetzen, daß die Induktionsröhren entsprechend der Gleichung (29, c) konstruiert sind. Wie wir sahen, vgl. (26, b), ändert sich der Induktionsfluß ψ längs einer Röhre, die keine freie Elektrizität besitzt, nicht. Konstruieren wir eine der Röhren entsprechend (29, c), so kann man für eine dünne Röhre

$$\psi = KF\sigma = B\sigma = N\sigma$$

setzen: es ist aber $N\sigma$ die Zahl der durch σ hindurchgehenden Röhren, und da σ der Querschnitt einer Röhre ist, so ist $N\sigma = 1$, also $\psi = 1$.

Der Induktionsfluß in jeder der von uns konstruierten Induktionsröhren ist gleich der Einheit. Aus diesem Grunde nennt man diese Röhren auch bisweilen Einheitsröhren.

Suchen wir nunmehr den Zusammenhang zwischen der Elektrizitätsmenge η und der Zahl ν (der Einheitsröhrenzahl) der Induktionsröhren, welche gewissermaßen von dieser Elektrizität ausgehen. Die Formel (19) zeigt uns, daß der Induktionsfluß für jede geschlossene Fläche, welche die Elektrizitätsmenge η umfaßt, gleich $4\pi\eta$ ist. Ein eben solcher Induktionsfluß geht auch durch eine zu allen Röhren senkrechte

Fläche, wenn jede der Röhren den Induktionsfluß $\psi = 1$ enthält. Der Gesamtfluß aber ist gleich $4\pi\eta$, es muß also

$$\nu = 4\pi\eta \quad \text{(29, e)}$$

sein. Hieraus erhält man für die Zahl ν der von der Einheit der Elektrizitätsmenge ausgehenden Induktionsröhren

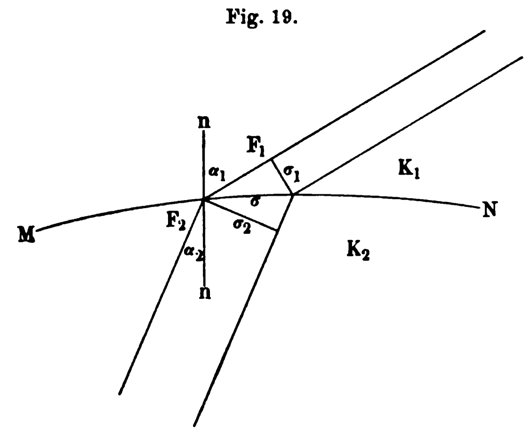
$$\nu_1 = 4\pi \quad \text{(29, f)}$$

Wenden wir das Gesagte auf einen von Dielektrikum umgebenen Leiter an. Auf dem Flächenelemente ds befindet sich die Elektrizitätsmenge $\eta = k\,ds$; es gehen also $4\pi k\,ds$ Induktionsröhren von ds aus und zwar gehen alle nach derselben Seite; jede Röhre enthält einen der Einheit gleichen Induktionsfluß, es ist daher der gesamte Induktionsfluß $KF ds$ gleich der Röhrenzahl $4\pi k\,ds$: hieraus folgt nach (24, a) auf S. 52 $F = 4\pi k : K$. Führt man die Induktion $B = KF$ in den Ausdruck (25, b) für die Oberflächenspannung P ein, so erhält man

$$P = \frac{BF}{8\pi} \quad \text{(30)}$$

Zum Schluß wollen wir beweisen, daß die Induktionsröhren beim Übergange aus einem Dielektrikum ins andere gewissermaßen eine Brechung erleiden. Dasselbe muß natürlich auch von den Kraftlinien gelten. Es sei MN die Trennungsfläche zweier Medien, deren Induktionsvermögen K_1 und K_2 ist. Wir betrachten eine Induktionsröhre, welche durch das Element σ der Fläche MN (Fig. 19) hindurchgeht. Nehmen wir an, sie bilde mit der Normalen nn die Winkel α_1 und α_2, und ihre Querschnitte zu beiden Seiten von MN seien σ_1 und σ_2. Ist auf MN keine freie Elektrizität vorhanden, so ist nach (21) auf S. 50

Fig. 19.



$$K_1 F_{1,n} = K_2 F_{2,n} \quad \text{(31)}$$

$$K_1 F_1 \cos\alpha_1 = K_2 F_2 \cos\alpha_2 . \quad \text{(31, a)}$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit σ, so erhält man $K_1 F_1 \sigma_1 = K_2 F_2 \sigma_2$, d. h. die Konstanz des Induktionsflusses in der

verlaufen. Wir nehmen ferner ganz allgemein an, daß sich auf beiden Seiten der Fläche s verschiedene Dielektrika befinden, deren Induktionsvermögen K_1 auf der Seite der Normalen n, und K_2 auf der anderen Seite von s ist. Die Elektrizitätsmenge η auf ds ist gleich $\eta = kds$. Über ds errichten wir einen niedrigen Zylinder, dessen Seitenlinien senkrecht zu ds sind; beide Grundflächen legen wir parallel zu ds. Es seien $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ die Komponenten der elektrischen Kraft in der Richtung der Normalen n an den Stellen, wo sich diese Grundflächen des Zylinders befinden. Wir können auf die Oberfläche dieses Zyinders, für den $\eta_i = kds$ ist, die Formel (19, b) anwenden. In Formel (19, b) ist die Kraft F_n die Komponente längs der äußeren Normalen zu der Fläche, für welche wir den Induktionsfluß berechnen, d. h. im gegebenen Falle für unseren kleinen Zylinder. Deshalb ist auf ds_1 die Kraft $F_n = F_{1,n}$, auf ds_2 aber $F_n = -F_{2,n}$. Ist der Induktionsfluß durch die Seitenfläche des kleinen Zylinders gleich Ψ, so ist nach (19, b)

$$K_1 F_{1,n} ds_1 - K_2 F_{2,n} ds_2 + \Psi = 4\pi kds \quad . \quad . \quad (20, e)$$

Denken wir uns jetzt die Seitenlinien des kleinen Zylinders unbegrenzt abnehmend, d. h. ds_1 und ds_2 an ds genähert, so verschwindet Ψ im Grenzfalle, ds_1 und ds_2 werden gleich ds; $F_{1,n}$ und $F_{2,n}$ nehmen die speziellen Werte an, welche unendlich nahe zu beiden Seiten der Fläche gelegenen Punkten entsprechen. Formel (20, e) ergibt für den Grenzfall

$$K_1 F_{1,n} - K_2 F_{2,n} = 4\pi k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Befindet sich an der Stelle, welche ds einnimmt und an welcher die Dichte gleich k ist, zu beiden Seiten der Fläche ein und dasselbe Dielektrikum, dessen Induktionsvermögen K ist, so erhält man aus (21)

$$F_{1,n} - F_{2,n} = \frac{4\pi k}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Für Luft ist

$$F_{1,n} - F_{2,n} = 4\pi k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22, a)$$

Diese wichtigen Ausdrücke, die wir der Kürze halber, vielleicht nicht ganz mit Recht, als Greensche Gleichungen bezeichnen wollen, lehren uns, daß die Größe der normalen Komponente der elektrischen Kraft beim Durchgange durch die Oberflächenmasse einen Sprung erleidet; sie hat in zwei zu verschiedenen Seiten der Fläche s gelegenen, ihr unendlich nahen Punkten ungleiche Werte. Die Ursache für diesen Sprung liegt darin, daß die auf dem Elemente ds belegene Masse (für $K_1 = K_2 = K$) in diesen beiden Punkten Kräfte wachruft, die an Größe gleich, normal zu ds, jedoch offenbar nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, während die ganze übrige Masse, welche außerhalb ds liegt, in denselben einander unendlich nahen Punkten

mit Kräften wirkt, welche im Grenzfalle einander an Größe und Richtung gleich sind. Bezeichnet man die beiden ersten Kräfte mit f', die normalen Komponenten der letzteren aber mit f'', so erhält man

$$\left.\begin{array}{l} F_{1,n} = f'' + f' \\ F_{2,n} = f'' - f' \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

Die senkrechte Komponente der Kraft, welche auf der Oberfläche selbst wirkt, d. h. der Kraft, mit welcher alle Massen, die außerhalb ds liegen, auf die Masse einwirken, die sich auf ds_1 selbst befindet, oder anders ausgedrückt, der Kraft, mit welcher die ganze gegebene Oberflächenmasse auf sich selbst einwirkt, wollen wir mit F_n bezeichnen. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich

$$F_n = f''. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23,\text{a})$$

Die Formeln (22) und (23) geben

$$F_{1,n} - F_{2,n} = 2f' = \frac{4\pi}{K}k,$$

hieraus folgt

$$f' = \frac{2\pi}{K}k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23,\text{b})$$

Setzt man $f'' = F_n$ in (23) ein, so erhält man

$$F_{1,n} - F_n = F_n - F_{2,n} = \frac{2\pi}{K}k \quad \ldots \quad (23,\text{c})$$

und für Luft

$$F_{1,n} - F_n = F_n - F_{2,n} = 2\pi k \quad \ldots \quad (23,\text{d})$$

Formel (23, d) gibt

$$F_n = \frac{1}{2}(F_{1,n} + F_{2,n}) \quad \ldots \ldots \quad (23,\text{e})$$

Die letzten Formeln zeigen, daß die normale Komponente der elektrischen Kraft beim Durchgange durch die Oberflächenmasse zwei gleiche Sprünge erleidet; jedesmal beträgt der Sprung $2\pi k : K$, wo k die Oberflächendichte in dem Punkte der Oberfläche ist, durch welchen man beim Übergange von einer Seite der Fläche zur anderen hindurchgelangt. Es sei hier noch bemerkt, daß die Gleichheit der Dimensionen $[F]$ und $[k]$, siehe (14) und (15) auf S. 42 und 43, sich in völliger Übereinstimmung mit den Formeln (23, b), (23, d) u. a. befindet.

Wir wollen die hergeleiteten Formeln auf Leiter in Anwendung bringen. Zu diesem Zwecke läßt es sich nicht umgehen, eine neue und zwar ziemlich seltsame Annahme zu machen, nämlich: alle von uns abgeleiteten Formeln stützen sich offenbar auf das Coulombsche Gesetz, d. h. auf die Formeln (10) und (11), die doch nur für Dielektrika einen Sinn haben; dasselbe muß sich folglich auch auf die

abgeleiteten Formeln beziehen, so daß wir gar kein Recht haben, sie auf Leiter anzuwenden. Dennoch machen wir die Annahme, daß sich die Formeln (10), (20, b), (22, a), (23, e) und andere auch auf Leiter anwenden lassen. Das Einzige, was zugunsten einer solchen Annahme spricht, ist, daß die aus ihr gezogenen Schlüsse vollkommen der Wirklichkeit entsprechen.

Wir haben auf S. 30 gesehen, daß der Zustand des elektrischen Gleichgewichts, d. h. der Ruhe auf einem Leiter, nur unter der Bedingung möglich ist, daß innerhalb desselben die elektrische Kraft F gleich Null ist und daß die Kraft auf der Oberfläche selbst überall senkrecht zur letzteren ist. Formel (20, b) gibt auf Grund der ersten Bedingung ($X = Y = Z = 0$) für alle inneren Punkte des Leiters die Relation

$$\varrho = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

An allen Punkten eines Leiters ist die Volumdichte der Elektrizität gleich Null. Elektrizität kann sich nur auf der Oberfläche befinden. Die zweite Gleichgewichtsbedingung zeigt uns, daß die normalen Komponenten der Kräfte, von denen wir oben gesprochen haben, gerade die in den entsprechenden Punkten wirkenden Kräfte sind.

Wenden wir uns nun den vorhin hergeleiteten Formeln zu. Die Oberfläche eines Leiters ist naturgemäß geschlossen; n ist offenbar die Richtung der äußeren Normalen. Im Inneren des Leiters ist die Kraft gleich Null, wir müssen daher $F_{2,n} = 0$ setzen; die Kraft an der Oberfläche selbst bezeichnen wir mit F, die Kraft auf der Fläche mit F_s, so daß $F_{1,n} = F$ und $F_n = F_s$ ist; die Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums bezeichnen wir mit K, d. h. wir setzen $K_1 = K$. In diesem Falle gibt uns Formel (21) den Wert

$$F = \frac{4\pi}{K} k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24, a)$$

und für Luft

$$F = 4\pi k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24, b)$$

Durch diese Formeln wird die Feldintensität im Außenraume unmittelbar an der Leiteroberfläche bestimmt. Aus (23, e) erhalten wir noch

$$F_s = \frac{2\pi}{K} k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24, c)$$

und für Luft

$$F_s = 2\pi k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24, d)$$

Durch diese Formeln wird die Kraft bestimmt, die auf die Ladung des Leiters wirkt, d. h. die Feldintensität in den Punkten seiner Oberfläche. Wäre ein Teil der Oberflächenschicht des Leiters beweglich, so würde er sich unter der Einwirkung der Kräfte,

welche auf die auf jenem Flächenteile befindliche Elektrizität wirken, nach außen bewegen. Die Kraft, welche auf die Oberflächenschicht wirkt und auf die Oberflächeneinheit bezogen ist, werden wir die **Oberflächenspannung** nennen und mit P bezeichnen; wenn auf das Flächenelement ds die Kraft df wirkt, so ist

$$P = \frac{df}{ds} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24, e)$$

Auf die Einheit der Elektrizitätsmenge wirkt die Kraft

$$F_s = \frac{2\pi}{K} k,$$

also auf die Menge kds, die sich in Wirklichkeit auf ds befindet, die Kraft

$$df = F_s k ds = \frac{2\pi k^2 ds}{K}:$$

daher gibt (24, e) den Wert

$$P = \frac{2\pi}{K} k^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

und für **Luft**

$$P = 2\pi k^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, a)$$

Durch diese wichtigen Formeln wird der Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung P im gegebenen Punkte des Leiters und der Dichte k der Elektrizität in demselben Punkte bestimmt; wie man sieht, wächst P proportional k^2. Vergleicht man die Formeln (25) und (25, a) mit (24, a) und (24, b) und eliminiert aus ihnen k, so erhält man

$$P = \frac{KF^2}{8\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, b)$$

und für **Luft**

$$P = \frac{F^2}{8\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, c)$$

Durch diese Formeln wird der Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung P und der Feldintensität F unmittelbar an der Leiteroberfläche bestimmt. Aus (24, a) und (25) ergibt sich noch die Formel

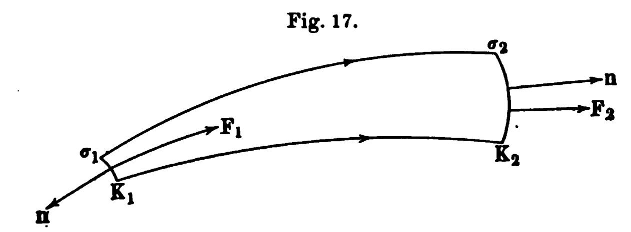
$$P = \frac{1}{2} Fk \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, d)$$

welche ihre Geltung für jedes beliebige, den Leiter umgebende Dielektrikum behält.

Zur Herleitung verschiedener Eigenschaften der **Kraftröhren**, die wir auf S. 23 kennen lernten, wollen wir uns der Formel (19) für den Induktionsfluß, der eine gegebene Fläche s durchsetzt, bedienen. Da die Seitenlinien der Seitenfläche einer Kraftröhre selbst Kraftlinien

darstellen, so ist sowohl der Kraftfluß, als auch der Induktionsfluß durch die Seitenfläche der Kraftröhre gleich Null. Es bezeichne σ den Flächeninhalt des Querschnittes der Kraftröhre an irgend einer

Fig. 17.



Stelle, F die Feldintensität, K die Dielektrizitätskonstante an der Stelle, an welcher sich das Element $d\sigma$ dieser Fläche befindet (Fig. 17). Man nennt in diesem Falle die Größe

$$\psi = \iint K F d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

den Induktionsfluß im Röhrenquerschnitt σ, die Röhre selbst nennt man ebenfalls eine Induktionsröhre. Das Integral erstreckt sich natürlich bloß auf den Flächenraum σ.

Wir wollen zunächst den Röhrenteil betrachten, welcher keine freie Elektrizität enthält; wir begrenzen ihn durch zwei Flächen σ_1 und σ_2, die überall zu den mit F_1 und F_2 bezeichneten elektrischen Kräften senkrecht sein mögen. Wir wenden die Formel (19) S. 47 auf die geschlossene Fläche dieses Röhrenabschnittes an. Da F_n in (19) die Komponente längs der äußeren Normale ist, so ist auf σ_2 offenbar $F_n = F_2$; auf σ_1 hat man $F_n = - F_1$ zu setzen. Der Fluß durch die Seitenfläche ist überall gleich Null; der Gesamtfluß ist ebenfalls gleich Null, da der Voraussetzung nach $\eta_i = 0$ und $\overline{\eta} = 0$ ist. Somit ist

$$\iint K_2 F_2 d\sigma_2 - \iint K_1 F_1 d\sigma_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (26, a)$$

oder

$$\iint K_1 F_1 d\sigma_1 = \iint K_2 F_2 d\sigma_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26, b)$$

Der Induktionsfluß ψ ist konstant längs jedem Teil einer Röhre, welche keine freie Elektrizität besitzt, in welchem Maße sich auch das dielektrische Medium in diesem Teile ändern mag. Anstatt (26, b) kann man

$$\psi_2 = \psi_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26, c)$$

schreiben. Befindet sich innerhalb der Röhre die Elektrizitätsmenge η, so hat man anstatt (26, b)

$$\iint K_2 F_2 d\sigma_2 - \iint K_1 F_1 d\sigma_1 = 4\pi\eta$$

oder

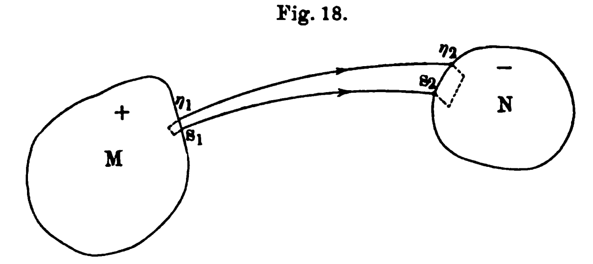
$$\psi_2 - \psi_1 = 4\pi\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26, d)$$

Der Induktionsfluß ändert sich um den Betrag $4\pi\eta$, wenn die Röhre durch die Elektrizitätsmenge η hindurchgeht. Auf Grund von (19) läßt sich leicht beweisen, daß im homogenen Medium ($K_1 = K_2 = K$), wenn in der Röhre keine freie Elektrizität vorhanden ist, sich der Kraftfluß φ an der Röhre entlang nicht ändert, so daß man $\varphi_2 = \varphi_1$ setzen kann; ist aber η von Null verschieden, so wird die Änderung des Kraftflusses bestimmt durch die Formel

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \iint F_2 d\sigma_2 - \iint F_1 d\sigma_1 = \frac{4\pi}{K}\eta \quad . \quad . \quad (26, e)$$

Betrachten wir jetzt die Röhre, welche die Oberfläche zweier Leiter M und N (Fig. 18) verbindet. Sie schneidet aus den Oberflächen der Körper M und N zwei Teile s_1 und s_2 von verschiedener Größe und

Fig. 18.



Form heraus; die Elektrizitätsmengen, die sich auf diesen Teilen befinden, bezeichnen wir mit η_1 und η_2. Verlängern wir die Röhre nach beiden Seiten ins Innere der Leiter hinein und denken wir uns zwei beliebige Flächen gezogen, welche die Röhre gewissermaßen abschließen. Auf diese Weise erhalten wir eine geschlossene Fläche, an deren sämtlichen Punkten die normalen Komponenten der Kraft F gleich Null sind, da im Inneren von Leitern stets $F = 0$ ist. Hieraus folgt, daß für diese Fläche der Induktionsfluß gleich Null ist. Formel (19, a) zeigt uns, daß in diesem Falle $\eta_i = 0$ ist, d. h. $\eta_1 + \eta_2 = 0$ oder

$$\eta_2 = -\eta_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

An den beiden Enden einer die Oberflächen zweier Leiter verbindenden Röhre befinden sich gleiche Mengen ungleichnamiger Elektrizitäten. Besonders wichtig ist der Umstand, daß obige Gleichheit bestehen bleibt, wenn M und N von verschiedenen Dielektrika umgeben sind; sie zeigt uns, daß Kraftröhren oder Induktionsröhren nur ungleichnamig elektrisierte Leiter verbinden können.

Wir wollen jetzt abermals bloß einen Teil der Kraftröhre in Betracht ziehen und die Voraussetzung machen, daß die Querschnitte σ der Röhre so klein sind, daß die Feldintensität F in allen Punkten eines solchen

Querschnittes die gleiche ist und daß die Röhre oder ihr in Betracht gezogener Teil sich in einem homogenen Medium befindet. Dann ist nach (26, b), da $K_1 = K_2$, $F_1 = const.$ und $F_2 = const.$ ist, $F_1 \sigma_1 = F_2 \sigma_2$ oder

$$F_1 : F_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

Im homogenen Medium ist die Feldintensität in verschiedenen Punkten einer Kraftröhre indirekt proportional dem Flächeninhalt des Röhrenquerschnittes. Mit anderen Worten: die Divergenz der Kraftlinien im homogenen Medium ($K = Const$) entspricht einer Abnahme, ihre Konvergenz einer Zunahme der Feldintensität. Dieser Satz ermöglicht uns mit der Größe, die man als „Kraftlinienzahl" bezeichnet, bekannt zu werden. Wenden wir uns der Fig. 18 auf voriger Seite zu. Durch σ_1 kann man offenbar eine unendliche Anzahl von Kraftlinien hindurchlegen, da durch jeden Punkt eine derartige Linie hindurchgeht. Denken wir uns auf der Fläche σ_1 eine ganz willkürliche Anzahl ν von Punkten möglichst gleichmäßig verteilt und nehmen wir an, daß hierbei auf die Oberflächeneinheit N_1 Punkte kommen, so daß also $\nu = N_1 \sigma_1$ ist. Durch alle diese Punkte ziehen wir Kraftlinien, welche die Fläche σ_2 in ebenfalls ν Punkten treffen. Kommen hier auf die Oberflächeneinheit N_2 Punkte und demnach ebenso viele Kraftlinien, so ist $\nu = N_2 \sigma_2$. Offenbar ist $N_1 \sigma_1 = N_2 \sigma_2$, also

$$N_1 : N_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28, a)$$

Jede der Zahlen N_1 und N_2 werden wir der Kürze halber die Kraftlinienzahl in σ_1 und σ_2 nennen, obgleich es, weil eine dieser Zahlen willkürlich ist, richtiger wäre zu sagen: die Zahl der Kraftlinien in bezug auf die Flächeneinheit des Querschnittes oder, was offenbar dasselbe ist, in bezug auf gleiche Flächen des Querschnittes der Kraftröhren. Vergleicht man (28, a) mit (28), so findet man

$$N_1 : N_2 = F_1 : F_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28, b)$$

Im homogenen Medium ist die Kraftlinienzahl (bezogen auf die Flächeneinheit des Querschnittes) an verschiedenen Stellen der Kraftröhre proportional der Feldintensität.

Denken wir uns eine Fläche s_1, welche die Kraftlinien überall senkrecht schneidet, und ziehen wir durch jedes Element σ_1 dieser Fläche $\nu = c \sigma_1 F_1$ Kraftlinien, so daß die Kraftlinienzahl gleich $N_1 = c F_1$ wird, wo c einen beliebigen Proportionalitätsfaktor bedeutet: mit anderen Worten heißt das, wir machen an der Fläche s_1 diese Zahl überall proportional der Feldintensität.

In diesem Falle ist die Kraftlinienzahl N im ganzen Raume, in dem sich überhaupt Kraftlinien befinden, die durch s_1 hindurchgegangen sind, der Feldintensität F proportional, d. h. wir haben

$$N = c F \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28, c)$$

Setzt man $c = 1$, d. h. macht man auf der Fläche s_1 die Werte N_1 und F_1 überall einander gleich, so erhält man überall die Beziehung

$$N = F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28, d)$$

Anstatt auf der Fläche s_1 durch jedes Element σ_1 eine Anzahl $\nu_1 = c\sigma_1 F_1$ Kraftlinien zu ziehen, kann man auch eine ebenso große Zahl von Kraftröhren hindurchlegen, für welche die Summe der Querschnitte an dieser Stelle gleich σ_1 ist. Diese Röhren werden sich im allgemeinen entweder verengern oder erweitern, werden aber natürlich nirgends divergieren, d. h. sie werden den Teil des Raumes ausfüllen, durch den sie hindurchgehen. Die Kraftlinien, von denen wir soeben gesprochen hatten, stellen gewissermaßen die Achsenlinien dieser Röhren dar. Es beziehen sich somit die Formeln (28, c) und (28, d) auch auf sie. Aus dem Vorhergehenden kommen wir zu folgendem Ergebnisse:

Die Kraftlinienzahl und ebenso die Kraftröhrenzahl im homogenen Medium ist proportional oder sogar gleich der Feldintensität, je nachdem der Konstruktion der Linien und Röhren Formel (28, c) oder (28, d) zugrunde gelegt wird.

In der Folge werden wir die Gleichheit $N = F$ gelten lassen, d. h. wir werden annehmen, es sei die Konstruktion vorgenommen, welche zu dieser Gleichheit führt.

Wir wenden uns jetzt dem Induktionsflusse und den Induktionsröhren zu, die im homogenen Medium mit den Kraftlinien identisch sind. Es sei bemerkt, daß im inhomogenen Medium speziell der Induktionsfluß, von dem sich ja leicht zur Feldintensität übergehen läßt, besonders wichtig ist. Auf S. 44 nannten wir die Größe $KF_n ds$ den Induktionsfluß, der das Flächenelement ds durchsetzt.

Die Größe

$$B = KF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28, e)$$

wollen wir die Induktion im gegebenen Punkte des Dielektrikums nennen; sie ist gleich dem Induktionsflusse durch das zu den Kraftlinien senkrechte Element ds dividiert durch ds, d. h. bezogen auf die Oberflächeneinheit. Für eine dünne Induktionsröhre erhält man aus (26, b)

$$K_1 F_1 \sigma_1 = K_2 F_2 \sigma_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

d. h.

$$B_1 \sigma_1 = B_2 \sigma_2$$

oder

$$B_1 : B_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29, a)$$

Diese Formel sieht der Formel (28) ähnlich, sie gilt aber auch für ein inhomogenes Medium; sie besagt, daß die Induktion in verschiedenen Punkten einer Induktionsröhre indirekt proportional dem Flächeninhalte des Querschnittes dieser Röhre ist.

Denken wir uns wiederum eine Fläche s_1, welche überall senkrecht zu den Kraftlinien ist. Durch jedes Element σ_1 derselben ziehen wir $\nu_1 = c\sigma_1 K_1 F_1 = c\sigma_1 B_1$ Induktionsröhren und möge die Summe der Flächeninhalte ihrer Querschnitte an dieser Stelle gleich σ_1 sein; K_1, F_1 und B_1 beziehen sich auf den Punkt, an welchem sich σ_1 befindet. Die Zahl $N_1 = \nu_1 : \sigma_1$ wollen wir die „Induktionsröhrenzahl" an der gegebenen Stelle nennen, wobei wie früher die Worte „bezogen auf die Flächeneinheit" der überall zu diesen Röhren senkrechten Fläche hinzugedacht werden müssen. In diesem Falle ist $N_1 = cB_1$. Längs jeder Röhre ist offenbar $N_1 : N_2 = \sigma_2 : \sigma_1$, siehe (28, a), folglich ist nach (29, a)

$$N_1 : N_2 = B_1 : B_2 \quad \ldots\ldots \quad (29,\text{b})$$

Da wir $N_1 = cB_1$ gemacht hatten, so ist offenbar überall $N = cB$. Setzt man $c = 1$, d. h. macht man auf der Fläche s_1 die Größen N_1 und B_1 einander numerisch gleich, so erhält man überall

$$N = B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29,\text{c})$$

Denkt man sich die Induktionsröhren derart konstruiert, wie dies vorhin angegeben war, so ist in jedem Punkte die Induktion B gleich der Induktionsröhrenzahl N. Das heißt, durch eine zu den Röhren senkrechte Fläche σ_1 gehen $N\sigma = B\sigma$ Röhren hindurch. Für Luft erhält man

$$N = F = B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29,\text{d})$$

Im weiteren werden wir voraussetzen, daß die Induktionsröhren entsprechend der Gleichung (29, c) konstruiert sind. Wie wir sahen, vgl. (26, b), ändert sich der Induktionsfluß ψ längs einer Röhre, die keine freie Elektrizität besitzt, nicht. Konstruieren wir eine der Röhren entsprechend (29, c), so kann man für eine dünne Röhre

$$\psi = KF\sigma = B\sigma = N\sigma$$

setzen; es ist aber $N\sigma$ die Zahl der durch σ hindurchgehenden Röhren, und da σ der Querschnitt einer Röhre ist, so ist $N\sigma = 1$, also $\psi = 1$.

Der Induktionsfluß in jeder der von uns konstruierten Induktionsröhren ist gleich der Einheit. Aus diesem Grunde nennt man diese Röhren auch bisweilen Einheitsröhren.

Suchen wir nunmehr den Zusammenhang zwischen der Elektrizitätsmenge η und der Zahl ν (der Einheitsröhrenzahl) der Induktionsröhren, welche gewissermaßen von dieser Elektrizität ausgehen. Die Formel (19) zeigt uns, daß der Induktionsfluß für jede geschlossene Fläche, welche die Elektrizitätsmenge η umfaßt, gleich $4\pi\eta$ ist. Ein eben solcher Induktionsfluß geht auch durch eine zu allen Röhren senkrechte

Fläche, wenn jede der Röhren den Induktionsfluß $\psi = 1$ enthält. Der Gesamtfluß aber ist gleich $4\pi\eta$, es muß also

$$\nu = 4\pi\eta \quad \ldots \ldots \quad (29, e)$$

sein. Hieraus erhält man für die Zahl ν der von der Einheit der Elektrizitätsmenge ausgehenden Induktionsröhren

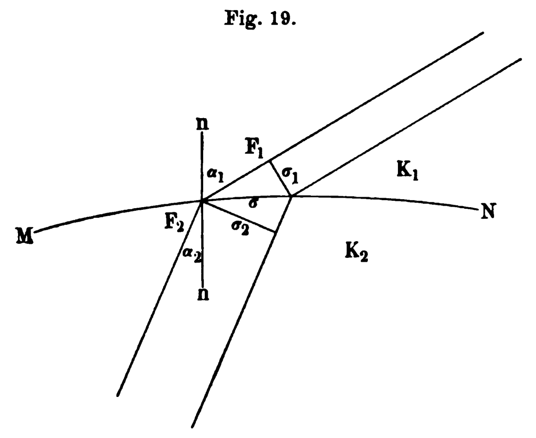
$$\nu_1 = 4\pi \quad \ldots \ldots \quad (29, f)$$

Wenden wir das Gesagte auf einen von Dielektrikum umgebenen Leiter an. Auf dem Flächenelemente ds befindet sich die Elektrizitätsmenge $\eta = k\,ds$; es gehen also $4\pi k\,ds$ Induktionsröhren von ds aus und zwar gehen alle nach derselben Seite; jede Röhre enthält einen der Einheit gleichen Induktionsfluß, es ist daher der gesamte Induktionsfluß $KF\,ds$ gleich der Röhrenzahl $4\pi k\,ds$: hieraus folgt nach (24, a) auf S. 52 $F = 4\pi k : K$. Führt man die Induktion $B = KF$ in den Ausdruck (25, b) für die Oberflächenspannung P ein, so erhält man

$$P = \frac{BF}{8\pi} \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Zum Schluß wollen wir beweisen, daß die Induktionsröhren beim Übergange aus einem Dielektrikum ins andere gewissermaßen eine Brechung erleiden. Dasselbe muß natürlich auch von den Kraftlinien gelten. Es sei MN die Trennungsfläche zweier Medien, deren Induktionsvermögen K_1 und K_2 ist. Wir betrachten eine Induktionsröhre, welche durch das Element σ der Fläche MN (Fig. 19) hindurchgeht. Nehmen wir an, sie bilde mit der Normalen nn die Winkel α_1 und α_2, und ihre Querschnitte zu beiden Seiten von MN seien σ_1 und σ_2. Ist auf MN keine freie Elektrizität vorhanden, so ist nach (21) auf S. 50

Fig. 19.



$$K_1 F_{1,n} = K_2 F_{2,n} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

$$K_1 F_1 \cos\alpha_1 = K_2 F_2 \cos\alpha_2 \quad \ldots \ldots \quad (31, a)$$

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit σ, so erhält man $K_1 F_1 \sigma_1 = K_2 F_2 \sigma_2$, d. h. die Konstanz des Induktionsflusses in der

Röhre entsprechend Formel (29). Wie man leicht einsieht, müssen die tangentialen Komponenten der Kraft zu beiden Seiten der Fläche MN einander gleich sein, wenn man zum Grenzfalle übergeht, denn hier fallen die beiden Komponenten zusammen: wir erhalten demnach

$$F_1 \sin \alpha_1 = F_2 \sin \alpha_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31.b)$$

Diese Gleichung gibt, zusammengehalten mit (31, a), die Formel

$$\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{K_1}{K_2} = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31, c)$$

Durch diese Formel wird die Brechung der Kraftlinien und Induktionsröhren beim Übergange aus einem Medium ins andere bestimmt.

Wir haben alle diese verschiedenen Herleitungen als Folgerungen aus den Grundvorstellungen dargestellt, die dem Bilde A entnommen sind. Wir mußten auch so verfahren, da sich alle unsere Schlüsse auf das Gaussische Theorem stützten (S. 47), das wir mit Hilfe von Formel (17) oder, was dasselbe besagt, von Formel (11) bewiesen haben; diese Formeln aber, welche die Größe η enthalten, gehören ganz und gar zum Bilde A.

Bild B.

Auf S. 24 hatten wir gesagt, daß innerhalb gewisser und zwar sehr weiter Grenzen alle Erscheinungen durchaus derart vor sich gehen, als ob die Grundzüge des Bildes A richtig wären. Wir können auch überzeugt sein, daß alle soeben erhaltenen Resultate in Wirklichkeit richtig sind. Es erübrigt aber nun, ihre physikalische Bedeutung von dem Gesichtspunkte aus zu finden, der einer Theorie entspricht, welche auf das Bild B zurückführt.

Das Coulombsche Gesetz entspricht im Bilde A einer aprioristischen Eigenschaft der Elektrizität, eines in Wirklichkeit selbständig existierenden Stoffes; im Bilde B resultiert dasselbe Gesetz als Endausdruck für die Kräfte, welche auf elektrisierte Körper wirken; letztere sind elektrisiert infolge von Spannungen, die im Äther auftreten, in Spannungsröhren, die an den Körpern haften und sich in bestimmter Weise anordnen, je nach den Spannungen, den Drucken, welche zwischen den Röhren vorhanden sind und nach dem Grade der Beweglichkeit der Enden dieser Röhren (S. 34). Maxwell, Hertz, Boltzmann u. a. haben gezeigt, in welcher Weise das Coulombsche Gesetz aus den Formeln hergeleitet werden kann, die den Grundgedanken Faradays über die prävalierende Rolle des dielektrischen Mediums ausdrücken. Wir können hier nicht auf Einzelheiten eingehen und beschränken uns auf den Hinweis, daß das Coulombsche Gesetz mit dem Bilde B im Einklange steht.

Die Induktionsröhren des Bildes A, welche eine nur geometrische Bedeutung haben, sind im Bilde B Spannungsröhren, die in ihrem ganzen Verlaufe als wirklich in Äther existierend angesehen werden. Kann man diese Röhren mit Fasern vergleichen, so muß die Zahl derselben, die durch die Flächeneinheit hindurchgeht, eine endliche sein. Aber über diese Zahl wissen wir nichts, wir führen daher einigermaßen willkürlich den Begriff einer Einheitsröhre der Spannung ein, indem wir als solche eine Röhre gelten lassen, wie sie im Bilde A der Einheitsröhre der Induktion entspricht, d. h. für welche in allen Querschnitten σ der Induktionsfluß

$$\psi = KF\sigma = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

ist. Formel (29, e), nämlich

$$\nu = 4\pi\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32, \text{a})$$

stellt in einfachster Form den Zusammenhang zwischen den Bildern A und B dar; hier ist η die Menge der freien Elektrizität an einem bestimmten Orte, ν die Zahl der Einheitsröhren der Spannung, welche an demselben Orte endigen. Auf S. 40 hatten wir die Hypothese aufgestellt, daß η von der Art des umgebenden Mediums unabhängig sei. Jetzt haben wir unsere Hypothese folgendermaßen zu formulieren: die Anzahl der Spannungsröhren, welche von einem gegebenen Körper ausgeht, ändert sich nicht, wenn man diesen Körper in verschiedene Medien einführt. Die Gleichung $\psi = 1$ bleibt für jede Röhre bestehen: mit Änderung von K ändert sich auch F.

Für die Spannung P auf der Leiteroberfläche (Kraft pro Einheit der Oberfläche) hatten wir die Ausdrücke, vgl. (25), (25, b) und (25, d),

$$P = \frac{2\pi k^2}{K} = \frac{KF^2}{8\pi} = \frac{1}{2} Fk \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32, \text{b})$$

In der Auffassung der Größe P, d. h. der Kraft, welche auf den beweglichen Teil der Oberflächenschicht des Leiters in der Richtung der äußeren Normalen zur Oberfläche wirkt, spricht sich besonders scharf der charakteristische Unterschied zwischen den beiden Bildern A und B aus; das Bild A sagt uns, daß P eine Stoßkraft, das Bild B dagegen, daß es eine Zugkraft ist, eine Folge der Spannung in den Röhren, welche auf dem betrachteten Teile der Leiteroberfläche endigen.

Wir haben nun die Spannungsröhren näher zu betrachten und zwar vor allem ihre Enden. Es bedeute p die Spannung am Ende einer Einheitsröhre, σ ihren Querschnitt, F die Feldintensität. Die Einheit einer gleichmäßig elektrisierten Oberfläche enthält k Elektrizitätseinheiten, es endigen daher auf ihr

$$N = 4\pi k = KF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (32, c)$$

Röhren, welche die Gesamtspannung P erzeugen. Hieraus folgt, daß der Flächeninhalt des Querschnittes am Ende der Einheitsröhre gleich

$$\sigma = \frac{1}{4\pi k} = \frac{1}{KF} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (32, d)$$

ist, vgl. (24, a) und (32), die Spannung p am Ende einer solchen Röhre aber

$$p = \frac{P}{4\pi k} = P\sigma = \frac{k}{2K} = \frac{F}{8\pi} = \frac{1}{8\pi K\sigma} \quad . \quad . \qquad (32, e)$$

Die Formeln (32, c) und (32, e) zeigen uns, daß einer Verdoppelung der Elektrisierung eines Leiters nicht nur eine Verdoppelung der Anzahl N der Röhren entspricht, sondern auch der Spannung p in jeder der Röhren, wie dies bereits auf S. 26 erwähnt wurde. Offenbar kann jeder Querschnitt σ einer Röhre als Ende derselben dienen, wir nehmen daher an, daß an einer ganzen Röhre entlang die Spannung derselben

$$p = \frac{F}{8\pi} = \frac{1}{8\pi K\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (32, f)$$

ist.

Die Spannung einer Einheitsröhre ist an der Röhre entlang direkt proportional der Feldintensität oder indirekt proportional dem Inhalte des Querschnittes der Röhre.

Die Größe k, die in den Formeln (32, b), (32, d), (32, e) vorkommt, d. h. die Elektrizitätsdichte, hat gemäß dem Bilde B scheinbar gar keine Bedeutung. Maxwell führt jedoch eine neue Größe $\mathfrak{D}$ ein, die er die elektrische Verschiebung (electric displacement) nennt und die bei völliger Zugehörigkeit zum Bilde B sich auf die verschiedenen Querschnitte σ der Einheitsröhre der Spannung bezieht und dabei gleich der Größe k des Bildes A ist, d. h. gleich ist der Dichte der freien Elektrizität, welche sich auf der Leiteroberfläche befinden würde, wenn sich das Röhrenende im Querschnitte σ befände. Die Verschiebung $\mathfrak{D}$ drückt gewissermaßen die Tatsache aus, daß wir es in den Röhren mit einer einseitigen Deformation zu tun haben, welche nicht einer Spannung im gewöhnlichen Sinne des Wortes (S. 26) entspricht. Diese Verschiebung an den Röhrenenden erzeugt eben die Gesamtheit der Erscheinungen, welche eine elektrisierte Fläche erkennen läßt. Sie ist aber in allen Röhrenquerschnitten vorhanden und man erhält einen Ausdruck für sie, wenn man in den Formeln (32, d), (32, e) und (28, e) den Wert $\mathfrak{D} = k$ setzt. Somit ist

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} KF = \frac{1}{4\pi} B = 2Kp = \frac{1}{4\pi\sigma} \quad . \quad . \qquad (32, g)$$

Die Verschiebung längs einer Einheitsröhre der Spannung ist proportional der Induktion B oder indirekt proportional dem Inhalt des Röhrenquerschnittes. Das Produkt $\mathfrak{D}\sigma$ entspricht der in dem gegebenen Querschnitte verschobenen Stoffmenge. Für eine Einheitsröhre ist

$$\mathfrak{D}\sigma = \frac{1}{4\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32,\mathrm{h})$$

d. h. jenes Produkt ist für alle Querschnitte einer solchen Röhre konstant, was der Verschiebung einer inkompressibeln Flüssigkeit entspricht. Das Verhältnis der Feldintensität F zur Verschiebung $\mathfrak{D}$, d. h. die Größe

$$\frac{F}{\mathfrak{D}} = \frac{4\pi}{K} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32,\mathrm{i})$$

nennt Maxwell den Koeffizienten der elektrischen Elastizität des Dielektrikums, analog den betreffenden Koeffizienten in der Elastizitätslehre der festen Körper. Wie man sieht, ist jener Koeffizient der Dielektrizitätskonstante K indirekt proportional.

Als Einheitsröhre hatten wir eine solche bezeichnet, für die

$$\psi = \sigma K F = 1$$

ist; der Einheit der Elektrizitätsmenge entsprechen 4π solcher Röhren. Viele Autoren bezeichnen übrigens als Einheitsröhre eine solche, die von der Einheit der Elektrizitätsmenge ausgeht. Anstatt (29, e) oder (32, a) erhalten sie dementsprechend die Beziehung $\nu = \eta$.

Es erübrigt nun noch, in Kürze auf die Bedingungen für das Gleichgewicht der Spannungsröhren hinzuweisen. Wie wir sahen, wirkt in jedem Querschnitt einer Einheitsröhre σ die Spannung p, für welche die Ausdrücke in (32, f) gelten und zu denen man noch die Formel $p = \frac{\mathfrak{D}}{2K}$, vgl. (32, g), hinzufügen kann. Geht man wieder zur Flächeneinheit für den Röhrenquerschnitt über, so erhält man die Spannung P, welche durch die Formeln (32, b) gegeben ist. Führt man anstatt k die Verschiebung $\mathfrak{D}$ ein, sowie den veränderlichen Inhalt des Querschnittes der Einheitsröhren σ, so erhält man schließlich

$$P = \frac{KF^2}{8\pi} = \frac{BF}{8\pi} = \frac{F\mathfrak{D}}{2} = \frac{2\pi\mathfrak{D}^2}{K} = \frac{1}{8\pi K\sigma^2}. \quad \cdot \quad (32,\mathrm{k})$$

Maxwell hat gezeigt, daß sich eine Spannungsröhre im Gleichgewicht befindet, wenn ihre Seitenfläche einen Druck erfährt, der, bezogen auf die Flächeneinheit, ebenfalls gleich P ist. Somit ist in allen Punkten eines elektrischen Feldes eine Spannung an den Röhren entlang und ein Druck senkrecht zu ihren Seitenflächen vorhanden. Die auf die Flächeneinheit des Querschnittes und auf die Einheit der Seitenfläche bezogene

Spannung und der entsprechende Druck sind einander gleich und werden durch die Formeln (32, k) bestimmt, wo sie im Zusammenhange mit der Feldintensität F, der Induktion B, der Verschiebung $\mathfrak{D}$, dem Inhalte σ des Querschnittes der Einheitsröhre und der Dielektrizitätskonstanten K stehen.

Bild C.

In der Einleitung zu diesem Bande war bereits das Bild C erwähnt worden, welches der modernen sog. Elektronentheorie der elektrischen Erscheinungen entspricht.

Wie wir sehen, liegt ihm die Vorstellung zugrunde, daß die Elektrizität ein besonderer, in Wirklichkeit vorhandener Stoff ist. Dieser Stoff ruft im umgebenden Äther die Änderungen hervor, welche durch das Bild C beschrieben werden. Er hat einen atomistischen Bau, d. h. er besteht aus gesonderten kleinsten Teilchen, welche die Elementarmenge der Elektrizität darstellen; diese Elektrizitätsatome heißen Elektronen. In der Absicht, uns zunächst mit dem äußeren Wesen der elektrischen Erscheinungen bekannt zu machen, haben wir uns auf eine bloße Beschreibung derselben beschränkt und uns hierbei aus Gründen, die ausführlich besprochen wurden, auf die Bilder A und B bezogen. Das Bild C kann uns für diesen Zweck vorläufig keinen besonderen Nutzen bringen; wir wollen hier nur auf die absolute Größe eines Elektrons verweisen. Eine ganze Reihe von verschiedenartigen Untersuchungen hat zu dem Resultate geführt, daß der angenäherte Wert eines Elektrons der folgende ist:

1 Elektron $= 3 \cdot 10^{-10}$ el.-st. C. G. S.-Einheiten der Elektrizität (32, l)

hieraus folgt, vgl. (12) auf S. 42

1 Elektron $= 10^{-19}$ Coulombs $= 10^{-13}$ Mikrocoulombs . . (32, m)

Wir werden sehen, daß das Elektron in Lösungen mit der Materie verbunden ist und mit ihr ein sog. „Ion" bildet.

Bezeichnen wir mit m die in Grammen ausgedrückte Stoffmenge, die mit einem Elektron verbunden ist. Zahlreiche Untersuchungen, die wir erst später kennen lernen werden, haben zu dem Ergebnisse geführt, daß für das Wasserstoffion die Beziehung

$$\frac{e}{m} = 10^4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32, n)$$

gilt, wo e die Ladung des Elektrons, ausgedrückt in el.-mg. C. G. S.-Einheiten ist, vgl. (12) auf S. 42, während m in Grammen ausgedrückt ist. Ist e in el.-st. C. G. S.-Einheiten ausgedrückt, so ist für das Wasserstoffion angenähert

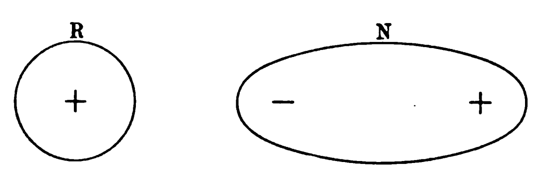
$$\frac{e}{m} = 3 \cdot 10^{14} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32, o)$$

§ 5. Elektrostatische Induktion. Bei der weiteren Betrachtung der elektrischen Erscheinungen müssen wir uns der Terminologie bedienen, die auf das Bild A zurückführt und zwar nicht nur bei der Erklärung, sondern bereits bei der Beschreibung der Erscheinungen, da es in vielen Fällen äußerst schwer wäre, für dieselben eine Terminologie zu finden, die so zu sagen ganz neutral, d. h. von keinem „Bilde" abhängig wäre. So müssen wir z. B. von der Elektrizitätsmenge sprechen, um auf diese oder jene Tatsache verweisen zu können. Man darf aber nicht vergessen, daß dieser Ausdruck bei der Beschreibung der Erscheinung das in Wirklichkeit vielleicht durchaus unbekannte Substrat bezeichnet, dessen Rolle im Bilde A der Menge eines mit dem Namen Elektrizität belegten Stoffes zufällt, im Bilde B dagegen der Größe der Spannung in den Spannungsröhren und der Anzahl dieser Röhren.

Die Erscheinung der elektrostatischen Induktion, die wir hier einfach Induktion nennen wollen (diese Erscheinung ist nicht mit der ebenso benannten Größe B, vgl. (29, c) auf S. 58 zu verwechseln), besteht im folgenden.

Nähert man einem elektrisierten Körper R (Fig. 20) einen anderen Körper N, welcher noch nicht elektrisiert war, so weist dieser Körper N

Fig. 20.

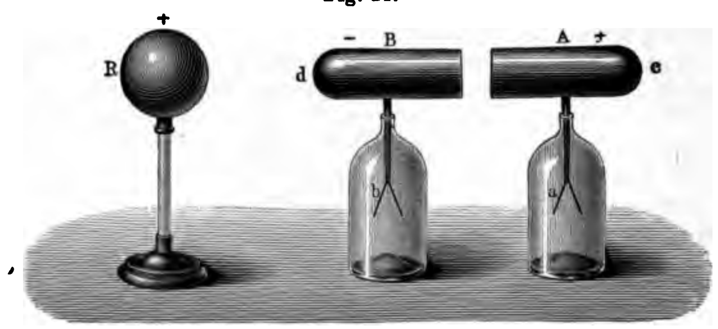


ebenfalls Elektrisierung auf, die durch die Nachbarschaft des Körpers R hervorgerufen sein muß. Die Ladung des Körpers N heißt die induzierte, diejenige des Körpers R die induzierende. Auf N treten beide Elektrizitäten auf, und zwar auf der dem Körper R zugekehrten Seite die ungleichnamige, auf der anderen Seite die gleichnamige, wie auf R. Ist N ein Leiter, so lassen sich diese beiden Elektrizitäten voneinander trennen. Hierzu kann der in Fig. 21 (a. f. S.) abgebildete Apparat dienen. R ist eine elektrisierte Kugel, cd ein metallener Zylinder, dessen beide Hälften zunächst bis zur Berührung genähert sind; jede Hälfte steht mit einem Elektroskop in Verbindung. Nähert man die beispielsweise positiv elektrisierte Kugel R, rückt die Zylinderhälften auseinander und entfernt hierauf R, so zeigen die Elektroskope, daß beide Hälften in der oben angegebenen Weise elektrisiert sind. Bringt man dann beide Zylinderhälften wieder zur Berührung, so fallen die Blättchen in jedem Elektroskope zusammen. Hiermit ist bewiesen, daß bei der Induktion gleiche Mengen ungleichnamiger induzierter Elektrizitäten erhalten werden. Sind die Zylinderhälften zur Berührung

gebracht und bringt man bei Anwesenheit von R an das Ende c noch einen metallenen Körper, so breitet sich die gleichnamige (mit der auf R vorhandenen) Elektrizität auf seiner Oberfläche aus und sammelt sich vorzugsweise an dem Ende an, das am meisten von R entfernt ist. Verbindet man c mit der Erde, so verschwindet die gleichnamige Elektrizität, sie „wird zur Erde abgeleitet". Hebt man die Verbindung mit der Erde auf und entfernt den Körper R, so bleibt der Zylinder elektrisiert, und zwar ungleichnamig mit R. Hierin besteht ein bequemes Verfahren, einen Leiter zu elektrisieren.

Die Körper R und N (Fig. 20) ziehen einander an, da ihre einander zugewandten Teile ungleichnamig elektrisiert sind. Diese Anziehung nimmt zu, wenn der Körper N mit der Erde verbunden ist. In der eben beschriebenen Weise erklärt sich auch die Anziehung leichter Körper, die wir auf S. 19 erwähnt hatten; diese An-

Fig. 21.



ziehung muß offenbar mit größerer Kraft erfolgen, wenn der leichte Körper nicht isoliert ist.

Nehmen wir an, R sei ebenfalls ein Leiter. In diesem Falle findet man, daß auf ihm eine Verschiebung der Elektrizität nach N hin erfolgt.

Jede der beiden gleichen auf N induzierten Elektrizitätsmengen ist um so größer, je näher R und N einander sind. Nähert man R und N einander immer mehr, so nehmen beide Ladungen auf N immer zu und konzentriert sich die Ladung auf R immer mehr an dem Teile seiner Oberfläche, welcher dem Körper N am nächsten ist. Bei genügender Annäherung erfolgt die gegenseitige Vernichtung der ungleichnamigen Elektrisierungen auf R und N, wobei der Vernichtungsakt selbst äußerlich durch das Auftreten eines Funkens im Zwischenraume zwischen R und N gekennzeichnet wird. Zum Schlusse bleibt nur eine positive Ladung auf R und N übrig, gleich als wenn einfach ein Teil der Ladung des Körpers R auf den Körper N übergegangen wäre; im wesentlichen erfolgt jeder Übergang der Elektrisierung von einem Leiter auf einen

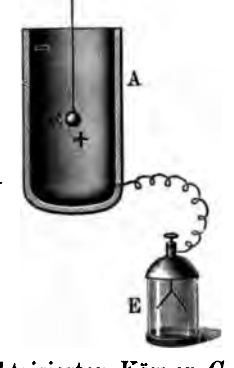
anderen, mit ihm zur Berührung gebrachten, in der soeben geschilderten komplizierten Weise.

Auf der Induktion beruht die Tatsache, daß es zum Nachweise des elektrischen Zustandes eines Körpers genügt, denselben einem Elektroskope von oben her zu nähern; die Blättchen divergieren dann unter der Einwirkung der induzierten gleichnamigen Elektrizität.

Verbindet man den Körper *N* mit der Erde, so verschiebt sich die Ladung des Körpers *R* noch mehr nach der Seite von *N* hin und nimmt gleichzeitig, wie bereits erwähnt wurde, die negative Ladung, die auf *N* zurückbleibt, zu. Letztere ist immer kleiner als die Ladung des Körpers *R*, mit Ausnahme des Falles, auf den sich der berühmte Faradaysche Lehrsatz bezieht:

Bringt man beliebige elektrisierte Körper *R* in den Hohlraum eines Leiters *N*, so sind 1. die gleichen Mengen der ungleichnamigen Elektrizitäten, welche infolge der Induktion auf der Innen- und Außenfläche des Leiters *N* auftreten, gleich der vollen induzierenden Elektrizitätsmenge, die sich auf den Körpern *R* befindet, unabhängig von der Lage dieser Körper; 2. die Lage der Körper *R* hat keinen Einfluß auf die Verteilung der auf der Außenfläche von *N* induzierten Elektrizität; 3. verbindet man den Körper *N* mit der Erde, so wird die Feldintensität in allen Punkten des Körpers *N* gleich Null.

Fig. 22.



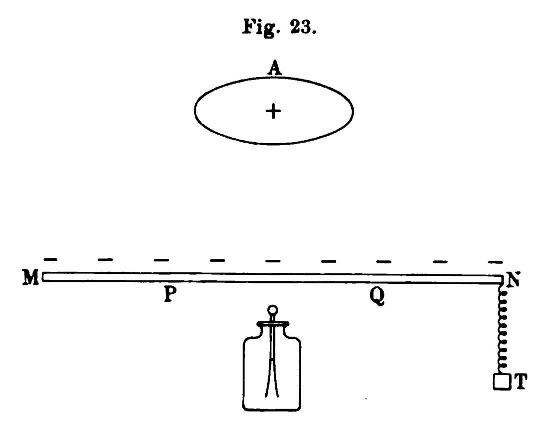
Zum Beweise obigen Satzes hat Faraday folgende Versuche angestellt: ein metallenes isoliertes Gefäß *A* (Fig. 22) ist mit einem Elektroskop *E* verbunden. Führt man in *A* einen elektrisierten Körper *C* ein, wobei es gut ist, *A* durch einen Metalldeckel zu verschließen, so zeigt das Elektroskop *E* das Vorhandensein einer Ladung auf der Außenfläche des Gefäßes *A* an. Verbindet man *A* mit der Erde, so wird diese Ladung zur Erde abgeleitet und die Elektroskopblättchen fallen zusammen. Unterbricht man die Verbindung mit der Erde und berührt hierauf mit dem Körper *C* die Innenfläche des Gefäßes *A*, so bleiben die Blättchen in Ruhe und treten überhaupt auf *A* keinerlei Spuren einer Elektrisierung auf. Hierdurch wird bewiesen, daß auf der Innenfläche von *A* eine ebenso große Elektrizitätsmenge induziert worden war, wie die auf dem Körper *C* befindliche. Die Richtigkeit der übrigen Teile des Faradayschen Theorems wird durch die unmittelbare Beobachtung erwiesen.

Im engen Zusammenhange mit dem Faradayschen Theoreme steht die Erscheinung des sog. elektrischen Schattens oder der

elektrischen Schirmwirkung, welche darin besteht, daß eine metallene, nicht allzu kleine Platte MN (Fig. 23), welche mit der Erde T verbunden ist (in schematischen Figuren pflegt man die Verbindung mit der Erde etwa in der Weise anzudeuten, wie dies hier geschehen ist) und sich in der Nähe eines elektrisierten Körpers A befindet, das elektrische Feld in dem Teile des Raumes PQ fast vollständig vernichtet, welcher nahe der Plattenmitte, hinter der Platte, von A aus gerechnet, liegt. Die Blättchen eines Elektroskops, welches sich in diesem Raume befindet, bleiben in Ruhe; man sagt von dem Elektroskope, es befinde sich im elektrischen Schatten der Platte MN, die wie ein Schirm wirkt. Je größer die Platte ist und je näher man sich derselben befindet, um so merklicher ist die Beschattung, d. h. um so näher an Null ist die Feldintensität.

Wir kehren zum einfachsten Falle der Induktion zurück und nehmen an, der Körper N (Fig. 20) sei ein Dielektrikum. Wie wir in der Folge sehen werden, hängen die in diesem Falle auftretenden elektrischen Erscheinungen von der Zeit ab, d. h. ihr Charakter ändert sich im Zusammenhange mit der Dauer der Einwirkung des Körpers R auf das Dielektrikum N. An dieser Stelle beschränken wir uns auf die Betrachtung des Falles, daß diese Einwirkung nur sehr kurze Zeit dauert. In diesem Falle spielen sich alle Erscheinungen im umgebenden Medium in einer Weise ab, als ob auf der Oberfläche des Dielektrikums N zwei Elektrisierungen auftreten, ganz analog denen, welche in dem Falle erscheinen, wo N ein Leiter ist. Sie verschwinden, sobald man R entfernt. Sie können jedoch nicht voneinander getrennt werden, und besteht der Zylinder AB (Fig. 21) aus einem Dielektrikum, so erweisen sich die beiden Zylinderhälften, nachdem man sie auseinandergerückt und den Körper R entfernt hat, als unelektrisch. Die Elektrisierungen, welche auf dielektrischen Substanzen induziert werden, können nicht mit denen verglichen werden, die auf ihnen z. B. infolge von Reibung oder bei Berührung mit anderen elektrisierten Körpern auftreten und die sich auf ihnen sehr lange halten. Wir werden aber sehen, daß sich gerade derartige Elektrisierungen auf dielektrischen

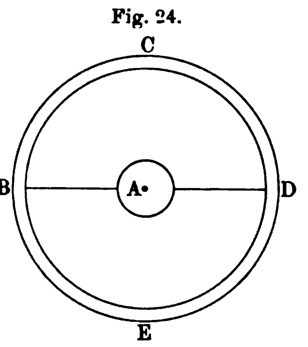
Fig. 23.



Oberflächen zeigen, wenn auf sie ein elektrisierter Körper längere Zeit hindurch einwirkt.

Es bleibt noch die sehr bedeutsame Rolle zu betrachten, welche die Dielektrika als Zwischenmedium bei den Erscheinungen der elektrostatischen Induktion spielen. Nehmen wir an, der anfänglich elektrisierte Körper R und der Körper N, auf dem die Induktion erfolgt, seien Leiter und es enthalte R die Ladung η. Die im folgenden beschriebenen Erscheinungen treten sowohl in dem Falle auf, daß N isoliert ist, als auch, daß N nicht isoliert ist; doch sind sie im letzteren Falle schärfer ausgeprägt; wir machen daher die Annahme, daß N mit der Erde verbunden ist. Um die Verhältnisse zu verallgemeinern, nehmen wir an, der Raum, in welchem sich die Körper R und N befinden, sei von einem Dielektrikum erfüllt, dessen Induktionsvermögen K_0 ist. Der Körper R induziert Elektrizität auf allen umgebenden Körpern. Zunächst sei bemerkt, daß das Faradaysche Theorem in Kraft bleibt, wie verschiedenartig auch die Dielektrika sein mögen, die sich innerhalb des Hohlraumes, z. B. im Gefäße A (Fig. 22), befinden, von dem in dem erwähnten Theorem gesagt ist: die Gesamtmenge der induzierten Elektrizität hängt weder von der Art, noch von der Verteilung der dazwischen liegenden Dielektrika ab: dafür aber ist diese Verteilung von großem Einflusse auf die Verteilung der Elektrizität, welche auf der Innenfläche unseres hohlen Leiters induziert ist. Man kann diesen Einfluß am einfachsten folgendermaßen kennzeichnen: die Induktion erfolgt vorzugsweise in der Richtung, welche durch die Dielektrika mit möglichst großem Induktionsvermögen K hindurchführt.

Fig. 24.



Um uns die Verhältnisse klar zu machen, stellen wir uns eine elektriserte Kugel A (Fig. 24) vor, welche sich im Inneren einer mit ihr konzentrischen Hohlkugel $BCDEB$ befindet; die Ladung η der Kugel A verteilt sich gleichmäßig auf ihrer Oberfläche und eine ebenso große Ladung η bedeckt, ebenfalls gleichmäßig, die Innenfläche der Hohlkugel, wenn der Hohlraum außer der Kugel A nur ein gleichartiges Dielektrikum enthält, dessen Induktionsvermögen mit K_0 bezeichnet sei. Wenn man jetzt beispielsweise den unteren Teil DEB der Kugel mit einem Dielektrikum füllt, für welches $K > K_0$ ist, so nimmt die Ladung auf der Fläche BED zu; gleichzeitig nimmt die Ladung auf der Fläche BCD ab und es erfolgt auch auf der Kugel A eine „Verdichtung" der Ladung auf ihrer unteren Hälfte. Die gesamte

Elektrizitätsmenge bleibt jedoch gleich η, sowohl auf der Kugel A, als auch auf der Innenfläche der Hohlkugel $BCDEB$.

Wir können jetzt zu den Leitern R und N zurückkehren, von denen N mit der Erde verbunden sei (Fig. 25). Bringt man zwischen R und N eine Platte C aus einer dielektrischen Substanz, für welche $K > K_0$ ist, so nimmt 1. die Elektrizitätsmenge auf N zu, man erhält den Eindruck, als ob sich die Induktion vergrößert habe oder als ob sie durch das Dielektrikum C hindurch „stärker wirkt"; 2. die Ladung von R verdichtet sich noch mehr auf der C und N zugekehrten Seite, d. h. ein Teil von ihr geht von links nach rechts; 3. die vom Körper R auf anderen umgebenden Körpern (Wände, Decke, Erde, Wolken usw.) induzierten Ladungen nehmen ab, und zwar im ganzen genau um einen Betrag, welcher der Zunahme der Ladung auf N gleich ist.

Es ist von besonderer Wichtigkeit, darauf zu verweisen, daß die Einführung eines Dielektrikums zwischen R und N, für

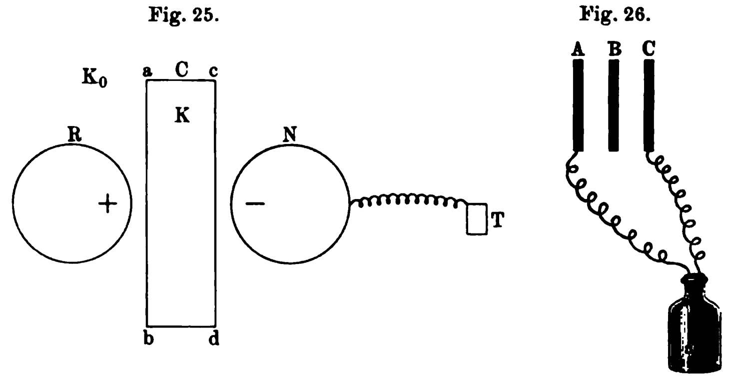


Fig. 25. Fig. 26.

welches $K > K_0$ ist, genau die gleichen Erscheinungen hervorruft, wie sie auftreten würden, wenn man R und N einander nähern würde. Der folgende berühmte Versuch von Faraday läßt alle diese Erscheinungen klar erkennen. Die Metallplatten A und C sind mit den Goldblättchen a und b (Fig. 26) verbunden; man bringt zwischen A und C eine Metallplatte B, die beispielweise positiv elektrisiert sein mag, und verbindet gleichzeitig A und C auf einen Augenblick mit der Erde. Dann werden sich negative Ladungen auf A und C zeigen, und zwar fast vollständig auf den Seiten, welche B zugekehrt sind; die Blättchen a und b bleiben in Ruhe. Führt man zwischen B und A eine dielektrische Platte (aus Glas, Schwefel, Stearin usw.) ein, so nimmt die Ladung auf A zu, infolgedessen geht auf a positive Elektrizität über; die Ladung auf C nimmt ab, so daß jetzt in b negative Elektrizität erscheint: die Blättchen a und b ziehen einander an. Gleichzeitig geht ein Teil der Ladung von B, welche sich auf der nach C gekehrten Seite befand, auf die andere Seite über. Dieselben Erscheinungen

würden auch auftreten, wenn man *A* und *B* einander nähern würde. Man könnte sagen, daß bei den Induktionserscheinungen eine aus einem Dielektrikum mit größerem *K* bestehende Schicht dieselbe Wirkung ausübt, wie eine dünnere Schicht eines Dielektrikums mit kleinerem *K* (z. B. Luft).

Wir kommen nun zur Erklärung der in diesem Paragraphen betrachteten Erscheinungen.

Bild A.

Die positive Elektrizität auf *R* (Fig. 20) zerlegt die neutrale Mischung im Leiter *N*, zieht (—) an, stößt (+) ab (wir wollen der Kürze halber uns dieser Ausdrucksweise bedienen), ferner wird (+) auf *R* stärker von (—) auf *N* angezogen, als von (+) auf *N* abgestoßen und deshalb bewegt sich der Körper *R* in der Richtung nach *N* hin. Elektrisches Gleichgewicht tritt ein, wenn die Feldintensität an allen Punkten des Körpers *N* gleich Null ist, d. h. wenn die Ladung des Körpers *N* in allen Punkten dieses Körpers ein Feld hervorruft, das an Größe gleich, jedoch dem Vorzeichen nach entgegengesetzt dem Felde ist, welches an denselben Punkten von der Ladung des Körpers *R* hervorgerufen ist. Daß hier bei der Induktion gleiche Mengen beider Elektrizitäten auf *N* erhalten werden, und daß es möglich ist, die beiden Ladungen voneinander zu trennen, vgl. Fig. 21 auf S. 66, bedarf keiner besonderen Erklärung. Verbindet man *N* mit der Erde, so geht (+), das von der Ladung des Körpers *R* abgestoßen wird, in die Erde; hierbei muß sich (—) auf *N* offenbar vergrößern, da es jetzt allein innerhalb *N* das Feld vernichten muß, das durch die Ladung des Körpers *R* hervorgerufen war. Nähert man allmählich *R* und *N* einander, so vereinigen sich schließlich die ungleichnamigen Elektrizitäten, indem sie sich gewissermaßen einen Weg durch das Dielektrikum bahnen; diese Vereinigung wird begleitet von einem Glühendwerden der Teilchen des Dielektrikums sowie der Metalle, aus denen die Körper *R* und *N* bestehen; hierin besteht die Erscheinung des Funkens. Beiläufig sei bemerkt, daß die unitarischen Hypothesen (S. 24) zu einer einfacheren Annahme über den Funken führen, indem sie in ihm den einseitigen Übergang des Stoffes von einem Körper zum anderen sehen.

Das Faradaysche Theorem kann auf Grund der Formel (19, b), S. 47 abgeleitet werden, wenn man, wie dies immer geschah, annimmt, daß sie auch für eine Fläche gilt, die sich im Inneren eines Leiters befindet. Nehmen wir an, es befinden sich im Inneren eines hohlen Leiters *M* (Fig. 27 a. f. S.), der von den Flächen S_1 und S_2 begrenzt ist, elektrisierte Körper, für welche die algebraische Summe der Ladungen gleich η_1 ist, und nehmen wir ferner an, es werde auf S_2 die Ladung η_2 induziert. Innerhalb der Körper *M* denken wir uns eine beliebige geschlossene Fläche *S* und wenden auf sie die Formel (19, b) auf S. 47 an. Da im

Inneren eines Leiters die Feldintensität überall gleich Null sein muß, so ist auf allen Elementen der Fläche S die Intensität $F_n = 0$, also $\Psi = 0$: hieraus folgt $\eta_i = 0$, d. h. $\eta_1 + \eta_2 = 0$ oder $\eta_2 = -\eta_1$, was zu beweisen war. Verbindet man M mit der Erde, so muß die Feldintensität im ganzen Raume außerhalb M gleich Null sein u. a. schon deshalb, weil jeder Punkt dieses Raumes dem Körper M angehört, wenn man die Form dieses Körpers ändert, indem man ihm in entsprechender Weise Stoff hinzufügt. Dies kann offenbar keinen Einfluß auf die Ladungen η_1 und $\eta_2 = -\eta_1$ ausüben, also auch nicht auf die Kräfte, welche außerhalb der Fläche S_2 wirken.

Um die Erscheinung der elektrischen Schirmwirkung (S. 68) zu verstehen, ersetzen wir die Platte MN (Fig. 28) durch einen in sich geschlossenen Hohlkörper $MNSRM$, von dem MN einen Teil bildet. In diesem Falle ist, wie wir sahen, die Feldintensität in P gleich Null. Hat jedoch die Platte MN eine beträchtliche Größe, so ist die Ladung auf

Fig. 27.

Fig. 28.

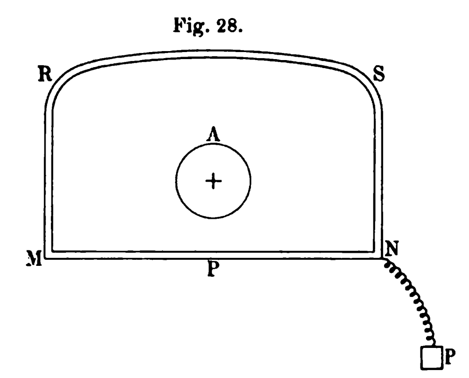


Fig. 29.

der Innenfläche des hinzugefügten Teiles $MRSN$, der sich weit vom Raume P befindet, von geringer Einwirkung auf die Punkte dieses Raumes, so daß eine Fortnahme des Teiles $MRSN$ die Feldintensität in P, die fast gleich Null bleibt, nur wenig ändert.

Fragen wir uns nun, was für den Fall eintritt, daß man dem elektrisierten Körper ein Dielektrikum nähert, dessen Konstante K_2 sich von der Konstanten K_1 des umgebenden Mediums unterscheidet. In diesem Falle ändert sich, wie wir sahen, der Induktionsfluß ψ nicht, während die Induktionsröhre von einem Medium ins andere übergeht,

d. h. an der Fläche MN (Fig. 29), welche beide Medien voneinander trennt, gilt die Gleichung, vgl. (29) auf S. 57

$$\psi = K_1 F_1 \sigma_1 = K_2 F_2 \sigma_2 \qquad (33)$$

Dies besagt, daß das Vorhandensein eines Dielektrikums K_2 eine Änderung in den Intensitäten F_1 und F_2 und in den Richtungen der Kraftlinien in beiden Medien hervorruft, die an allen Punkten der Grenzfläche MN der Bedingung (31) oder, was dasselbe ist, den Bedingungen (31) und (32, a), S. 61 zu genügen hat. Jedoch könnten dieselben Änderungen auch durch die Anwesenheit einer gewissen Ladung auf der Fläche MN hervorgerufen werden, wobei dann die Dielektrizitätskonstante zu beiden Seiten von ihr gleich K_1 wäre: mit anderen Worten heißt das, diese Ladung ersetzt die Anwesenheit eines Dielektrikums K_2. Da F_1, F_2, σ_1 und σ_2 sich nicht ändern dürfen, während das Dielektrikum K_2 durch eine Ladung ersetzt wird, so muß offenbar der Induktionsfluß zu einer Seite von MN gleich $\psi = K_1 F_1 \sigma_1$ sein, zur anderen Seite gleich $\psi' = K_1 F_2 \sigma_2$. Der Induktionsfluß hat um

$$\psi' - \psi = K_1 F_2 \sigma_2 - K_1 F_1 \sigma_1$$

zugenommen, oder nach (33) um

$$\psi' - \psi = K_1 F_2 \sigma_2 - K_2 F_2 \sigma_2 = (K_1 - K_2) F_2 \sigma_2$$
$$= \frac{K_1 - K_2}{K_2} \psi = - \frac{K_2 - K_1}{K_2} \psi \qquad (33, a)$$

Die Zunahme des Induktionsflusses, vgl. (26, d), ist gleich $4\pi\eta = 4\pi k\sigma$, wo σ ein Element der Fläche MN und k die Dichte der gesuchten Ladung ist. Hieraus folgt

$$k\sigma = - \frac{K_2 - K_1}{4\pi K_2} \psi = - \frac{K_2 - K_1}{4\pi K_2} K_1 F_1 \sigma_1$$
$$= - \frac{K_2 - K_1}{4\pi} F_2 \sigma_2 \qquad (33, b)$$

Die wirkliche Bestimmung der Dichte k begegnet in speziellen Fällen auf Grund dieser Formel großen Schwierigkeiten, da k von F_1 oder F_2, d. h. von der Feldintensität abhängig ist, welche zum Teil von der Ladung, deren Dichte gleich k ist, hervorgerufen worden ist. Wichtig ist jedoch, daß man durch das Vorhandensein dieser Ladung eine zu beiden Seiten der Fläche MN vorhandene Inhomogenität ersetzen kann.

Von dielektrischen Substanzen kann man zu Leitern übergehen, indem man die Dielektrizitätskonstante gleich Unendlich setzt. Formel (33, b) gibt, wenn $K_2 = \infty$ und $\sigma = \sigma_1$ ist [die tangentiale Komponente ist im Leiter gleich Null, also nach (31, a) auch in der an den Leiter anliegenden Schicht des Dielektrikums], als Wert für k den Ausdruck

$$k = -\frac{K_1 F_1}{4\pi} \quad \ldots \ldots \quad (33,c)$$

der mit (24, a) übereinstimmt, da in dieser Formel $F_1 = -F$ ist. Einige Forscher meinen, daß man, wenn man sich des Bildes A bedient, die Größe k in (33, c) als Dichte der in Wirklichkeit auf der Leiteroberfläche vorhandenen Ladung anzusehen habe, während die Ladung $k\sigma$ an der Grenze zweier Dielektrika, auf welche sich Formel (33, b) bezieht, eine fingierte Ladung bedeute, deren Einführung uns erlaubt, davon abzusehen, daß die Dielektrizitätskonstanten in den verschiedenen Punkten des Raumes verschieden sind.

Es ist übrigens nicht recht ersichtlich, daß eine derartige Auffassung von wesentlichem Nutzen wäre. Die Lehre von der bereits auf S. 33 erwähnten Polarisation der Dielektrika führt zu Ergebnissen, welche uns in den Stand setzen, die Ladungen auf Leitern, wie die-

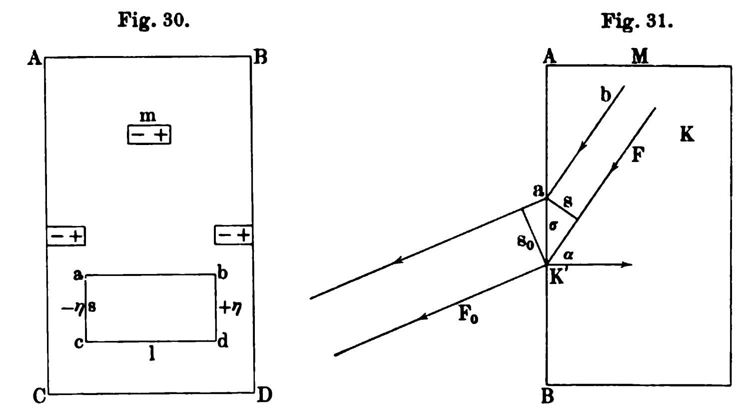


Fig. 30. Fig. 31.

jenigen auf dielektrischen Substanzen, in gleicher Weise als reell vorhanden anzusehen. Wird ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld eingeführt, so erfolgt gemäß jener Lehre eine Zerlegung der neutralen Mischung in den Molekeln der Substanz, wobei sich die beiden Elektrizitäten auf entgegengesetzten Seiten oder Enden dieser Moleküle anordnen. Diese Zerlegung erfolgt in der Richtung der Kraftlinien. Angenommen, es sei für einen gewissen Teil $ABCD$ (Fig. 30) des Dielektrikums das Feld homogen; dann erfolgt in jedem Molekül m eine Zerlegung der Elektrizität, wobei sich in allen Molekülen die positiven Ladungen auf die eine Seite, die negativen auf die entgegengesetzte Seite begeben. Nimmt man an, daß die Kraftlinien in der Richtung AB verlaufen, so findet man, daß sich auf der Seite BD eine Ladung von positiver, auf AC von negativer Elektrizität befinden muß. Verschwindet das elektrische Feld, so vereinigen sich die Ladungen in allen Molekülen, es verschwinden also auch die Ladungen

auf den Seiten AC und BD; sie besitzen, wie man sieht, nicht jene Beständigkeit und Unbeweglichkeit, welche die durch Reiben oder direkte Übertragung auf Dielektrika hervorgerufenen Ladungen kennzeichnet. Denken wir uns ein rechtwinkeliges Parallelepipedon $abcd$ mit der Grundfläche l, der Höhe s und dem Volumen $v = sl$ abgetrennt; wenn man es faktisch abtrennt, so bleibt auf bd die Ladung $\eta = k's$, auf ac die Ladung $\eta = -k's$, wo k' die Oberflächendichte bedeutet. Man nennt das Produkt $m = \eta l$ das elektrische Moment des abgetrennten Teiles. Das Moment Π der Volumeinheit heißt die Polarisation des Dielektrikums. Es ist

$$\Pi = \frac{m}{v} = \frac{\eta l}{v} = \frac{\eta l}{sl} = \frac{\eta}{s} = k' \quad . \; . \; . \quad (33, d)$$

Die Polarisation des Dielektrikums wird durch die Dichte der Ladung auf einer zu den Kraftlinien senkrechten Fläche gemessen.

Ist die Oberfläche AB (Fig. 31) des Dielektrikums nicht senkrecht zu den Kraftlinien ab im Inneren des Dielektrikums, sondern bildet mit ihnen den Winkel $90^0 - \alpha$, so ist die Dichte k_1' auf AB der Größe nach gleich $k' \cos \alpha = \Pi \cos \alpha$. In der Tat führt der Lehrsatz von der Konstanz des Induktionsflusses, wenn das Dielektrikum M von Luft umgeben ist, zu der Gleichung $KFs = F_0 s_0$ (s. Fig. 31). Ersetzt man das Dielektrikum M ebenfalls durch Luft und führt die Ladung mit der Dichte k_1' ein, so ist unter der Bedingung, daß sich F und F_0 nicht geändert haben:

$$F_0 s_0 - Fs = 4\pi k_1' \sigma,$$

oder

$$(K - 1)\, Fs = 4\pi k_1' \sigma,$$

$$k_1' = \frac{(K-1)F}{4\pi} \cdot \frac{s}{\sigma} = \frac{K-1}{4\pi} F \cos \alpha \quad . \; . \quad (33, e)$$

Wäre AB senkrecht zu den Kraftlinien, so erhielte man

$$k' = \Pi = \frac{K-1}{4\pi} F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33, f)$$

und hieraus

$$k_1' = k' \cos \alpha = \Pi \cos \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (33, g)$$

Leicht läßt sich (33, e) aus (33, b) ableiten, wenn man im Auge behält, daß die Kraftlinien in Fig. 31 und 29 nach verschiedenen Seiten verlaufen. Die Polarisation Π des Dielektrikums wird durch die elektrische Kraft F hervorgerufen. Setzt man

$$\Pi = \gamma F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33, h)$$

so wird der Koeffizient γ die elektrische Suszeptibilität genannt. Vergleicht man (33, h) mit (33, f), so erhält man die wichtige Formel

$$K = 1 + 4\pi\gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

welche die elektrische Suszeptibilität γ mit dem Induktionsvermögen K der Dielektrika in Beziehung setzt. Für Luft oder genauer genommen für das Vakuum ist $\gamma = 0$. Sehr lehrreich ist eine Herleitung der Formel (34) auf anderem Wege, wo man annimmt, daß das Dielektrikum M mit dem Leiter N in Berührung steht (Fig. 32); es bedeute F die Feldintensität unmittelbar an der Oberfläche, k die Dichte der an der Leiteroberfläche befindlichen Ladung, k_0 die Dichte der Elektrisierung auf der Oberfläche der dielektrischen Substanz, welche der durch die Kraft F hervorgerufenen Polarisation entspricht. Wie wir wissen, ist

$$F = \frac{4\pi k}{K} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34, a)$$

vgl. (24, a), S. 52; führt man die Polarisation ein, so erhält man die scheinbare Dichte $k - k_0$ und $F = 4\pi(k - k_0)$: es ist aber $k_0 = \gamma F$ und mithin

$$F = 4\pi(k - \gamma F)$$

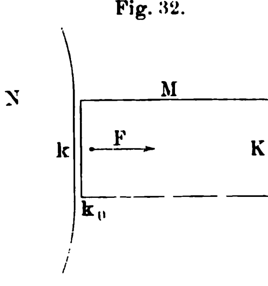
oder

$$F = \frac{4\pi k}{1 + 4\pi\gamma}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (34, a), so resultiert die Formel (34).

Mit Hilfe von (34) kann man noch eine weitere, überaus wichtige Beziehung herleiten, welche auf die physikalische Bedeutung der Größe K und auch auf die Bedeutung der Induktion B ein neues Licht wirft. Denken wir uns innerhalb eines polarisierten Dielektrikums einen unendlich kleinen Hohlraum und bezeichnen wir die Feldintensität im Inneren dieses Hohlraumes mit F'. Der Einfachheit halber wollen wir F' die Feldintensität innerhalb des Dielektrikums nennen. F' hängt von der Gestalt dieses Hohlraumes ab. Deshalb wollen wir eine bestimmte Gestalt voraussetzen, und zwar annehmen, der Hohlraum sei von zwei einander unendlich nahen, parallelen Ebenen begrenzt, welche zu den Kraftlinien des Feldes F senkrecht sind. Auf diesen Ebenen werden sich Ladungen befinden, deren Dichten k' und $-k'$ sind. Sie müssen in den Punkten des leeren Raumes eine Kraft hervorrufen, welche parallel F und gleich $2\pi k' - 2\pi(-k') = 4\pi k'$ ist, wie man dies etwa aus Formel (22, a) auf S. 50 ersieht, in welcher im Falle einer Ebene aus Symmetriegründen $F_{2,n} = -F_{1,n}$ ist. Die gesuchte Kraft F' ist demnach gleich

Fig. 32.



$$F' = F + 4\pi k'$$

oder, vgl. (33, d), (33, b) und (34).

$$F' = F + 4\pi\gamma F = F(1 + 4\pi\gamma) = KF,$$

d. h.

$$\frac{F'}{F} = K \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34, b)$$

Die Dielektrizitätskonstante (das Induktionsvermögen), die man auch nach Analogie mit der in der Lehre vom Magnetismus geltenden Terminologie als elektrische Permeabilität (Durchdringlichkeit) bezeichnen könnte, ist gleich dem Verhältnisse der Feldintensität im Dielektrikum zur Intensität des äußeren polarisierenden Feldes. Vergleicht man (34, b) mit (28, e) auf S. 57, d. h. mit der Relation $B = KF$, so sieht man, daß

$$B = F' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34, c)$$

ist. Die Induktion ist nichts anderes als die Feldintensität in dem oben erwähnten unendlich engen Spalt im Inneren des Dielektrikums.

Auf S. 33 war bereits die Theorie von Clausius und Mossotti erwähnt worden, nach welcher angenommen wird, daß sich in den dielektrischen Substanzen eine große Zahl kleiner leitender Teilchen befindet, die voneinander durch eine vollkommen nichtleitende Substanz getrennt sind. Wir wollen uns darauf beschränken, ein einziges, besonders interessantes Resultat anzuführen, das sich aus dieser Theorie ergibt. Es sei g das Verhältnis des von den leitenden Teilchen eingenommenen Volumens v zum Gesamtvolumen V des Dielektrikums, also

$$g = \frac{v}{V} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

In diesem Falle ist

$$\gamma = \frac{3g}{4\pi(1 - g)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35, a)$$

Setzt man diesen Wert in (34) ein, so wird

$$K = \frac{1 + 2g}{1 - g} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35, b)$$

woraus sich

$$g = \frac{K - 1}{K + 2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35, c)$$

ergibt. Nehmen wir an, die leitenden Teilchen seien die Moleküle selbst, aus denen das Dielektrikum besteht, und die Rolle der nichtleitenden Substanz falle dem intramolekularen Vakuum zu; es sei d die Dichte der Substanz, D die Dichte der Moleküle, d. h. die maximale Grenzdichte, welche man erhielte, falls das Dielektrikum auf das Volumen v komprimiert würde. Offenbar ist $g = v : V = d : D$, also ist nach (35, c)

$$\frac{K - 1}{(K + 2)d} = \frac{1}{D} = Const \quad \ldots\ldots \quad (35, d)$$

Wie wiederholt erwähnt wurde, ist $K = n^2$, wo n den Brechungsquotienten von Strahlen mit sehr großer Wellenlänge (S. 6) bedeutet; daher erhält man aus (35, d)

$$\frac{n^2 - 1}{(n^2 + 2)\,d} = Const \quad \ldots \ldots \quad (35, e)$$

Es ist dies dieselbe Formel, die wir im II. Bande in der Lehre von der strahlenden Energie eingehend betrachtet hatten.

Die Polarisaton der Dielektrika gibt uns die Möglichkeit, gestützt auf das Bild A, den Einfluß zu erklären, welchen letztere auf die Induktionserscheinungen haben und den wir auf S. 69 betrachtet hatten. Man hat nur zu beachten, daß das Dielektrikum C (Fig. 25 a. S. 70), in das elektrische Feld des Körpers R gebracht, derart wirkt, als ob auf seiner Seite cd sich die positive Ladung $+\eta$, auf der Seite ab die negative Ladung $-\eta$ befinde. Natürlich vergrößert $+\eta$ auf cd die auf N vorhandene Ladung und veranlaßt $-\eta$ auf ab eine weitere Verdichtung der Ladung von R auf der C und N zugekehrten Seite. In ähnlicher Weise kann man leicht den Faradayschen Versuch (S. 70, Fig. 26) erklären.

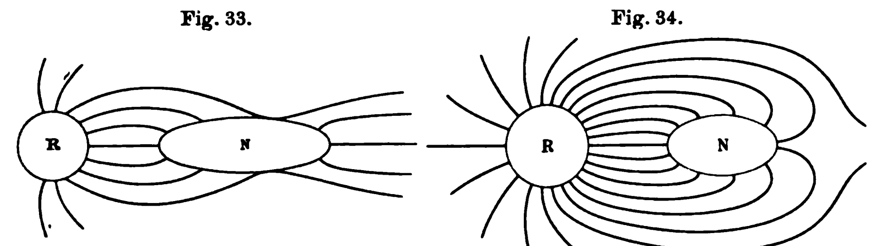
Bild B.

Die Induktionserscheinungen, welche zu Anfang dieses Paragraphen betrachtet wurden, werden auf Grund des Bildes B unvergleichlich einfacher und eleganter erklärt als nach Bild A. Wenn von irgend einem Körper R eine Anzahl N von Einheitsröhren der Spannung ausgeht (Bild A besagte, daß sich auf R die Ladung $\eta = N : 4\pi$ befinde), so ändert sich diese Zahl nicht, welche Änderungen auch im umgebenden Medium vor sich gehen mögen; ändern kann sich nur die Verteilung dieser Röhren rings um den Körper R, ihre Richtung usw. Wie wir sahen, entsprechen beide Röhrenenden an Größe gleichen Ladungen von entgegengesetzten Vorzeichen, wobei der Ausdruck „Ladung" für die zahlenmäßig meßbare Ursache bestimmter beobachteter Erscheinungen gebraucht wird; wie wir ferner sahen, wirkt zwischen den Röhren ein Seitendruck P, der durch die Formeln (32, k) S. 63 bestimmt wird, und besitzen die Röhrenenden auf Leiteroberflächen vollkommene Beweglichkeit.

Denkt man sich in diese Vorstellungen hinein, so kann man auf Grund des eben Gesagten leicht angeben, was eintreten wird, wenn man in das elektrische Feld des Körpers R (Fig. 33) einen Leiter N einführt. Die Spannungsröhre, welche die Oberfläche des Körpers N berührt, wird bei weiterer Annäherung von N an R zerreißen und ihre beiden Enden werden auf der Oberfläche des Körpers N bis zu einer neuen Gleichgewichtslage gleiten. Schließlich werden sich die Röhren, also auch die Kraftlinien derart verteilen, wie es die Fig. 33 zeigt. Hiervon kann man

sich leicht überzeugen, wenn man bedenkt, daß aus dem vom Körper *N* eingenommenen Raume gewissermaßen die seitlichen Drucke entfernt sind, denen die benachbarten Röhren bei Abwesenheit des Leiters *N* ausgesetzt wären. Man sieht ein, daß auf dem Leiter *R* die Röhrenenden zum größten Teile auf die rechte Seite von *R* übergehen und es ist unmittelbar ersichtlich, weshalb man auf dem Leiter *N* quantitativ gleiche, ungleichnamige Ladungen erhält. Verbindet man *N* mit der Erde, so entfernen sich unter der Einwirkung der Seitendrucke alle Röhrenteile, die sich abgetrennt hatten und verlieren sich auf der gewaltigen Oberfläche der Erdkugel. Aus Fig. 33 ist zu sehen, daß infolgedessen viele Röhren, die früher ganz waren, wiederum unter der Einwirkung der Seitendrucke sich *N* nähern und zerreißen, worauf der abgetrennte Teil „in die Erde geleitet wird“. Zum Schluß entsteht die Röhrenverteilung, welche Fig. 34 zeigt; hierbei geht die Ladung des

Fig. 33. Fig. 34.

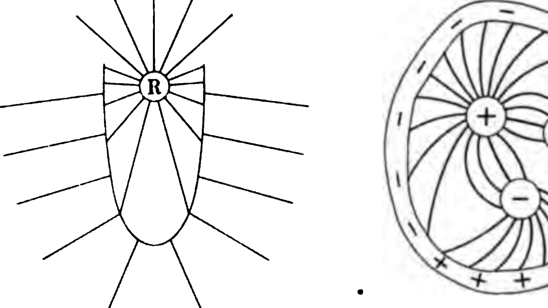


Körpers *R* noch mehr auf die *N* zugekehrte Seite über. Je mehr *R* und *N* sich gegenseitig nähern, um so mehr verdichten sich die Spannungsröhren im Zwischenraume zwischen diesen Körpern. Wir sahen aber auf S. 62 nach Formel (32, e), daß sich mit Zunahme der Zahl der aus einer gegebenen Fläche heraustretenden Röhren in demselben Verhältnisse auch die Spannung an jeder Röhre entlang und der Druck *P* der Röhren aufeinander vergrößern. Endlich erfolgt ein Zusammenbruch der Röhre im Dielektrikum, d. h. ein Aufhören der ihr entsprechenden Spannung im Äther. Diese Erscheinung ist es, die wir in der Form des elektrischen Funkens wahrnehmen; es ist dies eine Erscheinung des Übergangs von potentieller Energie der Ätherspannung in die Formen der kinetischen Energie, die sich im Funken in der Gestalt von Wärmeenergie, strahlender Energie, Schall- und Bewegungsenergie äußern.

Besonders einfach und elegant gestaltet sich die Erklärung des Faradayschen Theorems. Wenn man Körper, deren Gesamtladung mit η bezeichnet sei, allmählich in das Innere eines hohlen Leiters einführt und die Öffnung zuletzt mit einem leitenden Deckel verschließt, so zerreißen alle Spannungsröhren, wobei sich die Enden der losgetrennten Teile auf der Außenfläche des Hohlkörpers anordnen, wie dies in Fig. 35 (a. f. S.) für einen Körper *R* gezeigt ist. Ist der Körper *R* ganz in das Gefäß eingeführt und letzteres mit einem Deckel ver-

schlossen, so haben sich alle Röhren in zwei Teile geteilt: ein Teil geht vom Körper R zur Innenfläche des hohlen Leiters, der andere nimmt seinen Anfang an der Außenfläche des letzteren. Die induzierten Ladungen sind selbstverständlich gleich $\pm\eta$. Befinden sich innerhalb des hohlen Leiters mehrere Körper, welche verschiedenartig elektrisiert sind (Fig. 36), so entsprechen die Röhren, welche diese Körper untereinander und mit dem Leiter verbinden, in Summa einer Ladung, welche gleich Null ist. Es ist daher klar, daß die Röhrenenden, die sich auf der Innenfläche des Hohlkörpers befinden, zusammengenommen einer Ladung entsprechen, welche gleich der vollen Ladung unserer Körper ist. Die außen gelegenen Röhren ordnen sich mit ihren Enden an der Außenfläche des hohlen Leiters genau so an, wie dies der Fall wäre bei Abwesenheit von elektrisierten Körpern in dem Inneren des Leiters, da die von letzteren ausgehenden Spannungsröhren nicht nach außen gelangen. Verbindet man den Hohlkörper mit der

Fig. 35. Fig. 36.



Erde, so werden alle von seiner Außenfläche ausgehenden Röhren zur Erde abgeleitet; die Intensität des äußeren Feldes wird hierbei selbstverständlich gleich Null. Ruft man im Inneren eines hohlen Leiters, etwa durch Reiben, eine Elektrisierung zweier Körper hervor, so ist die Summe der Ladungen sowohl auf diesen Körpern, als auch auf der Innenfläche des Hohlkörpers gleich Null. Nicht eine einzige Röhre gelangt in den Außenraum, das aber heißt, daß die Feldintensität in diesem Raume gleich Null ist.

Die Erscheinung der elektrischen Schirmwirkung bedarf hier keiner besonderen Erklärung; hat sich die Platte MN (Fig. 37) in Verbindung mit der Erde befunden, so gehen hierauf die Spannungsröhren von A zur nächstgelegenen Oberfläche der Platte MN und zu anderen umgebenden Körpern und nur sehr wenige von ihnen gelangen in den Raum P.

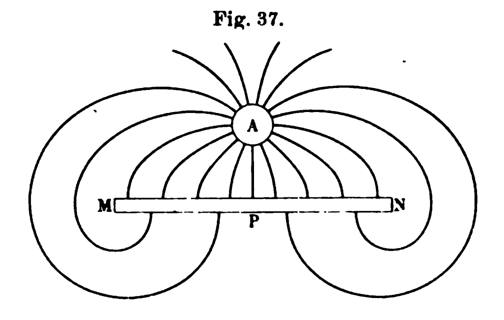
Nähert man ein Dielektrikum N einem geladenen Körper R, so gehen die von R ausgehenden Spannungsröhren frei durch N hindurch. Die Polarisation eines Dielektrikums bedeutet hier, daß die

Spannungsröhren in eine überaus große Zahl kleiner Teile zerfallen, von denen ein jeder die Oberflächen zweier benachbarter leitender Moleküle verbindet.

Das Bild B führt unmittelbar zu dem Schlusse, daß das Dielektrikum auf diejenigen Induktionserscheinungen einwirken muß, bei denen es nur die Rolle eines Zwischenmediums spielt, denn es kann nicht befremden, daß die Eigenschaften der Spannungsröhren im Äther von der Stoffart abhängen müssen, zwischen deren Molekülen sie liegen. Je geringer die Spannungen und Seitendrucke der Röhren sind, um so dichter sind diese Röhren im gegebenen Dielektrikum angeordnet.

Die Erscheinung, welche durch Fig. 24, S. 69 illustriert wurde, erklärt sich dadurch, daß sich die Spannungsröhren auf der unteren Seite der Kugel A verdichten; ein ähnliches gilt für Fig. 25 und für den Faradayschen Versuch (Fig. 26). Wir können es jetzt leichter einsehen, daß verschiedene Dielektrika eine verschiedene elektrische Suszeptibilität besitzen, die mit dem Induktionsvermögen K durch Formel (34) im Zusammenhange steht.

Fig. 37.

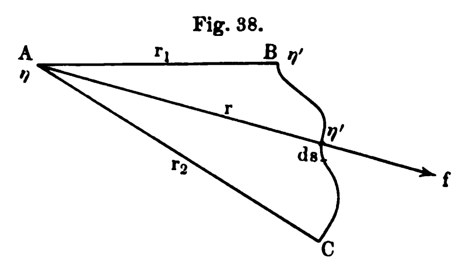


Die Formel (34, a) zeigt besonders deutlich die verdichtende Wirkung, welche die Dielektrika auf die Induktionsröhren, die im Vakuum mit den Kraftröhren identisch sind, ausüben und man sieht ein, daß K in dieser Beziehung als Maß der Verdichtungsfähigkeit des Dielektrikums dient. Diese Fähigkeit ist um so größer, je durchlässiger das Medium für die Induktionsröhren ist. Aus diesem Grunde wird auch klar, weshalb wir (S. 77) K die elektrische Permeabilität nannten.

Wir beschließen hiermit die Erklärung der grundlegenden elektrostatischen Erscheinungen, welche sich aus den Bildern A und B ergibt. Was auf S. 9 über das Bild A gesagt wurde, setzt uns in den Stand, unsere Überlegungen noch weiter fortzuführen und insbesondere einige Rechnungen vorzunehmen, während wir an den Grundvorstellungen des Bildes A festhalten; was wir auf S. 24 über die alteingebürgerte und bisher unverändert gebliebene Terminologie gesagt hatten, zwingt uns sogar zum Teil, uns hierbei an das Bild A zu halten. In Gedanken von diesem zum Bilde B überzugehen, ist nicht schwer. Wo es besonders wichtig sein sollte, werden wir die erhaltenen Ergebnisse in die Ausdrucksweise übertragen, die dem Bilde B entspricht.

§ 6. Das elektrische Potential. Im ersten Bande hatten wir uns mit den Elementen der Potentialtheorie bekannt gemacht und dieselben auf die allgemeine Gravitation angewandt; wir bedurften derselben z. B. zur Berechnung der Arbeit, welche bei der Bildung und allmählichen Verdichtung einer Kugel geleistet wird und dies führte uns zur Lösung der fundamentalen Frage, wie die Wärmeenergie der Sonne, dieser Urquelle fast aller Energieäußerungen an der Erdoberfläche, entstanden sei. Die tiefgehende Analogie zwischen dem allgemeinen Gravitationsgesetze und dem Coulombschen Gesetze gibt uns die Möglichkeit, die Lehre vom Potential auch auf die elektrostatischen Erscheinungen in Anwendung zu bringen. Wir werden jedoch nicht auf die im ersten Bande enthaltenen Herleitungen zurückverweisen; es scheint uns unerläßlich, hier dasjenige zu wiederholen, was wir im folgenden brauchen werden; es wird dies nicht nur zur Bequemlichkeit des Lesers geschehen, sondern auch aus dem Grunde, weil zwischen dem Potential, von dem im ersten Bande die Rede war und dem elektrischen Potential ein wichtiger Unterschied besteht, der darauf beruht, daß für die elektrischen Massen Anziehungs- und Abstoßungskräfte existieren, wobei wir gerade die letzteren als positive Kräfte ansehen werden.

Fig. 38.



Nehmen wir zunächst an, wir hätten ein homogenes Medium, dessen Dielektrizitätskonstante K sei und daß sich im Punkte A die Elektrizitätsmenge η befinde: wir wollen die Arbeit R der elektrischen Kräfte für den Fall berechnen, daß die Elektrizitätsmenge η' von B auf irgend einem Wege nach C transportiert werde. Wir setzen $AB = r_1$ und $AC = r_2$. Den Weg BC zerlegen wir in Elemente ds, denen das Arbeitselement

$$dR = f ds \cos(f, ds)$$

entspricht; es ist $f = \frac{\eta\eta'}{Kr^2}$, vgl. (11), S. 41, und $ds \cos(f, ds) = dr$. Substituiert man und integriert, so findet man für die gesuchte Arbeit

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\eta\eta'}{Kr^2} dr = \frac{\eta\eta'}{K}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \eta'\left(\frac{\eta}{Kr_1} - \frac{\eta}{Kr_2}\right) \cdot \cdot \quad (36)$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist die obige Formel richtig, welches auch die Vorzeichen der Größen η und η' sein mögen: ist $r_2 > r_1$ und haben η und η' verschiedene Vorzeichen, so ist $R < 0$, was wohl ohne weiteres klar ist, da in diesem Falle die Arbeit der elektrischen

Anziehungskräfte negativ sein muß. Die Arbeit R hängt nicht von der Gestalt des Weges ab, wie dies auch für Zentralkräfte (Bd. I) der Fall sein muß, zu denen auf Grund des Bildes A die elektrischen Kräfte gehören. Setzt man $r_2 = \infty$ und $r_1 = r$, so erhält man für die potentielle Energie $W = R_\infty$ zweier Elektrizitätsmengen η und η', die sich im Abstande r voneinander befinden, den Ausdruck

$$R_\infty = W = \frac{\eta\eta'}{Kr} \quad \ldots\ldots \quad (36,\text{a})$$

Für $\eta' = 1$ erhält man als Arbeit für den Transport der Einheit der Elektrizitätsmenge

$$R_1 = \frac{\eta}{Kr_1} - \frac{\eta}{Kr_2} \quad \ldots\ldots \quad (36,\text{b})$$

Ist hier $r_2 = \infty$ und setzt man $r_1 = r$, so erhält man

$$R_{1,\infty} = \frac{\eta}{Kr} \quad \ldots\ldots \quad (36,\text{c})$$

Nehmen wir an, es befinde sich in A (Fig. 39) in der Entfernung r vom geometrischen Punkte B die Elektrizitätsmenge η. Wir wollen die Größe

$$V = \frac{\eta}{Kr} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

das Potential des Punktes B oder das Potential der Elektrizitätsmenge η im Punkte B nennen, beide Ausdrücke sind gleich gebräuchlich; die Elektrizität η in A bildet gewissermaßen die Ursache für das Vorhandensein eines Potentials im Punkte B. Die letzten Formeln kann man jetzt in folgender Gestalt schreiben:

$$\left.\begin{aligned} R &= \eta'(V_1 - V_2) \\ W &= R_\infty = \eta' V \\ R_1 &= V_1 - V_2 \\ R_{1,\infty} &= V \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (37,\text{a})$$

Wir wollen das, was diese Gleichungen aussagen, hier nicht in Worte kleiden, da sie noch in allgemeinerer Form erhalten werden sollen.

Fig. 39.

A B η r $V = \frac{\eta}{r}$

Nehmen wir an, wir hätten irgend welche elektrische Massen, d. h. ein System von Körpern, die in verschiedener Weise elektrisiert sind. Der Allgemeinheit halber nehmen wir an, daß dieses teils Oberflächenmassen mit der Dichte k, teils Volummassen mit der Dichte ϱ sind.

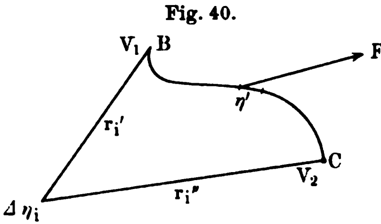
Wir zerlegen sie in Elemente $d\eta$ und nehmen an, r sei der Abstand eines derselben von einem gewissen Punkte B. Die Summe der Potentiale, welche in B von den einzelnen Elementen erhalten werden,

nennen wir das **Potential des Punktes** B oder **das Potential aller elektrischen Massen im Punkte** B. Bezeichnet man diese Größe mit V, so ist

$$V = \frac{1}{K}\int\frac{d\eta}{r} = \frac{1}{K}\iint\frac{k\,ds}{r} + \frac{1}{K}\iiint\frac{\varrho\,dv}{r} \quad . \quad . \quad (37.\mathrm{b})$$

wo ds und dv Elemente der Oberfläche und des Volumens, K die Dielektrizitätskonstante im Punkte B ist. Wir wollen die Arbeit R berechnen, welche von den elektrischen Kräften geleistet wird, während die Elektrizitätsmenge η' von einem gewissen Punkte B (Fig. 40) nach einem anderen Punkte C transportiert wird, wobei beide Punkte im elektrischen Felde der Massen gelegen sind, deren Potential durch Formel (37, b) bestimmt wird; die Potentiale der Punkte B und C mögen jetzt V_1 und V_2 sein. Wir zerlegen abermals alle elektrischen Massen in Elemente, die wir jetzt, um die Herleitung zu vereinfachen, mit $\varDelta\eta_1$, $\varDelta\eta_2$, $\varDelta\eta_3$ ... $\varDelta\eta_i$ usw. bezeichnen. Den Abstand des Elementes $\varDelta\eta_i$ vom Punkte B bezeichnen wir mit r_i', vom Punkte C mit r_i''; in diesem Falle ist

Fig. 40.



$$V_1 = \sum\frac{\varDelta\eta_i}{Kr_i'}, \qquad V_2 = \sum\frac{\varDelta\eta_i}{Kr_i''}.$$

Das Summenzeichen erstreckt sich auf alle Elemente, in die wir die ganze Ladung zerlegt haben. Die Kraft f, die auf η' in irgend einem Punkte des Weges BC einwirkt, ist die Resultante der Kräfte f_i, mit denen die Elemente $\varDelta\eta_i$ auf η' wirken. Verschiebt sich η' um einen sehr kleinen Teil des Weges, so leistet die Kraft f eine Arbeit $\varDelta R$, welche nach einem bekannten Satze (Bd. I) gleich der Summe der Arbeiten $\varDelta R_i$ ist, die von den Kräften f_i, die von den Elementen $\varDelta\eta_i$ ausgehen, geleistet wird. Dies bezieht sich auf alle Elemente des Weges BC, es ist daher auch die gesuchte Gesamtarbeit R gleich der Summe der Arbeiten R_i, welche von den Kräften f_i auf dem Gesamtwege BC geleistet werden. Somit erhält man

$$R = \varSigma R_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37, \mathrm{c})$$

Die Arbeit R_i der Kraft f_i, welche von einem Elemente der Elektrizitätsmenge $\varDelta\eta_i$ ausgeht, ist aber nach Formel (36) gleich

$$R_i = \eta'\left(\frac{\varDelta\eta_i}{Kr_i'} - \frac{\varDelta\eta_i}{Kr_i''}\right).$$

Setzt man dies in (37, c) ein, so ist

$$R = \eta' \left\{ \sum \frac{\Delta\eta_i}{Kr_i'} - \sum \frac{\Delta\eta_i}{Kr_i''} \right\},$$

d. h.

$$R = \eta' (V_1 - V_2) \quad \text{. . . . .} \quad (38)$$

Die Arbeit, welche von elektrischen Kräften beim Transport einer gewissen Elektrizitätsmenge im elektrischen Felde geleistet wird, wird gemessen durch das Produkt aus dieser Menge und der Differenz der Potentiale des Anfangspunktes (V_1) und Endpunktes (V_2) des Weges. Es gibt Fälle, wo äußere Kräfte einen elektrisierten Körper, einen Leiter oder ein Dielektrikum (z. B. ein kleines Kügelchen) von einem Punkte zum anderen transportieren. Hierbei wird offenbar die Arbeit der äußeren Kräfte gemessen durch das Produkt aus der transportierten Elektrizitätsmenge und der Differenz der Potentiale des Endpunktes (V_2) und Anfangspunktes (V_1) des Weges, d. h. sie ist gleich $\eta'(V_2 - V_1)$. Formel (38) läßt erkennen, daß die Arbeit R von der Gestalt des Weges, auf welchem η' von B nach C übergeht, unabhängig ist. Leicht kann man sich auch davon überzeugen, daß die Formel (38) richtig bleibt, welches auch die Vorzeichen der transportierten und wirkenden Ladungen sein mögen.

Kehrt η' zum Ausgangspunkt des Weges zurück, so ist die Gesamtarbeit der elektrischen Kräfte gleich Null.

Mißt man die Entfernung r in Centimetern und alle Elektrizitätsmengen in el.-st. C. G. S.-Einheiten (S. 41), so wird die Arbeit R in Ergs erhalten (10^6 = 1 Megaerg = 0,0102 Meterkilogramm, Bd. I). Nehmen wir an, der Punkt C entferne sich unendlich weit von den gegebenen elektrischen Massen. In diesem Falle ist $V_2 = 0$; ist $V_1 = V$, so erhält man für die Arbeit der elektrischen Kräfte beim Übergange von η' aus einem Punkte, dessen Potential V ist, auf beliebigem Wege bis in unendliche Entfernung, oder, was dasselbe bedeutet, für die Arbeit äußerer Kräfte beim Transport von η' aus unendlich entfernten Punkten auf beliebigem Wege bis zu einem Punkte mit dem Potential V den Ausdruck

$$R_\infty = V\eta' \quad \text{. . . . .} \quad (38,\text{a})$$

Setzt man $\eta' = 1$, so ist

$$R_1 = V_1 - V_2 \quad \text{. . . . . . .} \quad (38,\text{b})$$

$$R_{1\infty} = V \quad \text{. . . . .} \quad (38,\text{c})$$

Die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ zweier Punkte ist gleich der Arbeit der elektrischen Kräfte beim Übergange der Einheit der Elektrizitätsmenge ($\eta = 1$) auf beliebigem Wege von dem ersten (V_1) Punkte zum zweiten (V_2) oder gleich der Arbeit äußerer Kräfte, welche beim Transport

von $\eta = 1$ von dem zweiten Punkte (V_2) zum ersten V_1 geleistet wird.

Die letzte Formel (38, c) enthüllt uns die mechanische Bedeutung der Größe V, vgl. (37, b):

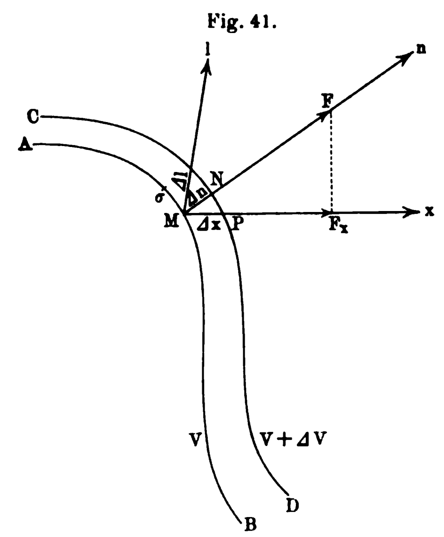
Das Potential eines Punktes innerhalb eines elektrischen Feldes ist gleich der Arbeit elektrischer Kräfte für den Übergang der Einheit der Elektrizitätsmenge ($\eta = 1$) aus diesem Punkte auf beliebigem Wege in die Unendlichkeit, oder gleich der Arbeit von Außenkräften für den Transport von $\eta = 1$ aus der Unendlichkeit bis zu diesem Punkte.

Das Potential eines Punktes ist offenbar für verschiedene Punkte verschieden; es ist eine Punktfunktion (Bd. I), d. h. eine Funktion der Koordinaten des Punktes, zu welchem es gehört. Sind diese Koordinaten x, y, z, so kann man

$$V = \varphi(x, y, z) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

setzen. Formel (37, b) zeigt, daß es beim Vorhandensein ungleichnamig elektrisierter Körper Punkte geben muß, die nicht unendlich weit sind und in denen dennoch $V = 0$ ist, ebenso auch Punkte mit negativem Potential, wie ein solches in der Lehre vom Potential der allgemeinen Schwerkraft nicht vorkommt. Zum Unterschiede vom Potential eines Leiters, mit dem wir später bekannt werden sollen, nennt man die Größe V häufig die Potentialfunktion im Punkte B.

Fig. 41.



Der geometrische Ort der Punkte, in denen die Potentialfunktion (37, b) einen und denselben Wert hat, stellt eine gewisse Fläche dar, welche die Niveaufläche der Potentialfunktion genannt wird. Durch jeden Punkt des Raumes geht eine von diesen Flächen hindurch, deren Gleichungen

$$V = \varphi(x, y, z) = Const \quad \ldots\ldots \quad (39, a)$$

sind. Es läßt sich beweisen, daß V eine eindeutige, stetige und endliche Funktion für alle Punkte des Raumes ist.

Es sei AB (Fig. 41) eine Niveaufläche, welche durch den gegebenen Punkt M hindurchgeht; F die Kraft, d. h. die Feldintensität im Punkte M.

Befindet sich in M die Elektrizitätsmenge η' und verschiebt man dieselbe in beliebiger Richtung längs der Fläche AB um die kleine Wegstrecke σ, so ist nach Formel (38) die Arbeit R der Kraft F gleich Null, da $V_1 = V_2 = V$ ist. Hieraus folgt, daß die Kraft F senkrecht zu allen Richtungen σ ist, welche auf unserer Fläche vorhanden sind, d. h. sie hat die Richtung der an diese Fläche gezogenen Normalen n.

Die elektrische Kraft (Feldintensität) hat in jedem Punkte des Raumes die Richtung der Normalen zu der Niveaufläche der Potentialfunktion, die durch eben diesen Punkt hindurchgeht.

Nehmen wir an, es sei CD eine nahe an AB gelegene Niveaufläche: $V + \Delta V$ sei der Wert des Potentials für die Punkte dieser Fläche, $MN = \Delta n$ und F_m der mittlere Wert der Kraft in den Punkten dieses Abschnittes Δn der Normalen. Bewegt sich die Einheit der Elektrizitätsmenge von M nach N, so ist die Arbeit R der elektrischen Kraft gleich $R = F_m \Delta n$; nach Formel (38, b) jedoch ist sie gleich ($V_1 = V$, $V_2 = V + \Delta V$)

$$R = F_m \Delta n = V - (V + \Delta V) = - \Delta V;$$

hieraus folgt

$$F_m = - \frac{\Delta V}{\Delta n}.$$

Ist Δn unendlich klein, so erhält man im Grenzfalle

$$F = - \lim \frac{\Delta V}{\Delta n} = - \frac{\partial V}{\partial n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39, b)$$

Die Größe $\frac{\partial V}{\partial n}$ heißt die Ableitung der Funktion V nach der Richtung n oder — im gegebenen Falle einfacher — die Ableitung nach der Normalen. Den Sinn des Ausdruckes „Ableitung nach irgend einer Richtung" wollen wir auf zweierlei Art erläutern. Wie wir sahen, ist V eine Funktion der Koordinaten eines Punktes, z. B. eine Funktion von x, y, z, vgl. (39). Formen wir das Koordinatensystem derart um, daß eine der neuen Achsen ξ, η, ζ, beispielsweise die ξ-Achse, die Richtung der Normalen n annimmt. Dann stellt sich V in der Gestalt irgend einer Funktion $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$ dar, und die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial n}$ ist identisch mit der Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$. Man kann auch folgende Überlegung anstellen: Man zieht die Gerade Mx parallel der x-Achse, es ist dann $MP = \Delta x$ gerade derjenige Zuwachs der Veränderlichen x, welcher den Zuwachs ΔV der Funktion V hervorruft, so daß

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim \frac{\Delta V}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta V}{\Delta n} \cdot \frac{\Delta n}{\Delta x} = \lim \frac{\Delta V}{\Delta n} \cdot \lim \frac{\Delta n}{\Delta x} = \frac{\partial V}{\partial n} \lim \frac{\Delta n}{\Delta x}$$

ist. Der Winkel MNP aber wird im Grenzfalle gleich einem Rechten,

es ist also $\lim \frac{\Delta n}{\Delta x} = \cos NMP = \cos(n, x)$ und daher

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (39, c)$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, y), \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, z) \quad . \qquad (39, d)$$

Letztere Formeln geben

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \qquad (39, e)$$

Durch diese Formel wird die analytische Bedeutung der „Ableitung nach der Normalen“ endgültig klargelegt, ebenso die Methode zur Berechnung derselben für den Fall, daß V in der Form einer Funktion der Koordinaten x, y, z gegeben ist. Da die x-Achse in jeder beliebigen Richtung l (Fig. 41) verlaufen kann, so erhält man aus (39, c) allgemein

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (39, f)$$

Es ist aber $\cos(n, l) = \cos(n, x) \cos(l, x) + \cos(n, y) \cos(l, y) + \cos(n, z) \cos(l, z)$, daher erhält man, wenn man sich der Gleichungen (39, d) bedient,

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial x} \cos(l, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(l, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(l, z) \qquad (39, g)$$

Die Formeln (39, c), (39, d), (39, e) zeigen, daß der Vektor $\frac{\partial V}{\partial n}$ gleich der geometrischen Summe der Vektoren $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ ist (Bd. I). Nachdem wir die Bedeutung der in Gleichung (39, b) vorkommenden Ableitung klargestellt haben, können wir jetzt diese Gleichung in Worten wiedergeben:

Die Feldintensität in einem gegebenen Punkte ist gleich der mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Ableitung der Potentialfunktion nach der Normalen zur Niveaufläche der Potentialfunktion in diesem Punkte. Die Kraft f, welche auf die in diesem Punkte befindliche Elektrizitätsmenge η' einwirkt, ist gleich

$$f = -\eta' \frac{\partial V}{\partial \eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (40)$$

Das auf der rechten Seite in (39, b) und (40) befindliche Vorzeichen deutet darauf hin, daß F und f, d. h. die Kräfte, welche auf die positive Elektrizität wirken, nach der Seite hin gerichtet sind, nach welcher die Potentialfunktion V abnimmt; ist V negativ, so sind F und f eben-

falls nach dem abnehmenden, d. h. numerisch wachsenden V hin gerichtet. Die Komponente f_l der Kraft f nach der willkürlichen Richtung l ist gleich

$$f \cos(f, l) = f \cos(n, l) = -\eta' \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, l)$$

oder, vgl. (39, f)

$$f_l = -\eta' \frac{\partial V}{\partial l} \quad \ldots\ldots \quad (40, a)$$

In speziellen Fällen erhält man die Kräfte

$$f_x = -\eta' \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad f_y = -\eta' \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad f_z = -\eta' \frac{\partial V}{\partial z} \quad (40, b)$$

Die Projektion der Feldintensität F auf die Richtung l ist

$$F_l = -\frac{\partial V}{\partial l} \quad \ldots\ldots \quad (40, c)$$

Führt man die früheren (S. 48) Bezeichnungen $F_x = X$, $F_y = Y$, $F_z = Z$ ein, so erhält man

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad . \quad (40, d)$$

Hieraus ergeben sich folgende überaus wichtige Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{\partial Y}{\partial x} \\ \frac{\partial Y}{\partial z} &= \frac{\partial Z}{\partial y} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \frac{\partial X}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (40, e)$$

Denken wir uns eine unendliche Anzahl von Flächen, deren gemeinsame Gleichung $\psi(x, y, z) = C$ lautet, wobei C sich von einer Fläche zur anderen ununterbrochen ändert. Durch jeden Raumpunkt kann man im allgemeinen eine Kurve legen, die unsere Flächen unter rechten Winkeln trifft, d. h. daß in jedem Punkte die Tangente der Kurve zu der durch diesen Punkt gehenden Fläche normal ist. Solche Kurven heißen orthogonale Trajektorien der Flächen $\psi(x, y, z) = C$.

Wie wir sahen, ist die Kraft, welche im elektrischen Felde wirkt, senkrecht zur Niveaufläche $V = const$, die durch den gleichen Punkt hindurchgeht. Ruft man sich ins Gedächtnis zurück, daß dieselbe Kraft tangential zu den Kraftlinien ist, so kommt man zu dem folgenden wichtigen Satze: die Kraftlinien sind die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen der Potentialfunktion.

Bei der Herleitung sämtlicher Formeln dieses Paragraphen sind wir von der Formel (11), S. 41, ausgegangen, die sich auf ein homogenes Medium bezieht; diese Formel hat uns den Ausdruck (37, b) für das Potential V eines Punktes und die Formeln (38, a, b, c) geliefert, die den Zusammenhang zwischen der Arbeit und der Funktion V herstellen. Wir wenden uns nunmehr zu dem Falle eines inhomogenen Mediums. In diesem Falle konnten, wie wir gesehen haben, die Kräfte, welche in verschiedenen Punkten des Raumes wirken, dadurch erhalten werden, daß man zu den gegebenen Ladungen gewisse Ergänzungsladungen hinzufügt, die auf den Trennungsflächen zwischen den heterogenen Medien verteilt sind. Die Dichte k einer solchen Ladung wird durch Formel (33, b), S. 73, bestimmt. Hieraus folgt, daß, falls man die Potentialfunktion V aller gegebenen Ladungen und dieser Ergänzungsladungen bildet, eine derartige Funktion V alle diejenigen Eigenschaften besitzen muß, welche die Potentialfunktion im homogenen Medium hat; letztere Eigenschaften aber sind durch die in diesem Paragraphen hergeleiteten Formeln ausgedrückt. Der allgemeine Ausdruck für V im Falle zweier Medien, deren Dielektrizitätskonstanten K_1 und K_2 sind und in denen die Ladungen η verteilt sind, hat folgende Form:

$$V = \int \frac{d\eta}{Kr} + \int \frac{k\,d\sigma}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40, f)$$

wo $d\sigma$ das Element der beide Medien trennenden Fläche ist, K diejenige der beiden Größen K_1 oder K_2, von der wir bei der Berechnung der Dichte k angenommen haben, daß sie sich auf alle Punkte des Raumes bezieht.

Wir können jetzt die Potentialfunktion V in einige der im § 4 abgeleiteten Formeln einführen. Wenden wir uns zunächst der Formel (19) S. 47, zu. Die in ihr vorkommende Größe F_n ist die Komponente der elektrischen Kraft (Feldintensität) in der Richtung der Normalen n zum Elemente ds der gegebenen beliebigen Fläche. Auf Grund von Formel (40, d) hat man $F_n = -\frac{\partial V}{\partial n}$ zu setzen, so daß man

$$\int K \frac{\partial V}{\partial n} ds = -4\pi\eta_i - 2\pi\overline{\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

erhält. Man darf nicht vergessen, daß die Größe $\frac{\partial V}{\partial n}$, die in dieser Formel vorkommt, nicht identisch ist mit der in den Formeln (39, b, c, d, e, f) und (40) vorkommenden Größe $\frac{\partial V}{\partial n}$, wo n die Normale zur Niveaufläche der Potentialfunktion ist und daher, wie aus Formel (39, f) hervorgeht, $\frac{\partial V}{\partial n}$ die größte unter allen Ableitungen der Funktion V nach

allen überhaupt möglichen Richtungen ist. In (41) stellt n die Normale zu einer gegebenen, im allgemeinen willkürlichen Fläche dar. In einem homogenen Dielektrikum ist

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, ds = -\frac{4\pi\eta_i}{K} - \frac{2\pi\bar{\eta}}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (41, a)$$

Formel (20) auf S. 49 gibt

$$\frac{\partial\left(K\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(K\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(K\frac{\partial V}{\partial z}\right)}{\partial z} = -4\pi\varrho \qquad (41, b)$$

wo ϱ die Volumdichte bedeutet. Im homogenen Dielektrikum ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{K}\varrho \quad . \quad . \quad . \qquad (41, c)$$

Außerhalb der Massen, welche eine Volumdichte besitzen, erhält man

$$\frac{\partial\left(K\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(K\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(K\frac{\partial V}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \qquad (41, d)$$

Im homogenen Dielektrikum ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (41, e)$$

Diese Gleichung ist identisch mit der im III. Bande hergeleiteten, der die Temperatur bei thermischem Gleichgewichte genügt; es gibt noch andere Eigenschaften, in denen sich eine Analogie zwischen der Temperatur und der Potentialfunktion zeigt; wir werden dieselben später kennen lernen.

Wir wenden uns jetzt der Formel (21), S. 50, zu, in der k die Flächendichte auf der Fläche s bedeutet, welche zwei Dielektrika mit den Konstanten K_1 und K_2 voneinander trennt, n die Normale zu s nach dem Dielektrikum K_1 hin. V_1 und V_2 mögen die Werte der Potentialfunktion zu beiden Seiten der Fläche s sein; auf der Fläche selbst ist $V_1 = V_2$, da V eine stetige Funktion ist. Formel (21) liefert uns

$$K_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} - K_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} = -4\pi k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (42)$$

Befindet sich die Fläche s im homogenen Medium, so ist

$$\frac{\partial V_1}{\partial n} - \frac{\partial V_2}{\partial n} = -\frac{4\pi}{K} k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (42, a)$$

Wir haben bisher die wichtigsten allgemeinen Gleichungen betrachtet, denen die Potentialfunktion V genügt; bevor wir zu einem Sonder-

falle übergehen, wollen wir uns der Frage nach der **Einheit für das Potential** oder richtiger für die Potentialfunktion zuwenden. Die Formeln (37), (38 c) und (38) führen zu den folgenden Bestimmungen der absoluten Potentialeinheit, wobei das, was sich auf die el.-st. C. G. S.-Einheit bezieht, in Klammern beigefügt ist.

Das Potential eines Punktes ist gleich der absoluten el.-st. Einheit (el.-st. C. G. S.-Einheit) des Potentials:

1. wenn dieser Punkt sich in Luft in der Einheit der Entfernung (1 cm) von einem anderen Punkte befindet, in welchem die el.-st. Einheit (el.-st. C. G. S.-Einheit) der Elektrizitätsmenge vorhanden ist;

2. wenn beim Übergange der el.-st. Einheit (el.-st. C. G. S.-Einheit) der Elektrizitätsmenge von diesem Punkte zur Unendlichkeit die elektrischen Kräfte die absolute Arbeitseinheit (1 Erg Arbeit) oder äußere Kräfte die gleiche Arbeit beim entgegengesetzten Transporte leisten.

Außerdem ist die Potentialdifferenz zweier Punkte gleich der el.-st. Einheit, wenn beim Transport der el.-st. (el.-st. C. G. S.) Einheit der Elektrizitätsmenge vom ersten Punkte (mit höherem Potential) zum zweiten von den elektrischen Kräften die absolute Arbeitseinheit (1 Erg Arbeit) geleistet wird, oder durch äußere Kräfte die gleiche Arbeit beim entgegengesetzten Transporte.

Als Dimension der Einheit des Potentiales erhält man, s. (37), S. 83 und (13, a), S. 42:

$$[V] = \frac{[\eta]}{[K]L} = \frac{[K]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{[K]L} = [K]^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \tag{43}$$

Das Produkt $V\eta$ hat die Dimension

$$[V\eta] = [V]\,[\eta] = [K]^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \cdot [K]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} = M L^2 T^{-2},$$

d. i. die Dimension der Arbeit, wie dies auf Grund von Formel (38) offenbar auch sein muß.

In der Praxis bedient man sich einer Einheit des Potentiales oder, was natürlich dasselbe bedeutet, einer Einheit für die Potentialdifferenz, welche **Volt** genannt wird und durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$1 \text{ Volt} = \frac{1}{300} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten des Potentiales} \tag{43, a}$$

Beträgt die Potentialdifferenz zweier Punkte A und B 1 Volt und geht von A nach B eine el.-st. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge über, so wird hierbei eine Arbeit von $\frac{1}{300}$ Erg geleistet. Geht von A

nach B 1 Coulomb (S. 41) über, so wird eine Arbeit R geleistet, die man Volt-Coulomb nennen könnte; sie ist gleich

$$R = \frac{1}{300} \cdot 3 \cdot 10^9 \text{ Erg} = 10^7 \text{ Erg} = 10 \text{ Megaerg} = 1 \text{ Joule} \qquad (43, b)$$

1 Volt-Coulomb ist gleich 1 Joule (Bd. I) = 0,102 Meterkilogramm = 0,24 Grammkalorien. Hier treffen wir zum ersten Male auf einen Grund, weswegen man in die Wissenschaft gerade diese Arbeitseinheit oder Energieeinheit, das Joule, welches wir in Bd. I und III schon vielfach benutzt haben, eingeführt hat. Damit in jeder Sekunde 1 Coulomb von A nach B hinüberfließt, muß die Leistungsfähigkeit der Energiequelle (Motor) gleich 1 Watt = $\frac{1}{736}$ Pferdestärke (Bd. I) sein.

Wenden wir die erhaltenen Formeln auf Leiter an, in denen die Elektrizität vollkommene Beweglichkeit besitzt, und beantworten wir zunächst die Frage nach der Bewegungsrichtung der Elektrizität. Wir hatten gesehen (S. 88), daß eine Kraft, welche auf die positive Elektrizität wirkt, nach der Seite hin gerichtet ist, auf welcher sich das Potential vermindert. Hieraus schließen wir, daß die positive Elektrizität immer von Orten mit größerem Potential nach Orten mit kleinerem Potential fließt; die negative Elektrizität fließt in umgekehrter Richtung. Zu demselben Schlusse führt auch die Formel (38), da die Arbeit R der elektrischen Kräfte bei einer Bewegung, die unter ihrer Wirkung erfolgt, offenbar nur eine positive Größe sein kann. Es muß bemerkt werden, daß ein Fließen der Elektrizität in der bezeichneten Richtung nicht nur möglich ist, sondern auch unbedingt in der leitenden Substanz vor sich gehen muß, falls die elektrische Kraft nicht gleich Null ist. Wie wir gesehen haben (S. 30), ist ein Gleichgewicht der Elektrizität auf Leitern nur unter der Bedingung möglich, daß die Feldintensität F in allen Punkten des Leiters gleich Null ist und daß die Kraft in allen Punkten der Oberfläche eine zu dieser Oberfläche senkrechte Richtung hat. Auf S. 52 wurde gezeigt, in welcher Weise diese Bedingungen und das Coulombsche Gesetz zu dem Schlusse führen, daß sich die Elektrizität nur auf der Leiteroberfläche befinden kann.

Die Bedingung, daß $F = 0$, also auch, daß jede Komponente $F_l = 0$ ist, führt auf Grund von (40, c) zu der Grundgleichung

$$V = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Die Potentialfunktion muß in allen Punkten eines Leiters ein und denselben Wert haben; bei Bestimmung des letzteren nach Formel (37, b) hat man alle vorhandenen Elektrizitätsmengen, und nicht nur die auf der Oberfläche des in Betracht gezogenen Leiters befindlichen, zu berücksichtigen. Den konstanten Wert von V nennt man das

Potential des Leiters; man sagt, ein Leiter sei auf ein Potential gebracht oder bis zu einem Potential elektrisiert (geladen).

Die Oberfläche eines Leiters stellt selbst eine Niveaufläche der Potentialfunktion dar; hieraus folgt, daß (S. 87) die Kraft in allen Punkten der Außenfläche die Richtung der Normalen zu dieser Fläche hat. Wir sehen somit, daß von den beiden erwähnten Bedingungen für das Gleichgewicht der Elektrizität auf Leitern die zweite eine direkte Folge der ersten ist. Die Formel (44) erschöpft somit die analytische Gleichgewichtsbedingung der Elektrizität auf einem Leiter. Das äußere Potential und die Elektrizitätsdichte k hängen miteinander durch folgende Formel zusammen, vgl. (24, a), S. 52:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{4\pi}{K} k \quad \ldots \ldots \quad (44, a)$$

und in Luft:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi k \quad \ldots \ldots \quad (44, b)$$

Hier ist n die Normale zur Niveaufläche der Funktion V, so daß $\frac{\partial V}{\partial n}$ hier dieselbe Bedeutung hat, wie in den Formeln (39, b) und (39, e).

Verbindet man (d. h. durch einen Leiter, z. B. einen Metalldraht) zwei Leiter, die sich auf verschiedenem Potential befinden, so fließt die positive Elektrizität vom Leiter mit größerem zum Leiter mit kleinerem Potential. Für das elektrische Gleichgewicht ist erforderlich, daß sich sämtliche miteinander verbundene Leiter auf demselben Potential befinden. Diese Eigenschaften des Leiterpotentials sind analog den Eigenschaften der Temperatur von Körpern, die durch Wärmeleiter verbunden sind.

Wollte man das wahre Potential eines Körpers berechnen, so müßte man alle, wo auch immer befindlichen Ladungen berücksichtigen, falls ihre Wirkung in den Punkten dieses Körpers nicht gleich Null ist: hierher könnten elektrische Ladungen gehören, die auf der Erdoberfläche verteilt sind, sowie kosmische Ladungen (auf der Sonne, dem Monde usw.). Die Anordnung dieser Ladungen ist uns unbekannt, wir können daher auch nicht die wahren Potentiale der Leiter bestimmen, sondern nur die Potentialunterschiede verschiedener Leiter, wobei das Potential irgend eines bestimmten Körpers bedingterweise gleich Null angenommen wird, und zwar ist man übereingekommen, das Potential der Erdkugel gleich Null anzunehmen. Das Potential eines Leiters ist eine positive oder negative Größe, je nachdem bei Verbindung desselben mit der Erde die positive Elektrizität vom Leiter zur Erde fließt oder umgekehrt. Jeder Leiter, welcher mit der Erde verbunden ist, befindet sich auf dem Potential Null. Berücksichtigt man

alles, was über die Richtung für das Strömen der positiven Elektrizität und über die Bedingungen für das elektrische Gleichgewicht in dem Falle gesagt war, daß mehrere Leiter miteinander verbunden sind, so sieht man ein, daß das Potential V eines Leiters als Maß für den Grad der Elektrisierung dieses Leiters dient. Das Potential eines Leiters darf nicht mit seiner Ladung verwechselt werden; zwei miteinander verbundene Leiter, von denen der eine groß, der andere klein ist, besitzen sehr verschiedene Ladungen, jedoch das gleiche Potential. Ein mit einem elektrisierten Körper verbundenes Elektroskop wird bis zu einem Potential elektrisiert, welches dem Potential dieses Leiters gleich ist. Deshalb hängen die Angaben eines Elektroskops gar nicht davon ab, mit welchem Punkte des Leiters es verbunden ist. Man erkennt unschwer, daß zwischen dem Potential als dem Maße für den Elektrisierungsgrad und der Temperatur als dem Maße für den Grad des Erwärmtseins eine weitgehende Analogie besteht.

Denken wir uns einen Leiter, der auf irgend eine Weise auf irgend einem unveränderlichen Potential V erhalten wird, so daß jeder andere mit ihm verbundene Leiter sich ebenfalls auf demselben Potential V befindet. Einen solchen Leiter M werden wir eine Elektrizitätsquelle nennen; hierher gehören, wie aus der elementaren Physik bekannt ist, der Konduktor einer fortdauernd wirkenden Elektrisiermaschine, eine Elektrode einer galvanischen Batterie, deren andere Elektrode zur Erde abgeleitet ist usw. Wir wollen noch bemerken, daß bei einem Daniellschen Elemente, welches aus der elementaren Physik bekannt sein dürfte, das Potential des Kupfers, wenn das Zink zur Erde abgeleitet ist, ein wenig mehr als 1 Volt beträgt.

Stellen wir uns eine Kugel vor, die mit Elektrizität von der Oberflächendichte k gleichmäßig bedeckt ist; ihre Gesamtladung beträgt $\eta = 4\pi R^2 k$, wo R der Kugelradius ist. Unter Benutzung der im ersten Bande abgeleiteten Formeln findet man für das innere Potential V_i, welches auch das Potential V der Kugel ist, den Ausdruck:

$$V = V_i = \frac{\eta}{KR} = \frac{4\pi R k}{K} \quad \text{. . . . . . (45)}$$

Das äußere Potential V_e in Luft in der Entfernung x vom Kugelzentrum ist gleich

$$V_e = \frac{\eta}{x} = \frac{4\pi R^2 k}{x} \quad \text{. . . . . . . (45, a)}$$

In einem anderen Dielektrikum ist

$$V_e = \frac{\eta}{Kx} = \frac{4\pi R^2 k}{Kx} \quad \text{. . . . . . (45, b)}$$

Diese Formeln lassen sich leicht auch auf andere Weise ableiten. Wir wissen (Bd. I), daß eine Kugelschicht auf Innenpunkte gar nicht,

auf Außenpunkte aber derart wirkt, als ob ihre gesamte Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Im Mittelpunkte aber ist

$$V_i = \int \frac{k\,ds}{r} = \int \frac{k\,ds}{R} = \frac{1}{R}\int k\,ds = \frac{\eta}{R}.$$

Im Außenraume muß das Potential der Gleichung

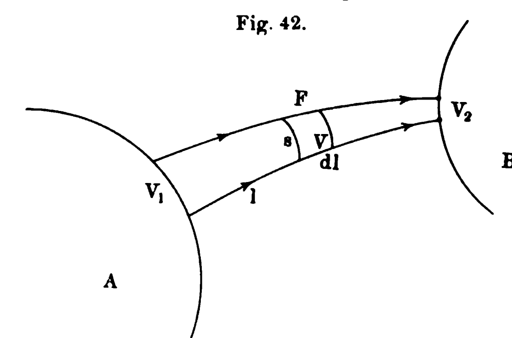
$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\eta}{Kx^2}$$

genügen, woraus $V = \frac{\eta}{Kx}$ folgt, da für $x = \infty$ der Wert $V = 0$ sein muß. Prüfen wir die Formel (44, b) für die Ableitung nach der Normalen an der Fläche selbst; Formel (45, a) gibt uns

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \left(\frac{\partial V_e}{\partial x}\right)_{x=R} = \left| -\frac{4\pi R^2 k}{x^2} \right|_{x=R} = -4\pi k.$$

Alle Herleitungen in diesem Paragraphen hatten wir auf das Coulombsche Gesetz zurückgeführt, wobei letzteres in der Form ausgesprochen war, welche dem Bilde A entspricht. Die Resultate, welche wir für die Größe der Arbeit von elektrischen oder äußeren Kräften in den verschiedenen Fällen erhalten hatten, sind unbedingt richtig und hängen von keinerlei „Bild" ab. Wir wollen jedoch noch eine bemerkenswerte Formel ableiten, die von besonderer Bedeutung für das Bild B ist. Wir denken uns zu diesem Zwecke eine Kraftröhre (die keine Einheitsröhre ist), welche die Oberfläche zweier Leiter A und B (Fig. 42) mit den Potentialen V_1 und V_2 verbindet. Die Größe $V_1 - V_2$ nennen wir die elektromotorische Kraft, welche auf diese Kraftröhre wirkt. Der Induktionsfluß $\psi = K\sigma F$ ist an der ganzen Röhre entlang eine konstante Größe, vgl. (29), S. 57. Auf S. 77 hatten wir erwähnt, daß man K die elektrische Permeabilität nennen könne; den reziproken Wert dieser Größe, d. h. $\frac{1}{K}$, wollen wir den dielektrischen Widerstand des Mediums nennen. Wir denken uns die Röhre in Abschnitte geteilt und nehmen an, die Länge eines derselben betrage dl, der Querschnitt s; in diesem Falle können wir die Größe $\frac{dl}{Ks}$ den dielektrischen Widerstand des Abschnittes nennen, und die Größe

Fig. 42.



$$r = \int \frac{dl}{Ks} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

in welcher sich das Integral auf die ganze Röhrenlänge erstreckt, den dielektrischen Widerstand der ganzen Röhre. Ferner ist $F = -\frac{\partial V}{\partial l}$, denn l ist die Richtung der Kraftlinien, d. h. der Normalen zur Niveaufläche der. Potentialfunktion V. Die Gleichung $\psi = KsF = -Ks\frac{\partial V}{\partial l} = const$ gibt

$$\frac{\partial V}{\partial l}dl = -\frac{\psi dl}{Ks},$$

folglich ist

$$\int \frac{\partial V}{\partial l}dl = -\psi \int \frac{dl}{Ks},$$

$$V_2 - V_1 = -\psi r$$

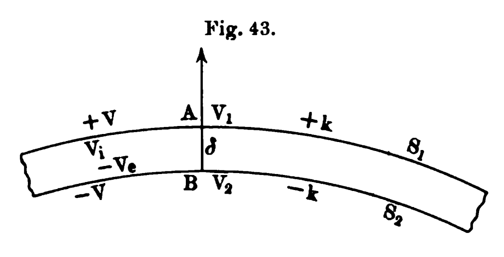
$$\psi = \frac{V_1 - V_2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

Der Induktionsfluß in einer Röhre ist gleich der auf diese Röhre wirkenden elektromotorischen Kraft, dividiert durch den dielektrischen Widerstand der Röhre. Die Formel (47) erinnert an das aus der elementaren Physik bekannte Ohmsche Gesetz; sie zeigt, daß der dielektrische Widerstand r_1 einer Einheitsröhre der Induktion ($\psi = 1$) gleich der Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ an ihren Enden ist

$$r_1 = V_1 - V_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47, a)$$

Bevor wir das Kapitel über das Potential beschließen, wollen wir uns noch mit dem Begriffe der elektrischen Doppelschicht bekannt machen. Denken wir uns zwei einander parallele Flächen S_1 und S_2, von denen die erste gleichmäßig mit positiver, die zweite mit negativer Elektrizität bedeckt sei; ihre an Größe gleichen Dichten wollen wir mit $+k$ und $-k$ bezeichnen, den Abstand der Flächen voneinander mit δ.

Fig. 43.



Ferner wollen wir das Produkt aus der auf der Flächeneinheit befindlichen Elektrizitätsmenge, d. h. der Größe k und der Entfernung δ, mit ω bezeichnen, so daß also

$$\omega = k\delta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47, b)$$

ist.

Nehmen wir an, daß sich δ unbegrenzt verkleinert und k vergrößert, wobei das Produkt $\omega = k\delta$ unverändert bleibt. Ist δ unendlich klein, so erhält man die sog. elektrische Doppelschicht: das Produkt $\omega = k\delta$ heißt das Moment dieser Schicht. Es seien V_1 und V_2 die Potentiale zweier Punkte A und B, welche auf den Flächen S_1 und S_2 auf der ihnen gemeinsamen Normalen nAB liegen und es seien $+V$ und $-V$ die Potentiale in den Punkten der Oberflächen S_1 und S_2 für den Fall, daß jede dieser Flächen allein vorhanden ist. Den Wert des Potentials auf der Seite, nach welcher die Normale n gerichtet ist, bezeichnen wir mit V_e und $-V_e$, auf der entgegengesetzten Seite aber mit V_i und $-V_i$. Das Potential V_1 besteht aus dem Potential $+V$ der Fläche S_1 und aus dem Werte des Potentiales der Fläche S_2 im Punkte A. Offenbar ist

$$V_1 = V + \left(-V + \frac{\partial(-V_e)}{\partial n}\,\delta\right) = -\frac{\partial V_e}{\partial n}\,\delta.$$

Das Potential V_2 besteht aus dem Potentiale $-V$ der Fläche S_2 und aus demjenigen der Fläche S_2 im Punkte B, es ist also

$$V_2 = -V + \left(V + \frac{\partial V_i}{\partial(-n)}\,\delta\right) = -\frac{\partial V_i}{\partial n}\,\delta.$$

Hieraus folgt

$$V_1 - V_2 = -\left\{\frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n}\right\}\delta,$$

oder, vgl. (42, a) und (47, b)

$$V_1 - V_2 = \frac{4\pi k\delta}{K} = \frac{4\pi\omega}{K} \quad \dots\dots \quad (47, c)$$

Für Luft erhält man

$$V_1 - V_2 = 4\pi\omega \quad \dots\dots\dots \quad (47, d)$$

Beim Durchgange durch eine elektrische Doppelschicht ändert sich das Potential gewissermaßen sprungweise um den Betrag $4\pi\omega : K$, wo ω das Moment der Doppelschicht ist Der Betrag dieser sprungweisen Änderung ist, wie man sieht, für alle Punkte der Schicht der gleiche.

§ 7. Die Kapazität eines vereinzelten Leiters. Denken wir uns zunächst einen vereinzelten (d. h. von allen anderen Leitern entfernten) Leiter M (Fig. 44) mit der Ladung η und sei sein Potential gleich V; dieses Potential ist in allen inneren Punkten A das gleiche und wird durch die Formel

$$V = \iint \frac{k\,ds}{Kr} \quad \dots\dots\dots \quad (48)$$

bestimmt, wo k die Oberflächendichte auf dem Flächenelemente ds ist, das sich vom Punkte A in der Entfernung r befindet. Das Potential V

ist offenbar proportional der Ladung η, so daß man

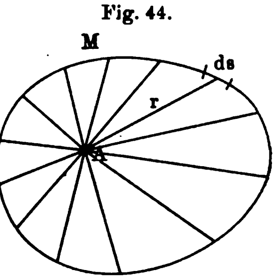
$$\eta = qV \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

setzen kann, woraus

$$q = \frac{\eta}{V} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (49, a)$$

folgt. Die Größe q, welche von der Form und den Dimensionen des Leiters abhängt, sowie von dem umgebenden Medium, heißt die **Kapazität des Leiters** M. Für $V = 1$ ist $\eta = q$. Hieraus folgt, daß **die Kapazität eines Leiters durch diejenige Ladung gemessen wird, welche den Leiter auf das Potential Eins bringt oder das Potential des Leiters um eine Einheit vergrößert.** Ist ein Körper von homogenem Dielektrikum umgeben, so gibt (48) den Wert $V = V_0 : K$, wo V_0 das Potential desselben Leiters in Luft bei derselben Ladung η ist. In diesem Falle erhält man aus (49, a)

Fig. 44.



$$q = \frac{\eta}{V_0} K \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49, b)$$

Die Kapazität eines Leiters ist der Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums proportional.

Die Formel (49, a) ergibt $q = 1$ für $V = 1$ und $\eta = 1$. Hieraus folgt, daß **die absolute el.-st. Einheit der Kapazität gleich der Kapazität eines solchen Leiters ist, welcher durch eine Ladung von einer el.-st. Einheit der Elektrizitätsmenge auf die el.-st. Einheit des Potentials gebracht wird.**

Die el.-st. C. G. S.-Einheit der Kapazität ist die Kapazität eines Leiters, welcher durch eine Ladung von einer el.-st. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge auf die el.-st. C. G. S.-Einheit des Potentiales gebracht wird.

Auf S. 42 und 92 lernten wir als Einheit der Elektrizitätsmenge das **Coulomb** $= 3 \,.\, 10^9$ el.-st. C. G. S.-Einheiten und als Einheit des Potentials das **Volt** $= \frac{1}{300}$ el.-st. C. G. S.-Einheiten kennen. **Die Kapazität eines Leiters, welcher durch ein Coulomb Elektrizität auf ein Potential von einem Volt gebracht wird, heißt Farad.** Suchen wir den Zusammenhang zwischen einem Farad und der el.-st. C. G. S.-Einheit der Kapazität, welche durch $\frac{1}{3 \,.\, 10^9}$ Coulomb auf 300 Volt gebracht wird. Da ein Farad von einem ganzen Coulomb nur auf ein Volt gebracht wird, so ist

$$1 \text{ Farad} = 300 \,.\, 3 \,.\, 10^9$$
$$= 9 \,.\, 10^{11} \text{ el-st. C. G. S.-Einheiten der Kapazität} \quad . \quad (49, c)$$

Ein Milliontel Farad heißt ein Mikrofarad;

$$1 \text{ Mikrofarad} = 10^{-6} \text{ Farad}$$
$$= 900\,000 \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten der Kapazität} \quad . \quad (49, d)$$

Ein Mikrofarad wird durch ein Mikrocoulomb auf ein Volt gebracht. Formel (49, a) gibt uns die Dimension der elektrostatischen Kapazitätseinheit, vgl. (13), S. 42 und (43), S. 92

$$[q] = \frac{[\eta]}{[V]} = \frac{[K]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}}{[K]^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}} = L[K] \quad . \quad . \quad (49, e)$$

Sieht man K als eine Größe von der nullten Dimension an, so hängt die el.-st. Einheit der Kapazität nur von der Grundeinheit der Länge ab und ist ihr proportional.

Die Kapazität einer Kugel erhält man mit Hilfe der Formeln (45) und (49, a); der ersteren kann man sich bedienen, da die Ladung einer vereinzelten Kugel deren Oberfläche offenbar gleichmäßig bedeckt. Substituiert man $V = \eta : RK$ in (49, a), so erhält man für die Kapazität einer Kugel in el.-st. Einheiten

$$q = RK \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49, f)$$

In Luft ist

$$q = R \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49, g)$$

Die Kapazität einer Kugel in el.-st. Einheiten ist in Luft numerisch gleich ihrem Radius.

Eine Kugel von 1 cm Radius besitzt die el.-st. C. G. S.-Einheit der Kapazität; durch eine el.-st. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge erhält sie die el.-st. C. G. S.-Einheit des Potentials. Die Gleichung (49, g) bestätigt die Formel (49, e). Formel (49, c) zeigt uns, daß ein Farad die Kapazität einer Kugel darstellt, deren Radius $= 9 \,.\, 10^{11}$ cm $= 9 \,.\, 10^9$ m $= 9 \,.\, 10^6$ km, d. h. $= 9\,000\,000$ km ist. Eine Kugel hat eine Kapazität von einem Mikrofarad, wenn ihr Radius gleich 9 km ist. Die Kapazität der Erdkugel ist gleich 708 Mikrofarad.

Denken wir uns mehrere Leiter, die so weit voneinander entfernt sind, daß man die elektrischen Wechselwirkungen zwischen ihnen vernachlässigen kann und die untereinander durch lange, dünne Drähte verbunden sind. Es läßt sich dann leicht finden, wie sich auf ihnen eine elektrische Ladung η verteilt. Es mögen $q_1, q_2, q_3, \ldots$ die Kapazitäten der Leiter, $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$ ihre gesuchten Ladungen sein. Vernachlässigt man die Ladungen der Verbindungsdrähte, so ist $\eta = \Sigma \eta_i$. Wie wir wissen, müssen sich die miteinander verbundenen Leiter auf

gleichem Potential, das wir mit V bezeichnen wollen, befinden. Demgemäß erhält man aus Formel (49)

$$V = \frac{\eta_1}{q_1} = \frac{\eta_2}{q_2} = \frac{\eta_3}{q_3} = \text{usw.} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (49,\text{h})$$

Eine Ladung verteilt sich auf Leitern, welche voneinander entfernt, jedoch durch dünne Drähte miteinander verbunden sind, proportional der Kapazität dieser Leiter. Bei Kugeln, die sich in einem homogenen Medium befinden, sind die Ladungen proportional den Radien.

Formel (49, h) gibt

$$V = \frac{\Sigma\eta_i}{\Sigma q_i} = \frac{\eta}{\Sigma q_i} = \frac{\eta}{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (49,\text{i})$$

Diese Formel lehrt uns, daß die Kapazität q eines Systemes von untereinander verbundenen und genügend weit voneinander entfernten Leitern gleich der Summe der Kapazitäten dieser Leiter ist.

Wir wollen, ohne einen Beweis hierfür zu geben, noch die Formeln für die Kapazität einiger Körper anführen:

Für ein längliches Rotationsellipsoid, dessen halbe Rotationsachse gleich a ist, hat man

$$q = \frac{2\,aeK}{lg\,\dfrac{1+e}{1-e}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (50,\text{a})$$

wobei e die Exzentrizität des Meridionalschnittes bedeutet.

Für ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, dessen Äquatorialschnitt den Radius b hat, ist

$$q = \frac{beK}{arc\,sin\,e} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (50,\text{b})$$

Beide Formeln geben für eine Kugel ($a = b = R$: $e = 0$)

$$q = RK.$$

Für einen Kreiszylinder, dessen Länge l sehr groß im Vergleich zum Radius r seines Querschnittes ist, erhält man angenähert

$$q = \frac{lK}{2\,lg\,\dfrac{l}{r}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (50,\text{c})$$

Für eine sehr dünne kreisförmige Platte, deren Grundfläche den Radius r hat, ist angenähert

$$q = K\,\frac{2r}{\pi} = \frac{Kr}{1{,}5708\ldots} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (50,\text{d})$$

Für zwei gleiche, einander berührende Kugeln vom Radius R ist

$$q = 2\,RK\,lg\,2 = 1{,}386\,30\,RK \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (50,\mathrm{e})$$

Der Begriff der Kapazität scheint sich leichter zu ergeben, wenn man vom Bilde A ausgeht. Wählt man aber das Bild B, erinnert sich dessen, welche Bedeutung in ihm das Wort „Ladung" hat und betrachtet das Potential als eine Arbeit, so ist es ebenfalls nicht schwer, den Begriff der Kapazität eines Leiters zu konstruieren.

§ 8. Die Energie der Ladung eines vereinzelten Leiters. Ein Leiter, auf dessen Oberfläche eine Ladung η verteilt ist, besitzt einen gewissen Vorrat an Energie, die man elektrostatische oder einfach elektrische Energie nennt. Die Entscheidung der Frage, an welcher Stelle man diese Energie zu suchen hat und welche Form sie hat, hängt von den Grundvorstellungen über das Wesen der elektrischen Erscheinungen ab, d. h. von dem Bilde, das wir wählen. Geht man vom Bilde A aus, so hat man die Annahme zu machen, daß eine potentielle Energie der Ladung selbst vorhanden ist, welche gleich der Arbeit ist, die von den zwischen den „Elektrizitätsteilchen" (in die man sich die Ladung geteilt denkt) wirkenden abstoßenden Kräften geleistet werden kann. Es möge η die Ladung bedeuten, V das Potential, q die Kapazität, W die gesuchte Energie, die man gewöhnlich die Energie des Leiters nennt. Vergrößert man die Ladung um den Betrag $d\eta$, indem man die Elektrizitätsmenge $d\eta$ aus der Unendlichkeit auf die Oberfläche eines Leiters vom Potential V befördert, so hat man hierbei eine Arbeit gegenüber den abstoßenden, von der Ladung η ausgehenden Kräften zu leisten, die gleich $V d\eta$ ist, vgl. (38, a), S. 85; als Resultat dieser Arbeitsleistung muß ein ihr gleicher Zuwachs dW des Vorrats an elektrischer Energie auftreten. Es ist also $dW = V d\eta$ oder nach (49)

$$dW = \frac{\eta\, d\eta}{q}\,.$$

Hieraus findet man für den Energiezuwachs $W_2 - W_1$ bei einer Vergrößerung der Ladung von η_1 auf η_2

$$W_2 - W_1 = \frac{\eta_2^2 - \eta_1^2}{2\,q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (51)$$

Ist keine Ladung vorhanden, so ist die Energie gleich Null und daher $W_1 = 0$ für $\eta_1 = 0$; führt man diese Größen ein, indem man $W_2 = W$ und $\eta_2 = \eta$ setzt, und bedient sich der Gleichung (49), so erhält man die gesuchten Ausdrücke für die elektrische Energie eines Leiters, dessen Ladung η, dessen Potential V und Kapazität q ist:

$$W = \frac{\eta^2}{2\,q} = \frac{1}{2}\,q V^2 = \frac{1}{2}\,\eta V \quad . \quad . \quad . \qquad (51,\mathrm{a})$$

Hieraus ist ersichtlich, daß für einen gegebenen Leiter (ein gegebenes q) die Energie proportional dem Quadrate der Ladung oder dem Quadrate des Potentials ist. Wir wollen Formel (51, a) noch auf einem anderen Wege ableiten, der uns die Energie eines Systems gibt, d. h. einer beliebigen Anzahl beliebig angeordneter Leiter, deren Ladungen $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \ldots \eta_n \ldots$, deren Potentiale $V_1, V_2 \ldots V_n \ldots$, deren Kapazitäten $q_1, q_2 \ldots q_n \ldots$ sind. Das ganze System befindet sich im homogenen Medium. Wir zerlegen alle Ladungen in Elemente und nehmen an, es seien $\varDelta\eta_n$ und $\varDelta\eta_k$ zwei Elemente, von denen das erste dem $n$ten Leiter, das zweite dem $k$ten Leiter angehört, wobei k auch gleich n sein kann; ihre Entfernung sei r. Formel (36, a) zeigt, daß die potentielle Energie dieser beiden Elektrizitätsteilchen gleich

$$\frac{\varDelta\eta_n \varDelta\eta_k}{Kr} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51, b)$$

ist. Sucht man alle möglichen Kombinationen je zweier Teilchen auf, indem man die Ausdrücke nach dem Schema des Bruches (51, b) zusammenstellt und alle diese Brüche summiert, so erhält man die gesuchte Energie W. Kombiniert man jedes Teilchen mit allen übrigen, so kommt offenbar jedes Paar Teilchen zweimal vor; bezeichnet man die Summe aller dieser Kombinationen mit Ω, so ist $W = \frac{1}{2}\Omega$. Um den Ausdruck für Ω zu finden, nimmt man zunächst alle Teilchen $\varDelta\eta_1$ des ersten Leiters und kombiniert ein jedes mit sämtlichen Teilchen $\varDelta\eta_k$ aller Leiter, einschließlich des ersten; in ähnlicher Weise verfährt man mit den Teilchen $\varDelta\eta_2$ des zweiten, $\varDelta\eta_3$ des dritten Leiters usf. Auf diese Weise erhält man

$$\Omega = \sum \varDelta\eta_1 \cdot \sum \frac{\varDelta\eta_k}{Kr} + \sum \varDelta\eta_2 \cdot \sum \frac{\varDelta\eta_k}{Kr} + \sum \varDelta\eta_3 \cdot \sum \frac{\varDelta\eta_k}{Kr} + \cdots$$

Beachtet man den Wert von r, so sieht man, daß $\sum \frac{\eta_k}{Kr}$ die Größe des elektrischen Potentials in dem Punkte darstellt, in dem sich das entsprechende Teilchen $\varDelta\eta_1$, $\varDelta\eta_2$ usw. befindet. Auf diese Weise erhält man, wenn man überdies $W = \frac{1}{2}\Omega$ einführt:

$$W = \frac{1}{2}\sum V_1 \varDelta\eta_1 + \frac{1}{2}\sum V_2 \varDelta\eta_2 + \frac{1}{2}\sum V_3 \varDelta\eta_3 + \cdots \quad (51, c)$$

Das Potential V_n ist das gleiche in allen Punkten des $n$ten Leiters und repräsentiert das Potential dieses Leiters, so daß man schreiben kann

$$W = \frac{1}{2} V_1 \sum \varDelta\eta_1 + \frac{1}{2} V_2 \sum \varDelta\eta_2 + \frac{1}{2} V_3 \sum \varDelta\eta_3 + \cdots$$

Es ist aber

$$\Sigma \Delta \eta_1 = \eta_1, \quad \Sigma \Delta \eta_2 = \eta_2 \text{ usw.},$$

also

$$W = \frac{1}{2} V_1 \eta_1 + \frac{1}{2} V_2 \eta_2 + \frac{1}{2} V_3 \eta_3 + \cdots$$

und mithin die gesuchte Energie W:

$$W = \frac{1}{2} \sum V \eta \quad \ldots \ldots \quad (51, d)$$

wo sich das Summenzeichen auf alle Leiter erstreckt. Hat man nur einen Leiter, so erhält man abermals die Formel (51, a).

Wir wollen jetzt die Energie einer elektrisierten Kugel berechnen. Es sei k die Oberflächendichte der Elektrizität; es ist dann die Ladung gleich $4\pi R^2 k$, die Kapazität $q = RK$, vgl. (49, f). Formel (51, a) gibt uns

$$W = \frac{\eta^2}{2RK} = \frac{8\pi^2 R^3 k^2}{K} \quad \ldots \ldots \quad (51, e)$$

Bei gegebener Ladung ist die Energie einer Kugel indirekt proportional ihrem Radius.

Mißt man in den Formeln (51, a) und (51, d) die Größen η, V und q in el.-st. C. G. S.-Einheiten, so erhält man die potentielle Energie W in Ergs. Ist jedoch η in Coulombs ausgedrückt, V in Volts und q in Farads, so erhält man die Arbeitsfähigkeit W in Joules (S. 93), die gleich 0,102 Meterkilogramm = 0,24 Grammkalorien sind. Die Formeln, welche wir abgeleitet haben, ermöglichen die Lösung verschiedener Aufgaben, in denen es sich um eine Neuordnung von Ladungen auf weit voneinander abstehenden Körpern handelt. Wir schlagen den Lesern vor, folgende Aufgabe zu lösen: n weit voneinander abstehende Leiter haben die Kapazitäten $q_1, q_2 \ldots q_n$ und die Ladungen $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n$; die ganze bei der Neuordnung der Ladungen verlorene Energie wird in Form von Wärme in den verbindenden Leitungen frei. Zu bestimmen ist die Menge dieser Wärme für den Fall, daß man alle Leiter untereinander durch lange, dünne Drähte verbindet; man soll den besonderen Fall betrachten, wo zwei Kugeln vorhanden sind, und den noch spezielleren Fall, wo die ursprüngliche Ladung einer dieser Kugeln gleich Null ist. Hat man nur zwei Körper (η_1, η_2, q_1, q_2), so ist die verlorene Energie

$$\Delta W = \frac{1}{2} \frac{(\eta_1 q_2 - \eta_2 q_1)^2}{q_1 q_2 (q_1 + q_2)}.$$

Formel (51, d) zeigt uns, daß Leiter, welche mit der Erde verbunden sind ($V = 0$) und isolierte Leiter, die nur infolge von Induktion ($\eta = 0$) elektrisiert sind, gewissermaßen gar keinen Anteil an dem Energievorrat haben, den wir mit W bezeichneten: die Glieder der

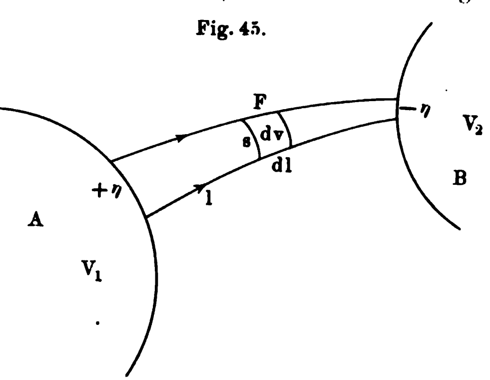
Summe (51, d), die ihnen entsprechen, verschwinden. Die Anwesenheit dieser Körper aber wirkt auf die Größe W ein, da ihre Ladungen die Potentiale der übrigen Körper verändern.

Wir haben uns bei unseren Rechnungen an das Bild A gehalten, welches besagt, daß die elektrostatische Energie die potentielle Energie einander abstoßender oder anziehender elektrischer Teilchen ist.

Bild B.

Die Vorstellungen, welche dem Bilde B zugrunde liegen, führen zu dem Schlusse, daß die elektrostatische Energie, d. h. die Energie eines elektrischen Feldes, die Energie eines elastisch-veränderlichen Mediums, nämlich des Äthers ist; es ist dies die Energie longitudinal gereckter und transversal zusammengedrückter Röhren, die wir Spannungsröhren nannten. Ist dem so, so muß die gesuchte Energie über das ganze Volumen des elektrischen Feldes verteilt sein, so daß jedes Volumelement des Dielektrikums, darunter auch die Hohlräume in sich eine gewisse Energiemenge enthalten. Der wahre Wert der Energie wird durch die in diesem Paragraphen hergeleiteten Formeln numerisch zweifellos richtig bestimmt. Um für die Energie einen Ausdruck zu erhalten, welcher dem Bilde B entspricht, müssen wir die oben gefundenen Ausdrücke derart umzuformen suchen, daß sie einen Energievorrat darstellen, der über das ganze Volumen der im elektrischen Felde vorhandenen Dielektrika verteilt ist. Betrachten wir eine Induktionsröhre (die keine Einheitsröhre ist), welche zwei Leiter A und B mit den Potentialen V_1 und V_2 untereinander verbindet. An den Enden dieser Röhre befinden sich gleiche Mengen $+\eta$ und $-\eta$ ungleichnamiger Elektrizitäten, welche mit dem Induktionsflusse ψ und der Anzahl n der Einheitsröhren durch folgende Gleichungen verknüpft sind:

Fig. 45.



$$n = \psi = KFs = 4\pi\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Hier beziehen sich die Dielektrizitätskonstante K, die Feldintensität F und der Inhalt des Querschnittes s auf eine beliebige Stelle der Röhre. Auf Grund von Formel (51, c) kann man sagen, daß unsere Röhre, welche die Elektrizitäten $+\eta$ und $-\eta$ enthält, die Energie

$$W = \frac{1}{2}\eta V_1 + \frac{1}{2}(-\eta) V_2 = \frac{1}{2}\eta (V_1 - V_2). \quad . \quad (52, a)$$

besitzt. Es ist aber $\eta\,(V_1 - V_2)$ die Arbeit für den Transport der Elektrizität η vom Anfang der Röhre bis an ihr Ende, d. h.

$$W = \frac{1}{2}\eta (V_1 - V_2) = \frac{1}{2}\int \eta F dl \quad . \quad . \quad . \quad (52, b)$$

Setzt man hier η aus (52) ein, so wird

$$W = \int \frac{KF^2}{8\pi} sdl.$$

Es ist nun sdl das Volum dv des Röhrenabschnittes, so daß man schreiben kann:

$$W = \iiint \frac{KF^2}{8\pi} dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52, c)$$

Auf diese Weise findet man, daß die Energie, welche mit der in Betracht gezogenen Röhre verbunden ist, über das ganze Volumen verteilt ist, wobei das Volumen dv der Röhre die Energiemenge

$$dW = \frac{KF^2}{8\pi} dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52, d)$$

enthält. Das erhaltene Resultat gilt für alle Röhren, also auch für den ganzen von Dielektrika erfüllten Raum; es gilt aber auch für jedes Volumelement des Leiters, da in ihm $F = 0$ und $dW = 0$ ist.

Die Größe $dW : dv$, d. h. die Energie im gegebenen Punkte, bezogen auf die Volumeinheit, wollen wir der Kürze halber die Energie der Volumeinheit nennen und mit W_1 bezeichnen; Formel (52, d) gibt uns

$$W_1 = \frac{KF^2}{8\pi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (32, k), so sieht man, daß die Energie der Volumeinheit des Dielektrikums gleich der Spannung P (bezogen auf die Flächeneinheit) oder dem Seitendrucke ist, welcher ebenfalls gleich P ist. Auf diese Weise erhält man folgende neuen Ausdrücke für die Energie W_1 der Volumeinheit

$$W_1 = P = \frac{KF^2}{8\pi} = \frac{BF}{8\pi} = \frac{F\mathfrak{D}}{2} = \frac{2\pi\mathfrak{D}^2}{K} \quad . \quad (53, a)$$

Die Gesamtenergie W des gegebenen elektrischen Feldes wird erhalten, wenn man die Summe der Ausdrücke (52, d) bildet, die man jetzt in der Form

$$dW = Pdv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53, b)$$

für alle Elemente dv des unendlichen Raumes schreiben kann. Somit ist die Energie des Feldes gleich

$$W = \iiint P dv \quad \text{. . . . .} \quad (53, c)$$

wo P durch (53, a) gegeben ist und sich das Integral auf den ganzen unendlichen Raum erstreckt oder, was offenbar dasselbe ist, auf den Teil desselben, in welchem die Intensität F des gegebenen Feldes bemerkbar ist.

Für die Einheitsröhre ist $n = \psi = 1$, d. h. $\eta = 1:4\pi$, vgl. (52). Setzt man dies in (52, b) ein, so erhält man als Energie w_1 der Einheitsröhre

$$w_1 = \int \frac{F}{8\pi} dl \quad \text{. . . . .} \quad (53, d)$$

In einer Einheitsröhre der Induktion ist die auf die Längeneinheit reduzierte Energie gleich $F:8\pi$.

Für die Gesamtenergie w, welche in einer beliebigen Induktionsröhre enthalten ist, erhält man aus (52, a) und (52), wenn man η durch $\frac{n}{4\pi}$ ersetzt, und auch aus (47), S. 97, folgende weitere Ausdrücke:

$$w = \frac{(V_1 - V_2)n}{8\pi} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{8\pi r} = \frac{n^2 r}{8\pi} \quad \text{. .} \quad (53, e)$$

wo r den dielektrischen Widerstand der Röhre bedeutet. Für die in der Einheitsröhre der Induktion enthaltene Gesamtenergie w_1 erhält man, vgl. (47, a),

$$w_1 = \frac{V_1 - V_2}{8\pi} = \frac{r_1}{8\pi} \quad \text{. . . . . .} \quad (53, f)$$

§ 9. Kondensatoren. Im § 7 hatten wir uns mit der Kapazität q eines vereinzelten Leiters bekannt gemacht; wird ein solcher Leiter durch die Ladung η auf das Potential V gebracht, so ist der numerische Ausdruck für seine Kapazität q, vgl. (49, a), durch folgende Formel gegeben:

$$q = \frac{\eta}{V} \quad \text{. . . . .} \quad (53, g)$$

Wir wollen zeigen, daß sich die Kapazität q ändert, wenn sich in der Nähe des in Betracht kommenden Leiters A (Fig. 46 a. f. S.) noch andere Leiter B, C usw. befinden. Nehmen wir zunächst an, diese Leiter seien isoliert und es sei anfänglich keine Ladung auf ihnen vorhanden. Auf A befinde sich beispielsweise eine positive Ladung; sein Potential war gleich V, als sich die Körper B, C usw. noch nicht in seiner Nähe befanden, und dieses Potential ließ sich, wie immer, nach der Formel

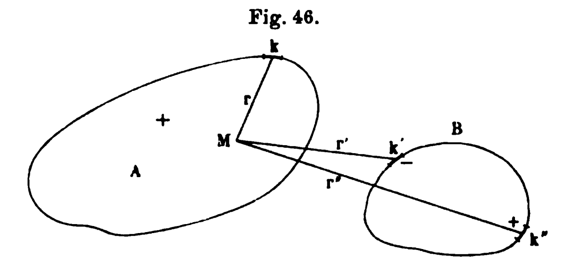
$$V = \frac{1}{K} \int \frac{k ds}{r} \quad \text{. . . . .} \quad (53, h)$$

berechnen, wobei r der Abstand des Elementes ds seiner Oberfläche von einem beliebigen inneren Punkte M ist. Bringt man den Leiter B in endlichen Abstand von A, so treten auf ihm zwei Ladungen auf, deren Dichten wir mit $-k'$ und $+k''$ bezeichnen wollen. Das Potential von A wird jetzt ausgedrückt durch die Formel

$$V = \frac{1}{K}\int\frac{kds}{r} - \frac{1}{K}\int\frac{k'ds'}{r'} + \frac{1}{K}\int\frac{k''ds''}{r''},$$

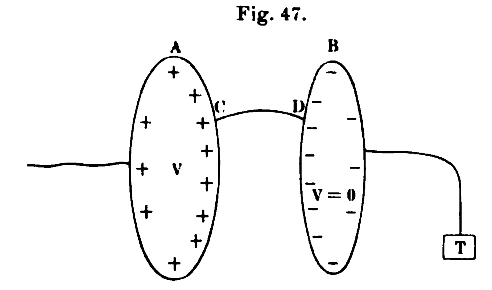
in welcher ds' und ds'' ungleichnamig elektrisierte Elemente der Oberfläche von B sind, die sich vom Punkte M in den Entfernungen r' und r'' befinden. Da $r'' > r'$ ist, die Mengen ungleichnamiger Elektrizitäten

Fig. 46.



auf B aber einander gleich sind, so ist klar, daß $V' < V$ ist, d. h. daß sich das Potential des Körpers A vermindert hatte infolge der Anwesenheit von B. Hat sich aber bei unveränderter Ladung η das Potential V vermindert, so folgt hieraus, daß sich die Kapazität des Leiters A vergrößert hat. Diese Kapazität wird sich noch mehr vergrößern, wenn wir B mit der Erde verbinden. Dann verschwindet das dritte Integral und nimmt außerdem, wie wir gesehen haben, k' an Größe zu, so daß der Körper A ein gewisses Potential V'' annimmt, das noch kleiner als V' ist. Aus dem Gesagten folgt, daß die Kapazität eines Leiters nicht nur von der Zahl, Form und Lage der umgebenden Leiter abhängt, sondern auch davon, ob dieser oder jener Leiter isoliert oder geerdet (mit der Erde verbunden) ist, sowie von der Art des umgebenden Mediums. Da hieraus folgt, daß der Begriff der Kapazität eine gewisse Unbestimmtheit in sich schließt, so wollen wir folgende Definition für die Kapazität gelten lassen: **die Kapazität eines Leiters wird durch diejenige Ladung gemessen, welche sein Potential auf die Einheit bringt, während alle übrigen benachbarten Leiter mit der Erde verbunden sind.** Nach obiger

Fig. 47.



Definition hängt die Kapazität eines Leiters von seiner eigenen Form und Größe und von der Zahl, Form und Lage dieser benachbarten Leiter ab, sowie von dem Zwischenmedium.

Wenden wir uns dem einzigen Falle zu, für den theoretische Berechnungen möglich sind und der praktisches Interesse hat, nämlich dem Falle, daß außer dem in Betracht gezogenen Leiter A nur ein benachbarter, mit der Erde verbundener Leiter B vorhanden ist. Stellen wir uns vor, der Körper A sei mit einer Elektrizitätsquelle (S. 95) verbunden, welche ihn unter allen Umständen auf ein und demselben, dieser Elektrizitätsquelle eigenen Potential V erhält; angenommen, es sei $V > 0$. Bezeichnen wir mit η_0 die Ladung des vereinzelten Körpers A; seine Kapazität

$$q = \frac{\eta_0}{V} \quad \dots\dots\dots \quad (53, \mathrm{i})$$

ist nur von seiner Größe, Form und dem umgebenden Medium abhängig. Entfernt man jetzt A von der Quelle mit dem Potential V und nähert ihm den Körper B (Fig. 47), der mit der Erde T verbunden ist, so erscheint auf letzterem eine negative Ladung, wodurch sich das Potential von A vermindert. Verbindet man hierauf A abermals mit der Quelle, so geht eine neue Elektrizitätsmenge von der Quelle auf A über, d. h. seine Ladung nimmt zu. Gleichgewicht tritt ein, wenn das Potential von A trotz der Anwesenheit von B abermals gleich V wird. Hierbei ist seine Ladung $\eta > \eta_0$. Die negative Ladung von B muß eine derartige sein, daß trotz der Anwesenheit von A und seiner vermehrten positiven Ladung das Potential von B gleich Null wird. Anstatt q haben wir jetzt die Kapazität

$$Q = \frac{\eta}{V} \quad \dots\dots\dots \quad (53, \mathrm{k})$$

Das aus den Körpern A und B bestehende System, in welchem A mit einer Elektrizitätsquelle, B mit der Erde verbunden sein kann, heißt ein Kondensator, da sich auf dem Körper A die Elektrizität in dem Sinne verdichtet, daß seine Ladung infolge der Anwesenheit von B sich um den Betrag $\eta - \eta_0$ vermehrt. Die Kapazität Q, die nach Formel (53, k) berechnet wird und im gegebenen Medium von der Lage der Körper A und B oder — mit anderen Worten — von der Einrichtung des Kondensators abhängt, wird die Kapazität des Kondensators genannt. Das Verhältnis

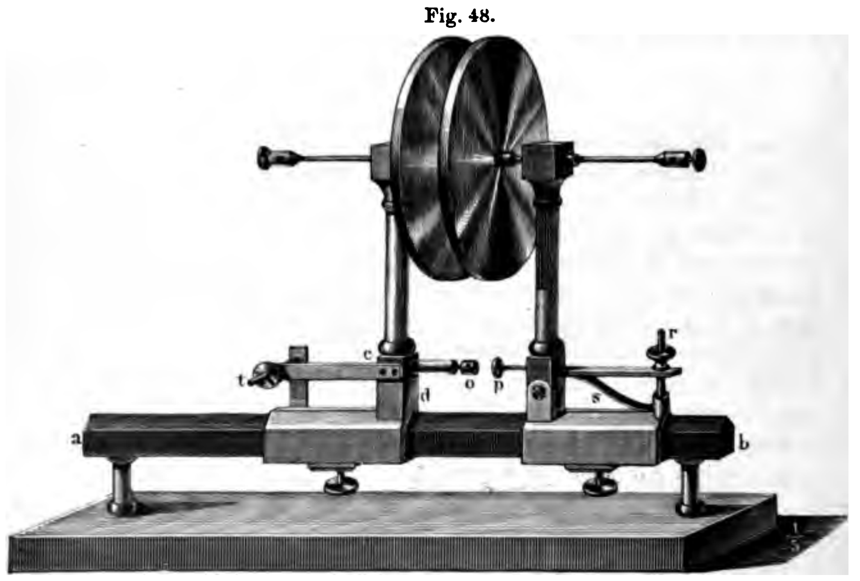
$$\alpha = \frac{Q}{q} \quad \dots\dots\dots \quad (53, \mathrm{l})$$

der Kapazität des Kondensators zur Kapazität des für sich allein genommenen Leiters, der mit einer Elektrizitätsquelle verbunden ist, heißt die Verdichtungskraft des Kondensators. Man kann sagen, daß

uns diese Zahl angibt, wievielmal sich die Kapazität des Leiters A infolge der Annäherung des geerdeten Leiter B vergrößert hat.

Wir werden weiter unten mehrere Formen von Kondensatoren kennen lernen. Gewöhnlich stellt man die Körper A und B aus dünnen Metallplatten her, denen man diese oder jene Gestalt gibt. In den Fällen, welche von praktischer Bedeutung sind, befinden sich die Ladungen auf den beiden einander zugekehrten Oberflächen der Körper A und B; aus diesem Grunde spricht man auch gewöhnlich nicht von zwei Körpern, welche den Kondensator bilden sondern von seinen beiden Oberflächen, von denen die eine mit einer Elektrizitätsquelle

Fig. 48.

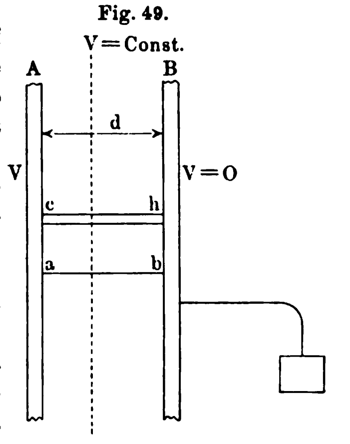


verbunden, die andere geerdet ist. Der einfachste Kondensator ist der ebene Kondensator; ein solcher ist in Fig. 48 abgebildet und zwar in der Form, die er von Kohlrausch erhalten hat. Er besteht aus zwei vertikalen Metallplatten, welche an die Enden zweier horizontaler Stäbe angeschraubt sind, die an ihren anderen Enden Klemmschrauben tragen. Die Montierung des ganzen Apparates ist die folgende. Am horizontalen prismatischen Lineal ab entlang, das auf zwei Füßen ruht, können sich zwei kupferne Hohlprismen verschieben, die man mittels Schrauben von unten her am Lineal festschrauben kann. Auf diesem prismatischen Schlitten sind vertikale Säulen aus Holz oder Glas befestigt, durch deren obere Enden die erwähnten horizontalen Stäbe hindurchgehen; letztere sind durch Schellack oder andere Substanzen sorgfältig isoliert. Zum Parallelstellen der Platten dienen die Schrauben r und t; die Schraubenmutter auf r und die federnde Lamelle s dienen

dazu, die rechte Kondensatorplatte um eine horizontale, den Plattenseiten parallele Achse zu drehen; die Schraubenmutter auf t und eine hinter dem Stäbchen ct befindliche Lamelle ermöglichen eine Drehung der linken Säule und der an ihr befestigten Kondensatorplatte um eine vertikale Achse. Die Schraubenköpfe o und p können dazu dienen, die Kondensatorplatten schnell in eine bestimmte Entfernung voneinander zu bringen; eine von den Kondensatorplatten wird mit einer Elektrizitätsquelle verbunden, die andere wird geerdet.

Man benutzt den ebenen Kondensator u. a. dazu, um die Angaben von Elektroskopen zu verstärken. Der mit einem Elektroskop verbundene Kondensator besteht gewöhnlich aus einer lackierten, horizontalen Metallplatte, welche sich statt der Kugel an einem Elektroskope befindet; auf diese wird eine zweite, ebensolche Platte gelegt, die an einem als Griff dienenden Glasstäbchen befestigt ist. Die beiden Platten sind voneinander durch die Lackschicht isoliert und stellen somit einen ebenen Kondensator dar. Geladen wird derselbe, indem man die eine Platte mit dem Finger ableitend berührt, während man die andere mit einem schwach elektrisierten Körper oder einer schwachen Elektrizitätsquelle verbindet, die keine merkbare Einwirkung auf ein einfaches Elektroskop ausüben würde. Im Kondensator sammeln sich zwei verhältnismäßig große Elektrizitätsmengen auf den einander zugekehrten Seiten der beiden Platten an. Hebt man die Verbindung mit der Erde und dem zu prüfenden Gegenstande auf und entfernt hierauf die obere Platte, so verbreitet sich die auf der oberen Fläche der unteren Platte verdichtete Elektrizität über den Metallstab und die Blättchen des Elektroskops und bewirkt ein relativ starkes Auseinandergehen der Blättchen.

Fig. 49.



Die Elektrizität breitet sich auf den beiden Oberflächen eines ebenen Kondensators nicht gleichmäßig aus, weshalb auch die theoretische Betrachtung eines solchen Kondensators auf große Schwierigkeiten stößt. Aus diesem Grunde wird bei elementarer Betrachtung ein ebener Kondensator mit unendlich großen Platten A und B in Betracht gezogen (Fig. 49).

Die Elektrizitätsdichte k ist in allen Oberflächenpunkten einer solchen Platte konstant; die Niveauflächen des Potentials sind den Platten parallele Ebenen; die Kraftlinien ab und Kraftröhren ch sind auf den Platten senkrechte Gerade. Da sich an beiden Enden einer Röhre gleiche Elektrizitätsmengen befinden müssen, so sind die Dichten

der ungleichartigen Elektrizitäten auf beiden Platten dem absoluten Werte nach einander gleich. Der Raum zwischen den Platten stellt ein homogenes elektrisches Feld dar. Geht man zum Falle eines ebenen Kondensators mit endlichen Platten über, so kann man die genannten Eigenschaften immerhin auf den zentralen, zwischen den Platten liegenden Teil des Raumes beziehen, wenn die Radien der Platten sehr groß im Vergleich zu ihrem Abstande sind.

Wir gehen zur Frage nach der Abhängigkeit der Kapazität eines Kondensators vom Medium über, in dem er sich befindet. Auf S. 99 hatten wir bereits gesehen, daß die Kapazität eines vereinzelten Leiters proportional der Dielektrizitätskonstante K des Mediums ist, in dem er sich befindet. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß dies auch für die Kapazität eines Kondensators gilt. Es sei $Q_0 = \eta : V$ die Kapazität des Kondensators in Luft. Ersetzt man die Luft durch ein Dielektrikum, ohne die Ladung zu ändern, so verkleinert sich das Potential Kmal; um das frühere Potential zu erhalten, hat man die Ladung Kmal größer zu machen, so daß dann die neue Kapazität $Q = KQ_0$ ist. Wir wollen dieselbe Überlegung mit anderen Worten ausdrücken und hierbei den ebenen Kondensator berücksichtigen (Fig. 49). Das Potential V der Platte A ist gleich der Arbeit r für den Transport der Einheit der Elektrizitätsmenge auf beliebigem Wege von A nach B. Ersetzt man die Luft zwischen den Platten durch ein Dielektrikum, so verringert sich nach dem Coulombschen Gesetze die Feldintensität in allen Punkten des Weges Kmal; ebensovielmal verkleinert sich auch die Arbeit r und das Potential V der Platte A, vorausgesetzt, daß ihre Ladung unverändert bleibt. Ist A mit einer Elektrizitätsquelle verbunden, so muß, um das Potential V aufrecht zu erhalten, die Ladung Kmal größer gemacht werden. Diese Überlegungen lassen sich leicht auch auf den allgemeinen Fall anwenden, auf den sich Fig. 46 bezieht, und auf diese Weise ist die Richtigkeit der Gleichung

$$Q = KQ_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

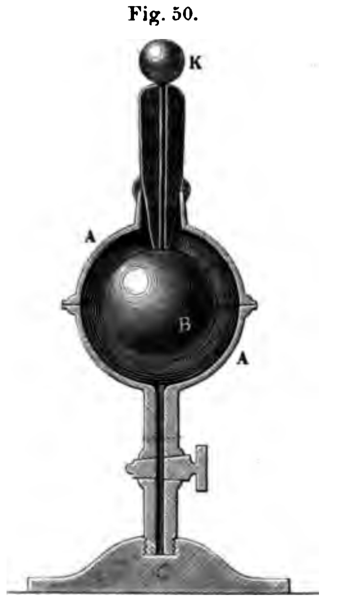
erwiesen.

Ein Kondensator, zwischen dessen Oberflächen sich Luft befindet, heißt ein Luftkondensator. Formel (54) zeigt uns, daß die Kapazität eines mit Dielektrikum versehenen Kondensators Kmal größer ist als die Kapazität eines ebensolchen Luftkondensators. Wir hatten hier die Dielektrizitätskonstante eingeführt, als wir das Coulombsche Gesetz (S. 40) formulierten und wir sind auf diese Weise zur Formel (54) gelangt. Bisweilen schlägt man auch den entgegengesetzten Weg ein, indem man von folgender Definition ausgeht: die Dielektrizitätskonstante oder das Induktionsvermögen eines Dielektrikums ist das Verhältnis der Kapazität eines mit diesem Dielektrikum versehenen Kondensators,

zur **Kapazität** eines ebensolchen Luftkondensators. Diese Definition hatten wir auch in Bd. II angeführt; man kann, von ihr ausgehend, zu dem durch (11) S. 41 ausgedrückten Coulombschen Gesetz gelangen.

Der Einfluß des Dielektrikums, d. h. der isolierenden Schicht zwischen den Oberflächen des Kondensators, auf die Kapazität eines Kondensators, ist von Cavendish in den siebziger Jahren des 18. Jahrhunderts entdeckt worden; die bemerkenswerten Untersuchungen dieses Forschers sind jedoch fast ein Jahrhundert lang unbeachtet geblieben, bis Cl. Maxwell im Jahre 1879 die bis dahin unveröffentlichten Manuskripte von Cavendish herausgab, in denen sogar Bestimmungen der Werte von K für verschiedene Medien enthalten waren. J. Borgman hat einen Apparat konstruiert, mit dessen Hilfe der erwähnte Einfluß des Dielektrikums nach einer Methode, welche an diejenige von Cavendish erinnert, nachgewiesen werden kann.

Fig. 50.



Die Abhängigkeit der Kapazität von Kondensatoren vom dazwischenliegenden Dielektrikum ist im Jahre 1838 von Faraday von neuem entdeckt worden; sie ist eine der wichtigsten Entdeckungen jenes genialen Physikers, sowohl hinsichtlich der Gedankentiefe, als auch hinsichtlich der Ausführung. Faraday bediente sich zweier kugelförmiger Kondensatoren, von denen der eine in Fig. 50 abgebildet ist. Er besteht aus einer Hohlkugel A, die von zwei aufeinander geschliffenen Halbkugeln gebildet wird; an der einen von ihnen befindet sich eine mit einem Hahn versehene Röhre, die dazu dient, die Luft auszupumpen und durch ein anderes Gas zu ersetzen. Innerhalb der Kugel A befindet sich die Kugel B, mit welcher ein durch eine dicke Schellackschicht sorgfältig isolierter Draht in Verbindung steht, an dessen Ende sich die kleine Kugel K befindet. B ist mit einer Elektrizitätsquelle verbunden, A geerdet. Die Oberflächen des Kondensators werden von der Oberfläche der Kugel B und der Innenfläche der Kugel A gebildet; der Durchmesser von B betrug 5,92 cm, der innere Durchmesser von A 9,07 cm. Faraday stellte zwei solche möglichst gleiche Kondensatoren nebeneinander auf und verband zunächst die kleine Kugel K des einen von ihnen mit dem Konduktor einer Elektrisiermaschine, während A geerdet war; hierdurch wurde der Kondensator geladen und

die Kugel B nahm eine gewisse Ladung $\eta = VQ_1$ an, wo V das Potential der Kugel B und Q_1 die Kapazität des mit Luft gefüllten Kondensators ist. Der Grad der Elektrisierung der Kugel B wird offenbar in gleicher Weise durch die Größen V und η bestimmt. Um ein Maß für diese Elektrisierung zu erhalten, brachte Faraday eine kleine, an einem Glasstabe befestigte Kugel (die unbewegliche Kugel einer Drehwage, s. u.) in Berührung mit K, wodurch erstere eine gewisse Ladung η' annahm, deren Größe mit Hilfe der Drehwage in irgendwelchen willkürlichen Einheiten bestimmt wurde. Die Ladung η' kann man der Ladung η proportional setzen, also auch dem Potentiale V, d. h. man kann voraussetzen, daß Faraday die Potentiale der Innenkugeln seiner Kondensatoren gemessen hatte und daß die erste Messung ein Maß für das Potential V abgab. Hierauf verband er für einen Augenblick die Kugeln K beider Kondensatoren und maß nach derselben Methode die Potentiale V_1 und V_2 der Kugeln B beider Kondensatoren, zwischen denen sich die Ladung η verteilt hatte, wobei er eine Korrektur wegen der sogenannten Restladung einführte, von der weiter unten die Rede sein wird; sie wird durch die Schellackschicht zwischen A und B hervorgerufen. Da die einander berührenden Leiter das gleiche Potential haben müssen, so hätte man $V_1 = V_2$ erhalten müssen. In Wirklichkeit aber erhielt man für V_1 und V_2 nicht ganz die gleichen Werte, und wurde als gemeinsamer Wert des Potentials die Größe $V' = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$ angenommen. Es bezeichne Q_2 die Kapazität des zweiten Kondensators. Im Augenblicke der Vereinigung der Kondensatoren stellen sie gewissermaßen einen einzigen Kondensator dar, dessen Kapazität gleich $Q_1 + Q_2$, dessen Ladung gleich η und Potential gleich V' ist, so daß $\eta = V'(Q_1 + Q_2)$ ist. Berücksichtigt man hier die Gleichung $\eta = VQ_1$, so erhält man

$$VQ_1 = V'(Q_1 + Q_2)$$

und hieraus

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{V - V'}{V'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

Da Faraday ein Maß für die Größen V und V' hatte, konnte er auf diese Weise das Verhältnis der Kapazitäten beider Kondensatoren finden.

Waren beide Kondensatoren mit Luft gefüllt, so erhielt man angenähert $V' = \frac{1}{2} V$, d. h. $Q_2 = Q_1$. War jedoch die untere Hälfte des Zwischenraumes zwischen A und B im zweiten Kondensator z. B. mit Schellack gefüllt, so war im Mittel $Q_2 = 1{,}5\, Q_1$, d. h. die Kapazität des zur Hälfte mit Schellack versehenen Kondensators war anderthalbmal so groß wie die Kapazität des nur Luft enthaltenden. Hieraus kann man, wenn auch nicht genau, die Größe von K für Schellack bestimmen.

Ist q die Kapazität der mit Luft gefüllten Kondensatorhälfte, so ist

$$Q_1 = q + q = 2\,q, \quad Q_2 = q + Kq = (1 + K)\,q,$$

folglich

$$\frac{K+1}{2} = \frac{Q_2}{Q_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55,\text{a})$$

Für Schellack ist $Q_2 : Q_1 = 1{,}5$; hieraus folgt $K = 2$. Nach derselben Methode fand Faraday, daß für Walrat K zwischen den Werten 1,3 und 1,6 schwankt, für Schwefel $K = 2{,}24$, für Glas $K = 1{,}76$ ist.

Wir wenden uns jetzt zur Beschreibung der Kondensatoren verschiedener Art.

I. Der ebene Kondensator mit unendlich großen Platten oder, was dasselbe ist, der mittlere Teil eines endlichen, ebenen Kondensators, bei welchem der Plattenabstand klein im Verhältnis zum Radius der Platten ist. Wir wollen die Kapazität eines Teiles eines solchen Kondensators finden, welcher der Oberfläche S jeder von beiden ebenen Platten entspricht. Der Allgemeinheit halber nehmen wir zunächst an, daß die Potentiale der Platten A und B gleich V_1 und V_2 sind (Fig. 51). Bezeichne $\pm k$ die Dichte der Elektrizität auf beiden Platten (vgl. S. 112); in diesem Falle ist die Ladung $\eta = kS$. Die Feldintensität F ist überall die gleiche, da alle Kraftlinien einander parallel sind, sie hat also überall den Wert, welcher den Plattenoberflächen unendlich nahe gelegenen Punkten entspricht, d. h.

Fig. 51.

$$F = \frac{4\pi k}{K}.$$

Die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ beider Platten ist gleich der Arbeit Fd beim Transport der Einheit der Elektrizitätsmenge von einer Platte zur anderen. Sonach ist

$$V_1 - V_2 = Fd = \frac{4\pi k d}{K}$$

und hieraus

$$\frac{\eta}{V_1 - V_2} = \frac{KS}{4\pi d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55,\text{b})$$

Setzt man $V_2 = 0$, so erhält man für die gesuchte Kapazität

$$Q = \frac{\eta}{V_1} = \frac{KS}{4\pi d} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Formel (55, b) zeigt, daß man als Maß für die Kapazität eines ebenen Kondensators die Ladung einer der Platten wählen kann, wenn der Potentialunterschied beider Platten gleich Eins ist.

Die Kapazität eines ebenen Luftkondensators ist

$$Q = \frac{S}{4\pi d} \quad \dots\dots\dots \quad (56, a)$$

Ist d in Centimetern ausgedrückt, S in Quadratcentimetern, so erhält man nach obiger Formel Q in el.-st. C.G.S.-Einheiten der Kapazität; wie wir gesehen haben, sind $9 . 10^5$ solcher Einheiten gleich einem Mikrofarad, vgl. (49, d), S. 100.

Hieraus folgt

$$Q = \frac{KS}{36 . 10^5 \pi d} \text{ Mikrofarad} \quad \dots\dots \quad (56, b)$$

wobei d in Centimetern ausgedrückt sein muß, S in Quadratcentimetern. Suchen wir den Radius R der kreisförmigen Platte eines ebenen Luftkondensators zu bestimmen (oder genauer gesagt, des mittleren Teiles sehr großer Platten), wenn $d = 1$ mm und $Q = 1$ Mikrofarad ist. Es ist $K = 1$, $d = 0{,}1$, $S = \pi R^2$; Formel (56, b) gibt

$$\pi R^2 = 36 . 10^5 . 0{,}1\,\pi$$

und hieraus erhalten wir

$$R = 600 \text{ cm} = 6 \text{ m} \quad \dots\dots\dots \quad (56, c)$$

Aus Formel (56) folgt, daß die Kapazität eines ebenen Kondensators dem Plattenabstande d indirekt proportional ist.

Im Hinblick auf die Wichtigkeit der Formel (56) wollen wir dieselbe noch auf andere Weise herleiten. Wir wählen den Koordinatenanfangspunkt auf der Oberfläche der Platte A (Fig. 51) und die x-Achse senkrecht zu den Platten. In diesem Falle ist V nur eine Funktion von x und Gleichung (41, e), S. 91, gibt $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$, d. h. $V = Ax + B$, wo A und B Konstante sind, die sich aus den Bedingungen finden lassen, daß für $x = 0$ das Potential $V = V_1$ ist, für $x = d$ aber $V = V_2$. Somit ist

$$V_1 = B; \qquad V_2 = Ad + B.$$

Hat man A und B bestimmt, so findet man

$$V = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{d}\,x.$$

Formel (44, a) gibt

$$k = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x=0} = \frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi d} \quad \dots \quad (56, d)$$

Hieraus findet man die Kapazität

$$Q = \frac{\eta}{V_1 - V_2} = \frac{kS}{V_1 - V_2} = \frac{KS}{4\pi d},$$

das ist aber die Formel (56). Das gleiche Resultat hätte man erhalten, falls $V_2 = 0$ gesetzt worden wäre. Die Dichte k_1 auf der Fläche B ist gleich

$$k_1 = -\frac{K}{4\pi}\left[\frac{\partial V}{\partial(-x)}\right]_{x=d} = -\frac{KV_1}{4\pi d} = -k;$$

dasselbe Resultat hatten wir früher, gestützt auf die Eigenschaften der Kraftröhren, erhalten.

Für die Oberflächenspannung P, d. h. für die Kraft, welche auf die Oberflächeneinheit wirkt, hatten wir auf S. 53 den Ausdruck (25) gefunden; derselbe liefert uns die Kraft f, welche auf die Fläche S wirkt, d. h. die Kraft, mit welcher sich die Teile eines ebenen Kondensators gegenseitig anziehen, wenn die Oberfläche jedes dieser Teile gleich S, ihr Abstand gleich d ist. Es ist

$$f = PS = \frac{2\pi k^2 S}{K}.$$

Substituiert man hierin den Ausdruck für k aus (56, d), so findet man:

$$f = \frac{(V_1 - V_2)^2 KS}{8\pi d^2} \quad \ldots \ldots \quad (57)$$

Alle unsere Herleitungen stützen sich auf die Voraussetzung, daß die Dichte k in allen Plattenpunkten die gleiche ist, dies aber kann nur für die zentralen Teile eines großen Kondensators zutreffen, von denen

Fig. 52.

wenigstens einer beweglich gemacht sein muß. Einen derartigen Kondensator hat Lord Kelvin konstruiert: Aus der kreisförmigen Platte A (Fig. 52) ist eine runde Öffnung herausgeschnitten, welche von der Platte S fast vollständig ausgefüllt wird; letztere Platte wird durch eine Feder oder in anderer Weise in ihrer Lage erhalten. Der sie umgebende Teil der Platte A wird der Schutzring genannt, da er die Platte S gewissermaßen vor einer ungleichmäßigen Verteilung der Elektrizität schützt. Formel (57) liefert den Ausdruck für die Kraft, welche auf die bewegliche Platte S in der Richtung zur Platte B hin wirkt. Gewöhnlich nennt man die Kraft f die Kraft der gegenseitigen Anziehung zwischen den Platten des ebenen Kondensators. Aus Formel (57) geht hervor, daß die Kraft f direkt

proportional dem Quadrate des Potentialunterschiedes der Kondensatorplatten, indirekt proportional dem Quadrate ihres Abstandes und direkt proportional der Dielektrizitätskonstanten des Zwischenmediums ist. Kirchhoff und Maxwell haben eine genauere Formel für die Kapazität Q gefunden, worin die Spaltöffnung berücksichtigt ist, welche die bewegliche Platte vom Schutzringe trennt. Drückt man die Größen $V_1 - V_2$ in el.-st. C. G. S.-Einheiten, d in Centimetern, S in Quadratcentimetern aus, so wird f in Dynen (1 Dyne = 1,02 mg) ausgedrückt. So ist z. B. für den Fall, daß $S = 10$ qcm, $d = 1$ mm $= 0{,}1$ cm, $K = 1$ (Luft), $V_1 - V_2 = 100$ Volt $= \frac{1}{3}$ el.-st. C. G. S.-Einheit ist, vgl. (43, a) S. 92, die Kraft f nach Formel (57) gleich $f = 4{,}42$ Dynen $= 4{,}51$ mg.

Formel (56) bezieht sich auf den Fall, daß das Dielektrikum den Raum zwischen den Platten vollständig erfüllt, d. h. eine Schicht von der Dicke d bildet. Suchen wir die Kapazität Q für den Fall, daß die Dicke der Schicht des Dielektrikums $d' < d$ ist. Die Summe der Dicken der Luftschichten ist gleich $d - d'$. Die Arbeit r, die beim Transport der Einheit der Elektrizitätsmenge von einer Platte zur anderen in der Richtung der Kraftlinien geleistet wird, ist gleich

$$r = V_1 - V_2 = F(d - d') + \frac{F}{K} d' = 4\pi k \left(d - d' + \frac{d'}{K}\right),$$

da F, die Feldintensität in Luft, gleich $F = 4\pi k$ ist. Die gesuchte Kapazität Q ist gleich

$$Q = \frac{\eta}{V_1 - V_2} = \frac{kS}{4\pi k\left(d - d' + \frac{d'}{K}\right)} = \frac{S}{4\pi\left(d - d' + \frac{d'}{K}\right)} \qquad (57, a)$$

Man sieht, daß die Einführung einer Schicht d' des Dielektrikums einer Verminderung der Entfernung d um die Größe $d' \frac{K-1}{K}$ gleichkommt. Führt man eine Schicht d' eines isolierten Leiters ($K = \infty$) ein, so entspricht dies einer Verminderung des Abstandes von d bis auf $d - d'$. Es besteht jedoch auch ein wichtiger Unterschied zwischen den Einwirkungen auf die Kapazität Q seitens der Schichten eines Dielektrikums und eines Leiters; die Wirkung einer Leiterschicht hängt nicht davon ab, ob sie massiv oder hohl ist, während die Schicht eines Dielektrikums in diesen beiden Fällen ganz verschiedene Resultate gibt.

Die Kapazität eines ebenen endlichen Kondensators, mit Kreisplatten von der Dicke b, dem Radius r und dem Abstande d, ist von Kirchhoff und Clausius bestimmt worden. Diese Kapazität ist gleich

$$Q = \frac{Kr^2}{4d} + \frac{rK}{4\pi}\left\{1 + lg\,\frac{16\pi(d+b)r}{d^2} + \frac{b}{d}\,lg\,\frac{b+d}{b}\right\} \qquad (57, b)$$

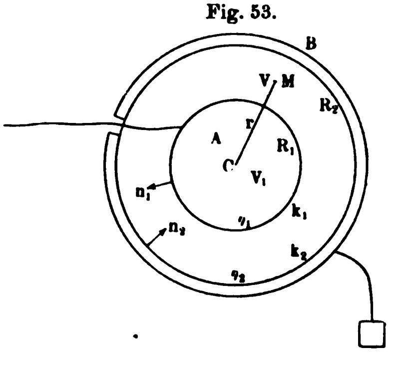
Ist d sehr klein im Vergleich zu r, so kann man sich auf das erste Glied beschränken, das offenbar mit (56) identisch ist. Formel (53, d) gibt für die Verdichtungsfähigkeit eines ebenen Kondensators, wenn man q aus (50, d), S. 101, entnimmt,

$$\alpha = \frac{Q}{q} = \frac{Kr^2}{4d} : \frac{2rK}{\pi} = \frac{\pi r}{8d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57, d)$$

Ist r groß und d klein, so erhält man eine große Verdichtungsfähigkeit α.

II. Der sphärische Kondensator besteht aus einer Hohlkugel B (Fig. 53), in welcher sich eine mit ihr konzentrische zweite Kugel A befindet; letztere ist durch eine kleine in der äußeren Kugel angebrachte Öffnung mit einer Elektrizitätsquelle verbunden, während B geerdet ist. Es sei R_1 der Radius der Kugel A, R_2 der Radius der Innenfläche von B, V_1 das Potential, η_1 die Ladung und $k_1 = \eta_1 : 4\pi R_1^2$ die Oberflächendichte auf der Kugel A; $V_2 = 0$, η_2 und $k_2 = \eta_2 : 4\pi R_2^2$, die entsprechenden Größen für die Kugel B. Benutzt man die Formeln (45) und (45, b) für das innere und äußere Potential der Kugel, so ist

Fig. 53.



$$V_1 = \frac{\eta_1}{KR_1} + \frac{\eta_2}{KR_2}$$

$$V_2 = 0 = \frac{\eta_1}{KR_2} + \frac{\eta_2}{KR_2}.$$

Aus der zweiten von diesen Gleichungen folgt $\eta_2 = -\eta_1$, wie es dem Faradayschen Theorem entspricht (S. 67). Die erste Gleichung gibt

$$V_1 = \frac{\eta_1}{K}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\eta_1}{K} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Hieraus ergibt sich für die Kapazität eines sphärischen Kondensators

$$Q = \frac{\eta_1}{V_1} = \frac{KR_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

In Luft ist

$$Q = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58, a)$$

Die Kapazität q der Innenkugel allein ist gleich KR_1; hieraus erhält man für die Verdichtungsfähigkeit des sphärischen Kondensators den Ausdruck

$$\alpha = \frac{q}{Q} = \frac{R_2}{R_2 - R_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58, b)$$

Ist $R_2 = 10$ cm und $R_2 - R_1 = 2$ mm $= 0{,}2$ cm, so ist $\alpha = 50$. Nehmen wir an, es sei $R_2 - R_1 = d$ sehr klein im Vergleiche zu R_1 und R_2, dann kann man anstatt $R_1 R_2$ die Größe R^2 setzen, wo R der mittlere Radius ist. Für Q erhält man

$$Q = \frac{KR^2}{d} = \frac{4\pi R^2 K}{4\pi d} = \frac{KS}{4\pi d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58, c)$$

wo S die Oberfläche des Kondensators ist: die Formel (58, c) ist der Form nach identisch mit Formel (56).

Wir wollen noch eine andere Herleitung der Formel (58, a) vornehmen.

Der Allgemeinheit halber nehmen wir an, es sei das Potential V_2 der Kugel B nicht gleich Null. Führt man Polarkoordinaten ein, deren Anfangspunkt sich im Zentrum C befindet, so ist das Potential V in den Punkten M, welche zwischen A und B liegen, offenbar nur eine Funktion von r allein. Es ist also $V = f(r)$, wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist. Die Größe V muß in den Punkten M der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

genügen.

Formt man letztere in bekannter Weise um, indem man eine unabhängige Veränderliche r einführt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

die sich leicht integrieren läßt, wenn man zuerst $\frac{\partial V}{\partial r} = z$ setzt: man erhält schließlich V in folgender Form:

$$V = A + \frac{B}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58, d)$$

Aus den Bedingungsgleichungen

$$V_1 = A + \frac{B}{R_1}$$

$$V_2 = A + \frac{B}{R_2}$$

findet man die Konstanten A und B und darauf V in der Form:

$$V = \frac{R_2 V_2 - R_1 V_1}{R_2 - R_1} + \frac{R_1 R_2 (V_1 - V_2)}{R_2 - R_1} \cdot \frac{1}{r} \quad . \quad . \quad (59)$$

Für die Dichten findet man

$$k_1 = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_1} = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R_1} = \frac{KR_2(V_1 - V_2)}{4\pi R_1(R_2 - R_1)},$$

$$k_2 = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_2} = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial(-r)}\right)_{r=R_2} = -\frac{KR_1(V_1 - V_2)}{4\pi R_2(R_2 - R_1)}.$$

Hieraus ergibt sich für die Elektrizitätsmenge

$$\left.\begin{aligned}\eta_1 &= 4\pi R_1^2 k_1 = \frac{KR_1R_2}{R_2 - R_1}(V_1 - V_2)\\ \eta_2 &= 4\pi R_2^2 k_2 = -\frac{KR_1R_2}{R_2 - R_1}(V_1 - V_2)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (59, a)$$

d. h. $\eta_2 = -\eta_1$. Für die Kapazität erhält man

$$Q = \frac{\eta_1}{V_1 - V_2} = \frac{KR_1R_2}{R_2 - R_1}$$

im Einklang mit (58). Wie man sieht, wird auch hier Q durch diejenige Ladung gemessen, welche dem Falle $V_1 - V_2 = 1$ entspricht, ohne daß man die Bedingung $V_2 = 0$ einzuführen braucht. Die Kapazität eines sphärischen Kondensators, ausgedrückt in Mikrofarads, ist gleich, vgl. (49, d), S. 100, und (56, b), S. 116,

$$Q = \frac{KR_1R_2}{9.10^5(R_2 - R_1)} \text{ Mikrofarad}$$

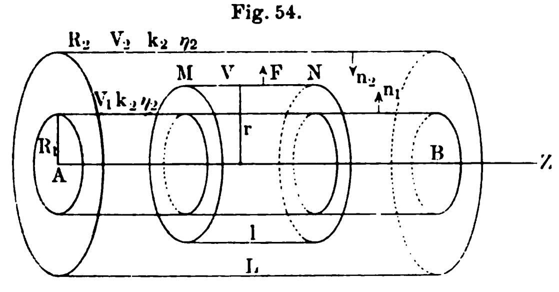
oder falls $R_2 - R_1 = d$ klein ist, vgl. (58, c),

$$Q = \frac{KR^2}{9.10^5 d} \text{ Mikrofarad.}$$

Setzt man $K = 1$, $d = 1$ mm $= 0{,}1$ cm und $Q = 1$ Mikrofarad, so erhält man $R = 300$ cm $= 3$ m.

III. Der zylindrische Kondensator. Es mögen zwei leitende Zylinder von unbestimmter Länge die gemeinsame Achse AB haben

Fig. 54.



(Fig. 54); der Radius des Querschnittes des inneren Zylinders sei R_1, der inneren Fläche des äußeren Zylinders gleich R_2, die Potentiale der

Zylinder seien V_1 und V_2, die Dichten der Ladungen k_1 und k_2. Denken wir uns einen Abschnitt des Kondensators von der Länge L abgetrennt und bestimmen wir seine Kapazität Q; es seien η_1 und η_2 die Ladungen auf den abgetrennten Teilen der beiden Zylinder. Aus Symmetriegründen müssen die Niveauflächen des Potentials Zylinderflächen sein, welche dieselbe Achse haben, d. h. das Potential V ist eine Funktion der Entfernung r eines Punktes von der Achse AB. Trennen wir den Teil MN eines solchen Zylinders ab und nehmen wir an, seine Länge sei $MN = l$. Die Kraftlinien, welche stets senkrecht zur Niveaufläche des Potentials sind, haben die Richtungen der Geraden r. Wir wollen auf die Oberfläche des Zylinders MN den Lehrsatz vom Induktionsflusse anwenden (S. 54). Die Seitenfläche des Zylinders ist gleich $2\pi r l$. Ist F die Feldintensität in den Punkten dieser Fläche, so ist der Gesamtfluß ψ durch die Zylinderfläche gleich $\psi = 2\pi r l F K$, da der Fluß durch die Grundflächen des Zylinders offenbar gleich Null ist. Innerhalb des Zylinders ist die Elektrizitätsmenge $\eta_0 = 2\pi R_1 l k_1$ enthalten. Der Lehrsatz besagt, daß $\psi = 4\pi\eta_0$ ist; substituiert man ψ und η_0, so erhält man

$$F = \frac{C}{r},$$

wo C eine Konstante ist, d. h. eine von r unabhängige Zahl. Aus der Gleichung $F = -\frac{\partial V}{\partial n}$, in welcher n die Normale zur Niveaufläche des Potentials bedeutet, folgt

$$F = -\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{C}{r}.$$

Hieraus folgt, daß das Potential V eine Funktion von r von folgender Gestalt sein muß:

$$V = A + B\,lg\,r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

wo A und B konstante Größen sind und lg das Zeichen für die natürlichen Logarithmen bedeutet. Man kann diese Formel auch noch auf anderem Wege herleiten. Man sieht, daß $V = f(r)$ ist, wo $r^2 = x^2 + y^2$ ist, wenn man die z-Achse der Kondensatorachse entlang führt. Formt man die Laplacesche Gleichung um, indem man die unabhängige Veränderliche r einführt, so erhält man die Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

welche sich leicht integrieren läßt und für V einen Ausdruck von der Form (60) gibt. Die Konstanten A und B bestimmt man aus den Bedingungsgleichungen $V = V_1$ für $r = R_1$ und $V = V_2$ für $r = R_2$; das gibt

$$V_1 = A + B\,lg\,R_1, \qquad V_2 = A + B\,lg\,R_2.$$

Hieraus erhält man

$$V = \frac{V_1 \, lg\, R_2 - V_2 \, lg\, R_1}{lg\, R_2 - lg\, R_1} - \frac{V_1 - V_2}{lg\, R_2 - lg\, R_1} \, lg\, r.$$

Für die Dichten k_1 und k_2 erhält man die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_1} = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r=R_1} \\ &= -\frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi\,(lg\, R_2 - lg\, R_1)} \cdot \frac{1}{R_1} \\ k_2 &= -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_2} = -\frac{K}{4\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial(-r)}\right)_{r=R_2} \\ &= -\frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi\,(lg\, R_2 - lg\, R_1)} \cdot \frac{1}{R_2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (60, a)$$

Für die Ladungen erhält man

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= 2\pi R_1 L k_1 = \frac{K(V_1 - V_2) L}{2\, lg \dfrac{R_2}{R_1}} \\ \eta_2 &= 2\pi R_2 L k_2 = -\frac{K(V_1 - V_2) L}{2\, lg \dfrac{R_2}{R_1}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (60, b)$$

Es ist $\eta_2 = -\eta_1$, wie dies dem Faradayschen Theorem (S. 67) entspricht. Man sieht, daß auch hier die Ladung, welche als Maß für die Kapazität Q dient, erhalten wird, wenn man $V_1 - V_2 = 1$ oder $V_2 = 0$ (der äußere Zylinder ist geerdet) und $V_1 = 1$ setzt. Man sieht leicht ein, daß man ein Ähnliches stets erhalten muß, wenn der eine der den Kondensator bildenden Körper den anderen vollständig umgibt, und falls das Potential V_2 des ersten Körpers ausschließlich von der Ladung abhängt, die sich auf seiner Außenfläche vorfindet.

Für die Kapazität eines Abschnittes L eines zylindrischen Kondensators erhält man

$$Q = \frac{\eta_1}{V_1 - V_2} = \frac{KL}{2\, lg \dfrac{R_2}{R_1}} = \frac{0{,}2172\, KL}{Lg \dfrac{R_2}{R_1}} \quad . \; . \quad (60, c)$$

wo Lg das Zeichen für die gewöhnlichen (Briggschen) Logarithmen ist; in Mikrofarads ausgedrückt, erhält man

$$Q = \frac{KL}{18 \,.\, 10^5\, lg \dfrac{R_2}{R_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (60, d)$$

Ist $R_2 - R_1 = d$ klein im Vergleich zu R_1, so kann man

$$lg \frac{R_2}{R_1} = lg\left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1}\right) = lg\left(1 + \frac{d}{R_1}\right) = \frac{d}{R_1}$$

setzen und demnach

$$Q = \frac{KLR_1}{2d} = \frac{2\pi LR_1K}{4\pi d} = \frac{KS}{4\pi d} \quad . \quad . \quad . \quad (60, e)$$

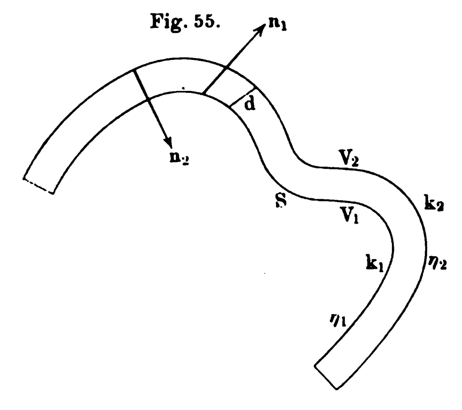
Dieser Ausdruck ist der gleiche, wie (56) und (58, c). Unterseeische Telegraphenkabel können als zylindrische Kondensatoren angesehen werden, in denen die Metallader die Rolle des inneren Zylinders spielt, die Armatur oder einfach das Meerwasser die Rolle des äußeren Zylinders, während endlich die Isolierschicht das dielektrische Zwischenmedium darstellt, auf welches sich der Wert der Konstanten K bezieht.

Fallen die Achsen der beiden Zylinder nicht vollständig zusammen, sondern haben sie einen kleinen Abstand c voneinander, so erhält man, wie J. J. Thomson gezeigt hat, anstatt (60, e) den komplizierteren Ausdruck

$$Q = \frac{KL}{2\,lg \frac{R_2}{R_1}} \left\{ 1 + \frac{c^2}{(R_2^2 - R_1^2)\, lg \frac{R_2}{R_1}} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (60, f)$$

IV. **Zwei gleiche parallele Zylinder.** Ist d der Abstand der Achsen voneinander, R der Radius des Querschnittes der Zylinder, L die Länge des in Betracht gezogenen Teiles beider Zylinder, so ist die Kapazität

Fig. 55.



$$Q = \frac{KL}{4\,lg \frac{d}{R}} \quad . \quad . \quad (60, g)$$

V. **Ein Kondensator von beliebiger Form unter der Bedingung, daß d klein ist**; hier ist d der Abstand der Kondensatorflächen voneinander, derselbe kann in verschiedenen Punkten des Kondensators verschieden sein. Nehmen wir an, es haben V_1, V_2, k_1, k_2, η_1 und η_2 ihre frühere Bedeutung (vgl. Fig. 55), S sei die Oberfläche des Kondensators und zwar ist es, weil d klein ist, gleichgültig, welche von beiden. Einen angenäherten Wert für die Kapazität Q erhält man, wenn man in die Formel für k_1 und k_2 anstatt $\frac{\partial V}{\partial n}$ zuerst $\Delta V : \Delta n$ einsetzt und darauf $\Delta n = d$ annimmt, folglich $\Delta V = V_1 - V_2$.

Man erhält dann

$$k_1 = \frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_1} = \frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi d},$$

$$k_2 = -\frac{K}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n_2} = -\frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi d}.$$

Für die Ladungen erhält man

$$\eta_1 = \int k_1 dS = \frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi}\int\frac{dS}{d},$$

$$\eta_2 = \int k_2 dS = -\frac{K(V_1 - V_2)}{4\pi}\int\frac{dS}{d},$$

d. h. $\eta_2 = -\eta_1$, wie es nach dem Faradayschen Theorem (S. 67) sein muß. Für die Kapazität erhält man

$$Q = \frac{\eta_1}{V_1 - V_2} = \frac{K}{4\pi}\int\frac{dS}{d}.$$

Ist die Dicke d der dielektrischen Schicht überall die gleiche, so ist

$$Q = \frac{KS}{4\pi d} \quad \text{. . . . .} \quad (61)$$

Diese Formel stellt eine Verallgemeinerung der Ausdrücke (56), (58, c) und (60, e) dar. Ausgehend von dieser angenäherten Formel sieht man, daß die Kapazität eines Kondensators im allgemeinen proportional seiner gesamten Oberfläche und dem Induktionsvermögen des dielektrischen Zwischenmediums und indirekt proportional dem Abstande seiner Oberflächen ist.

Wenden wir uns nunmehr zu der Frage nach der Schaltung von Kondensatoren. Mehrere Kondensatoren kann man zu einer sogenannten Batterie miteinander verbinden. Es kann dies in verschiedener Weise geschehen und wollen wir zwei Arten betrachten.

A. Parallelschaltung. Die beiden Flächen eines Kondensators wollen wir in den Figuren symbolisch durch zwei kurze, parallele Linien andeuten. Die Parallelschaltung ist schematisch in Fig. 56 (a. f. S.) angedeutet. Es sind untereinander verbunden erstens alle äußeren Flächen $a_1, a_2, a_3 \ldots$, zweitens alle inneren Flächen $b_1, b_2, b_3 \ldots$. Es mögen Q_1, Q_2, Q_3 usw. die Kapazitäten der Kondensatoren, $\pm\eta_1$, $\pm\eta_2$, $\pm\eta_3$ usw. ihre Ladungen bedeuten. Alle Flächen a_i befinden sich auf dem gleichen Potentiale V_1, alle Flächen b_i auf dem hiervon verschiedenen Potentiale V_2. Es ist $\eta_i = Q_i (V_1 - V_2)$, die Gesamtladung ist $\eta = \Sigma\eta_i$. Andererseits ist $\eta = Q (V_1 - V_2)$, wo Q die Kapazität der Batterie bedeutet. Substituiert man, so folgt

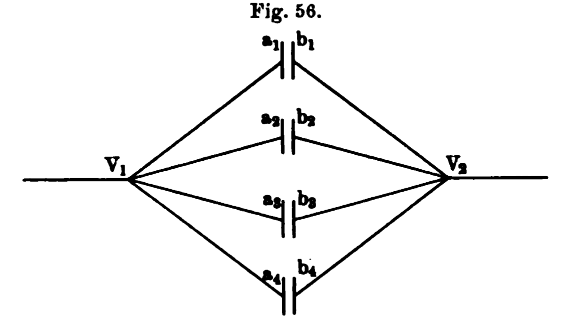
$$\eta = Q\,(V_1 - V_2) = \Sigma\,\eta_i = \Sigma\,Q_i\,(V_1 - V_2) = (V_1 - V_2)\,\Sigma\,Q_i$$

und hieraus

$$Q = \Sigma\,Q_i \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Bei der Parallelschaltung ist die Kapazität einer Batterie gleich der Summe der Kapazitäten der einzelnen Kon-

Fig. 56.



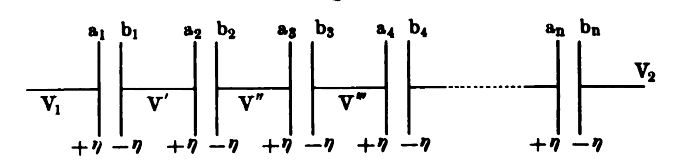
densatoren. Es ist ohne weiteres klar, daß alle Kondensatoren zusammen genommen einen einzigen Kondensator bilden, dessen Oberfläche gleich der Summe der Oberflächen der miteinander parallel verbundenen Kondensatoren ist. Sind n gleiche Kondensatoren parallel geschaltet, so ist

$$Q = n\,Q',$$

wo Q' die Kapazität jedes von ihnen ist.

B. Reihenschaltung (Hintereinanderschaltung; Kaskadenschaltung). Dieselbe ist schematisch durch Fig. 57 dargestellt. Die eine Fläche a_1 des ersten Kondensators ist mit einer Elektrizitätsquelle

Fig. 57.



verbunden und hat, wie wir annehmen wollen, das Potential V_1; die andere Fläche b_1 ist mit der einen Fläche a_2 des zweiten Kondensators verbunden, die andere Fläche b_2 desselben ist ihrerseits mit der einen Fläche a_3 des dritten Kondensators verbunden usw. Es sei V' das Potential der Flächen b_1 und a_2, V'' das Potential der Flächen b_2 und a_3 usf., endlich sei V_2 das Potential der zweiten Fläche des letzten Kondensators, die gewöhnlich geerdet wird, so daß $V_2 = 0$ wird. Erhält a_1 die Ladung η, so bleibt auf b_1 die Ladung $(-\eta)$ und geht die Ladung $(+\eta)$ auf a_2 über; infolge hiervon erscheint auf b_2 die Ladung

$(-\eta)$ und $(+\eta)$ geht auf a_3 über usw. Auf diese Weise erhalten alle Kondensatoren gleiche Ladungen. Wir haben jetzt

$$V_1 - V' = \frac{\eta}{Q_1}$$

$$V' - V'' = \frac{\eta}{Q_2}$$

$$V'' - V''' = \frac{\eta}{Q_3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$V^{(n-1)} - V_2 = \frac{\eta}{Q_n}.$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man

$$V_1 - V_2 = \eta \sum \frac{1}{Q_i}.$$

Andererseits erhält man für die gesamte Batterie

$$V_1 - V_2 = \frac{\eta}{Q}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{Q} = \sum \frac{1}{Q_i} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (63)$$

Bei hintereinander geschalteten Kondensatoren ist der reziproke Wert für die Kapazität der Batterie gleich der Summe der reziproken Werte für die Kapazitäten der einzelnen Kondensatoren. Besitzen diese Kondensatoren gleiche Kapazität, ist ihre Anzahl n und die Kapazität eines jeden von ihnen gleich Q', so ist nach (63)

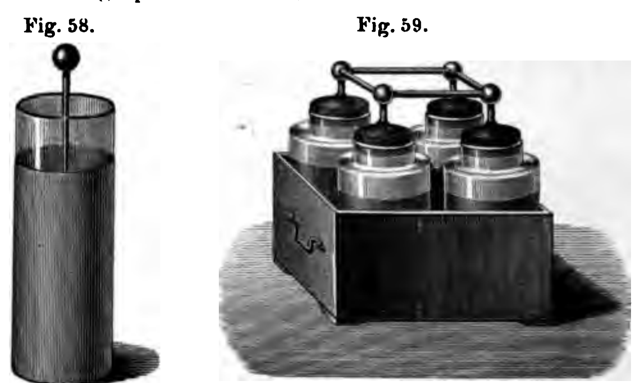
$$Q = \frac{Q'}{n}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (63, a)$$

Einer der Vorzüge der Hintereinanderschaltung besteht darin, daß eine große Potentialdifferenz $V_1 - V_2$, welcher ein einzelner Kondensator nicht standhalten könnte, hier dennoch angewandt werden kann, da die einzelnen Kondensatoren (bei genügend großer Zahl) viel geringere Potentialdifferenzen aufweisen.

Eine der in der Praxis gebräuchlichsten Kondensatorenformen stellt die Leidener Flasche dar. Sie besteht aus einer Glasflasche (Fig. 58 a. f. S.) oder einem Glaszylinder, welcher von innen und außen bis zu einer gewissen Höhe mit Stanniol belegt ist. Die innere Zinnfolie steht in leitender Verbindung mit einem Kügelchen, dem Knopfe der Flasche, welches aus der Flasche hervorragt. Die innere und äußere Folie nennt man gewöhnlich die Belegungen der Flasche;

sie entsprechen den beiden Körpern, aus deren Kombination, wie wir gesehen haben, jeder Kondensator besteht. Die beiden Oberflächen, von denen wir gesprochen haben, als wir die Kondensatoren betrach-

Fig. 58. Fig. 59.



teten, sind hier die äußere Fläche der inneren und die innere Fläche der äußeren Belegung, d. h. die dem Glase zugekehrten Flächen; das

Fig. 60.

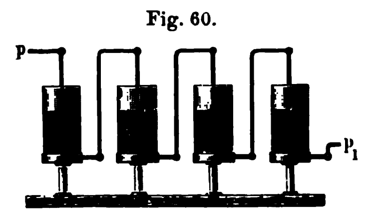
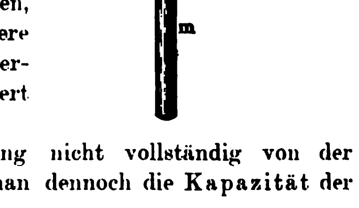


Fig. 61.



Glas spielt hier die Rolle des dielektrischen Zwischenmediums. Der Knopf, also auch die innere Belegung, wird gewöhnlich mit der Elektrizitätsquelle verbunden, die äußere geerdet. Will man die äußere Belegung mit der Elektrizitätsquelle verbinden, so muß man die Flasche isoliert aufstellen.

Obgleich hier die innere Belegung nicht vollständig von der äußeren umschlossen wird, so kann man dennoch die Kapazität der Flasche nach Formel (61) bestimmen:

$$Q = \frac{KS}{4\pi d} \quad \text{. . . . .} \quad (64)$$

in der d die mittlere Dicke der Glaswandungen, K das Induktionsvermögen des Glases und S die Oberfläche einer der belegten Seiten ist. In Fig. 59 ist eine der Arten der Parallelschaltung veranschaulicht; alle Flaschen stehen in einem von innen mit Stanniol ausgekleideten Kasten, die Knöpfe aber sind durch Metallstäbe unterein-

ander verbunden. Sind die Flaschen einander gleich, so ist die Kapazität der Leidener Batterie gleich $Q_n = nQ$.

Fig. 60 zeigt die Kaskadenschaltung der Flaschen, wobei die Kapazität der Batterie gleich $Q_n = Q:n$ ist. Verbindet man die Belegungen einer Leidener Flasche durch einen metallischen Leiter, so heben sich die ungleichnamigen Ladungen gegenseitig auf oder, anders ausgedrückt, verschwinden die im Glase vorhandenen Spannungen. Diese Erscheinung nennt man eine Flaschenentladung oder Kondensatorentladung. Um eine solche Entladung hervorzurufen, bedient man sich verschiedenartiger Apparate, die man Entlader nennt. Der einfache, in Fig. 61 abgebildete Entlader besteht aus einem gläsernen Griffe *m* mit daran befestigtem Scharnier *c*, um welches sich zwei ein wenig gebogene, in kleine Kugeln *a* und *b* endigende Metalldrähte drehen können. Man drückt die eine dieser Kugeln gegen die äußere Belegung und nähert hierauf die andere Kugel dem Knopfe der Flasche. Der Entladungsvorgang ist von einem Funken begleitet, der zwischen dem Knopfe und der genäherten Kugel auftritt. Die Entladung ist ein dynamischer Vorgang und wird daher eingehender im zweiten Teile dieses Bandes beschrieben werden.

Wir haben nun noch die Frage nach der Energie des Kondensators zu betrachten, d. h. der Größe W der potentiellen elektrischen (genauer gesagt elektrostatischen) Energie, die im geladenen Kondensator aufgespeichert ist. Wir hatten für die Energie W eines Systemes von elektrisierten Leitern die Formel (51, d) auf S. 104:

$$W = \frac{1}{2}\Sigma V\eta \quad \ldots\ldots \quad (65)$$

wo V die Potentiale, η die Ladungen der Leiter sind. Beim Kondensator hat man es mit zwei Körpern zu tun, so daß

$$W = \frac{1}{2}V_1\eta_1 + \frac{1}{2}V_2\eta_2$$

ist. In allen praktisch wichtigen Fällen ist $\eta_2 = -\eta_1$, läßt man demgemäß die Indizes fort, so ist

$$W = \frac{1}{2}\eta\,(V_1 - V_2) \quad \ldots\ldots \quad (65,\text{a})$$

Für die Kapazität Q konnten wir in allen Fällen den Ausdruck $Q = \eta:(V_1 - V_2)$ anwenden; wir erhalten daher

$$W = \frac{1}{2}\eta\,(V_1 - V_2) = \frac{\eta^2}{2Q} = \frac{1}{2}Q\,(V_1 - V_2)^2 \quad . \quad (65,\text{b})$$

Wir wollen nun annehmen, der Kondensator sei geerdet; setzt man $V_2 = 0$ und $V_1 = V$, so wird

$$W = \frac{1}{2}\eta V = \frac{\eta^2}{2Q} = \frac{1}{2}QV^2 \quad \ldots\ldots \quad (65,\text{c})$$

Diese Ausdrücke sind identisch mit (51, a), S. 102. Nach der Formel (61)

$$Q = \frac{SK}{4\pi d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65, d)$$

erhält man

$$W = \frac{1}{2}\eta V = \frac{2\eta^2\pi d}{KS} = \frac{KSV^2}{8\pi d} = \frac{2\pi d\eta k}{K} \quad . \quad (65, e)$$

wo $k = \eta : S$ die Dichte der Ladung bedeutet. Diese Formeln zeigen, daß die Energie eines gegebenen Kondensators proportional dem Produkte aus der Ladung und der Ladungsdichte, oder proportional dem Quadrate der Ladung oder dem Quadrate des Potentials ist; bei gegebener Ladung ist die Energie indirekt proportional der Oberfläche des Kondensators. Um den Sinn des letztgenannten Gesetzes zu erfassen, hat man zu beachten, daß eine Vergrößerung der Oberfläche, auf welcher eine Ladung angesammelt ist, einer Ausbreitung der Ladung entspricht, wobei die inneren abstoßenden Kräfte eine Arbeit verrichten, der entsprechend sich der Energievorrat verringert. Der Ausdruck (65, e) zeigt uns ferner, daß bei gegebenen η, S und d die Energie indirekt proportional der Dielektrizitätskonstanten des Zwischenmediums ist.

Wir wollen jetzt die Energie einer aus gleichen Kondensatoren bestehenden Batterie berechnen; es sei Q_1 die Kapazität eines Kondensators, n die Anzahl der Kondensatoren.

Nehmen wir zunächst an, es seien n Kondensatoren einander parallel geschaltet, d. h. sie bilden einen Kondensator, dessen Kapazität $Q_n = n\,Q_1$ ist; es sei V das Potential, W_n die Energie, η_n die Ladung der Batterie. Formel (65, e) gibt uns dann

$$W_n = \frac{1}{2}\eta_n V = \frac{\eta^2}{2\,Q_n} = \frac{1}{2}Q_n V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Wir laden einen Kondensator bis zum Potential V, wobei W_1 seine Energie, η_1 seine Ladung sein mag. Es ist dann

$$W_1 = \frac{1}{2}\eta_1 V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66, a)$$

Bei der Parallelschaltung ist jedoch $\eta_n = n\,\eta_1$ und $Q_n = n\,Q_1$, vgl. S. 125, folglich hat man nach (66)

$$W_n = \frac{1}{2}n\,\eta_1 V = \frac{\eta_n^2}{2\,n\,Q_1} = \frac{1}{2}n\,Q_1 V^2 \quad . \quad . \quad (66, b)$$

Aus (66, a) und (66, b) folgt

$$W_n = n\,W_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66, c)$$

Die Energie einer aus n parallel geschalteten Kondensatoren (z. B. Leidener Flaschen) bestehenden Batterie ist $n$mal so groß als die Energie jedes der Kondensatoren; bei gegebener Ladung ist sie indirekt proportional der Zahl n; bei gegebenem Potential ist sie direkt proportional der Zahl n.

Nehmen wir jetzt an, es seien n Kondensatoren hintereinander geschaltet. Wenden wir uns der Fig. 57 auf S. 126 zu, wobei wir annehmen, daß der letzte Kondensator geerdet, d. h. daß $V_2 = 0$ ist; außerdem nehmen wir an, daß $V_1 = V$ ist. Unser System besteht aus folgenden gesonderten Körpern (Leitern): a_1, $b_1 a_2$, $b_2 a_3$, ... und der letzte Körper b_n ist geerdet. Die Körper $b_1 a_2$, $b_2 a_3$ usw. sind isoliert und daher sind die ihnen entsprechenden Glieder in der Summe (65) gleich Null (S. 129). So gibt z. B. b_1 das Glied $\frac{1}{2}(-\eta)V'$ und a_2 das Glied $\frac{1}{2}(+\eta)V'$, was zusammen gleich Null ist; der Körper b_n hat das Potential Null. Offenbar bleibt nur ein Glied übrig, das sich auf den ersten Körper A bezieht, so daß, wenn man η_n anstatt η schreibt, die Gesamtenergie gleich

$$W_n = \frac{1}{2}\eta_n V = \frac{\eta_n^2}{2 Q_n} = \frac{1}{2} Q_n V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

ist.

Für einen Kondensator, der auf das Potential V gebracht ist, während seine andere Fläche b_1 das Potential Null hat, erhielte man

$$W_1 = \frac{1}{2}\eta_1 V = \frac{1}{2} Q_1 V^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67,\mathrm{a})$$

Bei der Reihenschaltung ist $Q_n = Q_1 : n$, vgl. S. 127, folglich ist $\eta_n = \eta_1 : n$. Daher ergibt (67)

$$W_n = \frac{n\eta_n^2}{2 Q_1} = \frac{Q_1 V^2}{2n} = \frac{W_1}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67,\mathrm{b})$$

Die Energie einer Batterie, welche aus n hintereinander geschalteten Kondensatoren (z. B. Leidener Flaschen) besteht, ist gleich dem $n$ten Teil der Energie eines bis auf das gleiche Potential geladenen Kondensators; bei gegebener Ladung ist die Energie proportional der Zahl n; bei gegebenem Potential ist sie indirekt proportional der Zahl n.

Leicht läßt sich auch die Energie für eine Batterie ermitteln, welche aus hintereinander geschalteten Gruppen von Kondensatoren besteht, die untereinander parallel verbunden sind.

Ohne an dieser Stelle auf den komplizierten Entladungsvorgang einzugehen, können wir dennoch auf das Endresultat desselben verweisen, wobei wir uns auf das Prinzip von der Erhaltung der Energie stützen.

Die elektrische Energie W des Kondensators verschwindet bei der Entladung und an ihrer Stelle tritt eine ihr äquivalente Menge von Energie anderer Formen auf. Gewöhnlich geht fast die gesamte Energie W in Wärmeenergie über, deren in Joules oder Grammkalorien ausgedrückte Menge sich leicht berechnen läßt. Werden die Größen η, V, Q, S und d in den Formeln (65, c) und (65, e) in C. G. S.-Einheiten ausgedrückt, so erhält man W in Ergs; werden η, V und Q in Coulombs, Volts und Farads ausgedrückt, so erhält man W in Joules (1 Joule $= 10^7$ Erg $= 0{,}102$ mkg $= 0{,}24$ g-cal). Hierdurch erhält man folgende Gleichungen:

1. Gegeben sind η, V, Q, S (qcm) und d (cm) in C. G. S.-Einheiten:

$$W = \frac{1}{2}\eta V = \frac{\eta^2}{2Q} = \frac{1}{2} QV^2 = \frac{2\eta^2\pi d}{KS} = \frac{KSV^2}{8\pi d} \text{ Erg} \quad . \quad (68)$$

$$W = 0{,}12 \,.\, 10^{-7}\, \eta V = \frac{0{,}12\,\eta^2}{10^7 Q} = 0{,}12 \,.\, 10^{-7}\, QV^2$$

$$= \frac{0{,}48\,\eta^2\pi d}{10^7 KS} = \frac{0{,}03\, KSV^2}{10^7 \pi d} \text{ g-cal} \quad \ldots\ldots \quad (68,\text{a})$$

2. Gegeben sind V in Volts, Q in Mikrofarads, η in Mikrocoulombs:

$$W = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}\eta V = \frac{1}{2} \cdot \frac{\eta^2}{10^6 Q} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}\, QV^2 \text{ Joules} \quad . \; . \quad (68,\text{b})$$

$$W = 0{,}12 \,.\, 10^{-6}\eta V = \frac{0{,}12\,\eta^2}{10^6 Q} = 0{,}12 \,.\, 10^{-6} QV^2 \text{ g-cal} \quad . \; . \; . \quad (68,\text{c})$$

Bei der Entladung eines Kondensators, z. B. einer Batterie von Leidener Flaschen, kann man zwischen den Entlader und die Batterie eine Reihe von untereinander verbundenen Körpern schalten, wie z. B. Drähte. Alle diese Körper zusammengenommen bilden die Entladungskette (Entladungskreis), durch welche, wie man zu sagen pflegt, die Entladung hindurchgeht. Auf diesen Körpern verteilt sich die Wärmemenge W, wobei die volle frei werdende Wärmemenge W nicht von der Zusammensetzung der Kette abhängt, falls bei der Entladung keine Umwandlungen der elektrischen Energie in andere Energieformen außer der Wärme auftreten. Jeder Leiter besitzt einen gewissen Widerstand r; diese Größe ist der reziproke Wert der elektrischen Leitfähigkeit. Wir kennen sie aus der elementaren Physik und werden ihr von neuem in der Lehre vom elektrischen Strom begegnen, als welcher auch die Entladung eines Kondensators dem Wesen nach anzusehen ist.

Der Widerstand eines Drahtes ist proportional seiner Länge, indirekt proportional seinem Querschnitte und direkt proportional dem spezifischen Widerstande des Stoffes, aus welchem der Draht besteht; letzterer wiederum ist von der stofflichen Natur und dem physikalischen Zustande dieser Substanz abhängig.

Die Theorie, welche weiter unten entwickelt werden soll, zeigt uns, was auch die Versuche bestätigen, daß sich die Wärme W auf die verschiedenen Teile des Entladungskreises proportional dem Widerstande dieser Teile verteilt, so daß demnach die Wärme W_i, welche im $i$ten Teile der Kette frei wird, gleich

$$W_i = \frac{r_i}{\Sigma r} W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

ist. Die Abhängigkeit der Wärme W_i von verschiedenen Umständen ist besonders genau von Riess untersucht worden, der sich hierbei des in

Fig. 62.



Fig. 62 abgebildeten sogenannten elektrischen Thermometers bediente. Dieser Apparat besteht zunächst aus einer Glaskugel, die vier Öffnungen hat. Bei a und b sind an metallenen Fassungen die Enden eines Platindrahtes befestigt; die Öffnung c trägt in einer Metallfassung einen Stöpsel, der vor jedem Versuche auf kurze Zeit entfernt wird, damit der Druck im Kugelinnern gleich dem äußeren Luftdrucke werden kann. Die vierte Öffnung mündet in eine Glasröhre, deren anderes Ende trichterförmig erweitert und rechtwinklig zur Röhre um-

gebogen ist: unterhalb der Röhre befindet sich eine Skala mit Teilungen. Die Röhre und ein Teil ihrer trichterförmigen Erweiterung enthalten eine gefärbte Flüssigkeit, die vor dem Versuche fast bis ans obere Skalenende reichen muß. Der ganze Apparat wird nämlich, wie aus der Figur ersichtlich ist, schwach gegen den Horizont geneigt. Die Versuche werden derart angestellt, daß man eine Entladung durch den Platindraht hindurchgehen läßt. In diesem wird eine gewisse Wärmemenge w frei, die sich der Luft mitteilt: die Luft dehnt sich aus und das Flüssigkeitsniveau in der Röhre senkt sich. Mit Hilfe der Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac läßt sich leicht eine Formel finden, nach der man w berechnen kann. Diese Formel hat folgende Gestalt:

$$w = Gs\,\frac{n}{\alpha}\left(\frac{v}{V} + \frac{\delta}{p_0}\cos\varphi\right)\left\{1 + \frac{V}{v(1+\alpha t_0)}\,\frac{p_0}{760}\,\frac{\gamma\sigma}{Gs}\right\}. \qquad (69, a)$$

Hier bedeuten G das Gewicht des Drahtes, s seine Wärmekapazität, n die Anzahl der Teilstriche auf der Skala, um welche sich das Flüssigkeitsniveau nach dem Durchgange der Entladung gesenkt hat, α den Ausdehnungskoeffizienten der Luft, V das Volumen der Kugel, v das Volumen der Röhre zwischen zwei Skalenteilen, p_0 den Druck in Millimetern Quecksilber, t_0 die Temperatur der Luft in der Kugel vor Durchgang der Entladung, δ das Verhältnis der Dichte der in der Röhre enthaltenen Flüssigkeit zur Dichte des Quecksilbers, φ den Neigungswinkel der Röhre gegen den Horizont, γ das Gewicht der Luft im Volumen v bei 0^0 und 760 mm Barometerstand, σ die Wärmekapazität der Luft. Riess fand aus seinen Versuchen erstens die Abhängigkeit der Wärmemenge w von der entladenen Batterie, nämlich daß w proportional dem Quadrat der Ladung und indirekt proportional der Größe der Oberfläche ist, auf welcher jene Ladung verteilt war: dieses Resultat stimmt vollkommen mit der Formel (65, e) überein. Ferner untersuchte Riess die Abhängigkeit der Wärmemenge w_i, die bei der Entladung in einem bestimmten Drahte frei wird, von anderen Teilen (Drähten) des Entladungskreises, die sich außerhalb des Thermometers befinden; diese Abhängigkeit entsprach der Formel (69). Das große Verdienst von Riess besteht darin, daß er die Gesetze für die bei einer Kondensatorentladung frei werdende Wärmemenge bereits zu einer Zeit (in den Jahren 1837 bis 1838) entdeckt hat, wo die Energielehre noch nicht existierte und wo von einer theoretischen Herleitung der entsprechenden Gesetze noch keine Rede sein konnte. Nach Riess haben die Wärmewirkungen der Entladung Knochenhauer, Villari, Dove, Blavier, Schwedow u. a. studiert. Schwedow hat gezeigt, daß bei gegebenem η, S und K die Wärmewirkung der Entladung proportional der Dicke d der Zwischenschicht ist, und daß bei gegebenem η, S und d diese Erwärmung indirekt proportional dem Induktionsvermögen K ist. Das erste wurde durch Anwendung von verschieden dicken Platten aus Glas oder

Ebonit in ebenen Kondensatoren nachgewiesen, das zweite durch Vergleichung von Kondensatoren aus Glas und Ebonit.

Es versteht sich von selbst, daß alle abgeleiteten Gesetze, die sich auf den Energievorrat von Kondensatoren beziehen, nur dann auch für die Wärmemenge gelten, die bei der Entladung in verschiedenen Teilen der Kette frei wird, wenn in Wirklichkeit die gesamte elektrische Energie in Wärmeenergie übergeht, nicht aber in irgendwelche andere Energieformen. Nehmen wir an, es werde bei der Entladung mechanische Arbeit geleistet, es erfolge z. B. Durchschlagung eines Dielektrikums oder eine andere hierhergehörige Erscheinung, wie solche in dem von der Entladung handelnden Kapitel betrachtet werden sollen; in diesem Falle vermindert sich die in den verschiedenen Teilen des Entladungskreises frei werdende Wärmemenge. Wir wollen uns hier mit dem Hinweise auf diese Folgerung aus dem Prinzip von der Erhaltung der Energie begnügen.

§ 10. Verteilung der Elektrizität. Elektrostatik. Die Frage nach der „Verteilung der Elektrizität" ergibt sich aus den Vorstellungen, die man sich von der Elektrizität auf Grund des Bildes A macht. Wie wir bereits wissen, ist das Resultat der entsprechenden Rechnungen zweifellos richtig, d. h. entspricht streng der Wirklichkeit, welches auch die reale Bedeutung derjenigen Größen sein mag, die wir in unsere Untersuchungen einführen und mit denen wir rechnen. Der Sinn unserer Aufgabe bedarf keiner Erläuterungen, solange man sich an das Bild A hält; in der Sprache des Bildes B würde die Aufgabe lauten: man hat die Verteilung der Enden der Spannungsröhren im Äther unter den gegebenen Bedingungen zu finden. Wir werden uns selbstverständlich an das Bild A halten.

Derjenige Teil der Lehre von den elektrischen Erscheinungen, welcher sich mit der Frage nach der Verteilung der Elektrizität beschäftigt oder, wie man bisweilen sagt, mit der Frage nach den Bedingungen für das Gleichgewicht der Elektrizität, heißt die Elektrostatik. Hierher gehören folgende Aufgaben:

1. Es ist die Verteilung einer gegebenen Elektrizitätsmenge auf einem isolierten Leiter zu finden, der auch aus mehreren einander berührenden Leitern bestehen kann.

2. Es ist die Elektrizitätsverteilung auf einem Leiter zu finden, der in ein elektrisches Feld mit gegebenen Eigenschaften gebracht ist. Dieser Leiter kann isoliert oder nicht isoliert sein. Das elektrische Feld kann gegeben sein ohne Hinweis auf seine Entstehung (wenn z. B. nur gesagt ist, der Leiter sei in ein homogenes Feld gebracht), oder es sind unbewegliche Ladungen, die das elektrische Feld hervorrufen, nach Größe und Lage gegeben. Es ist dies nichts anderes, als die

Aufgabe von der Induktion der Elektrizität auf Leitern, wenn induzierende, unbewegliche Elektrizitätsmassen gegeben sind.

3. Es ist die Elektrizitätsverteilung auf mehreren Leitern zu finden, von denen einige isoliert, andere geerdet sein können: von ersteren muß wenigstens einer eine eigene Ladung haben, deren Größe gegeben ist; es können aber auch mehrere Leiter da sein, die eigene Ladungen haben.

4. Es ist der elektrische Zustand von Dielektrika unter verschiedenen gegebenen Bedingungen zu finden.

5. Zur Elektrostatik gehören auch Aufgaben über die Bestimmung der mechanischen Bedingungen, unter denen sich elektrisierte Körper in den verschiedenen Fällen befinden, die in den soeben bezeichneten vier Arten von Aufgaben vorkommen. Es handelt sich hier um die Kräfte und Kräftepaare, welche auf die in Betracht gezogenen Körper wirken, sowie um die Bewegungen, welche diese Körper ausführen oder auszuführen suchen. Kräfte, welche auf Grund magnetischer oder elektrischer Erscheinungen auftreten, die aber auf die Materie einwirken und überhaupt diese oder jene Bewegungen fester, flüssiger oder gasförmiger Körper hervorzurufen suchen, werden ponderomotorische Kräfte genannt. Man kann daher die fünfte Art der Aufgaben folgendermaßen formulieren: es sind die ponderomotorischen Kräfte zu finden, welche unter verschiedenen Bedingungen im elektrischen Felde wirken.

Eine charakteristische Eigentümlichkeit der Elektrostatik besteht erstens darin, daß die Methoden zur Lösung ihrer Aufgaben zwar in den allgemeinsten Zügen vollkommen feststehen, daß die Lösungen selbst aber nur in sehr wenigen ganz einfachen Fällen wirklich zu Ende geführt werden können wegen der rein mathematischen Schwierigkeiten, die sie bieten. Eine zweite Eigentümlichkeit der elektrostatischen Aufgaben besteht darin, daß die gefundenen Lösungen von den Ansichten über das Wesen der Erscheinungen, in deren Gebiet die Aufgaben gehören, ganz und gar nicht abhängig sind. In dieser Beziehung ist die Elektrostatik in ihrem Charakter beispielsweise dem mathematischen Teile der Lehre von der Wärmeleitung (Bd. III) ähnlich; genauer gesagt heißt das, sie bildet einen Teil der mathematischen Physik (Bd. I).

Außer der theoretischen Methode zur Lösung von Aufgaben, die, wie gesagt, nur in wenigen Fällen zum Ziele führt, ist auch noch eine experimentelle Methode zur Untersuchung der Elektrizitätsverteilung in den verschiedenen Fällen anwendbar. Diese Methode besteht in Folgendem. Man stellt sich zunächst ein Probescheibchen oder Probekügelchen her, d. h. ein kleines rundes Scheibchen e (Fig. 63), das aus Metall oder einer nicht metallischen, aber vergoldeten Substanz besteht und an einem gebogenen, isolierenden Stäbchen $edcb$ befestigt wird; das Probekügelchen wird meist an einem geraden, isolierenden

Stäbchen, z. B. einem Glasstäbchen, befestigt. Mit dem Scheibchen oder Kügelchen berührt man die Oberfläche des elektrisierten Leiters und mißt darauf in irgendwelchen Einheiten diejenige Elektrizitätsmenge η, welche hierbei auf dasselbe übergeht. Hierbei nimmt man an, daß die Berührung der Oberfläche des zu untersuchenden Leiters durch das Scheibchen oder Kügelchen keine merkliche Änderung in der Elektrizitätsverteilung hervorbringt und daß die Elektrizitätsmenge η als Maß für die Dichte k der Elektrizität an der Stelle dienen kann, welche man berührt hat. Die Methoden, welcher man sich bedient, um ein Maß für die Größe η zu erhalten, werden im vierten Kapitel angegeben werden.

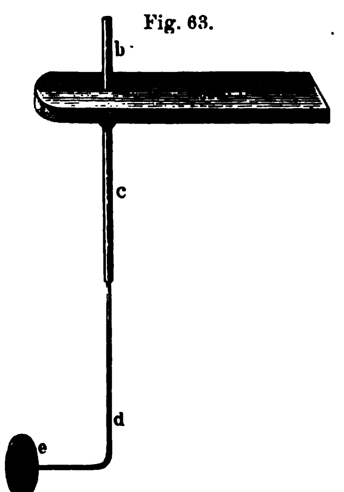


Fig. 63.

Die Elektrizitätsverteilung auf der Oberfläche von Leitern von verschiedener Gestalt haben nach der hier angegebenen Methode Coulomb (1787) und Riess untersucht. Letzterer wandte bisweilen zwei Probekügelchen an, mit denen er gleichzeitig zwei Punkte der Leiteroberfläche berührte, worauf er dann das Verhältnis der Elektrizitätsmengen auf diesen Kügelchen bestimmte. Die Methode des Probescheibchens oder Probekügelchens kann keine genauen Resultate liefern, insbesondere wenn man sie dazu benutzt, um Punkte zu untersuchen, welche auf Kanten, Ecken, vorspringenden Teilen und Spitzen liegen, da auf diesen durch das Anlegen des Kügelchens oder Scheibchens unbedingt eine beträchtliche Änderung der Elektrizitätsdichte k hervorgerufen werden muß. Coulomb hat unter anderem die Elektrizitätsverteilung auf einem Zylinder mit halbkugelförmigen Enden, auf einer runden Scheibe, einer rechteckigen Scheibe und auf einer Reihe von einander berührenden verschiedenen oder gleichen Kugeln untersucht. Bei drei gleichen, einander berührenden Kugeln war die Ladung η_2 der mittleren Kugel gleich 0,75 der Ladungen $\eta_1 = \eta_3$ der beiden äußeren. Bei 24 gleichen Kugeln mit den Ladungen $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{24}$, wo $\eta_1 = \eta_{24}$, $\eta_2 = \eta_{23}$ usw., war $\eta_2 = 0{,}61\, \eta_1$ und $\eta_{12} = \eta_{13} = 0{,}57\, \eta_1$. Riess hat unter anderem die Elektrizitätsverteilung auf einem Würfel, sowie auf verschiedenen Kombinationen von einander berührenden Körpern untersucht. Aus den bereits erwähnten Ursachen konnten die von ihm gefundenen Resultate keinen hohen Genauigkeitsgrad besitzen, weshalb wir dieselben übergehen wollen.

Wir gehen jetzt zur theoretischen Elektrostatik über, die durch Rechnung die Aufgaben zu lösen sucht, welche oben ge-

nannt worden sind. Diesen Aufgaben selbst wenden wir uns jetzt zu.

I. Verteilung einer gegebenen Ladung η auf der Oberfläche eines isolierten Leiters, dessen Größe und Form gegeben sind. Wie wir bereits auf S. 32 gesehen haben, besteht die Bedingung für das elektrische Gleichgewicht auf Leitern darin, daß die elektrische Kraft im Inneren des Leiters gleich Null sein muß, auf der Oberfläche aber überall senkrecht zur letzteren. Wir sahen (S. 93), daß beide Bedingungen durch die eine Bedingung

$$V = Const \quad \ldots \ldots \ldots \quad (70)$$

ersetzt werden können. Das Potential muß in allen Punkten des Leiters ein und denselben Wert haben, die Oberfläche des Leiters bildet hierbei eine Niveaufläche des Potentials. Somit führt die erste Aufgabe der Elektrostatik zur Aufsuchung einer solchen Verteilung der Dichten k auf den Elementen ds der Körperoberfläche, bei welcher in allen inneren Punkten M des Leiters die Größe

$$V = \iint \frac{k\,ds}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (70, a)$$

ein und denselben Wert hat: hierbei bedeutet r den Abstand des Punktes M vom Flächenelemente ds. Die Anzahl der geometrischen Körper, für welche die der Bedingungsgleichung (70) genügende Verteilung der Dichte k gefunden ist, ist eine sehr geringe. Wir wollen einige Fälle betrachten und uns hierbei fast nur auf eine Angabe der Rechnungsergebnisse beschränken, da die Rechnungen selbst im allgemeinen recht kompliziert sind.

1. Kugel. Aus Gründen der Symmetrie haben wir zu erwarten, daß sich die Ladung η gleichmäßig verteilt, d. h. daß $k = const$ ist. Und in der Tat haben wir gesehen (Bd. I), daß eine homogene Kugelschicht in allen Punkten der Kugel den gleichen Wert für das Potential V gibt; derselbe ist numerisch gleich der ganzen Masse der Schicht, dividiert durch den Kugelradius. Demgemäß erhält man die Gleichung

$$\eta = 4\pi R^2 k.$$

Ferner ist in Luft $V = \eta : R$, befindet sich aber die Kugel in einem beliebigen Dielektrikum, so ist

$$V = \frac{\eta}{RK} = \frac{4\pi R k}{K}.$$

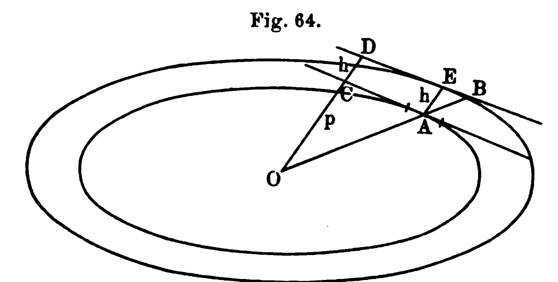
Bei Betrachtung der weiteren Fälle werden wir die Annahme machen, daß sich der Leiter in Luft befindet, d. h. daß $K = 1$ ist.

2. Kreiszylinder von unbegrenzter Länge. Wir bezeichnen mit R den Radius des Zylinderquerschnittes, mit L die Länge des in Betracht gezogenen Teiles des Zylinders, welcher sich von den Zylinder-

enden in sehr großem Abstande befindet, und mit η die Ladung auf diesem Teile. Aus Symmetriegründen müssen wir erwarten, daß auch hier $k = const$ ist. Es läßt sich leicht beweisen, daß in diesem Falle die Kraft F innerhalb des Zylinders gleich Null ist. Denken wir uns zu diesem Zwecke innerhalb des gegebenen Zylinders die Oberfläche eines anderen, ihm konaxialen Kreiszylinders von der Länge l, mit einem Grundflächenradius $r < R$ befindlich. Ist eine Kraft F vorhanden, so muß sie senkrecht zur Seitenfläche dieses Zylinders sein und in allen Punkten dieser Fläche ein und denselben Wert haben. Hieraus folgt, daß der Kraftfluß, der die von uns gedachte Fläche durchsetzt, gleich $2\pi r l F$ ist. Dieser Kraftfluß muß aber auch gleich $4\pi\eta_i$ sein, wo η_i die innerhalb dieser Fläche enthaltene Elektrizitätsmenge ist. Da nun $\eta_i = 0$ ist, so wird auch $F = 0$. Die Ladung η und die Dichte k sind in unserem Falle durch die Gleichung $\eta = 2\pi R L k$ miteinander verknüpft.

3. Ellipsoid. Wir haben gesehen (Bd. I), daß eine homogene ellipsoidale Schicht, die von den Oberflächen zweier ähnlicher, konaxialer Ellipsoide begrenzt ist, keinerlei Wirkung auf einen von ihr um-

Fig. 64.



schlossenen Punkt ausübt. Es seien a, b, c die Achsen der einen, a_1, b_1, c_1 die Achsen der anderen Oberfläche und es sei

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = 1 + \alpha.$$

Wir nehmen an, es sei α eine sehr kleine Größe und δ die Volumdichte der Substanz. Ferner ersetzen wir unsere Schicht durch eine Oberflächenschicht, welche die Oberflächendichte k besitzt. Im Punkte A (Fig. 64) wählen wir das Flächenelement ds, ziehen die Gerade OAB und fällen die Senkrechte OCD auf die Ebenen CA und DB, welche die beiden Oberflächen in den Punkten A und B berühren. Die Dicke $AE = CD$ der Schicht in A bezeichnen wir mit h, die Länge von OC mit p. Bekanntlich ist $OB : OA = 1 + \alpha$; folglich ist $h = OD - OC = p(1 + \alpha) - p = \alpha p$. Setzt man die Substanzmengen im Raume und auf der Oberfläche einander gleich, so ist $h\delta ds = k ds$, d. h. $k = h\delta = \alpha\delta p$. Die ganze Substanzmenge aber ist gleich

$$\frac{4}{3}\pi a_1 b_1 c_1 \delta - \frac{4}{3}\pi abc\delta = \frac{4}{3}\pi abc\delta\{(1+\alpha)^3 - 1\} = 4\pi abc\alpha\delta;$$

sie muß der Gesamtladung η gleich sein. Aus der Gleichung $\eta = 4\pi abc\alpha\delta$ entnehmen wir $\alpha\delta$ und substituieren es in den Ausdruck $k = \alpha\delta p$. Dann ist

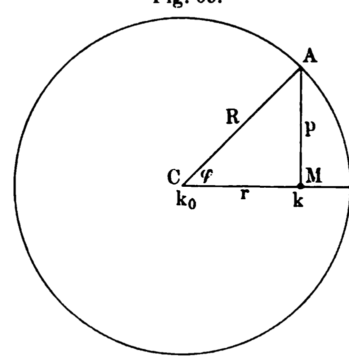
$$k = \frac{\eta}{4\pi abc} p \quad \ldots \ldots \quad (71)$$

Die Dichten in den verschiedenen Punkten sind direkt proportional den vom Zentrum des Ellipsoids auf die in diesen Punkten berührenden Ebenen gefällten Senkrechten. Drückt man p durch die Koordinaten x, y, z eines Punktes aus, so erhält man

$$k = \frac{\eta}{4\pi abc} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \quad \ldots \quad (71,\text{a})$$

Die Dichten in den drei Scheitelpunkten des Ellipsoids, d. h. an den Enden der Achsen, sind den Achsen proportional. Man kann auch noch folgende Ausdrücke ableiten:

Fig. 65.



$$k = \frac{\eta}{2\pi\sqrt{abc}\sqrt[4]{\varrho_1 \varrho_2}}$$

$$k = \frac{\eta}{4\sigma};$$

hier bedeuten ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien der Oberfläche, σ den Flächeninhalt des Durchschnittes des Ellipsoids mit einer Ebene, welche durch seinen Mittelpunkt geht und parallel zu einer Ebene ist, die es in dem Punkte berührt, auf den sich k bezieht.

4. Elliptische (und kreisförmige) unendlich dünne Scheibe. Setzt man in (71, a) die evidente Gleichung

$$\frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{c^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

ein und darauf $c = 0$, so erhält man leicht die Dichte k in verschiedenen Punkten der elliptischen Scheibe

$$k = \frac{\eta}{4\pi ab} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \quad \ldots \quad (71,\text{b})$$

Am Rande der Scheibe ist $k = \infty$; dieser Wert bezieht sich aber nur auf die mathematische Randlinie (die Ellipse). Setzt man $a = b$

$= R$, so erhält man die Elektrizitätsverteilung auf einer Kreisscheibe, und zwar für die Dichte k im Punkte M (Fig. 65)

$$k = \frac{\eta}{4\pi R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{\eta}{4\pi R} \cdot \frac{1}{p} = \frac{k_0}{\sin\varphi} \quad \cdot \quad (71, c)$$

wo r der Abstand des Punktes M vom Scheibenzentrum ist, $p = MA$, $\angle \varphi = ACM$, k_0 die Dichte im Zentrum, gleich der Hälfte der mittleren Dichte, d. h. gleich $\eta : 2\pi R^2$. Im zentralen Teile der Scheibe wächst die Dichte langsam bei Entfernung vom Zentrum. Ein zentral gelegener Kreis vom Radius r enthält auf beiden Seiten zusammen die Ladung

$$\eta_r = \eta \left\{1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}\right\} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (71, d)$$

Eine einfache Herleitung der auf das Ellipsoid bezüglichen Formeln hat Schwedow (1895) gegeben.

5. Zwei einander berührende Kugeln stellen offenbar gleichsam einen einzigen Leiter dar, dessen sämtliche Teile sich auf dem gleichen gemeinsamen Potential befinden. Die vorliegende Aufgabe hängt mit der Aufgabe über die Elektrizitätsverteilung auf zwei einander nicht berührenden Kugeln zusammen, die zuerst von Poisson gelöst worden ist; von letzterer wird weiter unten die Rede sein. Man kann übrigens die Aufgabe auch unmittelbar lösen. Wir wollen uns darauf beschränken, die Resultate der theoretischen Untersuchungen anzugeben. Nehmen wir an, es seien die Kugelradien R_1 und R_2, ihr gemeinsames Potential V. In diesem Falle wird die Ladung η_1 der ersten Kugel durch folgende Formel bestimmt:

$$\eta_1 = \frac{V R_1^2 R_2}{R_1 + R_2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(n+1)\{R_2 + n(R_1 + R_2)\}}.$$

Setzt man R_2 an Stelle von R_1 und umgekehrt, so erhält man die Ladung η_2 der zweiten Kugel. Für die Dichten k_1 und k_2 in verschiedenen Punkten erhält man komplizierte Ausdrücke, die hier nicht angeführt werden sollen. Plana hat, ausgehend von den allgemeinen Formeln Poissons, eine Tabelle für die verschiedenen Größen berechnet, wobei er die Annahme machte, daß das Verhältnis $R_2 : R_1 = b$ gegeben sei. Wir geben hier einen Auszug aus jener Tabelle:

$b = \frac{R_2}{R_1}$	$q_1 : R_1$	$q_2 : R_1$	$(q_1 + q_2) : R_1$	$\beta = \bar{k}_2 : \bar{k}_1$
1	0,69315	0,69315	1,38629	1
0,8	0,75116	0,50496	1,25612	1,05037
0,6	0,81629	0,32831	1,14460	1,11721
0,4	0,88809	0,17228	1,06037	1,21241
0,2	0,95903	0,05214	0,01117	1,35906
0,05	0,99640	0,00387	1,00027	1,55038
0	1	0	1	1,66494

Hier bedeuten q_1 und q_2 die Kapazitäten der beiden, sich berührenden Kugeln, $q_1 + q_2$ die Kapazität beider Kugeln als Ganzes; β das Verhältnis der mittleren Dichten $\overline{k}_2$ und $\overline{k}_1$ auf den beiden Kugeln. Nähert sich R_2 der Null, so nähert sich β dem Grenzwerte $\pi^2 : 6 = 1{,}644936$. Ist $R_1 = R_2$, d. h. $b = 1$, so ist $q_1 : R_1 = q_2 : R_2 = lg\, 2 = 0{,}69315$. Das Verhältnis der Kapazitäten q_1 und q_2 ist zugleich das Verhältnis der Ladungen η_1 und η_2, so daß die Zahlen der zweiten, dritten und vierten Kolumne die relativen Werte der Ladungen η_1, η_2 und $\eta_1 + \eta_2$ geben.

6. Spitze. Theorie wie Experiment zeigen, daß auf Körpern von länglicher Form das Maximum der Dichte an den Enden auftritt.

Man findet, daß auf sogenannten mathematischen Spitzen, d. h. vollkommenen, nicht abgestumpften Spitzen, die Elektrizitätsdichte in dem Maße wächst, als man sich der Spitze nähert und auf dem Ende der Spitze unendlich groß wird. Dieses theoretische Resultat hat eine überaus wichtige praktische Bedeutung; es zeigt, daß auch auf physischen Spitzen, obgleich sie stets mehr oder weniger abgestumpft sind, die Elektrizitätsdichte sehr große Werte erreichen muß, daß daher auf einem mit einer Spitze versehenen Leiter die Ladung größtenteils in diese Spitze übergeht.

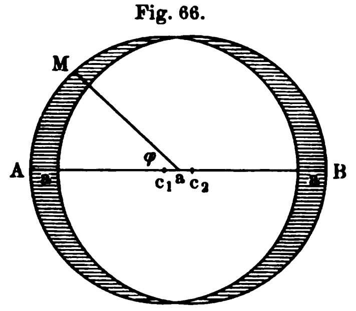
II. Induktion auf einem Leiter, der sich in einem gegebenen elektrischen Felde befindet. Es kann dies Feld unmittelbar gegeben sein oder es sind unbewegliche elektrische Massen η_0 gegeben, welche das Feld erzeugen. Es sei F_0 die Kraft, V_0 das Potential an verschiedenen Punkten dieses Feldes. Sind die Massen η_0 gegeben, so sind F_0 und V_0 bekannt; ist jedoch die Kraft F_0 unmittelbar gegeben, so kommt im Ausdrucke für das Potential V_0 eine unbestimmte Konstante vor.

Man hat zwei Fälle zu unterscheiden: der Leiter kann geerdet oder isoliert sein. Es möge im ersten Falle seine Ladung η, sein Potential $V = 0$ sein, im zweiten Falle seine Ladung $\eta = 0$ und sein Potential gleich V. Die Kapazität des Leiters wollen wir mit q bezeichnen. Betrachten wir nun den Zusammenhang zwischen den diesen beiden Fällen entsprechenden Aufgaben, wobei die Elektrizitätsdichten in den verschiedenen Punkten mit k_1 und k_2 bezeichnet sein mögen. Nehmen wir an, es sei die erste Aufgabe bereits gelöst, d. h. es seien η und k_1 gefunden, während das Potential V gleich Null ist. Dann erhält man eine Lösung der zweiten Aufgabe, wenn man zu der Ladung η, welche der Bedingung $V = 0$ gemäß vorhanden ist, noch die Ladung $(-\eta)$ hinzufügt, indem man sie derart anordnet, wie dies geschehen würde, wenn sie sich auf demselben Leiter verteilte, während letzterer isoliert und keiner Wirkung eines Außenfeldes unterworfen wäre, d. h. entsprechend der Aufgabe I (S. 138). Hierbei sei die Dichte in den verschiedenen Punkten gleich k. In diesem Falle ist das gesuchte $k_2 = k_1 + k$; die Gesamtladung ist offenbar gleich Null, das

Potential gleich $V = (-\eta) : q$. Ist umgekehrt die zweite Aufgabe bereits gelöst, d. h. sind k_2 und V bekannt, wobei $\iint k\,ds = 0$ ist, so bestimmt man die Größe $\eta = V : q$ und verteilt auf der Oberfläche die sich selbst überlassene Ladung $(-\eta)$; ist hierbei die Dichte gleich $-k$, so ist $k_1 = k_2 - k$ und das Potential offenbar gleich Null. Wir wollen uns auf die einfachsten Beispiele beschränken.

1. Eine isolierte leitende Kugel im homogenen Felde, dessen Intensität gleich F ist. In Bd. I war auf folgenden Fall eines fast kugelförmigen homogenen Kraftfeldes hingewiesen worden. Stellen wir uns zwei Kugeln von gleichem Radius R vor, deren Mittelpunkte c_1 und c_2 (Fig. 66) sich in dem sehr geringen Abstande a voneinander befinden. Die eine von diesen Kugeln denken wir uns von Stoff mit der Dichte $+\delta$ erfüllt, die andere von Stoff mit der Dichte $-\delta$. Beide Kugeln zusammengenommen bilden einen fast kugelförmigen leeren Raum, der von zwei materiellen Schichten mit der Dichte $+\delta$ und $-\delta$ begrenzt ist. Die Gerade AB, welche durch die Mittelpunkte c_1 und c_2 hindurchgeht, durchschneidet diese Schichten an Stellen, wo ihre Dicke ein Maximum und zwar gleich a ist. Die Dicke c der Schicht in irgend einem Punkte M kann man, falls a klein ist, gleich $c = a\cos\varphi$ setzen, wobei φ den Winkel zwischen der Geraden AB und dem Radius bedeutet, der von M aus nach einem beliebigen Punkte zwischen c_1 und c_2 gezogen ist. Je kleiner a ist, um so genauer ist die Gleichung $c = a\cos\varphi$ erfüllt. Wie wir sahen, ist der Raum innerhalb dieser Schichten ein homogenes Feld, dessen Intensität ψ parallel AB ist und den Wert

Fig. 66.



$$\psi = \frac{4}{3}\pi\delta a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

hat. Wir wollen dies zur Lösung unserer Aufgabe benutzen. Zunächst ersetzen wir die oben erwähnten Schichten mit der Volumendichte δ durch Schichten, welche die Oberflächendichte k besitzen. Zu diesem Zweck hat man $c\delta\,ds = k\,ds$ zu setzen, d. h. $k = c\delta$ oder, da im Grenzfalle bei unendlich abnehmendem a die Gleichung $c = a\cos\varphi$ streng erfüllt ist,

$$k = a\delta\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72,\mathrm{a})$$

Die Feldintensität im Kugelinnern wird durch Formel (72) bestimmt. Zur Lösung unserer Aufgabe müssen wir die Kugeloberfläche derart mit Elektrizität bedecken, daß die Feldintensität im Kugelinnern

gleich Null wird, d. h. daß $F + \psi = 0$ wird; das gibt $\psi = -F$, also

$$\frac{4}{3}\pi\delta a = -F.$$

Hieraus folgt $a\delta = -\frac{3}{4\pi}F$ und demgemäß erhält man in Luft:

$$k = -\frac{3}{4\pi}F\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72, b)$$

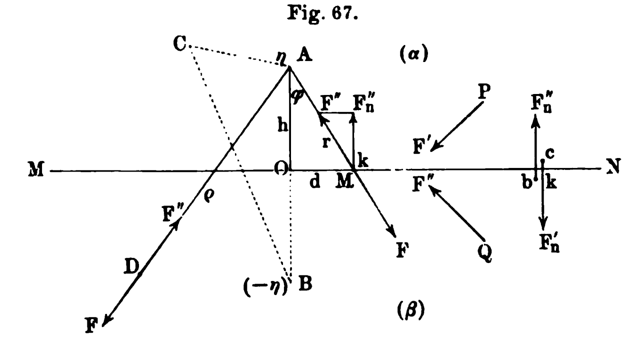
Im Dielektrikum ist

$$k = -\frac{3}{4\pi}KF\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72, c)$$

Wie man leicht einsieht, hat man den Winkel φ von dem Radius aus zu rechnen, der durch den Punkt A geht, wenn die Kraft F die Richtung AB hat. Die Formel (72, b) löst unsere Aufgabe vollständig; die größten Dichten in den Punkten A und B sind numerisch gleich $\pm 3F : 4\pi$.

2. Induktion auf einer unendlichen leitenden ebenen Scheibe. Setzen wir den Fall, es sei MN (Fig. 67) die Oberfläche

Fig. 67.



einer ebenen Scheibe und es befinde sich in A eine unbewegliche Ladung η von positiver Elektrizität; $AO = h$ sei senkrecht zu MN. Zu bestimmen ist die Dichte k der auf der Ebene MN induzierten Elektrizität. Offenbar muß k an allen Punkten dieser Ebene, welche sich in gleicher Entfernung $MO = d$ von O befinden, den gleichen Wert haben. Die Ebene MN teilt den Raum in zwei Hälften (α) und (β). Aus Symmetriegründen ist klar, daß die Ladung von MN gleiche Kräfte in (α) und (β) wachruft, d. h. daß die Kräfte F'' und F'', welche in zwei symmetrisch gelegenen Punkten P und Q wirken, der Größe nach gleich sind und zu MN symmetrische Richtungen haben. Nehmen wir zwei Punkte b und c, die sich zu beiden Seiten der Ebene MN, in unendlich geringer Entfernung von ihr und auf ein und derselben Normalen zu MN befinden (in der Figur sind die Punkte der

Deutlichkeit halber ein wenig auseinander gerückt). Sind F'_n und F''_n normale Komponenten der in b und c nur durch die Ladung auf MN hervorgerufenen Kräfte, so ist klar, daß $F'_n = - F''_n$ ist. Zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes ist erforderlich, daß die Feldintensität in allen Punkten des Raumes (β) gleich Null ist, d. h. daß in jedem Punkte D die Gleichung $F'' = F$ erfüllt ist, wo F die Kraft bedeutet, mit welcher die Ladung η im Punkte D wirkt, also $F = \eta : \varrho^2$ für $\varrho = AD$. Formel (22, a), S. 50, auf den vorliegenden Fall angewandt, ergibt $4\pi k = F''_n - F'_n = 2F''_n$. Hieraus erhält man

$$k = \frac{1}{2\pi} F''_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Ist M ein unendlich nahe an MN gelegener, im Raume (β) befindlicher Punkt, $MA = r$, $MO = d$, $\angle\, OAM = \varphi$, dann ist

$$F''_n = F'' \cos\varphi = - F\cos\varphi = - \frac{\eta}{r^2}\cos\varphi,$$

folglich

$$k = \frac{1}{2\pi} F''_n = - \frac{\eta}{2\pi r^2}\cos\varphi = - \frac{\eta}{2\pi h^2}\cos^3\varphi$$
$$= - \frac{\eta h}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73, a)$$

Die gesuchte Dichte k ist indirekt proportional dem Kubus der Entfernung des Punktes von A. Man kann sich (durch Einführung der unabhängigen Veränderlichen φ) sehr leicht davon überzeugen, daß die gesamte Ladung auf MN gleich $-\eta$ ist. Sie wirkt in (β) ebenso, wie eine Ladung ($-\eta$), die sich in A befindet. Hieraus folgt, daß sie in (α) ebenso wirkt, wie eine Ladung ($-\eta$), die sich in B befindet. Das Feld in C ist ein solches, als wäre die Scheibe MN gar nicht vorhanden, in B dagegen die Ladung ($-\eta$) und in A die Ladung $+\eta$ vorhanden. Es ist begreiflich, weshalb der Punkt B das elektrische Bild des Punktes A heißt; es fällt hier mit dem optischen Bilde zusammen.

3. Induktion auf einer leitenden Kugel. Nehmen wir an, die Kugel sei geerdet; auf S. 143 war angegeben worden, wie man zu dem Falle übergeht, wo die Kugel isoliert ist. Es möge R (Fig. 68 a. f. S.) der Kugelradius, η eine unbewegliche Ladung im Punkte A und $AO = a$ sein. Aus den drei gegebenen Größen R, a und η hat man die Dichte k der induzierten Elektrizität in einem beliebigen Punkte M der Kugelfläche zu finden. Für das Potential V der Kugel muß die Gleichung $V = 0$ gelten. Bestimmen wir auf OA einen Punkt B derart, daß $OB = b$ der Bedingung $ab = R^2$ genügt, d. h. $b : R = R : a$ ist; wir verbinden M mit A, B mit O und setzen $MA = r_1$, $MB = r_2$. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OMB und OMA folgt

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{b}{R} = \frac{R}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

d. h. für alle Punkte der Kugeloberfläche ist das Verhältnis $r_2 : r_1$ eine konstante Größe. Nehmen wir an, es sei $\angle F_1 MO = \angle MBA = \alpha$ und $\angle OMB = \angle MAO = \beta$. Offenbar ist $r_1 \cos\beta + r_2 \cos\alpha = a - b$: setzt man hier r_2 und b aus (74) ein, so erhält man

$$a \cos\beta + R \cos\alpha = \frac{a^2 - R^2}{r_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74,\mathrm{a})$$

Bringt man nach B die Elektrizitätsmenge

$$\eta' = -\eta \frac{R}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74,\mathrm{b})$$

und bestimmt das Potential V der Ladungen η und η' in M, so ist auf Grund von (74)

$$V = \frac{\eta}{r_1} + \frac{\eta'}{r_2} = \frac{\eta}{r_1} - \frac{\eta R}{a r_2} = \frac{\eta}{r_1} - \frac{\eta}{r_1} = 0.$$

Hieraus folgt, daß die gesuchte Verteilung derart sein muß, daß ihre Wirkung im äußeren Raume gleich wird der Wirkung einer Masse η', die sich in B befindet, da in diesem Falle das Potential V, welches von der Ladung η in A stammt, sowie von der gesuchten Ladung (k) auf der Kugel, in allen Punkten der Kugelfläche gleich Null

Fig. 68.

ist, denn es läßt sich streng beweisen, daß, wenn $V = 0$ auf der Oberfläche eines Körpers ist, in dessen Inneren sich keine Ladung befindet, daß dann in allen Punkten dieses Körpers $V = 0$ ist. Man kann folgendermaßen überlegen: ist auf der ganzen Oberfläche des Körpers $V = 0$, so ist diese Oberfläche eine Niveaufläche des Potentials, folglich sind die Spannungslinien zu ihr senkrecht: dies reicht offenbar für das Gleichgewicht hin. Kennt man die äußere Wirkung der Ladung, so findet man die Dichte k nach der Formel

$$k = \frac{1}{4\pi} F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74, c)$$

wo F die Kraft in einem äußeren Punkte ist, der sich der Oberfläche unendlich nahe befindet und in der Richtung der äußeren Normalen liegt. Im Punkte M wirken zwei Kräfte, vgl. Fig. 68:

$$F_1 = \frac{\eta}{r_1^2} \quad \text{und} \quad F_2 = -\frac{\eta'}{r_2^2} = \frac{\eta R}{a} \cdot \frac{1}{r_2^2} = \frac{\eta a}{R} \cdot \frac{1}{r_1^2}.$$

Ihre Resultante hat die Richtung MO, so daß

$$F = -(F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74, d)$$

ist, denn die zu MO senkrechte Komponente F' ist, wie sogleich bewiesen werden soll, gleich Null. Man hat

$$\pm F' = F_1 \sin\alpha - F_2 \sin\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74, e)$$

Substituiert man F_1 und F_2 in (74, d) und (74, e), so erhält man

$$-F = \frac{\eta}{r_1^2}\cos\alpha + \frac{\eta a}{R r_1^2}\cos\beta = \frac{\eta}{R r_1^2}\{R\cos\alpha + a\cos\beta\}.$$

$$F' = \frac{\eta}{r_1^2}\sin\alpha - \frac{\eta a}{R r_1^2}\sin\beta = \frac{\eta}{R r_1^2}\{R\sin\alpha - a\sin\beta\}.$$

Es ist aber $R\sin\alpha = a\sin\beta$, also $F' = 0$. Ferner ist nach (74, a)

$$-F = \eta\,\frac{a^2 - R^2}{R} \cdot \frac{1}{r_1^3}$$

und endlich nach (74, c)

$$k = -\frac{\eta(a^2 - R^2)}{4\pi R} \cdot \frac{1}{r_1^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74, f)$$

Die gesuchte Dichte k ist dem Kubus des Abstandes vom induzierenden Punkte A indirekt proportional. Die Gesamtladung auf der Kugel ist gleich η', d. h. sie ist im Verhältnis $R : a$ kleiner als η.

Man kann sich nun leicht zurechtlegen, wie man von (74, f) zur Lösung der Aufgabe über die innere Induktion auf einer Kugel übergehen kann, d. h. wie man die Dichte k' auf der Oberfläche eines kugelförmigen Hohlraumes bestimmen kann, wenn sich in B die Ladung η' befindet, wenn also R, b und η' gegeben sind. Man findet offenbar k', wenn man in (74, f) die Größen η', b und r_2 anstatt η, a und r_1 einführt, wobei man jetzt η' als positive Größe betrachtet. Man erhält

$$k' = -\frac{\eta'(R^2 - b^2)}{4\pi R} \cdot \frac{1}{r_2^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74, g)$$

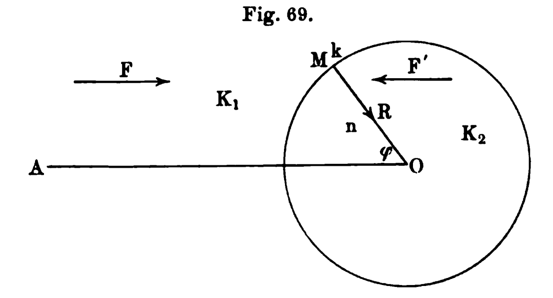
Die Gesamtladung ist gleich η'; sie wirkt im äußeren Raume wie die Ladung $(+\eta')$ im Punkte B, im inneren Raume aber wie eine Ladung $\eta = -\frac{R}{b}\eta'$, welche sich im Punkte A befindet.

III. Verteilung der Elektrizität auf einem System von Leitern. Von diesen Leitern muß wenigstens einer isoliert sein und es muß wenigstens einer der isolierten Leiter seine der Größe nach gegebene Ladung haben.

Zum Gleichgewicht ist erforderlich, daß das Potential in jedem der Leiter an allen Punkten desselben den gleichen Wert besitzt, wobei man dieses Potential als durch alle vorhandenen elektrischen Ladungen hervorgerufen anzusehen hat. Nur eine sehr kleine Zahl von einzelnen Fällen ist theoretisch zu untersuchen gelungen. Hierher gehört die berühmte Aufgabe der Elektrizitätsverteilung auf zwei Kugeln. Sie ist zuerst von Poisson (1811) gelöst worden: in der Folge haben sich mit ihr insbesondere Plana (1845), Cayley, Murphy, Hankel, W. Thomson, Kirchhoff (1861), Bobylew (1874) u. a. beschäftigt. Wir müssen uns darauf beschränken, auf die Literatur dieser sehr schwierigen Frage hinzuweisen.

IV. Elektrischer Zustand von Dielektrika, welche in ein elektrisches Feld gebracht sind. Wir wissen (S. 33), daß die

Fig. 69.



Nichtleiter im elektrischen Felde der sogenannten Polarisation unterworfen sind. Hierbei ändert sich der gesamte Induktionsfluß beim Übergange von einem Dielektrikum zum anderen nicht. Formel (21), S. 50, in welcher $k = 0$ ist oder (31), S. 59, zeigen, daß die Konstanz der Komponenten des Induktionsflusses, welche zur Berührungsfläche zweier Dielektrika senkrecht ist, eine hinreichende Bedingung darstellt. Sind K_1 und K_2 die Dielektrizitätskonstanten, Φ_1 und Φ_2 die elektrischen Kräfte in zwei Dielektrika, $\Phi_{1,n}$ und $\Phi_{2,n}$ die Komponenten dieser Kräfte in der Richtung der Normalen n zur Fläche S, welche nach der Seite des Dielektrikums K_2 hin verläuft, so muß $K_1\Phi_{1,n} = K_2\Phi_{2,n}$ sein, oder

$$\frac{\Phi_{1,n}}{\Phi_{2,n}} = const = \frac{K_2}{K_1} \quad \ldots \ldots \quad (75)$$

Wie wir ferner wissen (S. 73), kann man der Bedingung (75) genügen, wenn man annimmt, daß das ganze Medium homogen ist, beispielsweise das Induktionsvermögen K_1 besitzt, und daß auf der Fläche S

eine gewisse elektrische Ladung verteilt ist, deren Dichte wir mit k bezeichnen wollen. Die Intensität des durch diese Ladung zu beiden Seiten der Fläche S hervorgerufenen Feldes bezeichnen wir mit F'_1 und F'_2, die normalen Komponenten der Intensität aber mit $F'_{1,n}$ und $F'_{2,n}$: endlich bezeichnen wir noch mit F die gegebene Feldintensität, welche vorhanden wäre, falls das Medium homogen wäre. Die Werte F_1 und F_2 dieser Intensität werden identisch in den Punkten der Fläche S und das Gleiche gilt von den normalen Komponenten $F_{1,n} = F_{2,n} = F_n$. Die Kraft Φ ist die Resultante der Kräfte F und F' und daher ist offenbar:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{1,n} &= F'_{1,n} + F_n \\ \Phi_{2,n} &= F'_{2,n} + F_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (75,\text{a})$$

Wir wollen uns darauf beschränken, nur eine einzige Aufgabe zu lösen und zwar wollen wir betrachten:

Eine dielektrische Kugel im homogenen Felde, dessen Intensität F ist. Der Kugelradius sei mit R bezeichnet, das Induktionsvermögen der Kugel mit K_2, des Mediums mit K_1. Wir hatten gesehen, daß, wenn man die Oberfläche einer im Medium K_1 befindlichen Kugel mit einer Elektrizitätsschicht von der Dichte

$$k_0 = -\frac{3K_1}{4\pi} F\cos\varphi \quad \ldots \ldots \quad (75,\text{b})$$

bedeckt, vgl. (72, c), S. 144, diese Schicht innerhalb der Kugel ein homogenes Feld hervorruft, dessen Intensität $F' = -F$ ist. Die Formel (75, b) löst die Frage nach der Elektrizitätsverteilung auf einer leitenden Kugel, die sich in einem homogenen Felde mit der Intensität F_1 befindet und dabei in einem Medium, dessen Induktionsvermögen gleich K_1 ist. Die Feldintensität innerhalb der Kugel ist gleich $F + F' = F - F = 0$, wie dies auch für einen Leiter der Fall sein muß.

Für eine Kugel, welche aus einer dielektrischen Substanz K_2 besteht, haben wir eine solche fingierte Ladung mit der Dichte k zu finden, daß sie innerhalb und außerhalb der Kugel die den Bedingungen (75) und (75, a) genügenden Intensitäten F'_1 und F'_2 gibt. Sehen wir zu, was uns die Verteilung einer Ladung auf der Kugelfläche gibt, wenn die Dichte der Ladung gleich

$$k = \alpha k_0 = -\frac{3\alpha K_1}{4\pi} F\cos\varphi \quad \ldots \quad (75,\text{c})$$

ist, wobei α ein konstanter Koeffizient und, wie früher $\angle\,\varphi = \angle\,AOM$ ist. Zunächst ist es klar, daß diese Ladung im Inneren der Kugel ein homogenes elektrisches Feld hervorruft, dessen Intensität gleich

$$F'_2 = -\alpha F \quad \ldots \ldots \quad (75,\text{d})$$

ist. Die Dichte k ist negativ für alle φ von -90 bis $+90^0$, d. h. für die linke Kugelhälfte, es ist daher klar, daß die Kraft F'_2 die in

der Figur angegebene Richtung hat. Suchen wir die Werte von $\Phi_{1,n}$ und $\Phi_{2,n}$ für irgend einen Punkt M, indem wir annehmen, daß n die Richtung der inneren Normalen zur Kugeloberfläche ist. Erinnern wir uns dessen, daß man bei Einführung der Ladung k ein homogenes Feld mit der Dielektrizitätskonstante K_1 vorauszusetzen hat. Innerhalb der Kugel ist in unendlich kleiner Entfernung vom Punkte M

$$F_n = F \cos \varphi$$

$$F'_{2,n} = F'_1 \cos \varphi = - F \alpha \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75, e)$$

Hieraus folgt

$$\Phi_{2,n} = F'_{2,n} + F_n = (1 - \alpha) F \cos \varphi \quad . \quad . \quad (75, f)$$

Um $F'_{1,n}$ zu finden, bedienen wir uns der Formel (22), S. 50, in welcher jedoch n die äußere Normale bedeutet,

$$F'_{1,n} - F'_{2,n} = - \frac{4 \pi k}{K_1} .$$

Setzt man hierin k aus (75, c) ein, so erhält man

$$F'_{1,n} = F'_{2,n} - \frac{4 \pi k}{K_1} = - \alpha F \cos \varphi + 3 \alpha F \cos \varphi = 2 \alpha F \cos \varphi .$$

Ferner ist

$$\Phi_{1,n} = F'_{1,n} + F_n = 2 \alpha F \cos \varphi + F \cos \varphi = (1 + 2 \alpha) F \cos \varphi \quad (75, g)$$

Dividiert man (75, g) durch (75, f), so erhält man

$$\frac{\Phi_{1,n}}{\Phi_{2,n}} = \frac{1 + 2\alpha}{1 - \alpha} = const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Somit gibt die Dichte (75, c) das konstante Verhältnis der normalen Komponenten der elektrischen Kräfte zu beiden Seiten der Kugeloberfläche, wie dies vor allem die Gleichung (75) verlangt. Um dieser Gleichung voll zu genügen, muß man

$$\frac{1 + 2\alpha}{1 - \alpha} = \frac{K_2}{K_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76, a)$$

setzen, d. h.

$$\alpha = \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2 K_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76, b)$$

Substituiert man α in (75, c), so findet man

$$k = - \frac{3 K_1}{4 \pi} \cdot \frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2 K_1} F \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Durch diese Formel wird unsere Aufgabe vollständig gelöst, denn durch sie wird die Dichte k derjenigen Ladung bestimmt, mit der wir uns die Kugelfläche bedeckt denken müssen, um die wirkenden Kräfte unter der Voraussetzung zu erhalten, daß der ganze in Betracht gezogene Raum homogen ist und überall das gleiche Induktionsvermögen K_1

besitzt. Ist $K_2 = K_1$, so erhält man natürlich $k = 0$; ist $K_2 > K_1$, so ist k negativ, ist $K_2 < K_1$, so ist k positiv, d. h. in diesem Falle ist die scheinbare Elektrisierung der Kugel derjenigen entgegengesetzt, die man auf einer leitenden Kugel beobachtet. Für $K_2 = \infty$ ist $k = k_0$, vgl. (75, b). Es ist leicht zu beweisen, daß der Gleichung (31, b) auf S. 60 Genüge geschieht.

Im Kugelinneren ist für alle Werte von K_2 ein homogenes elektrisches Feld vorhanden, dessen Intensität Φ_2 gleich [vgl. (75, d) und (76, b)]

$$\Phi_2 = F'_2 + F = -\alpha F + F = (1-\alpha) F = \frac{3K_1}{K_2 + 2K_1} F \quad . \quad (78)$$

ist. Für $K_2 = K_1$ hat man $\Phi_2 = F$, für $K_2 = \infty$ ist $\Phi_2 = 0$, wie es auch sein muß. Die Konstanz der Kraft Φ_2 zeigt, daß eine dielektrische Kugel im homogenen Felde in allen Punkten gleicher Polarisation unterworfen ist, vergl. (33, h), S. 75. Befindet sich die Kugel in Luft, so ist $K = 1$; setzt man $K_2 = K$, so erhält man

$$k = -\frac{3}{4\pi}\frac{K-1}{K+2} F \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78, a)$$

Auf Grund der Formel (33, d) erhält man für die Polarisation Π den Ausdruck

$$\Pi = -\frac{3}{4\pi}\frac{K-1}{K+2} F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78, b)$$

Die Feldintensität im Inneren der Kugel ist gleich

$$\Phi_2 = \frac{3}{K+2} F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78, c)$$

Setzt man $\Pi = \gamma \Phi_2$, so erhält man für die elektrische Suszeptibilität γ den Ausdruck $(K - 1) : 4\pi$, in Übereinstimmung mit Formel (34) auf S. 75.

In den Fig. 70, 71 und 72 (a. f. S.) ist die Verteilung der Kraftlinien für die Fälle dargestellt, daß $K_2 = 0{,}48\, K_1$, $K_2 = 2{,}8\, K_1$ und $K_2 = \infty$ (leitende Kugel) ist.

V. Ponderomotorische Erscheinungen im elektrischen Felde. Die Wechselwirkung von Ladungen, welche dem Coulombschen Gesetze gemäß erfolgt (oder die Spannungen und Drucke der Röhren), ruft ponderomotorische Kräfte hervor, d. h. Kräfte, welche auf die im elektrischen Felde befindlichen und mit verschiedenen Ladungen versehenen Körper wirken. Die Berechnung dieser Kräfte kann keine besonders großen Schwierigkeiten verursachen, sobald die Verteilung sämtlicher Ladungen gegeben ist, d. h. sobald alle Komponenten der Systeme von Kräften bekannt sind, welche auf unsere Körper einwirken.

In einigen einfachen Fällen lassen sich die ponderomotorischen Kräfte leicht bestimmen. Wir wollen dies an Beispielen erläutern.

1. Es sei die Kraft f zu bestimmen, mit welcher eine Ladung η, die z. B. gleichmäßig auf der Oberfläche einer kleinen, nicht leitenden

Fig. 70.

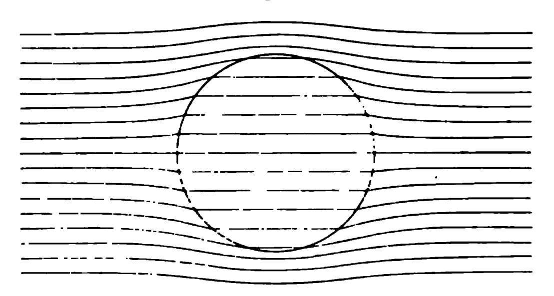


Fig. 71.

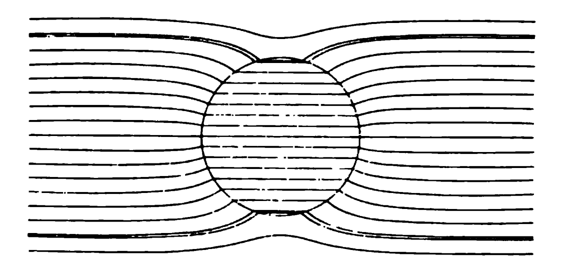
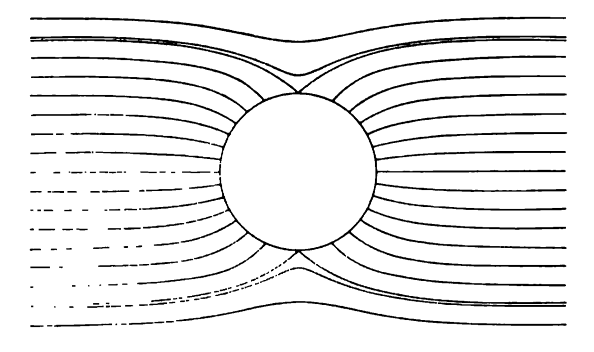


Fig. 72.



Kugel verteilt ist, von einer sehr großen leitenden, geerdeten Scheibe angezogen wird. Wie wir gesehen haben (S. 145), wirkt die Scheibe in dem Teile des Raumes, in welchem sich die Ladung η befindet, ebenso wie eine Ladung $-\eta$ an der Stelle des elektrischen

Bildes der Ladung η, das im gegebenen Falle mit dem optischen Bilde zusammenfällt. Ist der Abstand der Ladung η (des Mittelpunktes der Kugel) von der Scheibenoberfläche gleich h, so ist offenbar $f = \eta^2 : 4h^2$.

2. Es sei die Kraft f zu bestimmen, mit welcher eine Ladung η, welche z. B. gleichmäßig auf der Oberfläche eines nicht leitenden Kügelchens angeordnet ist, von einer leitenden, geerdeten Kugel angezogen wird. Wir wollen mit R den Kugelradius, mit a die Entfernung der Ladung η (des Zentrums der kleinen Kugel) vom Kugelzentrum O bezeichnen. Wie wir gesehen haben, wirkt die auf der Kugel induzierte Ladung im äußeren Raume ebenso wie eine Ladung $\eta' = -\eta \frac{R}{a}$, welche sich in einem auf der Geraden ηO in der Entfernung $b = R^2 : a$ vom Kugelmittelpunkte gelegenen Punkte befindet. Hieraus folgt

$$f = \frac{\eta\eta'}{(a-b)^2} = \frac{\eta^2 R a}{(a^2 - R^2)^2} = \frac{\eta^2 R a}{c^4},$$

wo c die Länge der vom Mittelpunkte der kleinen Kugel an die Oberfläche der gegebenen leitenden Kugel gezogenen Tangente ist. Befindet sich η innerhalb einer Hohlkugel in der Entfernung b vom Zentrum O, so ist

$$f = \frac{\eta^2 R b}{(R^2 - b^2)^2} = \frac{\eta^2 R b}{c^4},$$

hier ist c die Hälfte der durch η hindurchgehenden, zum Radius ηO senkrechten Sehne.

3. Die Kraft f, welche auf den beweglichen Teil einer der Platten eines sehr großen ebenen Kondensators wirkt, wird, wie wir gesehen haben, durch Formel (57), S. 117, ausgedrückt.

4. Vergleichen wir die Kräfte, die auf eine dielektrische Kugel und auf eine isolierte, leitende Kugel, die sich im homogenen Felde befinden, wirken. Nehmen wir an, es sei f die Kraft, welche auf die dielektrische Kugel vom Induktionsvermögen K_2 wirkt, und f_0 die Kraft, unter deren Einwirkung sich eine an derselben Stelle befindliche isolierte, leitende Kugel befindet. Das Induktionsvermögen des umgebenden Mediums sei in beiden Fällen gleich K_1. Setzt man ein homogenes Feld voraus, so hat man diejenigen Verteilungen von Ladungen, deren Dichten durch die Formeln (72, c), S. 144 und (77), S. 150 angegeben werden. Diese beiden Dichten unterscheiden sich voneinander durch den in (76, b) gegebenen Faktor α. Unter gleichen Verhältnissen muß dieser Faktor dem gesuchten Verhältnis der Kräfte gleich sein, so daß man den Ausdruck

$$f = \frac{K_2 - K_1}{K_2 \cdot 2K_1} \, {}_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (79)$$

erhält.

In Luft ist $K_1 = 1$; setzt man noch $K_2 = K$, so erhält man in Luft

$$f = \frac{K-1}{K+2} f_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

Wir wollen uns nun der allgemeinen Frage zuwenden, wie die ponderomotorischen Kräfte berechnet werden, die im elektrischen Felde wirken. Hier hat man zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem die Ladung oder das Potential des betrachteten Leiters konstant bleiben soll oder nicht.

Fall 1. Die Ladungen der Leiter ändern sich nicht bei den Bewegungen, welche sie unter dem Einflusse der auf sie wirkenden Kräfte vollführen. Angenommen, man hat ein System von Körpern $A_1, A_2, A_3 \ldots$; wir bezeichnen mit A_1 einen von diesen Körpern und mit η_1 seine konstante Ladung. Es sei W die elektrische Energie des ganzen Systems und dR die unendlich kleine Arbeit, welche von den elektrischen Kräften geleistet wird, während der Körper A_1 eine unendlich kleine Bewegung vollführt, die unter den mechanischen Bedingungen möglich ist, denen der Körper A_1 unterworfen ist. Es ist offenbar, daß, falls diese Bewegung durch die elektrischen Kräfte hervorgerufen ist, die Arbeit dR eine positive Größe darstellt; sie konnte nur auf Kosten des Vorrats von potentieller Energie W hervorgerufen werden, so daß wir die Gleichung

$$dR = -dW \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

haben.

Es bezeichne f_x die auf den Körper A_1 in der Richtung von x wirkende Kraft; verschiebt sich A_1 in der Richtung von x, so ändert sich W, so daß man W unter anderem als Funktion von x betrachten kann; hierbei hat man, falls eine Verschiebung um die Strecke dx erfolgt, $dR = f_x dx$, so daß $f_x dx = -\frac{\partial W}{\partial x} dx$ ist, woraus

$$f_x = -\frac{\partial W}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81,a)$$

folgt. Nehmen wir an, es sei M_p das Moment des Kräftepaares, welches den Körper A_1 um eine gewisse Achse zu drehen sucht, und φ der Winkel, welcher diese Drehung von einer beliebigen Anfangslage an mißt. Man kann dann W unter anderem als Funktion des Winkels φ betrachten. Dreht sich der Körper A_1 um die Achse p um den Winkel $d\varphi$, so ist $dR = M_p d\varphi$, folglich

$$M_p = -\frac{\partial W}{\partial \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81,b)$$

Wir hatten für W den allgemeinen Ausdruck (51,d), S. 104,

$$W = \frac{1}{2} \Sigma V \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81,c)$$

Nehmen wir an, die Anordnung der Körper habe durch die Einwirkung von elektrischen Kräften, die hierbei eine gewisse positive Arbeit geleistet hatten, eine unendlich kleine Änderung erfahren. Die Gleichung (81) bleibt in Kraft. Aber (81, c) gibt uns im allgemeinen

$$dW = \frac{1}{2}\Sigma V d\eta + \frac{1}{2}\Sigma \eta dV.$$

Der Voraussetzung gemäß sind aber alle $d\eta$ gleich Null; es bleibt

$$dW = \frac{1}{2}\Sigma \eta dV \quad \ldots\ldots \quad (81,\mathrm{d})$$

dW ist eine negative Größe; folglich sieht man, daß das System Bewegungen auszuführen sucht, bei denen die Potentiale kleiner werden. Das System strebt dem kleinsten, unter den gegebenen Bedingungen möglichen Energiewerte zu.

Fall 2. Die Potentiale der Leiter bleiben ungeändert. Denken wir uns ein System von Leitern $A_1, A_2, A_3 \ldots$, welche auf den konstanten Potentialen $V_1, V_2, V_3 \ldots$ durch Verbindung mit den Elektrizitätsquellen $B_1, B_2, B_3 \ldots$ erhalten werden. Letztere kann man als Leiter betrachten, deren Kapazitäten q_1, q_2, q_3 unendlich groß sind, so daß sich ihre Potentiale nicht ändern, wenn ihnen eine gewisse endliche Elektrizitätsmenge entzogen wird. Zunächst nehmen wir an, die Kapazitäten q_i der Körper B_i seien endliche Größen. Die Ladungen der Körper A_i bezeichnen wir mit η_i. Wenn sich die Körper A_i des betrachteten Systems unter der Einwirkung des elektrischen Feldes, in dem sie sich befinden, unendlich wenig verschieben, so leisten die elektrischen Kräfte eine gewisse Arbeit dR, als deren Quelle die Energie W_A dieser Körper und die Energie W_B derjenigen Quellen B_i dienen können, mit denen sie verbunden sind, so daß

$$dR = -(dW_A + dW_B) \quad \ldots\ldots \quad (82)$$

ist. Für W_A und W_B wählen wir die Ausdrücke

$$W_A = \frac{1}{2}\Sigma V\eta; \qquad W_B = \frac{1}{2}\Sigma q V^2.$$

Dies gibt

$$\left.\begin{aligned} dW_A &= \frac{1}{2}\Sigma V d\eta + \frac{1}{2}\Sigma \eta dV; \\ dW_B &= \Sigma q V dV \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (82,\mathrm{a})$$

Die Summe der Ladungen der miteinander verbundenen Körper A_i und B_i muß konstant bleiben, d. h. läßt man die Indizes fort, so hat man für jedes Paar $\eta + qV = Const$, d. h.

$$d\eta + q dV = 0 \quad \ldots\ldots \quad (82,\mathrm{b})$$

oder

$$V d\eta + q V dV = 0.$$

Hieraus folgt für alle Paare, d. h. für alle Körper A_i und B_i

$$\Sigma V d\eta + \Sigma q V dV = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (82,\mathrm{c})$$

Setzt man dies in (82, a) ein, so findet man

$$dW_A = \frac{1}{2}\Sigma \eta dV - \frac{1}{2}\Sigma q V dV = \frac{1}{2}\Sigma \eta dV - \frac{1}{2} dW_B$$

oder

$$2 dW_A + dW_B = \Sigma \eta dV.$$

Substituiert man hier dV aus (82, b) und führt der größeren Klarheit wegen die Bezeichnungen η_A statt η und q_B statt q ein, so erhält man

$$2 dW_A + dW_B = -\sum \frac{\eta_A d\eta_A}{q_B} \quad . \quad . \quad . \qquad (82,\mathrm{d})$$

Hier ist W_A die Energie des betrachteten Systems von Leitern A_i, deren Ladungen η_A sind; W_B ist die Energie der mit ihnen verbundenen Körper B_i, deren Kapazitäten q_B sind. Geht man zu dem Falle über, wo die Körper B_i wirkliche Elektrizitätsquellen sind, welche auf den Körpern A_i beständige Potentiale aufrecht zu erhalten imstande sind, so hat man die Größen q_B als unendlich groß anzunehmen. Im Grenzfalle erhält man

$$2 dW_A + dW_B = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (83)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (82), so erhält man

$$dW_A - dR = 0,$$

d. h.

$$dR = dW_A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (84)$$

$$-dW_B = dW_A + dR = 2 dW_A = 2 dR \quad . \quad . \qquad (85)$$

Hier ist dR die positive bei der Bewegung der Körper A_i geleistete Arbeit. Man sieht, daß, wenn die Potentiale der ein System bildenden Körper konstant bleiben müssen, die Arbeit dR der elektrischen Kräfte gleich dem Energiezuwachs dieses Systems ist. Die Quellen, welche die Potentiale konstant erhalten, verlieren eine Energiemenge, welche zweimal so groß ist wie die Arbeit dR; die eine Hälfte wird zur Leistung dieser Arbeit verbraucht, die andere zur Vergrößerung der Energie des betrachteten Systems von Leitern.

Das System strebt dem größten unter den gegebenen Bedingungen möglichen Energiewerte zu.

Vereinigt man beide untersuchten Fälle, so ergibt sich: das System strebt bei konstanten Ladungen nach einer Verminderung der Energie und der Potentiale, bei konstanten Potentialen jedoch nach einer Vergrößerung der Energie wie der Ladungen.

§ 11. Vorläufige Bemerkung über die Zerstreuung der Elektrizität. Während wir in diesem Kapitel die Grundeigenschaften des elektrischen Feldes untersucht haben, sind wir zugleich mit den einfachsten Erscheinungen bekannt geworden, die sozusagen ununterbrochen auftreten, sobald man es mit der statischen Elektrizität zu tun hat. Zu den Erscheinungen dieser Art gehört auch die sogenannte Elektrizitätszerstreuung. Diese Erscheinung kann aber zu den elektrostatischen Erscheinungen nicht gezählt werden, da sie eine ununterbrochene Änderung des Feldes darstellt, nämlich eine Änderung der in ihm wirkenden Kräfte, sowohl was deren Größe, als auch im allgemeinen was deren Richtung betrifft. Hieraus folgt, daß die erwähnte Erscheinung dynamischen Charakter hat, einem veränderlichen elektrischen Felde angehört. Derartige Erscheinungen werden im zweiten Teile dieses Bandes betrachtet werden. Da die Erscheinung jedoch von hervorragender Wichtigkeit, und andererseits wie man wohl sagen kann, durchaus elementar ist, so soll ihrer bereits an dieser Stelle, wenn auch nur in Kürze, Erwähnung geschehen. Es ist dies um so mehr gerechtfertigt, als man die Elektrizitätszerstreuung, d. h. die allmähliche Abnahme der Feldintensität, ziemlich zwanglos zu denjenigen Feldeigenschaften zählen kann, die in der Praxis tatsächlich fast immer beobachtet werden.

Die Erscheinung der Elektrizitätszerstreuung besteht darin, daß jeder sich selbst überlassene elektrisierte Körper allmählich seine Ladung verliert. Die ausführliche Untersuchung aller Ursachen eines solchen Verlustes wollen wir auf eine andere Stelle verlegen; hier wollen wir bloß auf die Grundursachen der Zerstreuung aufmerksam machen, ohne auf Einzelheiten einzugehen.

Eine der Hauptursachen für das allmähliche Verschwinden von Ladungen besteht darin, daß die Isolation des elektrisierten Körpers in der Mehrzahl der Fälle keine vollkommene ist. Die Elektrizität entweicht durch die Unterlagen, Ständer usw., die als Isolatoren dienen sollen; mit anderen Worten, die Enden der Spannungsröhren, von denen wir annehmen, daß sie aufeinander seitliche Drucke ausüben, gleiten langsam an der Oberfläche der Isolatoren entlang. Solche Ladungsverluste werden in hohem Grade von Feuchtigkeitsschichten, die sich an der Oberfläche der Isolatoren befinden, begünstigt; es ist daher die Elektrizitätszerstreuung in feuchter Luft besonders groß. Früher glaubte man, daß feuchte Luft ein Elektrizitätsleiter sei; die Versuche von Warburg haben indessen die wahre Ursache gezeigt, woher sich die Zerstreuung verstärkt, wenn die Luftfeuchtigkeit groß ist. Paraffin ist nur wenig hygroskopisch, es kann daher als zuverlässiges Isoliermaterial dienen, selbst bei großer Luftfeuchtigkeit; es wird daher gegenwärtig vielfach verwendet.

Eine zweite Ursache für die Zerstreuung ist in der Konvektion zu suchen, d. h. in der Fortführung der Elektrizität durch das umgebende Gas, z. B. durch die Luft. Die Elektrizität geht auf die Luftteilchen über, welche die Oberfläche des elektrisierten Körpers unmittelbar berühren, wobei diese Teilchen wahrscheinlich eine besondere Art von Veränderung (Ionisation) erleiden, die wir hier nicht näher besprechen. Die Luftschicht wird gleichnamig elektrisch mit der Körperoberfläche und von diesem Körper abgestoßen; an seine Stelle gelangt frische Luft, die ebenfalls elektrisiert, abgestoßen wird usf. Auf diese Weise bildet sich um den elektrisierten Körper herum eine kontinuierliche Luftströmung aus. Wie wir gesehen haben, ist die Oberflächenspannung P der Elektrizität proportional dem Quadrate der Dichte k, vgl. (25, a), S. 53. Da durch die Spannung P das Streben der Elektrizität, von der Oberfläche eines Leiters in den umgebenden Raum überzugehen, bestimmt wird, so ist klar, daß die Zerstreuung im allgemeinen zugleich mit Zunahme der Dichte k anwachsen muß. Andererseits aber wissen wir, daß sich die Elektrizität auf der Oberfläche von Leitern derart verteilt, daß die Dichte k an hervorragenden Teilen, z. B. an scharfen Kanten und insbesondere an Spitzen, wenn solche vorhanden sind, besonders große Werte annimmt. Hieraus folgt, daß die Zerstreuung an solchen Stellen besonders groß sein muß; dies wird auch in der Tat beobachtet. Ein für sich genommener Leiter, der mit einer Spitze versehen ist, kann überhaupt nicht elektrisiert werden: so stark also ist die Zerstreuung oder, wie man bisweilen sagt, das Ausströmen der Elektrizität aus Spitzen. Verbindet man eine horizontal gestellte Spitze mit einer Elektrisiermaschine, so geht gleichsam von der Spitze eine so starke Luftströmung aus, daß man sie mit der Hand empfindet und daß man durch sie eine Kerze auslöschen kann.

Denken wir uns einen positiv elektrisierten Leiter A und eine metallische Spitze B, d. h. einen Körper von der Form eines Kegels mit sehr kleinem Winkel an seinem Scheitel. Legt man B mit seiner Basis an den Körper A, so verschwindet die Ladung des letzteren; dasselbe tritt ein, wenn man den Körper B mit der Erde verbindet und ihn darauf derart A nähert, daß das zugespitzte Ende der Oberfläche von A zugekehrt ist. In diesem Falle strömt aus der Spitze die induzierte negative Elektrizität, die durch die Luftströmung auf die Oberfläche des Körpers A gelangt und hier die vorhandene positive Ladung aufhebt. Denken wir uns jetzt, es sei B ein isolierter Leiter, z. B. eine mit einer horizontalen Spitze versehene Kugel. Bringt man B derart an A heran, daß die Spitze nach der von A abgewandten Seite gekehrt ist, nimmt darauf die Spitze fort und entfernt B von A, so findet man, daß B negativ elektrisch geworden ist. In diesem Falle strömt nämlich die positive (gleichnamige) induzierte Elektrizität aus der Spitze heraus, so daß die Spitze in ähnlicher Weise wirkt, wie eine

Ableitung zur Erde. Nähert man B dem Körper A, indem man die Spitze nach A hinkehrt, entfernt die Spitze und rückt die Körper auseinander, so findet man, daß die Ladung von A abgenommen hat, der Körper B aber positiv elektrisch geworden ist. Es ist in diesem Falle die negative (ungleichnamige), auf B induzierte Elektrizität aus der Spitze geströmt und auf A übergegangen, während die induzierte positive Elektrizität auf B verblieben ist. Das Resultat ist dasselbe, wie wenn ein gewisser Teil der Ladung von A durch die Spitze hindurch auf B übergegangen wäre, d. h. als ob die Spitze einen gewissen Teil der Ladung aus dem Körper A herausgezogen oder herausgesaugt hätte. Aus diesem Grunde spricht man bisweilen von einer Saugwirkung der Spitzen, die der Oberfläche von elektrisierten Leitern genähert sind.

Die Geschwindigkeit, mit der die Elektrizitätszerstreuung vor sich geht, hängt, wie wir sehen werden, von der Art des umgebenden Gases und von seinem physikalischen Zustande, d. h. von seiner Spannung und Temperatur ab.

Die Erscheinung der Elektrizitätszerstreuung hat ein besonders großes Interesse gewonnen, seit der Einfluß der strahlenden Energie auf diese Erscheinung entdeckt worden ist, und zwar weniger derjenigen Formen der strahlenden Energie, die wir in Bd. II betrachtet hatten, als vielmehr derjenigen neuen Strahlen, die wir am Ende dieses Bandes betrachten werden, nämlich der Röntgenstrahlen, der (Becquerelschen) Uranstrahlen, sowie überhaupt der von den radioaktiven Körpern ausgesandten Strahlen. Alles Hierhergehörige hängt aufs engste mit der Frage nach der „Ionisierung“ der Gase zusammen und kann an dieser Stelle nicht behandelt werden. Wir wollen uns auf die Angabe beschränken, daß von allen Formen der strahlenden Energie, die in Bd. II betrachtet worden sind (elektrische, infrarote, sichtbare und ultraviolette Strahlen), nur die ultravioletten Strahlen auf die Zerstreuung der Elektrizität, und zwar der negativen Elektrizität, einwirken, indem die Geschwindigkeit, mit welcher die Zerstreuung stattfindet, unter der Wirkung dieser Strahlen sehr stark zunimmt; auf die Geschwindigkeit der Zerstreuung positiver Ladungen üben die ultravioletten Strahlen keinen wesentlichen Einfluß aus.

Im fünften Kapitel (atmosphärische Elektrizität) wird die Elektrizitätsleitung der Luft zu erwähnen sein, welche von ihrem Ionisierungsgrade abhängt und einen sehr großen Einfluß auf die Zerstreuung der Elektrizität von der Oberfläche isolierter Leiter ausübt.

Literatur.

Zu § 1.

Franklin vgl. Prisley, Geschichte der Physik, S. 166; Gehlers Wörterbuch, Kapitel „Elektrizität".
Edlund: Arch. sc. phys. et natur. (2) **43**, 209, 1871; Pogg. Ann. Ergbd. **6**, 95, 1873; **148**, 421, 1873; **149**, 87, 1873; **156**, 590, 1875; W. A. **2**, 347, 1877; **15**, 165, 1882.

Zu § 2.

Mossotti: Bibl. Univ. de Genève **6**, 193, 1847; Atti della soc. Italiana della Scienze, 26.
Clausius: Mechanische Wärmetheorie **2**, 62, Braunschweig 1879.

Zu § 4.

Coulomb: Mém. de l'Acad. r. des Sc. 1784, 1785, p. 563; 1787, p. 421; Collections des mém. relatifs à la Physique publiés par la Soc. Fr. de Phys. **1**, 67, 107, 1884; deutsche Übersetzung von W. König, Engelmann, 1890.
W. Weber: Elektrodynamische Maßbestimmungen **1**, 1846; 2. Aufl., Leipzig 1890; Pogg. Ann. **73**, 229, 1848.
Maxwell: Treatise on Electricity and Magnetism, 1882; deutsche Übersetzung: Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus, übersetzt von B. Weinstein, Berlin, Springer, 1883; französische Übersetzung: Seligmann-Lui, Paris, Gauthiers-Villars, 1885.

Zu § 9.

Cavendish: The Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish. Edit. by J. C. Maxwell, 1879.
Borgmann: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **13**, 117, 1881.
Faraday: Exper. Researches **11**, § 1189—1294, 1838; Pogg. Ann. **46**, 537, 581, 1839.
W. Thomson (Lord Kelvin): Reprint of papers on Electrost. and Magnetism, p. 287.
Kirchhoff: Berl. Ber. 1877, S. 144; Ges. Abhandl. S. 101, Leipzig 1882.
Clausius: Pogg. Ann. **86**, 161, 1852.
J. J. Thomson: Phil. Trans. **174**, 707, 1883.
Riess: Pogg. Ann. **48**, 335, 1837; **43**, 49, 1838; **80**, 316, 1852; **91**, 355, 1854; Reibungselektrizität **1**, 391; **2**, 170; Berlin 1853; Doves Repertor. **6**, 307, 1842; Berl. Ber. 1853, S. 606.
Schwedow: Pogg. Ann. **135**, 418, 1868; **137**, 566, 1869.
Knochenhauer: Wien. Ber. **39**, 701, 1880.
Villari: Atti d. Acc. dei Lincei **7**, 297, 1883.
Blavier: J. de phys. **4**, 161, 1875.
Dove: Pogg. Ann. **72**, 406, 1847; **80**, 316, 1852; **91**, 355, 1854.

Zu § 10.

Ausführliche Literaturangabe s. in Wiedemann: Die Lehre von der Elektrizität **1**, 61—96. Braunschweig 1893.
Coulomb: Mém. de l'Acad. de Paris 1786, p. 74; 1787, p. 425; 1788, p. 620; Biot, Traité de Physique **2**, 273, 1816.
Riess, Reibungselektrizität **1**, 126. Berlin 1853; Abhandl. Berl. Akad. 1844.
Schwedow, Jour . d. russ. phys.-chem. Ges. **27**, 25, 1895.

Poisson: Mém. de l'Institut. **12**, 1, 87, 163, 197, 1811.
Plana: Mem. di Torino **7**, 325, 1845; **16**, 57, 1860.
Bobylew: Mathem. Ann. **7**, 396, 1874; Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **6**, 37, 89, 1874; **7**, 64, 1875; **8**, 412, 1876; **9**, 61, 103, 1877.
Murphy: Elementary Principles of the theories of Electricity, Heat and Molecular Actions 1. Cambridge 1833.
Hankel: Abhandl. k. sächs. Ges. d. Wiss. **3**, 44, 1857; Pogg. Ann. **103**, 209, 1858.
W. Thomson: Journ. de Liouville **10**, 364, 1845; **12**, 256, 1847; London and Dublin, Math. J. 1848; Reprint of Papers, p. 52.
Cayley: Phil. Mag. (4) **18**, 119, 193, 1859; (5) **5**, 54, 1878.
Kirchhoff: Crelles Journ. **59**, 89, 1861; W. A. **27**, 673, 1886.

Zu § 11.

Warburg: Pogg. Ann. **145**, 578, 1872.

Zweites Kapitel.

Die Quellen des elektrischen Feldes.

§ 1. Einleitung. Als Quellen des elektrischen Feldes oder, wie man gewöhnlich sagt, als Elektrizitätsquellen, hatten wir diejenigen Manipulationen oder diejenigen Erscheinungen bezeichnet, welche von dem Auftreten eines elektrischen Feldes oder, anders ausgedrückt, von einer Elektrisierung gewisser Körper begleitet sind. Die Frage nach den Elektrizitätsquellen verlangt eine eingehende Analyse, eine Zergliederung der unmittelbar beobachteten Erscheinungen und gehört zu den schwierigsten Fragen, von deren endgültiger Lösung wir noch weit entfernt sind. Hier trifft man auf zahlreiche und verschiedenartige Theorien. Die Thermodynamik ermöglicht es zwar, einige gesetzmäßige Beziehungen zwischen den Größen zu finden, welche bei den unmittelbar beobachteten Erscheinungen diese oder jene Rolle spielen, sie vermag aber keine Auskunft über den Charakter derjenigen Elemente zu geben, deren vereinte Wirkung die Quelle einer gegebenen Erscheinung bildet.

Wir wollen versuchen, soweit dies möglich ist, den gegenwärtigen Stand der Frage darzulegen, die verschiedenen Lehren in der Form vorzutragen, die sie gegenwärtig besitzen. Zuvor aber halten wir es für nötig, einige Daten zusammenzustellen, die wir zum Teil bereits in diesem oder den vorhergehenden Bänden betrachtet haben.

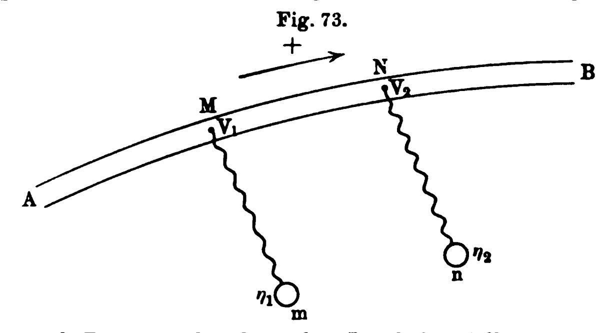
1. Auf S. 42 haben wir die Definition der elektrostatischen (el.-st.) C.G.S.-Einheit der Elektrizitätsmenge gegeben; auf diese führten wir, vgl. (12), die elektromagnetische (el.-mg.) C.G.S.-Einheit und das Coulomb zurück. Wir werden noch auf die el.-st. und el.-mg. Einheiten

zurückkommen und dabei voraussetzen, daß es sich um C.G.S.-Einheiten handelt.

2. Auf S. 92 haben wir eine Definition der el.-st. C.G.S.-Einheit des Potentials oder, was dasselbe ist, der Potentialdifferenz, gegeben; eine andere anschaulichere Definition (mit einer Kugel von 1 cm Radius) haben wir auf S. 100 gefunden. Ferner haben wir auf S. 92 gesehen, vgl. (43,a), daß die in der Praxis übliche Einheit für das Potential, nämlich das Volt, gleich $\frac{1}{300}$ el.-st. C.G.S.-Einheiten des Potentials ist und daß die Arbeit Volt-Coulomb = 1 Joule = 0,24 g-cal ist.

3. Die Erscheinung des elektrischen Stromes wird im zweiten Teile dieses Bandes ausführlich behandelt werden. Hier wollen wir uns auf folgende Hinweise beschränken. Wie wir wissen, ist Gleichgewicht (Ruhe) der Elektrizität auf einem Leiter nur unter der Bedingung möglich, daß das Potential an allen Punkten des Leiters ein und denselben Wert hat. Denken wir uns, es nehme das Potential längs irgend eines Leiters, z. B. längs des Drahtes AB, Fig. 73, in der

Fig. 73.



Richtung nach B ununterbrochen ab. Das heißt, falls man zwei Punkte M und N mittels genügend langer Drähte mit den gleichen Kugeln m und n verbindet, so findet man, daß die Ladungen η_1 und η_2 dieser Kugeln verschieden sind und dabei $\eta_1 > \eta_2$; offenbar ist $\eta_1 : \eta_2 = V_1 : V_2$, wo V_1 und V_2 die Potentiale der Punkte M und N sind. In einem solchen Drahte bildet sich ein elektrischer Strom aus, den man als ein ununterbrochenes Strömen der positiven Elektrizität von M nach N und der negativen in entgegengesetzter Richtung ansehen kann. Man spricht hierbei von einem Potentialgefälle längs des Leiters AB; die Größe des Gefälles zwischen M und N ist gleich $V_1 - V_2$. Ist der Abstand MN gleich Eins, so stellt $V_1 - V_2$ das Potentialgefälle auf der Längeneinheit oder den Potentialgradienten dar. Existiert ein elektrisches Feld in einem Dielektrikum, z. B. in der Luft, so spricht man ebenfalls von einem Potentialgradienten oder Potentialgefälle, das man beispielsweise in Volts pro Centimeter ausdrückt. Der Gradient dient begreiflicherweise als Maß für die Feldintensität an einer gegebenen Stelle, vgl. (40), S. 88.

4. Man schreibt den Atomen der verschiedenen Elemente eine ungleiche Wertigkeit oder Valenz zu, je nachdem sie sich mit einem, zwei usw. Wasserstoffatomen verbinden können, oder aber ein, zwei usw. solcher Atome zu ersetzen imstande sind. Dementsprechend spricht man auch von verschiedenen Valenzen einer Gruppe aus verschiedenen Atomen, wie man dies leicht aus den folgenden Beispielen erkennt:

Einwertig sind: H, K, Na, Li, Ag, Cl, Br, J, Fl, NH_4, OH, CN, NO_3, ClO_3, BrO_3, JO_3, CHO_2, $C_2H_3O_2$ u. a.

Zweiwertig sind: Ba, Sr, Ca, Mg, Zn, Cd, Cu, O, S, SO_4, CrO_4, CO_3, SiO_3 u. a.

Die Wertigkeit kann auch in verschiedenen Verbindungen eine verschiedene sein; so ist im $CuCl_2$ das Kupfer zweiwertig, im Cu_2Cl_2 dagegen einwertig.

Das Molekulargewicht einer Verbindung wird durch die Summe der Atomgewichte aller Atome bestimmt, welche im Molekül enthalten sind. Setzt man $O = 16$, $H = 1{,}008$, $N = 14{,}04$, $Cl = 35{,}45$, $S = 32{,}06$, $Cu = 63{,}6$, so ist beispielsweise das Molekulargewicht von $O_2 = 32$, $H_2O = 18$, $NH_4Cl = 53{,}5$, $Cu_2Cl_2 = 198{,}1$, $CuCl_2 = 134{,}5$, $H_2SO_4 = 98{,}1$, $CuSO_4 = 159{,}66$ usw. Als Grammolekül einer gegebenen Substanz wird eine Anzahl Gramme dieser Substanz bezeichnet, welche gleich dem Molekulargewichte ist; so ist z. B. 1 g-Mol. Wasserstoff = 2,016 g, Sauerstoff 32 g, Salmiak 53,5 g, Schwefelsäure (wasserfreie) 98,1 g der entsprechenden Substanzen.

5. Das Molekül kann in vielen Fällen in zwei bestimmte Teile geteilt werden, die man Ionen nennt; dies gilt z. B. von den Molekülen der Salze und Säuren und auch, unter gewissen Bedingungen, von den Molekülen, welche zwei gleichartige Atome enthalten (H_2, Cl_2). Wir haben schon wiederholt Gelegenheit gehabt, auf die Theorie hinzuweisen, nach welcher im Wasser gelöste Substanzen zum Teil dissoziiert, d. h. in Ionen zerlegt (ionisiert) sind und daß bei sehr schwachen Verdünnungen diese Zerlegung eine vollkommene sein kann. Man nennt solche Substanzen Elektrolyte.

6. Das Äquivalentgewicht eines einwertigen Elementes ist gleich seinem Atomgewicht.

Das Äquivalentgewicht einer einwertigen Gruppe von Atomen ist gleich der Summe der Atomgewichte dieser Atome. So ist das Äquivalentgewicht von $NH_4 = 18{,}04$, $OH = 17{,}01$, $NO_3 = 62{,}04$ usf. Das Äquivalentgewicht einer Verbindung, welche in einwertige Ionen zerfällt, ist gleich ihrem Molekulargewichte. So sind z. B. die Äquivalentgewichte der Verbindungen HCl, NaCl, KBr, NaJ, TlFl, NH_4Cl, HNO_3, $AgNO_3$, $KClO_3$, $NaC_2H_3O_2$, NaOH, $AgClO_4$, KJO_3, $KMnO_4$, KNO_2, $NaAsO_2$ usw. gleich deren Molekulargewichten.

Das Äquivalentgewicht

eines k-wertigen Elementes	ist gleich $\frac{1}{k}$	des Atomgewichts des Elementes.
einer k-wertigen Atomgruppe		der Summe der Atomgewichte der Gruppe,
einer Verbindung, die in k-wertige Ionen zerfällt		des Molekulargewichtes der Verbindung.

Danach sind die Äquivalentgewichte z. B.: $\frac{1}{2}O = 8$, $\frac{1}{2}Ca = 20{,}02$, $\frac{1}{2}SO_4 = 48{,}03$, $\frac{1}{2}CO_3 = 30{,}0$. $\frac{1}{2}H_2SO_4 = 49{,}04$, $\frac{1}{2}CuSO_4 = 79{,}83$; ferner $\frac{1}{2}Na_2CO_3$, $\frac{1}{2}MgCl_2$, $\frac{1}{2}K_2S$, $\frac{1}{2}BaN_2O_6$, $\frac{1}{2}Ca(C_2H_3O_2)_2$, $\frac{1}{2}MgCrO_4$, $\frac{1}{2}Ca(MnO_4)_2$; $\frac{1}{3}H_3PO_4$, $\frac{1}{3}Na_3AsO_3$, $\frac{1}{4}Na_4P_2O_7$, $\frac{1}{5}Na_5JO_6$, $\frac{1}{6}Al_2Cl_6$, $\frac{1}{6}Cr_2(SO_4)_3$, $\frac{1}{6}Fe_2Cl_6$ usw. Kürzer ausgedrückt: das Äquivalentgewicht wird immer für ein einwertiges Atom (H, Cl usw.) oder für eine einwertige Gruppe berechnet. Demgemäß ist z. B. für CuCl das Äquivalentgewicht gleich dem Molekulargewichte, für $CuCl_2$ jedoch stellt es die Hälfte des letzteren dar: dasselbe gilt für den Fall, daß man die Formel der ersten Verbindung in der Form Cu_2Cl_2 schreibt.

7. Als Grammäquivalent einer gegebenen Substanz bezeichnet man diejenige Anzahl Gramme dieser Substanz, welche gleich dem Äquivalentgewichte ist. Aus dem Vorhergehenden ersieht man, daß das Grammäquivalent nur für solche Verbindungen gleich dem Grammmolekül ist, die in einwertige Ionen zerfallen, also z. B. für HCl, KBr, NH_4Cl, HNO_3, $LiClO_3$ usw. Das Grammäquivalent des Sauerstoffs wiegt 8 g, des Kupfersulfats 79,83 g usf., entsprechend den Äquivalentgewichten.

8. Nach dem Avogadroschen Gesetze enthalten gleiche Gasvolumina bei gleicher Temperatur und Druck die gleiche Anzahl von Molekülen. Bezeichnen wir mit n die Anzahl Moleküle in 1 ccm bei 0^0 und 760 mm Druck. In Bd. I hatten wir die Zahl

$$n = 2 \, . \, 10^{19} \qquad (1)$$

angegeben. Übrigens geben verschiedene Autoren Zahlen, die von der obigen recht stark abweichen. Da die Dichte der Gase dem Molekulargewichte proportional ist, so ist klar, daß ein Grammolekül eines Gases, also beispielsweise 2 g H_2, 32 g O_2, 30 g NO, 44 g CO_2 bei gleicher Temperatur und Druck immer das gleiche Volumen einnimmt, also die gleiche Anzahl Moleküle enthält, die wir mit N bezeichnen wollen. Da 1 g H_2 bei 0^0 und 760 mm ein Volumen von 11165 ccm einnimmt, so enthält demnach ein Grammolekül eines Gases, also überhaupt einer jeden Substanz

$$N = 4{,}5 \, . \, 10^{23} \qquad (2)$$

Moleküle. Diese Zahl zeigt auch, wieviel Atome, d. h. Ionen in einem Grammäquivalente Wasserstoff (1 g), sowie überhaupt einer jeden einwertigen Gruppe oder Verbindung enthalten sind, die aus

einwertigen Ionen besteht. Bei der Ionisierung eines Grammäquivalents einer aus einwertigen Ionen bestehenden Verbindung erhält man N Ionen der einen und anderen Art.

Ein anderes Resultat jedoch erhält man beispielsweise für den Sauerstoff: ein Grammolekül, d. h. 32 *g* Sauerstoff enthalten N Moleküle, ein Grammäquivalent, d. h. 8 *g* enthalten $\frac{1}{2} N$ Atome oder Ionen O. Die oben angeführten Beispiele zeigen, daß bei der Ionisierung eines Grammäquivalents $CuSO_4$, BaN_2O_6, $MgCrO_4$ usw. $\frac{1}{2} N$ Ionen der einen und anderen Art erhalten werden. Bei Ionisierung eines Grammäquivalentes Na_2CO_3, d. h. von $\frac{1}{2} Na_2CO_3$, erhält man N Ionen Na und $\frac{1}{2} N$ Ionen CO_3; H_3AsO_3 gibt N Ionen H und $\frac{1}{3} N$ Ionen AsO_3; Al_2Cl_6 gibt $\frac{1}{3} N$ Ionen Al und N Ionen Cl.

Also man erhält bei der Ionisierung eines Grammäquivalentes einer Verbindung oder eines Elementes (z. B. H_2, O_2, Cl_2 usw.) $\frac{1}{k} N$ Ionen von bestimmter Art, falls dies Ion k-wertig ist, d. h. N einwertige Ionen, $\frac{1}{2} N$ zweiwertige Ionen usf.

§ 2. Die elektrischen Eigenschaften der Ionen. Elektronen. Wie bereits erwähnt wurde, zerfallen viele gelöste Substanzen in Ionen. Es unterliegt keinem Zweifel, daß auch Gase unter verschiedenen Umständen Ionisierung erfahren. Endlich nehmen viele Forscher an, daß auch die Moleküle fester Körper, z. B. die Moleküle der Metalle, in Ionen zerfallen können: dieser Gedanke ist zuerst von Giese (1889) weiter entwickelt worden.

Die Ionisierung einer gelösten Substanz hängt in hohem Grade vom Lösungsmittel ab. Nernst und J. J. Thomson (1894) finden, daß die Ionisierungsfähigkeit eines Lösungsmittels um so größer ist, je größer seine Dielektrizitätskonstante K ist; den größten Wert von K hat das Wasser ($K = 80$) und die größte Ionisierung findet man bei wässerigen Lösungen.

Der modernen Lehre von den Ionen liegt die Annahme zugrunde, daß jedes Ion mit einer gewissen Elektrizitätsmenge verbunden ist. Hat ein Ion positive Ladung, so heißt es Kation, ist seine Ladung negativ, so heißt es Anion. Zu den Anionen gehören Cl, Br, J, Fl, OH, NO_2, CN, NO_3, ClO_3, ClO_4, SO_4, SeO_4 usw. Zu den Kationen gehören der Wasserstoff, die Metalle, NH_4, PH_4, einige organische Derivate von NH_4, PH_4 usw. Bei der Ionisierung eines Moleküls bildet sich stets ein Anion und Kation, die gleiche Ladungen besitzen. Bewegen sich die Ionen einer gelösten Substanz, so bewegen sich mit ihnen auch ihre elektrischen Ladungen. Man nimmt an, daß außer der Bewegung der Elektrizität, welche durch die ihren Ort verändernden Ionen hervorgerufen wird, keinerlei andere Bewegung der Elektrizität in Lösungen

existiert. Es kann daher die Ionenwanderung in den Lösungen nicht als Folge des Hindurchströmens der Elektrizität durch die Lösung angesehen werden, da ja in der Ionenbewegung das Wesen dieses Elektrizitätsdurchganges besteht. Es sei noch bemerkt, daß sich die Anionen und Kationen immer in entgegengesetzten Richtungen bewegen, natürlich, wenn außer der regellosen Bewegung der Ionen nach allen Seiten eine bestimmte vorherrschende Richtung in der Ionenbewegung vorhanden ist. Die experimentellen Untersuchungen, denen wir uns später zuwenden werden, haben zu folgendem Fundamentalsatze geführt:

Jedes Grammäquivalent jedes beliebigen Ions enthält eine und dieselbe Menge F positiver oder negativer Elektrizität, die gleich

$$\left.\begin{aligned} F &= 96\,540 \text{ Coulombs}; \\ F &= 9654 \text{ el.-mg. C.G.S.-Einh.} = 2{,}896 . 10^{14} \text{ el.-st. C.G.S.-Einh.} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ist. Man könnte diese Elektrizitätsmenge die elektrochemische Einheit der Elektrizitätsmenge nennen. So sind z. B. 1,008 g H, 35,45 g Cl, 17,01 g OH, 62,04 g NO_3, 8 g O usw. an F gebunden, wenn H, Cl und O nur aus Ionen bestehen.

Die Gewichtsmenge eines Ions, welche an 1 Coulomb gebunden ist, heißt das elektrochemische Äquivalent des Ions. Dieselbe ist offenbar gleich $\frac{1}{96540}$ Grammäquivalent; der Bequemlichkeit halber wird sie jedoch in Milligrammen ausgedrückt. So ist das elektrochemische Äquivalent des H = 0,01044 mg, Ag = 1,118 mg, Cl = 0,3673 mg, OH = 0,1762 mg, $\frac{1}{2}$ Cu = 0,3294 mg, $\frac{1}{2}$ Zn = 0,3388 mg, $\frac{1}{2}$ O = 0,08288 mg, $\frac{1}{2} SO_4$ = 0,4976 mg usw.

Wie bereits erwähnt war, enthält ein Grammäquivalent jedes einwertigen Ions ein und dieselbe Anzahl N von Ionen; da nun aber dasselbe Grammäquivalent an die Elektrizitätsmenge F gebunden ist, so enthält jedes einzelne einwertige Ion, z. B. H, K, Na, Ag, Cl, OH, NO_3 usw., ein und dieselbe Elektrizitätsmenge $e = F : N$. Setzt man

$$N = 4{,}4 . 10^{23}, \text{ so ist } e = \frac{F}{N} = 2{,}2 . 10^{-19} \text{ Coulombs} = 2{,}2 . 10^{-20}$$
$$\text{el.-mg. C.G.S.-Einheiten} = 6{,}6 . 10^{-10} \text{ el.-st. C.G.S.-Einheiten.}$$

Zahlreiche Untersuchungen jedoch, die wir später kennen lernen werden, lassen die Zahl

$$\left.\begin{aligned} e = \frac{F}{N} &= 10^{-19} \text{ Coulombs} = 10^{-20} \text{ el.-mg. C.G.S.-Einheiten} \\ &= 3 . 10^{-10} \text{ el.-st. C.G.S.-Einheiten} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

als gegenwärtig wahrscheinlichste erscheinen. Aus ihr erhält man umgekehrt $N = 10^{24}$, welche Zahl innerhalb der von verschiedenen Forschern auf Grund der kinetischen Gastheorie gefundenen Zahlen liegt (Bd. I). Die Ladung e stellt die elementare Ladung oder das

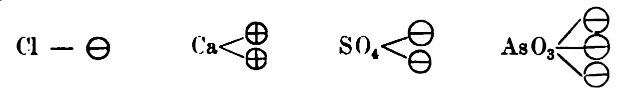
Elektrizitätsatom dar; es ist dies das Elektron, das wir bereits auf S. 64 erwähnt hatten. Richarz, Stoney, J. J. Thomson und Planck haben für e Werte erhalten, welche von dem hier angegebenen mehr oder weniger abweichen. Der erste Versuch zur Bestimmung dieser Größe ist, wie es scheint, von Budde (1885) gemacht worden. Planck (1902) findet

$$e = 4{,}69 \,.\, 10^{-10} \text{ el.-st. C.G.S.-Einheiten} \quad . \; . \; . \quad (4, a)$$

Es ist klar, daß ein zweiwertiges Ion, z. B. Ba, Zn, SO_4, CO_3 usw. an zwei Elektronen gebunden ist; ein dreiwertiges, z. B. PO_4 (aus H_3PO_4) an drei Elektronen usw. Die Valenz eines Ions wird durch die Anzahl Elektronen bestimmt, die mit ihm verbunden sind. Bezeichnet man mit m die in Grammen ausgedrückte Masse des Ions, mit e die in el.-mg. C.G.S.-Einheiten ausgedrückte Ladung, so erhält man für ein Wasserstoffatom den Ausdruck $m = 1 : N = 10^{-24}$ g, oder angenähert

$$\frac{e}{m} = 10^4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Das positive Elektron bezeichnet man bisweilen mit dem Zeichen $\oplus$, das negative mit $\ominus$. Ein Ion hat man als eine Verbindung eines materiellen Atoms mit einem Elektron aufzufassen. Werner hat auf Fälle hingewiesen, wo in einer bestimmten Atomgruppe ein Atom nach dem anderen durch ein Elektron ersetzt werden kann und hierbei ein elektronegatives Atom, z. B. Cl, durch ein positives Elektron und umgekehrt, denn in der Verbindung Cl$\ominus$ vertritt das Cl-Atom gewissermaßen das positive Elektron $\oplus$ des neutralen Moleküls $\oplus\ominus$, das gar keine Materie besitzt. Ein Ion stellt danach ein Atom oder eine Atomgruppe dar, deren Valenzen mit Elektronen gesättigt sind, so daß man sogar schreiben könnte



In neuester Zeit ist die Frage aufgeworfen worden, wie es sich mit der Maße und sogar mit dem Gewichte eines Elektrons verhält; die ersten Versuche in dieser Richtung hat Lieben (1900) gemacht.

Befinden sich die Ionen unter der Einwirkung elektrischer Kräfte, d. h. bildet sich in der Lösung ein elektrisches Feld aus, so beginnen sie sich in der Richtung der wirkenden Kräfte zu bewegen. Hierbei erfahren die Ionen zweifellos einen sehr großen Widerstand, den man als Folge einer Art von Reibung der Ionen an den Molekülen des Lösungsmittels und an anderen Ionen betrachten kann. Infolgedessen sind die Ionengeschwindigkeiten nicht groß. Die größte Geschwindigkeit hat das Wasserstoffion; von den Kationen bewegen sich die Metalle

angenähert fünfmal langsamer als H. Von den Anionen hat das Hydroxyl OH die größte Geschwindigkeit; sie ist ungefähr gleich 0.6 der Geschwindigkeit von H: Cl, Br, J besitzen ungefähr dieselbe Geschwindigkeit wie K und Na. Absolute Werte für die Geschwindigkeiten haben zuerst F. Kohlrausch, Lodge, Cattaneo u. a. gefunden. Beträgt das Potentialgefälle 1 Volt pro Centimeter, so betragen die Ionengeschwindigkeiten (in H_2O bei 18°):

Kationen		Anionen	
Für H	0,00300 $\frac{cm}{sec}$	Für OH . . .	0,00157 $\frac{cm}{sec}$
„ K	0,00057 „	„ Cl	0,00059 „
„ NH_4 . . .	0,00055 „	„ NO_3 . . .	0,00053 „
„ Ag	0,00046 „	„ ClO_3 . . .	0,00046 „
„ Mg . . .	0,00029 „	„ $C_2H_3O_2$ . .	0,00029 „

Da man die Ladung eines Ions kennt, so lassen sich leicht die Kräfte berechnen, unter deren Einwirkung die Ionenbewegung erfolgt. Es erweist sich, daß diese Kräfte sehr groß sind. Um 1 g Wasserstoffionen mit 1 cm Geschwindigkeit pro Sekunde zu transportieren, ist eine Kraft von 330 Mill. Kilogramm erforderlich. Diese Zahl ist von derselben Ordnung wie die Zahl, die wir in Bd. III für die bei der Diffusion wirkenden Kräfte erhalten hatten. Für jedes einzelne Wasserstoffion findet man eine Kraft von etwa $7 . 10^{-10}$ mg.

Es war bereits erwähnt worden, daß man auch in Gasen das Vorhandensein von Ionen anzunehmen hat. Die Ionisierung der Gase nimmt zu, unter der Einwirkung elektrischer Kräfte, bei Durchgang der ultravioletten und „neuen" Strahlen durch die Gase, sowie unter gewissen anderen Verhältnissen. In Gasen, welche nicht sehr stark verdünnt sind, bilden die Ionen gewissermaßen Kerne, um die sich die nicht ionisierten Gasmoleküle, Wasserdampfteilchen, Staubpartikel usw. ansammeln, wodurch die Beweglichkeit der Ionen in hohem Maße vermindert wird. In den höheren Schichten der Atmosphäre ist die Luft stärker ionisiert als in den niedrigeren. Dem Anscheine nach sind die negativen Ionen in höherem Maße als die positiven befähigt, Zentren zur Ansammlung von Partikeln, Wassertröpfchen usw. zu bilden.

Im elektrischen Felde erfolgt eine Bewegung der Gasionen, wobei sich die negativen Ionen im allgemeinen schneller bewegen als die positiven. Bei einem Potentialgefälle von 1 Volt pro Centimeter bewegen sich die Ionen nicht verdünnter Luft mit Geschwindigkeiten, die zwischen 1 und 2 cm pro Sekunde betragen. Die Geschwindigkeit der Wasserstoffionen (bei 760 mm Druck) ist ungefähr gleich 5 cm pro Sekunde.

Wir werden in der Folge eine ganze Reihe von Erscheinungen näher kennen lernen, bei denen man es mit Strömen von sich schnell bewegenden Elektronen zu tun hat. Hierher gehören einige elektrische Erscheinungen, die man in verdünnten Gasen beobachtet (z. B.

Kathodenstrahlen), sowie gewisse, von den radioaktiven Substanzen ausgesandte Strahlen. Von besonders großem Interesse ist die Frage nach der Größe der Ladung, welche ein einzelnes Teilchen einer solchen Strömung besitzt, sowie nach der Größe der Masse m der wägbaren Materie, mit welcher diese Ladung verbunden ist. Die Untersuchungen von J. J. Thomson u. a. haben zunächst das überaus wichtige Resultat ergeben, daß die Größe der gesuchten Ladung gerade gleich derjenigen Elektrizitätsmenge ist, die wir oben mit e bezeichnet hatten, vgl. (4), d. h., welche an ein Ion eines gelösten Elektrolyten gebunden ist und als Elektron bezeichnet wurde. Hieraus folgt die, man muß sagen universelle Bedeutung dieser Größe: sie stellt wirklich das Element der Elektrizitätsmenge dar, welcher vielleicht eine gewisse Einheitsspannung im Äther entspricht.

Das Verhältnis $\frac{e}{m}$ für Elektronenströme ist von vielen Forschern bestimmt worden, deren Arbeiten wir ebenfalls später betrachten werden. Sie fanden für $\frac{e}{m}$, falls e in el.-mg. Einheiten (S. 42) ausgedrückt ist, Werte, welche

$$\frac{e}{m} = 10^7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

nahekommen. Wie wir nun gesehen haben, ist, falls das Elektron in einer Lösung mit einem Wasserstoffatom verbunden ist, $e:m = 10^4$, vgl. (5). Da die Größe e in beiden Fällen die gleiche ist, so folgt daraus, daß in einem Elektronenstrome ein jedes Elektron an eine Menge ponderabler Materie gebunden ist, deren Masse ungefähr 1000 mal kleiner ist als die eines Wasserstoffatoms. Die mit einer solchen Vorstellung verbundenen Schwierigkeiten wurden noch größer, als man fand, daß das Verhältnis $e:m$ von der Geschwindigkeit v abhängt, mit welcher sich die Elektronen bewegen: je größer v ist, um so größer ist auch die Masse m. Dieser Umstand hat einige Forscher auf den Gedanken gebracht, daß die Masse m, mit welcher verbunden das Elektron in den Strahlungen vorkommt, eine scheinbare Masse sei. Durch die Theorie von Abraham und die Versuche von Kaufmann (1903) findet sich dieser Gedanke bestätigt; demgemäß ist das Beharrungsvermögen, welches die Teile des Elektronenstromes zeigen, eine Folge der Rückwirkung des durch die bewegten Elektronen hervorgerufenen Magnetfeldes auf die Elektronen. Die Größe m ist demnach keine ponderable Masse, sondern eine „elektromagnetische Masse“. Im Zusammenhange hiermit ist die Frage aufgeworfen worden, ob man nicht jede beliebige Masse m als etwas bloß scheinbares ansehen könne, das nur elektromagnetischen Charakter trägt. Man hat sich gefragt, ob man nicht die ganze Mechanik auf elektromagne-

tische Prinzipien zurückführen, aus ihr einen Teil der Elektrizitätslehre machen könne. Das bloße Auftreten eines solchen Gedankens zeigt, welch tiefgehende Evolution die Grundlagen der physikalischen Weltanschauung in den letzten Jahren durchgemacht haben.

Die Literatur der hierhergehörigen Fragen wird später angegeben werden.

§ 3. Allgemeine Bemerkungen über die gegenseitige Berührung von Körpern. Die gegenseitige Berührung von chemisch oder physikalisch verschiedenartigen Körpern bildet eine Elektrizitätsquelle. Die Frage, ob diese Berührung von irgend einer anderen Erscheinung begleitet sein muß, z. B. von einer chemischen Reaktion, einem Diffundieren der Stoffe usw., damit sie zur Quelle des elektrischen Zustandes werde, diese Frage kann bis jetzt (1907) noch nicht als entschieden gelten. Wir wollen uns vorläufig von dieser Frage fernhalten und uns nur auf das beschränken, was unmittelbar, als Resultat des einen oder anderen Versuches, der Beobachtung zugänglich ist. Zunächst werden wir nur die Berührung von Leitern betrachten, d. h. hauptsächlich von Metallen und Lösungen von Salzen und Säuren; letztere hatten wir Elektrolyte genannt. Wir nehmen an, daß in solchen Lösungen eben jene Ionen vorhanden sind, deren Eigenschaften wir im vorhergehenden Paragraphen behandelt hatten.

Bei der Berührung zweier Leiter, welche aus den Substanzen A und B bestehen, werden beide elektrisiert, und zwar ungleichnamig. Ihre Potentiale sind ungleich, d. h. alle Punkte des Körpers A haben das eine, alle Punkte des Körpers B das andere Potential. Mit anderen Worten: an allen Punkten der Berührungsfläche S der Körper A und B ist ein Potentialsprung vorhanden. Die Größe dieses Sprunges hängt weder von der Form, noch von den Dimensionen der Körper A und B, weder von der Größe, noch von der Form ihrer Berührungsfläche S ab. Endlich ist sie auch von dem zufälligen elektrischen Zustande des aus beiden Körpern gebildeten Systems unabhängig, d. h. von dem Potential eines der Körper. Sie hängt ausschließlich von der chemischen Zusammensetzung und dem physikalischen Zustande beider Körper ab. Die Ursache für das Auftreten der Potentialdifferenz werden wir elektromotorische Kraft nennen und die Annahme machen, daß sie in der Berührungsfläche S wirkt. Als Maß für dieselbe werden wir die Größe der Potentialdifferenz der Körper A und B annehmen. Bezeichnet man sie mit E, die Potentiale der Körper A und B aber mit V_1 und V_2, so erhält man die numerische Gleichung

$$E = V_1 - V_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Als Richtung der elektromotorischen Kraft nimmt man die Richtung vom Körper mit kleinerem, zum Körper mit größerem Poten-

tial an, d. h. von B nach A, wenn $V_1 > V_2$ ist. Die Größe E der elektromotorischen Kraft werden wir symbolisch auch mit $A \mid B$ bezeichnen, wo A und B die chemischen Symbole der sich berührenden Substanzen sein können. So soll z. B. $ZnSO_4 \mid Zn$ die elektromotorische Kraft oder die Potentialdifferenz einer Lösung von Zinksulfat und von Zink, welches zum Teil in diese Lösung eintaucht, bezeichnen. Hierbei bezeichnet das Zeichen $A \mid B$ immer das Potential des Körpers A, von welchem das Potential des Körpers B abgezogen ist; hieraus folgt also

$$A \mid B = -B \mid A \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

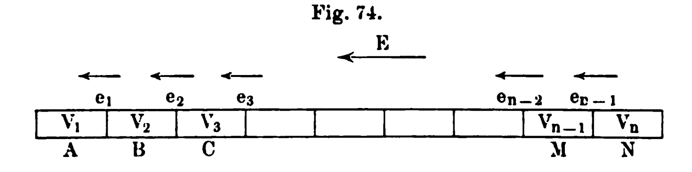
Die Tatsache, daß ein Potentialsprung vorhanden ist, kann durch das Vorhandensein einer elektrischen Doppelschicht längs der ganzen Berührungsfläche S erklärt werden. Formel (47, d), S. 98, zeigt uns, daß das Moment ω dieser Schicht gleich

$$\omega = \frac{1}{4\pi}(V_1 - V_2) = \frac{1}{4\pi} E \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

ist. In der Tat hat man anzunehmen, daß die Ladungen der einander berührenden Körper A und B fast vollständig an der Fläche S entlang angeordnet sind; auf den übrigen freien Teilen der Flächen A und B befinden sich verhältnismäßig geringe Teile dieser Ladungen.

Gehen wir zur Betrachtung einer Kette von einander berührenden Körpern $A, B, C \ldots M, N$ über, die in Fig. 74 schematisch dargestellt

Fig. 74.



ist. Wir nehmen an, daß alle Teile der Kette die gleiche Temperatur haben. Die elektromotorischen Kräfte, welche zwischen den benachbarten Körpern wirken, wollen wir mit $e_1, e_2, e_3 \ldots e_{n-2}, e_{n-1}$, bezeichnen, wobei n die Anzahl aller Körper sein mag. Es seien V_1, $V_2, V_3 \ldots V_n$ die Potentiale der Körper, dann ist

$$e_1 = V_1 - V_2 = A \mid B;\ e_2 = V_2 - V_3 = B \mid C; \ldots e_{n-1} = V_{n-1} - V_n = M \mid N.$$

Diese Größen können zum Teil positiv, zum Teil negativ sein. Die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in den Berührungsflächen der Kette wirken, werden wir die elektromotorische Kraft der Kette nennen. Bezeichnet man sie mit E, so ist $E = \Sigma e_k$ oder, wenn man für e_k seinen Wert einsetzt,

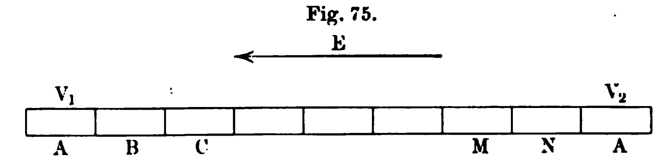
$$E = A \mid B + B \mid C + \cdots + M \mid N = \Sigma e_k = V_1 - V_n \quad . \quad (10)$$

Die elektromotorische Kraft einer Kette ist gleich der Potentialdifferenz ihrer Enden; sie ist auch gleich der Summe

der Potentialsprünge, welche in der Kette auftreten. Ihre Richtung verläuft von dem Ende, dessen Potential das kleinere ist, zum Ende, dessen Potential das größere ist, so daß sie sich gewissermaßen dem Potentialausgleiche widersetzt, welcher beim Strömen der positiven Elektrizität in entgegengesetzter Richtung erfolgen muß.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo die Endsubstanzen der Kette die gleichen sind, d. h. wo die Kette aus den Substanzen $A, B, C \ldots M, N, A$ (Fig. 75) besteht. Eine solche

Fig. 75.



Reihe einander berührender Substanzen wollen wir als eine regelrecht geöffnete Kette bezeichnen. Die Potentiale der Enden, d. h. der beiden Körper A, wollen wir jetzt mit V_1 und V_2 bezeichnen; es ist dann

$$E = V_1 - V_2 = A|B + B|C + \ldots M|N + N|A \quad . \quad . \quad (11)$$

Eine Kombination dieser Art muß offenbar aus wenigstens drei Substanzen (A, B, C) und vier Körpern (A, B, C, A) bestehen, d. h. aus drei Paaren $A|B + B|C + C|A$, da bei nur zwei Substanzen die Kette ABA immer $A|B + B|A = 0$ gibt, vgl. (8). Das Studium der regelrecht geöffneten Ketten lehrt, daß alle Leiter in zwei Klassen eingeteilt werden müssen.

I. Die Leiter der ersten Klasse besitzen folgende Eigenschaft: die elektromotorische Kraft einer regelrecht offenen Kette, die aus Leitern der ersten Klasse besteht, ist gleich Null. Formel (11) gibt $V_1 = V_2$; die aus gleichen Substanzen bestehenden Enden haben das gleiche Potential, unabhängig von der Zahl und Art der dazwischen befindlichen Leiter, falls sie nur alle zur ersten Klasse gehören.

Zu den Leitern der ersten Klasse gehören alle Metalle, sowie auch andere feste Leiter: Kohle, einige feste Mineralien, Oxyde, z. B. Mangansuperoxyd usw. Es ist z. B.

$$Fe|Cu + Cu|Al + Al|Sn + Sn|Ag + Ag|Zn + Zn|Fe = 0.$$

Hat man nur drei Substanzen, so ist

$$A|B + B|C + C|A = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11.a)$$

Hieraus folgt, vgl. (8),

$$A|B + B|C = A|C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

z. B.

$$Zn|Fe + Fe|Cu = Zn|Cu.$$

Formel (12) drückt das Voltasche Gesetz aus: Die Summe der elektromotorischen Kräfte $A|B + B|C$ ist gleich der elektromotorischen Kraft $A|C$. Da $E = 0$ ist, so gibt der allgemeinere Ausdruck (11) für die Leiter erster Klasse

$$A|B + B|C + C|D + \cdots + M|N = A|N \quad . \qquad (12, a)$$

was sich übrigens auch auf Grund von Formel (12) unmittelbar ergibt, da $A|B + B|C = A|C$, $A|C + C|D = A|D$ usw., z. B.

$$\mathrm{Zn}|\mathrm{Ag} + \mathrm{Ag}|\mathrm{Mg} + \mathrm{Mg}|\mathrm{Fe} + \mathrm{Fe}|\mathrm{Cu} = \mathrm{Zn}|\mathrm{Cu}.$$

Formel (12, a) zeigt, daß die Potentialdifferenz zweier Leiter erster Klasse, die bei ihrer unmittelbaren Berührung entsteht, sich nicht ändert, falls man zwischen sie eine beliebige Anzahl anderer Leiter erster Klasse bringt. Im ersten Falle hat man beispielsweise die Potentiale V_1 und V_2, im zweiten Falle die Potentiale V_1, V', V'', V''', ... V_2, wo V', V'', V''' die verschiedenen Potentiale der dazwischenliegenden Körper sind, die sowohl größer, als auch kleiner als die Potentiale V_1 und V_2 sein können.

Nehmen wir an, es seien $A|B$ und $A|C$ positive Größen. Formel (12) zeigt, daß $B|C$ eine positive Größe sein muß, falls $A|B$ kleiner als $A|C$ ist, d. h. daß in der Reihe der Körper A, B, C ein jeder Körper ein höheres Potential erhält, wenn er einen der auf ihn folgenden Körper berührt: $B|C > 0$, aber $B|A < 0$; ferner, daß die Potentialdifferenz um so größer ist, je weiter die Körper voneinander in dieser Reihe abstehen: $A|C > A|B$ und $A|C > B|C$. Es ist leicht, dies Resultat zu verallgemeinern.

Alle Leiter erster Klasse können in eine Reihe derart angeordnet werden, daß ein jeder von ihnen das größere Potential erhält bei Berührung mit einem der folgenden und das kleinere Potential bei Berührung mit einem der vorhergehenden Körper aus dieser Reihe. Bringt man einen bestimmten Körper in Berührung mit verschiedenen Körpern, so wird die Potentialdifferenz um so größer, je weiter der zweite Körper in der Reihe vom ersten absteht.

Man nennt eine solche Reihe eine Voltasche Reihe (Spannungsreihe). Bezeichnet man die Voltasche Reihe symbolisch in folgender Weise:

$$A, B, C, D \ldots M, N, P \ldots X, Y, Z,$$

so ist beispielsweise $C|D < C|M < C|P < C|X < C|Z$; ferner ist $D|B < 0$, $D|M > 0$, $D|Y > 0$, $N|D < 0$, $N|X > 0$ usw.

II. Die Leiter zweiter Klasse gehorchen dem Voltaschen Gesetze nicht und können nicht in eine Voltasche Reihe gebracht werden. Zu den Leitern zweiter Klasse gehören alle Elektrolyte, d. h. beispielsweise die Lösungen von Säuren und Salzen, geschmolzene Salze und Säuren usw. Man nimmt an, daß in ihnen

Das Äquivalentgewicht		
eines k-wertigen Elementes	ist gleich $\frac{1}{k}$	des Atomgewichts des Elementes,
einer k-wertigen Atomgruppe		der Summe der Atomgewichte der Gruppe,
einer Verbindung, die in k-wertige Ionen zerfällt		des Molekulargewichtes der Verbindung.

Danach sind die Äquivalentgewichte z. B.: $\frac{1}{2}O = 8$, $\frac{1}{2}Ca = 20{,}02$, $\frac{1}{2}SO_4 = 48{,}03$, $\frac{1}{2}CO_3 = 30{,}0$, $\frac{1}{2}H_2SO_4 = 49{,}04$, $\frac{1}{2}CuSO_4 = 79{,}83$; ferner $\frac{1}{2}Na_2CO_3$, $\frac{1}{2}MgCl_2$, $\frac{1}{2}K_2S$, $\frac{1}{2}BaN_2O_6$, $\frac{1}{2}Ca(C_2H_3O_2)_2$, $\frac{1}{2}MgCrO_4$, $\frac{1}{2}Ca(MnO_4)_2$; $\frac{1}{3}H_3PO_4$, $\frac{1}{3}Na_3AsO_3$, $\frac{1}{4}Na_4P_2O_7$, $\frac{1}{5}Na_5JO_6$, $\frac{1}{6}Al_2Cl_6$, $\frac{1}{6}Cr_2(SO_4)_3$, $\frac{1}{6}Fe_2Cl_6$ usw. Kürzer ausgedrückt: das Äquivalentgewicht wird immer für ein einwertiges Atom (H, Cl usw.) oder für eine einwertige Gruppe berechnet. Demgemäß ist z. B. für CuCl das Äquivalentgewicht gleich dem Molekulargewichte, für $CuCl_2$ jedoch stellt es die Hälfte des letzteren dar; dasselbe gilt für den Fall, daß man die Formel der ersten Verbindung in der Form Cu_2Cl_2 schreibt.

7. Als Grammäquivalent einer gegebenen Substanz bezeichnet man diejenige Anzahl Gramme dieser Substanz, welche gleich dem Äquivalentgewichte ist. Aus dem Vorhergehenden ersieht man, daß das Grammäquivalent nur für solche Verbindungen gleich dem Grammmolekül ist, die in einwertige Ionen zerfallen, also z. B. für HCl, KBr, NH_4Cl, HNO_3, $LiClO_3$ usw. Das Grammäquivalent des Sauerstoffs wiegt 8 g, des Kupfersulfats 79,83 g usf., entsprechend den Äquivalentgewichten.

8. Nach dem Avogadroschen Gesetze enthalten gleiche Gasvolumina bei gleicher Temperatur und Druck die gleiche Anzahl von Molekülen. Bezeichnen wir mit n die Anzahl Moleküle in 1 ccm bei 0° und 760 mm Druck. In Bd. I hatten wir die Zahl

$$n = 2 \,.\, 10^{19} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

angegeben. Übrigens geben verschiedene Autoren Zahlen, die von der obigen recht stark abweichen. Da die Dichte der Gase dem Molekulargewichte proportional ist, so ist klar, daß ein Grammolekül eines Gases, also beispielsweise 2 g H_2, 32 g O_2, 30 g NO, 44 g CO_2 bei gleicher Temperatur und Druck immer das gleiche Volumen einnimmt, also die gleiche Anzahl Moleküle enthält, die wir mit N bezeichnen wollen. Da 1 g H_2 bei 0° und 760 mm ein Volumen von 11165 ccm einnimmt, so enthält demnach ein Grammolekül eines Gases, also überhaupt einer jeden Substanz

$$N = 4{,}5 \,.\, 10^{23} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Moleküle. Diese Zahl zeigt auch, wieviel Atome, d. h. Ionen in einem Grammäquivalente Wasserstoff (1 g), sowie überhaupt einer jeden einwertigen Gruppe oder Verbindung enthalten sind, die aus

einwertigen Ionen besteht. Bei der Ionisierung eines Grammäquivalents einer aus einwertigen Ionen bestehenden Verbindung erhält man N Ionen der einen und anderen Art.

Ein anderes Resultat jedoch erhält man beispielsweise für den Sauerstoff: ein Grammolekül, d. h. 32 g Sauerstoff enthalten N Moleküle, ein Grammäquivalent, d. h. 8 g enthalten $\frac{1}{2} N$ Atome oder Ionen O. Die oben angeführten Beispiele zeigen, daß bei der Ionisierung eines Grammäquivalents $CuSO_4$, BaN_2O_6, $MgCrO_4$ usw. $\frac{1}{2} N$ Ionen der einen und anderen Art erhalten werden. Bei Ionisierung eines Grammäquivalentes Na_2CO_3, d. h. von $\frac{1}{2} Na_2CO_3$, erhält man N Ionen Na und $\frac{1}{2} N$ Ionen CO_3; H_3AsO_4 gibt N Ionen H und $\frac{1}{3} N$ Ionen AsO_3; Al_2Cl_6 gibt $\frac{1}{3} N$ Ionen Al und N Ionen Cl.

Also man erhält bei der Ionisierung eines Grammäquivalentes einer Verbindung oder eines Elementes (z. B. H_2, O_2, Cl_2 usw.) $\frac{1}{k} N$ Ionen von bestimmter Art, falls dies Ion k-wertig ist, d. h. N einwertige Ionen, $\frac{1}{2} N$ zweiwertige Ionen usf.

§ 2. Die elektrischen Eigenschaften der Ionen. Elektronen. Wie bereits erwähnt wurde, zerfallen viele gelöste Substanzen in Ionen. Es unterliegt keinem Zweifel, daß auch Gase unter verschiedenen Umständen Ionisierung erfahren. Endlich nehmen viele Forscher an, daß auch die Moleküle fester Körper, z. B. die Moleküle der Metalle, in Ionen zerfallen können; dieser Gedanke ist zuerst von Giese (1889) weiter entwickelt worden.

Die Ionisierung einer gelösten Substanz hängt in hohem Grade vom Lösungsmittel ab. Nernst und J. J. Thomson (1894) finden, daß die Ionisierungsfähigkeit eines Lösungsmittels um so größer ist, je größer seine Dielektrizitätskonstante K ist; den größten Wert von K hat das Wasser ($K = 80$) und die größte Ionisierung findet man bei wässerigen Lösungen.

Der modernen Lehre von den Ionen liegt die Annahme zugrunde, daß jedes Ion mit einer gewissen Elektrizitätsmenge verbunden ist. Hat ein Ion positive Ladung, so heißt es Kation, ist seine Ladung negativ, so heißt es Anion. Zu den Anionen gehören Cl, Br, J, Fl, OH, NO_2, CN, NO_3, ClO_3, ClO_4, SO_4, SeO_4 usw. Zu den Kationen gehören der Wasserstoff, die Metalle, NH_4, PH_4, einige organische Derivate von NH_4, PH_4 usw. Bei der Ionisierung eines Moleküls bildet sich stets ein Anion und Kation, die gleiche Ladungen besitzen. Bewegen sich die Ionen einer gelösten Substanz, so bewegen sich mit ihnen auch ihre elektrischen Ladungen. Man nimmt an, daß außer der Bewegung der Elektrizität, welche durch die ihren Ort verändernden Ionen hervorgerufen wird, keinerlei andere Bewegung der Elektrizität in Lösungen

existiert. Es kann daher die Ionenwanderung in den Lösungen nicht als Folge des Hindurchströmens der Elektrizität durch die Lösung angesehen werden, da ja in der Ionenbewegung das Wesen dieses Elektrizitätsdurchganges besteht. Es sei noch bemerkt, daß sich die Anionen und Kationen immer in entgegengesetzten Richtungen bewegen, natürlich, wenn außer der regellosen Bewegung der Ionen nach allen Seiten eine bestimmte vorherrschende Richtung in der Ionenbewegung vorhanden ist. Die experimentellen Untersuchungen, denen wir uns später zuwenden werden, haben zu folgendem Fundamentalsatze geführt:

Jedes Grammäquivalent jedes beliebigen Ions enthält eine und dieselbe Menge F positiver oder negativer Elektrizität, die gleich

$$\left.\begin{aligned} F &= 96\,540 \text{ Coulombs;} \\ F &= 9654 \text{ el.-mg. C.G.S.-Einh.} = 2{,}896 \cdot 10^{14} \text{ el.-st. C.G.S.-Einh.} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ist. Man könnte diese Elektrizitätsmenge die elektrochemische Einheit der Elektrizitätsmenge nennen. So sind z. B. 1,008 g H, 35,45 g Cl, 17,01 g OH, 62,04 g NO_3, 8 g O usw. an F gebunden, wenn H, Cl und O nur aus Ionen bestehen.

Die Gewichtsmenge eines Ions, welche an 1 Coulomb gebunden ist, heißt das elektrochemische Äquivalent des Ions. Dieselbe ist offenbar gleich $\frac{1}{96540}$ Grammäquivalent; der Bequemlichkeit halber wird sie jedoch in Milligrammen ausgedrückt. So ist das elektrochemische Äquivalent des H = 0,01044 mg, Ag = 1,118 mg, Cl = 0,3673 mg, OH = 0,1762 mg, $\frac{1}{2}$Cu = 0,3294 mg, $\frac{1}{2}$Zn = 0,3388 mg, $\frac{1}{2}$O = 0,08288 mg, $\frac{1}{2}SO_4$ = 0,4976 mg usw.

Wie bereits erwähnt war, enthält ein Grammäquivalent jedes einwertigen Ions ein und dieselbe Anzahl N von Ionen; da nun aber dasselbe Grammäquivalent an die Elektrizitätsmenge F gebunden ist, so enthält jedes einzelne einwertige Ion, z. B. H, K, Na, Ag, Cl, OH, NO_3 usw., ein und dieselbe Elektrizitätsmenge $e = F:N$. Setzt man

$$N = 4{,}4 \cdot 10^{23}, \text{ so ist } e = \frac{F}{N} = 2{,}2 \cdot 10^{-19} \text{ Coulombs} = 2{,}2 \cdot 10^{-20}$$
$$\text{el.-mg. C. G. S.-Einheiten} = 6{,}6 \cdot 10^{-10} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten.}$$

Zahlreiche Untersuchungen jedoch, die wir später kennen lernen werden, lassen die Zahl

$$\left.\begin{aligned} e = \frac{F}{N} &= 10^{-19} \text{ Coulombs} = 10^{-20} \text{ el.-mg. C. G. S.-Einheiten} \\ &= 3 \cdot 10^{-10} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

als gegenwärtig wahrscheinlichste erscheinen. Aus ihr erhält man umgekehrt $N = 10^{24}$, welche Zahl innerhalb der von verschiedenen Forschern auf Grund der kinetischen Gastheorie gefundenen Zahlen liegt (Bd. I). Die Ladung e stellt die elementare Ladung oder das

Elektrizitätsatom dar; es ist dies das Elektron, das wir bereits auf S. 64 erwähnt hatten. Richarz, Stoney, J. J. Thomson und Planck haben für e Werte erhalten, welche von dem hier angegebenen mehr oder weniger abweichen. Der erste Versuch zur Bestimmung dieser Größe ist, wie es scheint, von Budde (1885) gemacht worden. Planck (1902) findet

$$e = 4{,}69 \cdot 10^{-10} \text{ el.-st. C.G.S.-Einheiten} \quad . \quad . \quad . \quad (4,a)$$

Es ist klar, daß ein zweiwertiges Ion, z. B. Ba, Zn, SO_4, CO_3 usw. an zwei Elektronen gebunden ist; ein dreiwertiges, z. B. PO_4 (aus H_3PO_4) an drei Elektronen usw. Die Valenz eines Ions wird durch die Anzahl Elektronen bestimmt, die mit ihm verbunden sind. Bezeichnet man mit m die in Grammen ausgedrückte Masse des Ions, mit e die in el.-mg. C.G.S.-Einheiten ausgedrückte Ladung, so erhält man für ein Wasserstoffatom den Ausdruck $m = 1 : N = 10^{-24}$ g, oder angenähert

$$\frac{e}{m} = 10^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Das positive Elektron bezeichnet man bisweilen mit dem Zeichen $\oplus$, das negative mit $\ominus$. Ein Ion hat man als eine Verbindung eines materiellen Atoms mit einem Elektron aufzufassen. Werner hat auf Fälle hingewiesen, wo in einer bestimmten Atomgruppe ein Atom nach dem anderen durch ein Elektron ersetzt werden kann und hierbei ein elektronegatives Atom, z. B. Cl, durch ein positives Elektron und umgekehrt, denn in der Verbindung $Cl\ominus$ vertritt das Cl-Atom gewissermaßen das positive Elektron $\oplus$ des neutralen Moleküls $\oplus\ominus$, das gar keine Materie besitzt. Ein Ion stellt danach ein Atom oder eine Atomgruppe dar, deren Valenzen mit Elektronen gesättigt sind, so daß man sogar schreiben könnte

$$Cl - \ominus \qquad Ca{<}^{\oplus}_{\oplus} \qquad SO_4{<}^{\ominus}_{\ominus} \qquad AsO_3{<}^{\ominus}_{\ominus}{}_{\ominus}$$

In neuester Zeit ist die Frage aufgeworfen worden, wie es sich mit der Maße und sogar mit dem Gewichte eines Elektrons verhält: die ersten Versuche in dieser Richtung hat Lieben (1900) gemacht.

Befinden sich die Ionen unter der Einwirkung elektrischer Kräfte, d. h. bildet sich in der Lösung ein elektrisches Feld aus, so beginnen sie sich in der Richtung der wirkenden Kräfte zu bewegen. Hierbei erfahren die Ionen zweifellos einen sehr großen Widerstand, den man als Folge einer Art von Reibung der Ionen an den Molekülen des Lösungsmittels und an anderen Ionen betrachten kann. Infolgedessen sind die Ionengeschwindigkeiten nicht groß. Die größte Geschwindigkeit hat das Wasserstoffion; von den Kationen bewegen sich die Metalle

existiert. Es kann daher die Ionenwanderung in den Lösungen nicht als Folge des Hindurchströmens der Elektrizität durch die Lösung angesehen werden, da ja in der Ionenbewegung das Wesen dieses Elektrizitätsdurchganges besteht. Es sei noch bemerkt, daß sich die Anionen und Kationen immer in entgegengesetzten Richtungen bewegen, natürlich, wenn außer der regellosen Bewegung der Ionen nach allen Seiten eine bestimmte vorherrschende Richtung in der Ionenbewegung vorhanden ist. Die experimentellen Untersuchungen, denen wir uns später zuwenden werden, haben zu folgendem Fundamentalsatze geführt:

Jedes Grammäquivalent jedes beliebigen Ions enthält eine und dieselbe Menge F positiver oder negativer Elektrizität, die gleich

$$\left.\begin{array}{c} F = 96\,540 \text{ Coulombs;} \\ F = 9654 \text{ el.-mg. C.G.S.-Einh.} = 2{,}896 \,.\, 10^{14} \text{ el.-st. C.G.S.-Einh.} \end{array}\right\} \quad (3)$$

ist. Man könnte diese Elektrizitätsmenge die elektrochemische Einheit der Elektrizitätsmenge nennen. So sind z. B. 1,008 g H, 35,45 g Cl, 17,01 g OH, 62,04 g NO_3, 8 g O usw. an F gebunden, wenn H, Cl und O nur aus Ionen bestehen.

Die Gewichtsmenge eines Ions, welche an 1 Coulomb gebunden ist, heißt das elektrochemische Äquivalent des Ions. Dieselbe ist offenbar gleich $\frac{1}{96540}$ Grammäquivalent; der Bequemlichkeit halber wird sie jedoch in Milligrammen ausgedrückt. So ist das elektrochemische Äquivalent des H = 0,01044 mg, Ag = 1,118 mg, Cl = 0,3673 mg, OH = 0,1762 mg, $\frac{1}{2}$ Cu = 0,3294 mg, $\frac{1}{2}$ Zn = 0,3388 mg, $\frac{1}{2}$ O = 0,08288 mg, $\frac{1}{2} SO_4$ = 0,4976 mg usw.

Wie bereits erwähnt war, enthält ein Grammäquivalent jedes einwertigen Ions ein und dieselbe Anzahl N von Ionen; da nun aber dasselbe Grammäquivalent an die Elektrizitätsmenge F gebunden ist, so enthält jedes einzelne einwertige Ion, z. B. H, K, Na, Ag, Cl, OH, NO_3 usw., ein und dieselbe Elektrizitätsmenge $e = F:N$. Setzt man

$$N = 4{,}4 \,.\, 10^{23}, \text{ so ist } e = \frac{F}{N} = 2{,}2 \,.\, 10^{-19} \text{ Coulombs} = 2{,}2 \,.\, 10^{-20}$$

$$\text{el.-mg. C. G. S.-Einheiten} = 6{,}6 \,.\, 10^{-10} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten.}$$

Zahlreiche Untersuchungen jedoch, die wir später kennen lernen werden, lassen die Zahl

$$\left.\begin{array}{l} e = \dfrac{F}{N} = 10^{-19} \text{ Coulombs} = 10^{-20} \text{ el.-mg. C. G. S.-Einheiten} \\ \qquad = 3 \,.\, 10^{-10} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten} \end{array}\right\} \quad (4)$$

als gegenwärtig wahrscheinlichste erscheinen. Aus ihr erhält man umgekehrt $N = 10^{24}$, welche Zahl innerhalb der von verschiedenen Forschern auf Grund der kinetischen Gastheorie gefundenen Zahlen liegt (Bd. I). Die Ladung e stellt die elementare Ladung oder das

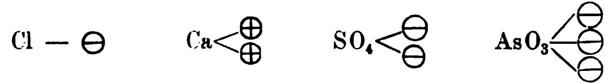
Elektrizitätsatom dar; es ist dies das Elektron, das wir bereits auf S. 64 erwähnt hatten. Richarz, Stoney, J. J. Thomson und Planck haben für e Werte erhalten, welche von dem hier angegebenen mehr oder weniger abweichen. Der erste Versuch zur Bestimmung dieser Größe ist, wie es scheint, von Budde (1885) gemacht worden. Planck (1902) findet

$$e = 4{,}69 \cdot 10^{-10} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten} \quad . \quad . \quad . \quad (4, a)$$

Es ist klar, daß ein zweiwertiges Ion, z. B. Ba, Zn, SO_4, CO_3 usw. an zwei Elektronen gebunden ist; ein dreiwertiges, z. B. PO_4 (aus H_3PO_4) an drei Elektronen usw. Die Valenz eines Ions wird durch die Anzahl Elektronen bestimmt, die mit ihm verbunden sind. Bezeichnet man mit m die in Grammen ausgedrückte Masse des Ions, mit e die in el.-mg. C. G. S.-Einheiten ausgedrückte Ladung, so erhält man für ein Wasserstoffatom den Ausdruck $m = 1 : N = 10^{-24}$ g, oder angenähert

$$\frac{e}{m} = 10^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Das positive Elektron bezeichnet man bisweilen mit dem Zeichen $\oplus$, das negative mit $\ominus$. Ein Ion hat man als eine Verbindung eines materiellen Atoms mit einem Elektron aufzufassen. Werner hat auf Fälle hingewiesen, wo in einer bestimmten Atomgruppe ein Atom nach dem anderen durch ein Elektron ersetzt werden kann und hierbei ein elektronegatives Atom, z. B. Cl, durch ein positives Elektron und umgekehrt, denn in der Verbindung Cl$\ominus$ vertritt das Cl-Atom gewissermaßen das positive Elektron $\oplus$ des neutralen Moleküls $\oplus\ominus$, das gar keine Materie besitzt. Ein Ion stellt danach ein Atom oder eine Atomgruppe dar, deren Valenzen mit Elektronen gesättigt sind, so daß man sogar schreiben könnte



In neuester Zeit ist die Frage aufgeworfen worden, wie es sich mit der Maße und sogar mit dem Gewichte eines Elektrons verhält: die ersten Versuche in dieser Richtung hat Lieben (1900) gemacht.

Befinden sich die Ionen unter der Einwirkung elektrischer Kräfte, d. h. bildet sich in der Lösung ein elektrisches Feld aus, so beginnen sie sich in der Richtung der wirkenden Kräfte zu bewegen. Hierbei erfahren die Ionen zweifellos einen sehr großen Widerstand, den man als Folge einer Art von Reibung der Ionen an den Molekülen des Lösungsmittels und an anderen Ionen betrachten kann. Infolgedessen sind die Ionengeschwindigkeiten nicht groß. Die größte Geschwindigkeit hat das Wasserstoffion; von den Kationen bewegen sich die Metalle

angenähert fünfmal langsamer als H. Von den Anionen hat das Hydroxyl OH die größte Geschwindigkeit; sie ist ungefähr gleich 0,6 der Geschwindigkeit von H; Cl, Br, J besitzen ungefähr dieselbe Geschwindigkeit wie K und Na. Absolute Werte für die Geschwindigkeiten haben zuerst F. Kohlrausch, Lodge, Cattaneo u. a. gefunden. Beträgt das Potentialgefälle 1 Volt pro Centimeter, so betragen die Ionengeschwindigkeiten (in H_2O bei 18°):

Kationen		Anionen.	
Für H	0,003 00 $\frac{cm}{sec}$	Für OH	0,001 57 $\frac{cm}{sec}$
„ K	0,000 57 „	„ Cl	0,000 59 „
„ NH_4	0,000 55 „	„ NO_3	0,000 53 „
„ Ag	0,000 46 „	„ ClO_3	0,000 46 „
„ Mg	0,000 29 „	„ $C_2H_3O_2$	0,000 29 „

Da man die Ladung eines Ions kennt, so lassen sich leicht die Kräfte berechnen, unter deren Einwirkung die Ionenbewegung erfolgt. Es erweist sich, daß diese Kräfte sehr groß sind. Um 1 g Wasserstoffionen mit 1 cm Geschwindigkeit pro Sekunde zu transportieren, ist eine Kraft von 330 Mill. Kilogramm erforderlich. Diese Zahl ist von derselben Ordnung wie die Zahl, die wir in Bd. III für die bei der Diffusion wirkenden Kräfte erhalten hatten. Für jedes einzelne Wasserstoffion findet man eine Kraft von etwa $7 . 10^{-10}$ mg.

Es war bereits erwähnt worden, daß man auch in Gasen das Vorhandensein von Ionen anzunehmen hat. Die Ionisierung der Gase nimmt zu, unter der Einwirkung elektrischer Kräfte, bei Durchgang der ultravioletten und „neuen" Strahlen durch die Gase, sowie unter gewissen anderen Verhältnissen. In Gasen, welche nicht sehr stark verdünnt sind, bilden die Ionen gewissermaßen Kerne, um die sich die nicht ionisierten Gasmoleküle, Wasserdampfteilchen, Staubpartikel usw. ansammeln, wodurch die Beweglichkeit der Ionen in hohem Maße vermindert wird. In den höheren Schichten der Atmosphäre ist die Luft stärker ionisiert als in den niedrigeren. Dem Anscheine nach sind die negativen Ionen in höherem Maße als die positiven befähigt, Zentren zur Ansammlung von Partikeln, Wassertröpfchen usw. zu bilden.

Im elektrischen Felde erfolgt eine Bewegung der Gasionen, wobei sich die negativen Ionen im allgemeinen schneller bewegen als die positiven. Bei einem Potentialgefälle von 1 Volt pro Centimeter bewegen sich die Ionen nicht verdünnter Luft mit Geschwindigkeiten, die zwischen 1 und 2 cm pro Sekunde betragen. Die Geschwindigkeit der Wasserstoffionen (bei 760 mm Druck) ist ungefähr gleich 5 cm pro Sekunde.

Wir werden in der Folge eine ganze Reihe von Erscheinungen näher kennen lernen, bei denen man es mit Strömen von sich schnell bewegenden Elektronen zu tun hat. Hierher gehören einige elektrische Erscheinungen, die man in verdünnten Gasen beobachtet (z. B.

Kathodenstrahlen), sowie gewisse, von den radioaktiven Substanzen ausgesandte Strahlen. Von besonders großem Interesse ist die Frage nach der Größe der Ladung, welche ein einzelnes Teilchen einer solchen Strömung besitzt, sowie nach der Größe der Masse m der wägbaren Materie, mit welcher diese Ladung verbunden ist. Die Untersuchungen von J. J. Thomson u. a. haben zunächst das überaus wichtige Resultat ergeben, daß die Größe der gesuchten Ladung gerade gleich derjenigen Elektrizitätsmenge ist, die wir oben mit e bezeichnet hatten, vgl. (4), d. h., welche an ein Ion eines gelösten Elektrolyten gebunden ist und als Elektron bezeichnet wurde. Hieraus folgt die, man muß sagen universelle Bedeutung dieser Größe: sie stellt wirklich das Element der Elektrizitätsmenge dar, welcher vielleicht eine gewisse Einheitsspannung im Äther entspricht.

Das Verhältnis $\frac{e}{m}$ für Elektronenströme ist von vielen Forschern bestimmt worden, deren Arbeiten wir ebenfalls später betrachten werden. Sie fanden für $\frac{e}{m}$, falls e in el.-mg. Einheiten (S. 42) ausgedrückt ist, Werte, welche

$$\frac{e}{m} = 10^7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

nahekommen. Wie wir nun gesehen haben, ist, falls das Elektron in einer Lösung mit einem Wasserstoffatom verbunden ist, $e:m = 10^4$, vgl. (5). Da die Größe e in beiden Fällen die gleiche ist, so folgt daraus, daß in einem Elektronenstrome ein jedes Elektron an eine Menge ponderabler Materie gebunden ist, deren Masse ungefähr 1000mal kleiner ist als die eines Wasserstoffatoms. Die mit einer solchen Vorstellung verbundenen Schwierigkeiten wurden noch größer, als man fand, daß das Verhältnis $e:m$ von der Geschwindigkeit v abhängt, mit welcher sich die Elektronen bewegen: je größer v ist, um so größer ist auch die Masse m. Dieser Umstand hat einige Forscher auf den Gedanken gebracht, daß die Masse m, mit welcher verbunden das Elektron in den Strahlungen vorkommt, eine scheinbare Masse sei. Durch die Theorie von Abraham und die Versuche von Kaufmann (1903) findet sich dieser Gedanke bestätigt: demgemäß ist das Beharrungsvermögen, welches die Teile des Elektronenstromes zeigen, eine Folge der Rückwirkung des durch die bewegten Elektronen hervorgerufenen Magnetfeldes auf die Elektronen. Die Größe m ist demnach keine ponderable Masse, sondern eine „elektromagnetische Masse". Im Zusammenhange hiermit ist die Frage aufgeworfen worden, ob man nicht jede beliebige Masse m als etwas bloß scheinbares ansehen könne, das nur elektromagnetischen Charakter trägt. Man hat sich gefragt, ob man nicht die ganze Mechanik auf elektromagne-

tische Prinzipien zurückführen, aus ihr einen Teil der Elektrizitätslehre machen könne. Das bloße Auftreten eines solchen Gedankens zeigt, welch tiefgehende Evolution die Grundlagen der physikalischen Weltanschauung in den letzten Jahren durchgemacht haben.

Die Literatur der hierhergehörigen Fragen wird später angegeben werden.

§ 3. Allgemeine Bemerkungen über die gegenseitige Berührung von Körpern. Die gegenseitige Berührung von chemisch oder physikalisch verschiedenartigen Körpern bildet eine Elektrizitätsquelle. Die Frage, ob diese Berührung von irgend einer anderen Erscheinung begleitet sein muß, z. B. von einer chemischen Reaktion, einem Diffundieren der Stoffe usw., damit sie zur Quelle des elektrischen Zustandes werde, diese Frage kann bis jetzt (1907) noch nicht als entschieden gelten. Wir wollen uns vorläufig von dieser Frage fernhalten und uns nur auf das beschränken, was unmittelbar, als Resultat des einen oder anderen Versuches, der Beobachtung zugänglich ist. Zunächst werden wir nur die Berührung von Leitern betrachten, d. h. hauptsächlich von Metallen und Lösungen von Salzen und Säuren; letztere hatten wir Elektrolyte genannt. Wir nehmen an, daß in solchen Lösungen eben jene Ionen vorhanden sind, deren Eigenschaften wir im vorhergehenden Paragraphen behandelt hatten.

Bei der Berührung zweier Leiter, welche aus den Substanzen A und B bestehen, werden beide elektrisiert, und zwar ungleichnamig. Ihre Potentiale sind ungleich, d. h. alle Punkte des Körpers A haben das eine, alle Punkte des Körpers B das andere Potential. Mit anderen Worten: an allen Punkten der Berührungsfläche S der Körper A und B ist ein Potentialsprung vorhanden. Die Größe dieses Sprunges hängt weder von der Form, noch von den Dimensionen der Körper A und B, weder von der Größe, noch von der Form ihrer Berührungsfläche S ab. Endlich ist sie auch von dem zufälligen elektrischen Zustande des aus beiden Körpern gebildeten Systems unabhängig, d. h. von dem Potential eines der Körper. Sie hängt ausschließlich von der chemischen Zusammensetzung und dem physikalischen Zustande beider Körper ab. Die Ursache für das Auftreten der Potentialdifferenz werden wir elektromotorische Kraft nennen und die Annahme machen, daß sie in der Berührungsfläche S wirkt. Als Maß für dieselbe werden wir die Größe der Potentialdifferenz der Körper A und B annehmen. Bezeichnet man sie mit E, die Potentiale der Körper A und B aber mit V_1 und V_2, so erhält man die numerische Gleichung

$$E = V_1 - V_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

Als Richtung der elektromotorischen Kraft nimmt man die Richtung vom Körper mit kleinerem, zum Körper mit größerem Poten-

tial an, d. h. von B nach A, wenn $V_1 > V_2$ ist. Die Größe E der elektromotorischen Kraft werden wir symbolisch auch mit $A \mid B$ bezeichnen, wo A und B die chemischen Symbole der sich berührenden Substanzen sein können. So soll z. B. $ZnSO_4 \mid Zn$ die elektromotorische Kraft oder die Potentialdifferenz einer Lösung von Zinksulfat und von Zink, welches zum Teil in diese Lösung eintaucht, bezeichnen. Hierbei bezeichnet das Zeichen $A \mid B$ immer das Potential des Körpers A, von welchem das Potential des Körpers B abgezogen ist; hieraus folgt also

$$A \mid B = -B \mid A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

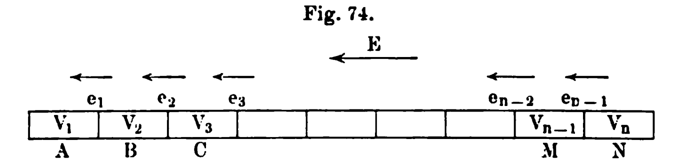
Die Tatsache, daß ein Potentialsprung vorhanden ist, kann durch das Vorhandensein einer elektrischen Doppelschicht längs der ganzen Berührungsfläche S erklärt werden. Formel (47, d), S. 98, zeigt uns, daß das Moment ω dieser Schicht gleich

$$\omega = \frac{1}{4\pi}(V_1 - V_2) = \frac{1}{4\pi} E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ist. In der Tat hat man anzunehmen, daß die Ladungen der einander berührenden Körper A und B fast vollständig an der Fläche S entlang angeordnet sind; auf den übrigen freien Teilen der Flächen A und B befinden sich verhältnismäßig geringe Teile dieser Ladungen.

Gehen wir zur Betrachtung einer Kette von einander berührenden Körpern $A, B, C \ldots M, N$ über, die in Fig. 74 schematisch dargestellt

Fig. 74.



ist. Wir nehmen an, daß alle Teile der Kette die gleiche Temperatur haben. Die elektromotorischen Kräfte, welche zwischen den benachbarten Körpern wirken, wollen wir mit $e_1, e_2, e_3 \ldots e_{n-2}, e_{n-1}$, bezeichnen, wobei n die Anzahl aller Körper sein mag. Es seien V_1, V_2, $V_3 \ldots V_n$ die Potentiale der Körper, dann ist

$$e_1 = V_1 - V_2 = A \mid B \colon e_2 = V_2 - V_3 = B \mid C \colon \ldots e_{n-1} = V_{n-1} - V_n = M \mid N.$$

Diese Größen können zum Teil positiv, zum Teil negativ sein. Die Summe der elektromotorischen Kräfte, welche in den Berührungsflächen der Kette wirken, werden wir die **elektromotorische Kraft der Kette** nennen. Bezeichnet man sie mit E, so ist $E = \Sigma e_k$ oder, wenn man für e_k seinen Wert einsetzt,

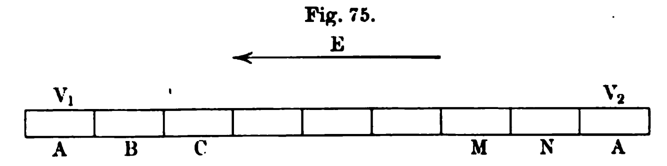
$$E = A \mid B + B \mid C + \cdots + M \mid N = \Sigma e_k = V_1 - V_n \quad . \quad (10)$$

Die elektromotorische Kraft einer Kette ist gleich der Potentialdifferenz ihrer Enden; sie ist auch gleich der Summe

der Potentialsprünge, welche in der Kette auftreten. Ihre Richtung verläuft von dem Ende, dessen Potential das kleinere ist, zum Ende, dessen Potential das größere ist, so daß sie sich gewissermaßen dem Potentialausgleiche widersetzt, welcher beim Strömen der positiven Elektrizität in entgegengesetzter Richtung erfolgen muß.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo die Endsubstanzen der Kette die gleichen sind, d. h. wo die Kette aus den Substanzen $A, B, C \ldots M, N, A$ (Fig. 75) besteht. Eine solche

Fig. 75.



Reihe einander berührender Substanzen wollen wir als eine regelrecht geöffnete Kette bezeichnen. Die Potentiale der Enden, d. h. der beiden Körper A, wollen wir jetzt mit V_1 und V_2 bezeichnen: es ist dann

$$E = V_1 - V_2 = A|B + B|C + \ldots M|N + N|A \quad . \quad . \quad (11)$$

Eine Kombination dieser Art muß offenbar aus wenigstens drei Substanzen (A, B, C) und vier Körpern (A, B, C, A) bestehen, d. h. aus drei Paaren $A|B + B|C + C|A$, da bei nur zwei Substanzen die Kette ABA immer $A|B + B|A = 0$ gibt, vgl. (8). Das Studium der regelrecht geöffneten Ketten lehrt, daß alle Leiter in zwei Klassen eingeteilt werden müssen.

I. Die Leiter der ersten Klasse besitzen folgende Eigenschaft: die elektromotorische Kraft einer regelrecht offenen Kette, die aus Leitern der ersten Klasse besteht, ist gleich Null. Formel (11) gibt $V_1 = V_2$; die aus gleichen Substanzen bestehenden Enden haben das gleiche Potential, unabhängig von der Zahl und Art der dazwischen befindlichen Leiter, falls sie nur alle zur ersten Klasse gehören.

Zu den Leitern der ersten Klasse gehören alle Metalle, sowie auch andere feste Leiter: Kohle, einige feste Mineralien, Oxyde, z. B. Mangansuperoxyd usw. Es ist z. B.

$$Fe|Cu + Cu|Al + Al|Sn + Sn|Ag + Ag|Zn + Zn|Fe = 0.$$

Hat man nur drei Substanzen, so ist

$$A|B + B|C + C|A = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11, a)$$

Hieraus folgt, vgl. (8),

$$A|B + B|C = A|C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

z. B.

$$Zn|Fe + Fe|Cu = Zn|Cu.$$

Formel (12) drückt das Voltasche Gesetz aus: Die Summe der elektromotorischen Kräfte $A|B + B|C$ ist gleich der elektromotorischen Kraft $A|C$. Da $E = 0$ ist, so gibt der allgemeinere Ausdruck (11) für die Leiter erster Klasse

$$A|B + B|C + C|D + \cdots + M|N = A|N \quad . \qquad (12, a)$$

was sich übrigens auch auf Grund von Formel (12) unmittelbar ergibt, da $A|B + B|C = A|C$, $A|C + C|D = A|D$ usw., z. B.

$$\mathrm{Zn}\,|\,\mathrm{Ag} + \mathrm{Ag}\,|\,\mathrm{Mg} + \mathrm{Mg}\,|\,\mathrm{Fe} + \mathrm{Fe}\,|\,\mathrm{Cu} = \mathrm{Zn}\,|\,\mathrm{Cu}.$$

Formel (12, a) zeigt, daß die Potentialdifferenz zweier Leiter erster Klasse, die bei ihrer unmittelbaren Berührung entsteht, sich nicht ändert, falls man zwischen sie eine beliebige Anzahl anderer Leiter erster Klasse bringt. Im ersten Falle hat man beispielsweise die Potentiale V_1 und V_2, im zweiten Falle die Potentiale $V_1, V', V'', V''', \ldots V_2$, wo V', V'', V''' die verschiedenen Potentiale der dazwischenliegenden Körper sind, die sowohl größer, als auch kleiner als die Potentiale V_1 und V_2 sein können.

Nehmen wir an, es seien $A|B$ und $A|C$ positive Größen. Formel (12) zeigt, daß $B|C$ eine positive Größe sein muß, falls $A|B$ kleiner als $A|C$ ist, d. h. daß in der Reihe der Körper A, B, C ein jeder Körper ein höheres Potential erhält, wenn er einen der auf ihn folgenden Körper berührt: $B|C > 0$, aber $B|A < 0$; ferner, daß die Potentialdifferenz um so größer ist, je weiter die Körper voneinander in dieser Reihe abstehen: $A|C > A|B$ und $A|C > B|C$. Es ist leicht, dies Resultat zu verallgemeinern.

Alle Leiter erster Klasse können in eine Reihe derart angeordnet werden, daß ein jeder von ihnen das größere Potential erhält bei Berührung mit einem der folgenden und das kleinere Potential bei Berührung mit einem der vorhergehenden Körper aus dieser Reihe. Bringt man einen bestimmten Körper in Berührung mit verschiedenen Körpern, so wird die Potentialdifferenz um so größer, je weiter der zweite Körper in der Reihe vom ersten absteht.

Man nennt eine solche Reihe eine Voltasche Reihe (Spannungsreihe). Bezeichnet man die Voltasche Reihe symbolisch in folgender Weise:

$$A, B, C, D \ldots M, N, P \ldots X, Y, Z,$$

so ist beispielsweise $C|D < C|M < C|P < C|X < C|Z$; ferner ist $D|B < 0$, $D|M > 0$, $D|Y > 0$, $N|D < 0$, $N|X > 0$ usw.

II. Die Leiter zweiter Klasse gehorchen dem Voltaschen Gesetze nicht und können nicht in eine Voltasche Reihe gebracht werden. Zu den Leitern zweiter Klasse gehören alle Elektrolyte, d. h. beispielsweise die Lösungen von Säuren und Salzen, geschmolzene Salze und Säuren usw. Man nimmt an, daß in ihnen

Ionen vorhanden sind und daß außer der Elektrizitätsbewegung, die durch die Ionenwanderung erfolgt, keine andere Elektrizitätsbewegung in ihnen vorhanden sein kann.

Bezeichnen wir irgendwelche Leiter der zweiten Klasse mit S, S_1, S_2 usw., Leiter erster Klasse mit A, B, C usw. Die genannte Grundeigenschaft der Elektrolyte wird dann durch folgende Formeln zum Ausdruck gebracht:

$$A|S + S|B \gtrless A|B$$

$$\left.\begin{aligned} E &= V_1 - V_2 = A|S + S|B + B|A \gtrless 0 \\ E &= V_1 - V_2 = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \gtrless 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad (13)$$

Hier sind V_1 und V_2 die Potentiale zweier gleichartiger Körper A, die sich an den beiden Enden regelrecht offener Ketten befinden; es versteht sich von selbst, daß die Größen E, V_1 und V_2 in den beiden symbolisch geschriebenen Reihen nicht die gleichen sind. Die Formeln (13) führen zu folgendem Ergebnis:

In einer regelrecht offenen Kette, in welcher Leiter zweiter Klasse, d. h. Elektrolyte, vorkommen, wirkt eine elektromotorische Kraft E, die von Null verschieden ist; sie ist gleich dem Potentialunterschiede der Enden dieser Kette. Ihre Richtung fällt mit der Richtung zusammen, in welcher die positiven Potentialsprünge überwiegen, d. h. die Sprünge nach oben oder, mit anderen Worten, E hat die Richtung von V_2 nach V_1, falls $V_2 < V_1$ ist.

Das Symbol $S_1 | S_2$ entspricht dem Falle, wo sich zwei Elektrolyte gegenseitig berühren; in der Praxis trennt man sie gewöhnlich voneinander durch eine poröse Scheidewand, die beispielsweise aus ungebranntem Ton besteht. Gewöhnlich benutzt man ein poröses Gefäß, das man in ein breiteres Glasgefäß stellt; in das erste bringt man den einen Elektrolyten, in das andere, d. h. rings um das poröse Gefäß, den anderen.

Eine regelrecht offene Kette, die aus einem oder zwei Leitern A, B der ersten Klasse und aus einem oder zwei Elektrolyten S, oder aus drei Elektrolyten besteht, heißt galvanisches Element. Ein solches Element kann nach einem der folgenden Schemen zusammengestellt sein:

1. Ein Leiter erster Klasse und zwei Elektrolyte:

$$E = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14,a)$$

2. Zwei Leiter erster Klasse und ein Elektrolyt:

$$E = A|S + S|B + B|A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14,b)$$

3. Zwei Leiter erster Klasse und zwei Elektrolyte:

$$E = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \quad . \quad (14,c)$$

4. Drei Elektrolyte:

$$E = S_1|S_2 + S_2|S_3 + S_3|S_1 \quad . \quad . \quad . \quad (14,d)$$

Zwei einander berührende Elektrolyte können auch repräsentiert werden durch zwei Lösungen ein und derselben Substanz, die sich durch ihre Konzentration voneinander unterscheiden. Solche Elemente nennt man Konzentrationsketten; im Falle des Typus (14, a) bestehen sie gewissermaßen nur aus zwei Substanzen.

In den oben angeführten Kombinationen ist E von Null verschieden, woraus man sieht, daß die Elektrolyte dem Voltaschen Gesetze nicht folgen. Man kann indes für die Kombination (14, b) eine Formel angeben, die ein dem Voltaschen analoges Gesetz ausdrückt. Denken wir uns drei Leiter A, B und C zu je zwei in ein und dieselbe Flüssigkeit S getaucht, und bezeichnen wir mit (A, B), (B, C) und (A, C) die elektromotorischen Kräfte dieser Leiterpaare. Es ist dann

$$\begin{aligned}(A, B) &= A \mid S + S \mid B + B \mid A\\ (B, C) &= B \mid S + S \mid C + C \mid B\\ (A, C) &= A \mid S + S \mid C + C \mid A\end{aligned}$$

Addiert man die beiden ersten Ausdrücke und beachtet, daß $B \mid S + S \mid B = 0$ ist und $C \mid B + B \mid A = C \mid A$, so erhält man

$$(A, B) + (B, C) = (A, C) \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

und hierdurch wird für ein System aus zwei Leitern erster Klasse und einem Elektrolyten ein Gesetz ausgedrückt, das dem Voltaschen Gesetze analog ist. Etwas ähnliches gilt auch für eine Kombination aus zwei Leitern erster Klasse mit zwei Elektro-

Fig. 76.

e_1	e_2	e_3	e_4	
A	S_1	S_2	B	A
V_1		← E		V_2

lyten, vgl. (14, c), wenn man voraussetzt, daß jeder der drei Leiter A, B, C in einen bestimmten, ihm entsprechenden Elektrolyten S_1, S_2, S_3 getaucht ist, und wenn man die elektromotorische Kraft vernachlässigt, welche zwischen den Elektrolyten wirkt. Es ist

$$\begin{aligned}(A, B) &= A \mid S_1 + S_1 \mid S_2 + S_2 \mid B + B \mid A\\ (B, C) &= B \mid S_2 + S_2 \mid S_3 + S_3 \mid C + C \mid B\\ (A, C) &= A \mid S_1 + S_1 \mid S_3 + S_3 \mid C + C \mid A.\end{aligned}$$

Addiert man die beiden ersten Größen und nimmt an, daß alle $S_i \mid S_k$ sehr klein sind, oder daß angenähert $S_1 \mid S_2 + S_2 \mid S_3 = S_1 \mid S_3$ ist, so erhält man wiederum die Gleichung (15).

Kehren wir zu der wichtigsten Kombination, die aus zwei Leitern A und B erster Klasse und zwei Elektrolyten S_1 und S_2 besteht, zurück; eine solche Kombination ist in Fig. 76 schematisch dargestellt.

Setzt man hier $A \mid S_1 = e_1$, $S_1 \mid S_2 = e_2$, $S_2 \mid B = e_3$, $B \mid A = e_4$, so ist

$$E = V_1 - V_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = A \mid S_1 + S_1 \mid S_2 + S_2 \mid B + B \mid A \quad (16)$$

Als Beispiel einer solchen Kombination kann das Daniellsche Element gelten; in Fig. 77 ist ein solches abgebildet. In ein Glasgefäß ist eine poröse Tonzelle T gesetzt und in diese eine schwache Schwefelsäurelösung gegossen, so daß sich hier in jedem Falle Zinksulfat befindet, durch welches man die Säure überhaupt ersetzen kann. In dieselbe Tonzelle wird ein Zinkzylinder oder Zinkstab Z gestellt, an welchen ein Kupferstreifen m angelötet ist. In das Glas wird eine Lösung von Kupfersulfat gegossen und eine zylindrisch geformte Kupferplatte K gestellt, an welche ein Streifen p aus Kupfer angelötet ist. Für das Daniellsche Element ist

$$e_1 = Cu \mid CuSO_4;\ e_2 = CuSO_4 \mid ZnSO_4;\ e_3 = ZnSO_4 \mid Zn;\ e_4 = Zn \mid Cu$$

$$E = V_1 - V_2 = Cu \mid CuSO_4 + CuSO_4 \mid ZnSO_4 + ZnSO_4 \mid Zn + Zn \mid Cu \ldots (17)$$

V_1 und V_2 sind die Potentiale der beiden kupfernen Enden p und m, wobei das Potential V_1 des Endes p größer als das Potential V_2 des Endes m ist. Das heißt, geht man vom Ende m in Gedanken durch das Element hindurch, so findet man, daß die Summe der Potentialsprünge eine positive Größe ist und daß die Kraft E in der Richtung vom Zink Z zum Kupfer K wirkt oder, genauer gesagt, vom Kupfer m zum Kupfer Kp. In Fig. 78 ist die Verteilung der Substanzen im Daniellschen Elemente schematisch in Form einer regelrecht offenen Kette dargestellt, entsprechend dem Schema der Fig. 76. Es sei erwähnt, daß für das Daniellsche Element der Wert von E ungefähr ein Volt beträgt und daß in den gebräuchlichen Elementen E im allgemeinen zwischen ein und zwei Volt schwankt.

Fig. 77.



Der Kürze halber werden wir im Folgenden einfach von Metallen reden, wenn wir eigentlich Leiter der ersten Klasse im Sinne haben, zu denen, wie bereits erwähnt, auch andere feste Leiter gehören.

Aus allem Vorhergehenden folgt, daß in einer regelrecht offenen Kette aus zwei Metallen A und B und zwei Elektrolyten vier elektro-

motorische Kräfte e_1, e_2, e_3, e_4, vgl. (16), an den vier Berührungsflächen der Körper wirken; ihre Summe ist gleich E und zudem gleich dem Unterschiede der Potentiale V_1 und V_2 an den Enden der Kette. Es gibt eine große Zahl von Methoden zur Messung von E und der Potentialdifferenz $V_1 - V_2$; mit diesen Methoden werden wir später bekannt werden. Es unterliegt keinem Zweifel, daß die Existenz der Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ eine experimentell erwiesene und sicher festgestellte Tatsache ist; die Größe dieser Differenz kann sehr genau gemessen werden.

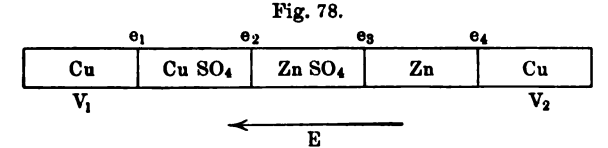
Es treten uns zwei fundamentale Fragen entgegen:

I. Von welchen Umständen hängt die Größe $E = V_1 - V_2$ ab?

II. Wie groß ist im besonderen jeder der Bestandteile $e_1 = A \mid S_1$, $e_2 = S_1 \mid S_2$, $e_3 = S_2 \mid B$, $e_4 = B \mid A$, aus denen sich die Größe E zusammensetzt, die selbst gleich $V_1 - V_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ ist?

Es versteht sich von selbst, daß dieselben beiden Fragen auch für die einfacheren Ketten gelten, auf die sich die Formeln (14, a),

Fig. 78.



(14, b) und (14, d) beziehen. Man findet nun in bezug hierauf folgendes Ergebnis:

Auf die erste Frage, die sich auf die unmittelbar leicht zu beobachtende und zu messende Größe der Summe E bezieht, gibt die Wissenschaft eine ganz bestimmte und klare Antwort, die wir im folgenden Paragraphen auseinandersetzen wollen.

Auf die zweite Frage hat die Wissenschaft bis jetzt (1907) keine endgültige Antwort gegeben. Man weiß, wie groß jene Summe ist, wovon sie abhängt, mit welchen anderen Größen sie in gesetzmäßigem Zusammenhange steht; über die Summanden jedoch, aus denen jene Summe besteht, vermag man keine endgültige Auskunft zu geben.

Höchst wahrscheinlich ist die Größe $e_2 = S_1 \mid S_2$ in der Formel (16) klein im Vergleich zu E, wenn nur die Substanzen A, B, S_1 und S_2 derart gewählt sind, daß die Größe E selbst nicht klein ist, beispielsweise einem nicht zu kleinen Bruchteile eines Volt gleichkommt. Es bleiben zwei Arten von Komponenten der Größe E übrig, einerseits die gleichartigen Teile $e_1 = A \mid S_1$ und $e_3 = S_2 \mid B$, andererseits die Größe $e_4 = B \mid A$. Es fragt sich nun, wie diese beiden Arten von Summanden sich auf die Summe E verteilen. Überwiegt einer von ihnen oder haben sie beide nahezu den gleichen Wert, oder aber ist der eine von ihnen

vielleicht gleich Null? Anders ausgedrückt lautet unsere Frage: Wo hat man die Quelle für das Auftreten der Potentialdifferenz an den Enden einer regelrecht offenen Kette zu suchen? Befindet sie sich dort, wo die Metalle einander berühren, dort, wo sich die Metalle mit den Elektrolyten berühren, oder aber an beiden Stellen?

Eine nicht geringe Zahl von hervorragenden Forschern ist der Meinung, daß e_4 sehr klein im Vergleiche zu e_1 und e_3 ist und nur wenige Tausendstel der Summe E beträgt, daß also die Berührung der Metalle mit den Elektrolyten die Hauptquelle für die elektromotorische Kraft der Kette darstellt, die einzige, die man in Betracht zu ziehen hat. Hierher gehört die deutsche Schule der Elektrochemiker: Ostwald, Nernst, Jahn, Le Blanc, Lüpke u. a. Es gibt Forscher, u. a. auch in England (z. B. Lodge), welche meinen, daß $e_4 = 0$ ist, d. h. daß die Berührung der Metalle untereinander an sich keine elektromotorische Kraft liefert. Zugleich sieht man aber, daß eine nicht geringere Zahl hervorragender Forscher Messungen der Größe e_4 für verschiedene Kombinationen von Metallen ausführen und hierbei finden, daß e_4 die Hälfte, drei Viertel und noch größere Bruchteile der Größe E ausmachen kann, daß e_4 Werte bis zu einem Volt annehmen kann. Man sieht unzählige Versuche und Messungen von seiten der Anhänger der einen oder der anderen Ansicht ausführen, und zu gleicher Zeit eine Kritik dieser Versuche von gegnerischer Seite, die bisweilen ein sehr eigentümliches Verhältnis zur Sache erkennen läßt, fast ein Ignorieren dessen, was die Gegner zu beweisen bemüht sind. Wir haben hier kein Recht, uns auf die eine oder andere Seite zu stellen, uns an eine bestimmte Auffassung der Größe e_4 zu halten; wir haben hier bloß ein Bild vom gegenwärtigen Stande der Wissenschaft zu geben und müssen daher nur darauf hinweisen, was im Lager der Vorkämpfer für die eine und die andere Auffassung geleistet worden ist. Obgleich somit die umstrittene Hauptfrage selbst noch der Lösung harrt, hindert uns nichts daran, in unserer Untersuchung fortzufahren, da hierbei der Größe E, der Summe der fraglichen Komponenten, die Hauptrolle zufällt, hinsichtlich dieser Größe aber keinerlei Meinungsverschiedenheit vorhanden sein kann.

Wir wenden uns begreiflicherweise vor allen Dingen der ersten von den beiden fundamentalen Fragen zu, die wir auf S. 177 aufgeworfen hatten, nämlich der Frage nach der Größe E, deren gesetzmäßige Abhängigkeit von anderen physikalischen Größen zum Teil auf das wahrhaft feste Fundament der modernen Physik, nämlich auf die beiden Prinzipien der Thermodynamik zurückgeführt werden kann. Anstatt, wie dies gewöhnlich geschieht, die Größe E synthetisch zu bestimmen, nachdem man vorher die Größen e betrachtet hat,

wollen wir den umgekehrten Weg einschlagen: wir wollen zunächst das betrachten, was unmittelbar beobachtet wird, was zweifellos feststeht, und erst hierauf zur Betrachtung dessen übergehen, was zur Lösung der strittigen Frage nach den Komponenten der elektromotorischen Kraft einer regelrecht offenen Kette, die aus einer Reihe von einander berührenden Leitern erster Klasse und Elektrolyten besteht, bisher geschehen ist.

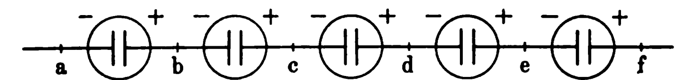
§ 4. Elektromotorische Kraft eines Elementes. Umkehrbares Element. Wir haben folgende Relation gefunden, vgl. (16)

$$E = V_1 - V_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = A\,|\,S_1 + S_1\,|\,S_2 + S_2\,|\,B + B\,|\,A. \quad (18)$$

Die Leiter A und B wollen wir Elektroden oder Pole nennen und zwar die Elektrode A, welche das höhere Potential V_1 besitzt, die positive Elektrode oder den positiven Pol, die andere, B, deren Potential $V_2 < V_1$ ist, die negative Elektrode oder den negativen Pol. Wir haben ferner gesehen, daß die elektromotorische Kraft, welche an der Berührungsfläche zweier Körper wirkt, nur von der Art und dem physikalischen Zustande dieser Körper abhängt. Das gleiche gilt von jedem der vier Summanden der Größe E, also auch von der Summe E selbst. Hieraus ergibt sich dann folgendes Gesetz:

Die elektromotorische Kraft eines jeden Elementes hängt nur von der Art und dem physikalischen Zustande der Stoffe ab, aus denen das Element besteht. Mit anderen Worten heißt das, die Größe E hängt davon ab, welche Leiter A und B erster Klasse und welche Elektrolyten S_1 und S_2 gewählt sind; ferner hängt sie ab

Fig. 79.



von der Temperatur, dem Druck, der Konzentration der Lösungen S_1 und S_2 und von anderen physikalischen Faktoren. Andererseits ist die elektromotorische Kraft eines Elementes unabhängig von der Form und den Dimensionen des Elementes, sowie von seiner inneren Einrichtung, d. h. von der speziellen Anordnung, welche die festen und flüssigen Leiter in ihm haben.

Ohne irgendwelche Annahmen über die Komponenten der Größe E aufzustellen, läßt sich die Frage nach der elektromotorischen Kraft E einer beliebigen Anzahl untereinander verbundener Elemente oder einer sogenannten Batterie aus Elementen lösen. Nehmen wir an, wir hätten n gleiche Elemente, deren jedes die elektromotorische Kraft E_0 hat. Wie wir im Folgenden sehen werden, gibt es verschiedene Arten der Verbindung (Schaltungsweisen) von Elementen zu

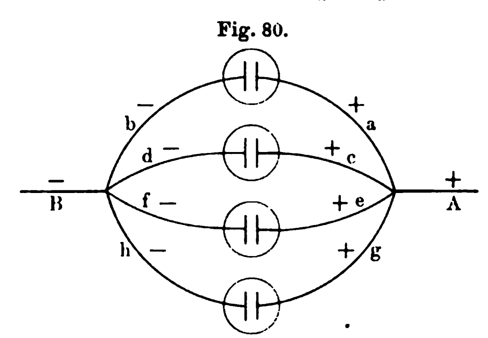
Batterien; von diesen werden wir nur die beiden wichtigsten betrachten: die Reihenschaltung und die Parallelschaltung.

Bei der Reihenschaltung bilden die Elemente eine ununterbrochene Reihe, wie sie in Fig. 79 (a. v. S.) schematisch dargestellt ist: hierbei wird der positive Pol eines Elementes mit dem negativen Pole des benachbarten verbunden. Bezeichnet man mit V_a, V_b, V_c usw. die Potentiale der Punkte a, b, c usw., so ist offenbar $V_b - V_a = E_0$, $V_c - V_b = E_0$, $V_d - V_c = E_0$ usf. Die gesuchte Größe E ist somit in diesem Falle gleich

$$E = n E_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Die elektromotorische Kraft einer Batterie aus n hintereinander geschalteten Elementen ist das $n$fache der elektromotorischen Kraft jedes einzelnen Elementes. Die Größe E ist gleich dem Potentialunterschiede $V_n - V_a$ der Enden der offenen Batterie. Bei großen Werten für n kann man recht beträchtliche Potentialdifferenzen, also auch recht starke Elektrisierungen dieser Enden erhalten. Hieraus folgt, daß die Enden einer offenen Batterie aus hintereinander geschalteten Elementen als Quellen starker elektrischer Ladungen dienen können. Verbindet man sie mit zwei Körpern (aus ein und demselben leitenden Material), so werden letztere elektrisiert, wobei ihr Potentialunterschied gleich $E = n E_0$ wird.

Fig. 80.



Parallelschaltung nennt man eine Verbindungsweise, bei welcher sämtliche n positive Pole der Elemente miteinander verbunden und sämtliche n negative Pole ebenfalls miteinander verbunden sind, wie dies Fig. 80 schematisch andeutet. Es ist in diesem Falle $V_a - V_b = E_0$, $V_c - V_d = E_0$, $V_e - V_f = E_0$ usw. Ferner ist $V_a = V_c = V_e = \cdots = V_A$ und $V_b = V_d = V_f = \cdots = V_B$, da die miteinander verbundenen gleichartigen Leiter das gleiche Potential haben müssen. Hieraus geht hervor, daß die Größe E, welche gleich $V_A - V_B$ ist, auch gleich E_0 sein muß:

$$E = E_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19, a)$$

Die elektromotorische Kraft einer Batterie aus n parallel geschalteten Elementen ist gleich der elektromotorischen Kraft eines Elementes. Alle n Elemente zusammen bilden gewissermaßen ein einziges Element von kompliziertem Bau.

Im Folgenden werden wir annehmen, daß das eine der beiden Ionen des Elektrolyten S_1 identisch mit dem Stoffe A ist und ebenso eines der beiden Ionen des Elektrolyten S_2 mit dem Stoffe B. Ein solcher Fall tritt beispielsweise ein, wenn S_1 und S_2 Lösungen von Salzen der Metalle A und B sind. Aus Gründen, die wir später kennen lernen werden, nennt man ein solches Element ein umkehrbares; außerdem werden wir auch jede einzelne Elektrode umkehrbar nennen, wenn ihre Ionen in dem Elektrolyten vorkommen, mit welchem sie in Berührung steht. Das Daniellsche Element, vgl. (17), ist offenbar ein umkehrbares; es gilt dies auch für den Fall, daß man die Zinksulfatlösung durch eine H_2SO_4-Lösung ersetzt, da sich ja hierbei sofort eine gewisse Menge $ZnSO_4$ bildet.

Sehen wir zu, was vor sich gehen muß, wenn durch ein umkehrbares Element eine gewisse Elektrizitätsmenge hindurchströmt. Die Frage nach der Quelle für diese Elektrizität wollen wir beiseite lassen. In Fig. 81 ist abermals das Schema einer

Fig. 81.

A | AS_1 | BS_2 | B | A
V_1 + − V_2
N | Cu | $CuSO_4$ | $ZnSO_4$ | Zn | Cu | M
η

regelrecht offenen Kette abgebildet; unten sind des Beispiels halber die Bestandteile des Daniellelementes angegeben. Nehmen wir $V_1 > V_2$ an, so daß N die positive, M die negative Elektrode ist. Die elektromotorische Kraft des Elementes ist gleich

$$E = V_1 - V_2 \quad \ldots \ldots \quad (19, b)$$

Nehmen wir an, es sei die Elektrizitätsmenge η von M nach N transportiert worden, d. h. vom niedrigeren Potentiale zum höheren. Die Bewegung der Elektrizität in Leitern erfolgt, wie wir sahen, durch Ionenwanderung. Der Bequemlichkeit halber wollen wir die Zusammensetzung der Elektrolyten durch AS_1 und BS_2 bezeichnen, wo A und B Kationen sind, welche positive Elektrizität mit sich führen und sich in der Richtung von M nach N bewegen, während sich die Anionen S_1 und S_2 in entgegengesetzter Richtung bewegen. Eine derartige Ionenwanderung ist mit chemischen Reaktionen verknüpft und dabei stets mit solchen, deren Gesamtheit eine exothermische Reaktion darstellt, d. h. eine Reaktion, bei welcher Wärme entwickelt wird. Das Ion S_2 bewegt sich nach rechts und verbindet sich mit dem Metall der Elektrode B, welches gelöst wird. Man kann die Annahme machen, daß B ebenfalls Ionen, und zwar Ionen beiderlei Art, enthält. In diesem Falle besteht der Lösungsvorgang im Aussenden eines Stromes

von positiv elektrisierten Ionen aus B, welche sich mit den negativen Ionen S_2 vereinigen. Die positiven Ionen B des Elektrolyten BS_2 verbinden sich mit dem Ion S_1; die positiven Ionen A des Elektrolyten AS_1 bewegen sich zur Elektrode A hin, an welcher sie sich niederschlagen oder, wie man zu sagen pflegt, ausscheiden, indem sie ihre Ladung abgeben, die in der Richtung nach N hin fließt. Das Resultat ist, daß sich die Elektrode B auflöst, der Elektrolyt AS_1 zersetzt und sich auf der Elektrode A das Metall A ausscheidet. So löst sich im Daniellelemente das Zink auf, während sich auf der Kupferelektrode Kupfer niederschlägt. Die Bildung von $ZnSO_4$ erfolgt unter Wärmeentwickelung, die Zerlegung von $CuSO_4$ unter Wärmeabsorption. Die Wärmeentwickelung aber erlangt das Übergewicht, so daß man schließlich eine exothermische Reaktion erhält. Die chemischen Prozesse, die sich im betrachteten Falle abspielen, d. h. im Falle, daß die Elektrolyte die Ionen A und B enthalten, sind offenbar umkehrbar: strömt eine Elektrizitätsmenge η durch das Element in entgegengesetzter Richtung, so löst sich die Elektrode A (die Kupferelektrode) auf und auf B (der Zinkelektrode) schlägt sich das Metall nieder, aus welchem diese Elektrode besteht. Aus diesem Grunde ist verständlich, weshalb man von umkehrbaren Elektroden und von umkehrbaren Elementen spricht.

Bezeichnen wir mit q die in Joules (0,24 g-cal) ausgedrückte Wärmemenge, welche im Elemente bei den chemischen Reaktionen frei wird, welche das Hindurchströmen von einem Coulomb begleiten, d. h. den Transport von $\frac{1}{96540}$ Grammäquivalent eines jeden der Ionen. Bezeichnen wir ferner mit q_0' und q_0'' die gewöhnlich in den Tabellen gegebenen thermochemischen Daten, welche den beiden an den Elektroden auftretenden Reaktionen entsprechen, wobei angenommen sei, daß beide Reaktionen nach der positiven Seite hin erfolgen, d. h. mit einer Wärmeentwickelung verbunden sind, wie dies der Fall wäre, wenn sich sowohl die eine als auch die andere Elektrode auflöst. Die Größen q_0' und q_0'' sind in den Tabellen in Grammkalorien, bezogen auf ein Gramm des sich auflösenden Metalls, gegeben. Wir wollen die Grammäquivalente der Elektroden mit σ' und σ'' bezeichnen, ihre in Milligrammen (S. 166) ausgedrückten elektrochemischen Äquivalente mit ε' und ε''. Es ist dann

$$q = \frac{q_0'\sigma' - q_0''\sigma''}{96540 \times 0{,}24} = \frac{q_0'\varepsilon' - q_0''\varepsilon''}{1000 \times 0{,}24} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Wenden wir die beiden Prinzipien der Thermodynamik auf den unendlich kleinen umkehrbaren Vorgang an, der sich abspielt, während die Elektrizitätsmenge $d\eta$ von M nach N gelangt; drückt man $d\eta$ in Coulombs aus, $E = V_1 - V_2$ in Volts, so erhält man die Arbeit für den Elektrizitätstransport in Joules und muß deshalb auch die

Wärmemengen in Joules ausdrücken. Setzen wir voraus, daß gleichzeitig mit dem Durchgange von $d\eta$ eine Erwärmung des Elements um dt Grad erfolgt sei und bezeichnen wir die Wärmekapazität des Elements mit c. Es läßt sich dann die Änderung dc der Wärmekapazität beim Durchgange der Elektrizitätsmenge $d\eta$ leicht bestimmen. Es sei z. B. c_1 die Wärmekapazität aller Substanzen, welche an der Reaktion teilnehmen, wobei von jedem Stoff ein elektrochemisches Äquivalent genommen ist; c_2 die Wärmekapazität der in derselben Menge genommenen Substanzen, die sich nach der Reaktion gebildet haben. Offenbar ist $c_2 - c_1$ die Änderung der Wärmekapazität des Elements beim Durchgange eines Coulombs, folglich

$$dc = (c_2 - c_1)\, d\eta \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Mit dQ sei die (in Joules ausgedrückte) Wärmemenge bezeichnet, die von außen her zuströmt; innerhalb des Elements scheidet sich die Wärme $q\,d\eta$ aus. Die ganze Wärmemenge $dQ + q\,d\eta$ wird zur Erwärmung des Elements und zum Transport der Elektrizitätsmenge $d\eta$ vom Potential V_2 auf das Potential V_1 verbraucht. Zur ersten Wirkung ist die Wärme $c\,dt$ erforderlich, zur zweiten die Wärme $(V_1 - V_2)\, d\eta = E\,d\eta$. Hieraus folgt

$$dQ = c\,dt + (E - q)\, d\eta \quad \ldots\ldots \quad (22)$$

Im Elemente hat ein Verlust an chemischer Energie $q\,d\eta$ und hat eine Erwärmung stattgefunden. Folglich hat sich die Energie U des Elements um den Betrag

$$dU = c\,dt - q\,d\eta \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

geändert. Auf die Fundamentalgleichungen (22) und (23) wenden wir nun die beiden Prinzipien der Thermodynamik an. Die Größe dU muß ein vollständiges Differential sein, es ist also

$$\frac{\partial c}{\partial \eta} = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Ferner muß auch die Größe $dQ : T$, wo T die absolute Temperatur bedeutet, ein vollständiges Differential sein; folglich ist

$$\frac{\partial \frac{c}{T}}{\partial \eta} = \frac{\partial \frac{E - q}{T}}{\partial t}.$$

Dies gibt uns

$$T\frac{\partial c}{\partial \eta} = T\left(\frac{\partial E}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t}\right) - E + q.$$

Hebt man die beiden Glieder auf Grund von Formel (24), so erhält man

$$E = q + T\frac{dE}{dt} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

Dies ist die berühmte Helmholtzsche Formel, welche den Zusammenhang zwischen der elektromotorischen Kraft E eines umkehrbaren Elements und dem thermochemischen Effekt q angibt. Helmholtz selbst, sowie auch W. Thomson (Lord Kelvin) waren anfänglich der Meinung, daß

$$E = q \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, a)$$

sei, welche Gleichung unter dem Namen Thomsonsche Regel bekannt ist (E ist in Volts, q in Joules pro elektrochemisches Äquivalent der Elektrodensubstanz ausgedrückt).

Formel (25) zeigt, daß E sowohl größer als auch kleiner wie q sein kann, je nachdem E mit der Temperatur ab- oder zunimmt. Vergleicht man (24) mit (21), so sieht man, daß

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c_1 - c_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

ist. Differenziert man (25) nach t, so ist

$$T \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{\partial q}{\partial t} = c_2 - c_1 \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

Im dritten Bande (Kap. V) war eine Formel hergeleitet worden aus der sich (26) leicht ergibt.

Formel (27) gibt

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int \frac{c_2 - c_1}{T}\, dt + K \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

wo K eine Konstante bezeichnet; setzt man dies in (25) ein, so wird

$$E - q = T \int \frac{c_2 - c_1}{T}\, dt + KT \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

Leicht läßt sich auch E allgemein durch q ausdrücken. Wir schreiben (25) in der Form

$$\frac{T dE - E dT}{T^2} = -\frac{q dT}{T^2};$$

hieraus

$$\frac{E}{T} = -\int \frac{q dT}{T^2} + K$$

$$E = -T \int \frac{q dT}{T^2} + KT \quad \ldots \ldots \quad (30)$$

Durch teilweise Integration kann man leicht von (30) auf (29) übergehen, sobald man (26) berücksichtigt. Es sei daran erinnert, daß q mit Hilfe der Formel (20) berechnet wird.

Aus Formel (25) ersieht man, daß für die Fälle, wo die Thomsonsche Regel $E = q$, vgl. (25, a) gilt, E und q von T nicht abhängen, folglich $c_1 = c_2$ ist, vgl. (26). Das heißt, die Wärmekapazität

eines Elements ändert sich in diesem Falle nicht infolge der in ihm auftretenden Reaktionen. Das umgekehrte läßt sich indes nicht behaupten: ist $c_1 = c_2$, so hängt q von T nicht ab, doch kann E eine lineare Funktion der absoluten Temperatur sein.

Das zweite Glied im Ausdruck (25) für E ist im allgemeinen nicht groß und man kann für viele Elemente die Annahme $E = q$ gelten lassen, d. h. E nach Formel (20) berechnen. Ist z. B. für das Daniellelement q_0' die Lösungswärme (in Grammkalorien) eines Gramms Zink in H_2SO_4, q_0'' dieselbe Größe für ein Gramm Kupfer, ε' und ε'' die elektrochemischen Äquivalente des Zinks und Kupfers in Milligrammen, so findet man, da $q_0' = 1635$, $q_0'' = 881$, $\varepsilon' = 0{,}337$, $\varepsilon'' = 0{,}328$ ist, $q = 1{,}09$ Joules für jedes hindurchströmende Coulomb. Läßt man in (25) das zweite Glied fort, so erhält man $E = 1{,}09$ Volt, was der Wirklichkeit sehr nahe kommt. Gockel, Czapski, Jahn, Bugarski, Chruschtschew, Sitnikow u. a. haben die Richtigkeit der Helmholtzschen Formel (25) durch unmittelbare Messungen bewiesen. Auf diese Arbeiten werden wir später zu sprechen kommen.

Von außerordentlichem Interesse ist es, daß die Helmholtzsche Formel auf Grund der Lehre von der freien Energie, welche im dritten Bande behandelt wurde, unmittelbar erhalten werden kann. Bezeichnet man mit U die chemische Energie des Elements, welche verschwindet, während durch das Element ein Coulomb hindurchströmt, so ist offenbar $U = q$. Die hierbei erhaltene Arbeit besteht aus der Arbeit für den Transport eines Coulomb vom Potential V_2 auf das Potential V_1. Drückt man die Arbeit in Volt-Coulombs aus, so erhält man für sie $V_1 - V_2$, d. h. E. Aus dem Begriffe der freien Energie bei isothermischen Vorgängen geht hervor, daß diese Arbeit auf Kosten der freien Energie erhalten worden ist, daß also $E = F$ sein muß, wo F die freie Energie ist, die dem Energievorrat U entspricht. In der Lehre von der freien Energie hatten wir aber die Formel

$$F = U + T\frac{\partial F}{\partial T}.$$

Substituiert man hier $F = E$ und $U = q$, so erhält man die Helmholtzsche Formel (25).

Die Lehre von der freien Energie ermöglicht, die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft E eines umkehrbaren Elements vom äußeren Drucke zu finden. Nehmen wir an, die chemische Reaktion, welche beim Hindurchgang von einem Coulomb durch das Element auftritt, sei von einer Volumvergrößerung begleitet und es hätten die freie Energie F und das Volum v anfänglich die Werte F_1 und v_1, nach dem Durchgange des Coulomb die Werte F_2 und v_2. Den äußeren Druck bezeichnen wir mit p; der Durchgang des Coulomb erfolge isothermisch und bei dem konstanten Drucke p. Die

verlorene freie Energie $F_1 - F_2$ wurde zum Transport des Coulombs und zur Vergrößerung des Volumens von v_1 zu v_2 verbraucht. Zum Transport eines Coulomb werden, wie wir gesehen haben, E Joules verbraucht; zur Volumvergrößerung sind $Ap(v_2 - v_1)$ Joules erforderlich, wo A das thermische Arbeitsäquivalent ist. Somit erhalten wir die Gleichung

$$F_1 - F_2 = E + Ap(v_2 - v_1);$$

dieselbe gibt den Ausdruck

$$\frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_2}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial p} + Ap\left(\frac{\partial v_2}{\partial p} + \frac{\partial v_1}{\partial p}\right) + A(v_2 - v_1) \qquad (30, a)$$

Wir hatten jedoch (Bd. III) die Formel

$$F = U - TS,$$

hieraus folgt (für $T = Const$)

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial p} - T\frac{\partial S}{\partial p}.$$

Es ist nun (Bd. III)

$$dS = \frac{dU + Apdv}{T}.$$

folglich

$$T\frac{\partial S}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial p} + Ap\frac{\partial v}{\partial p}.$$

Hieraus ist

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -Ap\frac{\partial v}{\partial p},$$

d. h.

$$\frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_2}{\partial p} = Ap\left(\frac{\partial v_2}{\partial p} - \frac{\partial v_1}{\partial p}\right).$$

Setzt man dies in (30, a) ein, so erhält man für den Fall der isothermischen Kontraktion des Elements die bemerkenswerte Formel

$$\frac{\partial E}{\partial p} = A(v_1 - v_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

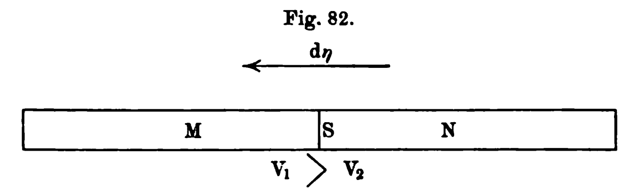
Sie besagt: Wenn die chemische Reaktion im Elemente von einer Zunahme des Volumens v begleitet ist ($v_2 > v_1$), so nimmt die elektromotorische Kraft E ab bei Zunahme des äußeren Drucks p; nimmt jedoch das Volumen v ab, so nimmt E zu bei wachsendem p. Dies steht im Einklange mit dem Prinzip von Le Chatellier-Braun (Bd. III).

Die bemerkenswerten Formeln (25) und (31) lösen die Frage nach dem Zusammenhange, in welchem die elektromotorische Kraft E eines umkehrbaren Elements mit der Temperatur T und dem Drucke p steht. Diese Formeln geben an, welche Rolle die Änderung der Wärme-

kapazität und die Änderung des Volumens eines solchen Elements bei denjenigen chemischen Reaktionen spielt, welche die Ionenwanderung in Elektrolyten begleitet, oder, was dasselbe ist, den Durchgang der Elektrizität durch das Element. Von besonderer Wichtigkeit ist hierbei, daß wir diese Formeln abgeleitet haben, ohne die Frage nach den Komponenten e_1, e_2, e_3, e_4 der Größe E zu berühren. Die Richtigkeit der von uns hergeleiteten Formeln kann nicht bezweifelt werden, da sie auf thermodynamischem Wege erhalten worden sind. Dasselbe läßt sich auch von den Herleitungen im folgenden Paragraphen sagen.

§ 5. Das Peltiersche Phänomen. Der französische Gelehrte Peltier hat folgende Erscheinung entdeckt: wenn man durch die Berührungsfläche S (Fig. 82) oder die Lötstelle zweier Körper M und N eine gewisse Elektrizitätsmenge hindurchströmen läßt, so erfolgt, je

Fig. 82.



nach der Richtung dieser Strömung, an der Fläche S entweder Ausscheidung oder Absorption von Wärme, d. h. entweder eine besondere Erwärmung oder Abkühlung. Die Thermodynamik ermöglicht die Aufstellung eines Zusammenhanges zwischen dem Betrage dieses thermischen Effekts und der Größe der elektromotorischen Kraft e, welche durch den Potentialunterschied $V_1 - V_2$ beider Körper gemessen wird. Denken wir uns einen unendlich kleinen umkehrbaren Vorgang, bei welchem die (absolute) Temperatur T der Körper M und N um dT zunimmt und zugleich die Elektrizitätsmenge $d\eta$ von N nach M fließt, d. h. vom kleineren Potentiale zum größeren. Mit dQ sei die unendlich kleine Wärmemenge bezeichnet, welche bei diesem Vorgange von außen her zuströmt. Man kann dann

$$dQ = c\,dT + h\,d\eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

setzen. Hier hat c den Charakter einer Wärmekapazität, h den Charakter einer latenten Wärme: es ist dies die Wärme, welche erforderlich ist, um die Lötstelle auf konstanter Temperatur zu erhalten, während durch sie die Einheit der Elektrizitätsmenge hindurchströmt. Mit q sei die sog. „Peltiersche Wärme" bezeichnet, d. h. diejenige Wärmemenge, welche an der Lötstelle ausgeschieden oder absorbiert wird, während durch dieselbe die Einheit der Wärmemenge hindurchströmt. Es ist offenbar

$$q = \pm h \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32,a)$$

Die Wärme wird verbraucht, erstens zur Vergrößerung der Energie U und zur Arbeit für den Transport der Elektrizitätsmenge $d\eta$ vom Potential V_2 zum Potential V_1. Diese Arbeit ist gleich $(V_1 - V_2)d\eta = e d\eta$. Demgemäß haben wir

$$dQ = dU + e d\eta \quad \ldots \ldots \quad (32, b)$$

Vergleicht man (32) mit (32, b), so erhält man

$$h = \frac{\partial U}{\partial \eta} + e, \qquad c = \frac{\partial U}{\partial T}.$$

Hiernach ist

$$\frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{\partial e}{\partial T} \quad \ldots \ldots \quad (32, c)$$

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik gibt uns

$$\frac{\partial \left(\frac{c}{T}\right)}{\partial \eta} = \frac{\partial \left(\frac{h}{T}\right)}{\partial T}$$

oder

$$\frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{h}{T} \quad \ldots \ldots \quad (32, d)$$

(32, c) und (32, d) geben

$$h = T \frac{\partial e}{\partial T} \quad \ldots \ldots \quad (32, e)$$

Endlich ist nach (32, a)

$$q = \pm T \frac{\partial e}{\partial T} \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Durch diese Formel wird diejenige Peltiersche Wärme bestimmt, welche in der Lötstelle absorbiert wird, wenn durch die Lötstelle die Einheit der Elektrizitätsmenge hindurchströmt. Würde die Größe e nicht von T abhängen, so erhielten wir $q = 0$. Hätte e als Funktion der Temperatur die Form $e = cT$, so hätten wir $q = \pm e$.

§ 6. Die Theorie von Nernst. Nernst hat gegen das Ende der achtziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts eine vollätändig neue Theorie für die Entstehung elektromotorischer Kräfte in Systemen von einander berührenden Leitern aufgestellt. Diese Theorie, der man anfangs mit Mißtrauen begegnete, hat bei ihrer Weiterentwickelung die Möglichkeit gegeben, sich in einer großen Zahl von verschiedenen Erscheinungen zurecht zu finden und die quantitativen Gesetze letzterer vollständig zu erklären, indem sie bei vielen Untersuchungen als Richtschnur gedient hat. Eine zahlreiche Schule, insbesondere deutscher Forscher, hat sie als Grundlage der ganzen Elektrochemie angenommen. Ausgehend von einer bestimmten Vorstellung über den Mechanismus der

Entstehung von elektromotorischen Kräften in Elementen, beschränkt sie sich nicht bloß auf die Bestimmung der Summe dieser Kräfte, d. h. der Größe E, sondern führt auch zu einer bestimmten Lösung der strittigen Frage nach den vier Komponenten jener Größe. Mit Rücksicht auf einen besonders charakteristischen Zug in der Nernstschen Theorie kann man sie die osmotische Theorie der Elemente nennen.

Die Lehre vom osmotischen Drucke war im ersten und darauf viel eingehender im dritten Bande behandelt worden, wo unter anderem die Theorie der Diffusion vorgetragen wurde, welche von Nernst ebenfalls auf Grund der Daten aus der Lehre vom osmotischen Drucke entwickelt worden ist. Wir erinnern daran, daß diese Lehre von der Identität der Eigenschaften gelöster Substanzen und der Gase ausgeht; der osmotische Druck einer gelösten Substanz ist gleich dem Drucke, welchen dieselbe Substanz ausüben würde, wenn sie in Gasform den von der Lösung eingenommenen Raum ausfüllen würde. Für schwache Lösungen gelten die Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac, d. h. die Gleichung

$$pv = RT \quad \ldots\ldots \quad (33, a)$$

in welcher R die sog. Gaskonstante ist.

Bevor wir die Nernstsche Theorie entwickeln, halten wir es für notwendig, einige Worte über die Einheiten vorauszuschicken, durch welche wir die verschiedenen Größen messen, und den diesen Einheiten entsprechenden Zahlenwert der Konstanten R für die Ionen zu bestimmen, die in einer schwachen Lösung irgend eines Elektrolyten enthalten sind, wobei wir letzteren als vollkommen dissoziiert ansehen.

Als Einheit der Länge soll uns das Centimeter gelten, als Einheit des Potentials, also auch der elektromotorischen Kraft, das Volt. Die Einheit der Feldintensität ist demnach das Volt-Centimeter, d. i. eine Feldintensität, wo sich das Potential auf ein Centimeter Entfernung um ein Volt ändert. Als Einheit der Elektrizitätsmenge nehmen wir das Coulomb. Hieraus folgt, daß die Arbeitseinheit das Volt-Coulomb = 1 Joule = 10 Megaerg wird. Eine solche Arbeit wird geleistet beim Transport von einem Coulomb auf ein Centimeter Entfernung in einem Felde, dessen Intensität gleich der Einheit ist, d. h. gleich einem Volt-Centimeter. Hieraus sieht man, daß die Krafteinheit gleich 10 Megadynen = 10^7 Dynen, die Druckeinheit gleich 10^7 Dynen pro Quadratcentimeter wird. Die Masseneinheit, d. h. die Ionenzahl, wird dann eine solche Masse, auf die in der Feldeinheit die Krafteinheit wirkt. Diese Masse muß mithin mit einem Coulomb verbunden sein; als Einheit der Ionenzahl hat man also eine Zahl anzunehmen, die an ein Coulomb gebunden ist, d. h. das elektrochemische Äquivalent. Ist n die Anzahl der an ein Coulomb gebundenen einwertigen Ionen (H, Cl, Br, J, K, Na, Ag, Cu aus Cu_2Cl_2, NO_3 usw.), so ist die Anzahl der zwei-

wertigen Ionen (O, S, Ba, Zn, Cu aus $CuCl_2$ oder $CuSO_4$, SO_4, CO_3 usw.), die an ein Coulomb gebunden ist, gleich $\frac{1}{2}n$, da von ersteren jedes einzelne Ion an ein Coulomb gebunden ist, von letzteren an zwei. Überhaupt ist die Zahl der k-wertigen Ionen, die an ein Coulomb gebunden ist, gleich $\frac{1}{k}n$. Hieraus folgt, daß die Volumina, welche von unserer Einheit der Ionenmenge bei gegebener Temperatur und Druck eingenommen werden, indirekt proportional der Valenzzahl k sind. Umgekehrt übt unsere Einheit der Ionenmenge bei gegebenem Volumen und Temperatur einen osmotischen Druck aus, der indirekt proportional der Valenzzahl k ist.

Jetzt wollen wir den Zahlenwert der Konstanten R der Formel (33, a) bestimmen. Setzt man $T = 273$ und $v = 1$ ccm, so erhält man $R = p$, d. h. R ist numerisch gleich dem (in 10^7 Erg pro Quadratcentimeter gemessenen) Drucke eines elektrochemischen Äquivalents der Ionen, welche bei 0° in 1 ccm enthalten sind. Bezeichnet man für einwertige Ionen, z. B. für H, diesen Druck mit p_0, so ist für ein k-wertiges Ion

$$R = \frac{p_0}{k} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33, b)$$

Bestimmen wir p_0 beispielsweise für den Wasserstoff. Wir wissen, daß 1 Liter Wasserstoff bei 0° und einem Atmosphärendruck 0,089 55 g wiegt. Hieraus läßt sich leicht berechnen, daß 2 g Wasserstoff bei 0° in 1 ccm einen Druck von 22 420 Atm. ausüben. Aus dem Avogadroschen Gesetze (Bd. I) folgt, daß dies auch der Druck von einem Grammäquivalent ist, d. h. von einem Gramm Wasserstoffionen, die sich bei 0° im Volumen eines Cubikcentimeters befinden. Das elektrochemische Äquivalent ist 96 540 mal kleiner als das Grammäquivalent, folglich ist der gesuchte Druck gleich:

$$p_0 = \frac{22\,420}{96\,540} \text{ Atm.} = \frac{22\,420 \times 1033{,}3 \text{ g}}{96\,540 \text{ qcm}}$$

$$= \frac{22\,420 \times 1033{,}3 \times 981 \text{ Dyn.}}{96\,540 \text{ qcm}} = \frac{22\,420 \times 1033{,}3 \times 981}{96\,540 \times 10^7} \; \frac{10^7 \text{ Dyn.}}{\text{qcm}}$$

$$= 0{,}861 \, . \, 10^{-4} \, \frac{10^7 \text{ Dyn.}}{\text{qcm}} \, .$$

Folglich ist

$$R = \frac{0{,}861 \, . \, 10^{-4}}{k} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

wo k das Äquivalent des Ions ist (z. B. $k = 1$ für H, aber $k = 2$ für O).

Schicken wir der Nernstschen Theorie noch einige Bemerkungen über die Ionenbewegung voraus. Wir hatten mit v und u die absoluten

Geschwindigkeiten bezeichnet, welche die Anionen und Kationen unter Einwirkung der Krafteinheit erlangen. So groß sind folglich die Ionengeschwindigkeiten, erstens, wenn in der Lösung die Einheit der Feldintensität (Volt-Centimeter) herrscht und zweitens unter der Wirkung der Einheit des osmotischen Druckes (10^7 Dynen pro Quadratcentimeter). Zwischen diesen beiden verschiedenen Fällen besteht jedoch der wichtige Unterschied, daß im ersten von ihnen die Geschwindigkeiten u und v nach verschiedenen Seiten gerichtet sind, im letzteren nach derselben Seite. Denken wir uns, es fließe durch den Elektrolyten die Elektrizitätsmenge η; diese Worte besagen, daß durch jeden Querschnitt S des Elektrolyten von den Anionen und Kationen nach entgegengesetzten Seiten zwei ungleichnamige Elektrizitätsmengen transportiert werden, deren Summe, wenn man die Vorzeichen außer Acht läßt, gleich η ist. Diese beiden Elektrizitätsmengen müssen den Geschwindigkeiten v und u proportional sein; hieraus folgt, daß durch den Querschnitt S, während durch den Elektrolyten die Elektrizitätsmenge η hindurchfließt, nach entgegengesetzten Seiten strömen

$$\left.\begin{array}{ll} \text{die Menge positiver Elektrizität} \;.\;\; . & \eta\,\dfrac{u}{u+v} \\[2ex] \text{die Menge negativer Elektrizität} \;.\;\; . & \eta\,\dfrac{v}{u+v} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (34, a)$$

Wir haben nun noch zu erwähnen, welche Auffassung Nernst vom Mechanismus der Diffusion des ionisierten Elektrolyten hat. Stellen wir uns vor, die Konzentration der Lösung ändere sich in irgend einer Richtung x, nehme beispielsweise von unten nach oben ab. In diesem Falle ist auch der osmotische Druck p eine Funktion von x und es erfolgt unter Einwirkung dieses Druckes eine Diffusion, d. h. Verschiebung beider Ionen in einer Richtung. Unter der Wirkung gleicher Kräfte erlangen die Ionen jedoch verschiedene Geschwindigkeiten, d. h. das eine von ihnen muß sich schneller bewegen als das andere; nehmen wir z. B. an, es sei $u > v$, dann bewegen sich die Kationen schneller als die Anionen, d. h. es erfolgt gewissermaßen eine Trennung der ungleichnamigen Ionen. Eine solche Trennung muß aber in der Lösung sogleich ein elektrisches Feld hervorrufen, welches die Bewegung der Kationen zu verlangsamen und die Bewegung der Anionen zu beschleunigen beginnt. Im Hinblick auf die gewaltige Größe der Ladungen, welche die Ionen besitzen, genügt ein verschwindend kleines und nicht meßbares Übergewicht der einen Ionen gegenüber den anderen, um eine solche Potentialdifferenz, also auch eine solche Feldintensität, hervorzurufen, welche hinreicht, um die gleichgerichteten Geschwindigkeiten der Ionen auch an Größe einander gleich zu machen. Hiernach also erfolgt die Diffusion der gelösten Substanz durch die vereinte Wirkung des osmotischen Druckes und des zugleich mit der Diffusion

entstandenen elektrischen Feldes, wobei sich beide Ionen gleich schnell von den Stellen höherer Konzentration zu den Stellen niedrigerer Konzentration bewegen.

Auf den soeben angeführten Vorstellungen beruht die Nernstsche Theorie, zu der wir jetzt übergehen. Wir wollen getrennt zuerst besondere Fälle und darauf den allgemeineren Fall der Anwendung dieser Theorie zur Berechnung elektromotorischer Kräfte betrachten.

I. Elektromotorische Kraft der Berührung von Lösungen, welche sich voneinander nur durch den Grad der Konzentration unterscheiden. Zwischen Lösungen ein und derselben Substanz, die sich voneinander nur durch ihren Konzentrationsgrad unterscheiden, bildet sich eine gewisse elektromotorische Kraft E aus, d. h. eine Potentialdifferenz $V_1 - V_2$, zu deren Berechnung Nernst zwei Methoden angibt.

Erste Methode. Bezeichnen wir mit c die Konzentration der Lösung in irgend einem Querschnitte S, dessen Koordinate gleich x ist: c sei die Anzahl der Grammäquivalente der gelösten Substanz in einem Cubikcentimeter; c_1 und c_2 seien die Konzentrationen in den Ebenen, in welchen die Potentiale V_1 und V_2 vorhanden sind. Denken wir uns $c_1 > c_2$ und die x-Achse in der Richtung der abnehmenden Konzentrationen genommen, d. h. in der Richtung der Diffusion. Ziehen wir ferner zwei Ebenen mit den Koordinaten x und $x + dx$; dieselben begrenzen dann eine Schicht, in welcher sich $cSdx$ Grammoleküle des Elektrolyten befinden. Auf die Ebene x wirkt der Druck SP, auf die Ebene $x + dx$ der Druck $S\left(P + \frac{dP}{dx}\,dx\right)$. Hieraus folgt, daß sich die Substanzmenge $cSdx$ unter der Wirkung einer Kraft befindet, welche gleich $-S\frac{dP}{dx}\,dx$ ist, wobei der zweite Faktor offenbar negativ ist; auf ein Grammäquivalent wirkt die Kraft $-\frac{1}{c}\cdot\frac{dP}{dx}\cdot$ Unter der Einwirkung dieser Kraft gehen in der Zeit τ durch den Querschnitt S folgende Mengen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{des Kations} \cdot \cdot & -cSu\tau\cdot\frac{1}{c}\frac{dP}{dx} = -S\tau\frac{dP}{dx}u \\ \text{des Anions} \cdot \cdot & -cSv\tau\cdot\frac{1}{c}\frac{dP}{dx} = -S\tau\frac{dP}{dx}v \end{array}\right| \quad . \quad . \quad (34, b)$$

Infolge der Ungleichheit der Geschwindigkeiten entsteht ein elektrisches Feld, dessen Intensität gleich $-\frac{dV}{dx}$ ist, wobei V das Potential bedeutet. Unter der Wirkung dieser Kraft gehen in der Zeit τ durch den Querschnitt S folgende Mengen:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{des Kations} \;\ldots\ldots & -cSu\tau\cdot\dfrac{dV}{dx} \\ \text{des Anions} \;\ldots\ldots & +cSv\tau\cdot\dfrac{dV}{dx}\end{array}\right\} \quad \ldots \quad (34,\text{c})$$

Unter der vereinten Wirkung des osmotischen Druckes und des elektrischen Feldes gehen beide Ionen in der gleichen Menge M hindurch, so daß wir folgenden Ausdruck erhalten:

$$M = -S\tau u\left\{\frac{dP}{dx} + c\frac{dV}{dx}\right\} = -S\tau v\left\{\frac{dP}{dx} - c\frac{dV}{dx}\right\} \quad . \quad . \quad (35)$$

Diese Größe bestimmt auch die gelöste Substanzmenge, welche in der Zeit τ durch den Querschnitt S hindurch diffundiert. Formel (35) gibt

$$\frac{dV}{dx} = \frac{1}{c}\,\frac{v-u}{v+u}\,\frac{dP}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (35,\text{a})$$

Setzt man umgekehrt diesen Ausdruck in (35) ein, so erhält man

$$M = -\frac{2uv}{u+v}\,S\tau\,\frac{dP}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (35,\text{b})$$

Wir setzen voraus, die Lösung sei so stark verdünnt, daß sich auf jedes der Ionen die Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac anwenden lassen. Das von einem Grammäquivalent eingenommene Volumen ist gleich $\frac{1}{c}$, wir können daher die Formel (33, a) in der Form

$$P = cRT \quad \ldots\ldots \quad (35,\text{c})$$

schreiben. Setzt man diesen Ausdruck in (35, a) und (35, b) ein, so erhält man

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{u-v}{u+v}\,\frac{RT}{c}\,\frac{dc}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

$$M = -\frac{2uv}{u+v}\,RST\tau\,\frac{dc}{dx} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Bei der Betrachtung der Diffusionserscheinungen waren wir zu einer Formel (Bd. I und III) gelangt, die unter Berücksichtigung unserer gegenwärtigen Bezeichnungsweise die Form

$$M = -KS\tau\,\frac{dc}{dx}$$

erhält, wobei K den Diffusionskoeffizienten darstellt. Vergleicht man diese Formel mit (37), so erhält man aus der Theorie von Nernst für den Diffusionskoeffizienten folgenden Ausdruck

$$K = \frac{2uv}{u+v}\,RT \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

wobei der Zahlenwert des Faktors R in (34) gegeben ist; hier sind u und v die Geschwindigkeiten in Centimetern pro Sekunde bei einem Potentialgefälle von einem Voltcentimeter, oder bei einem Drucke von 10 Megadynen auf den Quadratcentimeter. Unsere Hauptgleichung (36) gibt den Ausdruck für die gesuchte elektromotorische Kraft, welche zwischen den Querschnitten wirkt, in denen die Konzentrationen c_1 und c_2 herrschen ($c_1 > c_2$):

$$E = V_1 - V_2 = -\frac{u-v}{u+v} RTlg\frac{c_1}{c_2} \text{ Volt} \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Der Zahlenwert des Faktors R ist durch Formel (34) gegeben. Wir haben angenommen, daß $u > v$ ist und für E einen negativen Wert erhalten, wie dies auch offenbar der Fall sein muß: das höhere Potential entspricht der Stelle, an welcher die Konzentration geringer ist. Führt man an Stelle der natürlichen Logarithmen (lg) die gewöhnlichen (Lg) ein, so hat man die Zahl R durch 0,4343 zu dividieren und erhält dann

$$E = V_1 - V_2 = -0{,}0002\frac{u-v}{u+v}\cdot\frac{1}{k}\, TLg\frac{c_1}{c_2} \text{ Volt} \quad . \quad . \quad (40)$$

wo k die Valenzzahl der Ionen ist.

Setzt man $k = 1$ und $T = 273 + 18$ (Zimmertemperatur), so ist

$$E = V_1 - V_2 = -0{,}0578\frac{u-v}{u+v} Lg\frac{c_1}{c_2} \text{ Volt} \quad . \quad . \quad (41)$$

Zweite Methode. Im ersten Bande war gezeigt worden, daß, wenn die Einheit der Gasmenge sich bei der Temperatur T ausdehnt, indem sie vom Druck P_1 auf den Druck P_2 übergeht, das Gas hierbei eine Arbeit leistet, welche gleich

$$r = RTlg\frac{P_1}{P_2}$$

ist, wobei sich die Konstante R auf die gewählte Einheit der Gasmenge bezieht. Denken wir uns, es gehen η Coulomb vom Querschnitte, in welchem die Konzentration c_1 herrscht, zum Querschnitte mit der Konzentration c_2 über und daß hierbei $c_1 > c_2$ ist; P_1 und P_2 sind die osmotischen Drucke. Die Arbeit der elektrischen Kräfte ist gleich $r = (V_1 - V_2)\eta$; als Resultat dieser Arbeit aber erscheint der Übergang von $\eta\frac{u}{u+v}$ Einheiten der Kationenmenge vom Drucke P_1 zum Drucke P_2 und von $\eta\frac{v}{u+v}$ Einheiten der Anionenmenge vom Drucke P_2 zum Drucke P_1, da wir als Einheit der Ionenmenge diejenige gewählt hatten, welche an die Einheit der Elektrizitätsmenge gebunden ist. Der Übergang der Anionen ist von einer Ausdehnung begleitet, d. h. von einer von den Ionen selbst geleisteten Arbeit, welche gleich

$$\eta \frac{u}{u+v} R T lg \frac{P_1}{P_2}$$

ist, so daß die gesamte in der Lösung geleistete Arbeit gleich

$$\eta (V_1 - V_2) + \eta \frac{u}{u+v} R T lg \frac{P_1}{P_2}$$

ist. Sie wird dazu verbraucht, die Kationen vom Drucke P_2 auf den Druck P_1 zu komprimieren; somit ist

$$\eta (V_1 - V_2) + \eta \frac{u}{u+v} R T lg \frac{P_1}{P_2} = \eta \frac{v}{u+v} R T lg \frac{P_1}{P_2}.$$

Beachtet man, daß $P_1 : P_2 = c_1 : c_2$ ist, so erhält man hieraus

$$E = V_1 - V_2 = - \frac{u-v}{u+v} R T lg \frac{c_1}{c_2} \text{ Volt},$$

d. h. die Formel (39). Diese Formel sagt aus, daß E proportional T ist. Es sei noch bemerkt, daß die Helmholtzsche Formel (25), S. 183, zu demselben Resultate führt, denn es ist in unserem Falle offenbar $q = 0$, so daß $E = T \frac{dE}{dt}$ übrig bleibt, woraus sich leicht der Ausdruck $E = CT$ ergibt. Hierbei ist C eine Konstante, d. h. ein von der Temperatur unabhängiger Faktor.

Nernst (1892), Planck und Loven (1896) haben die hier vorgetragene Theorie auf den Fall der Berührung von beliebigen ungleichartigen, aufeinander nicht reagierenden Elektrolyten ausgedehnt.

Couette hatte eine andere Theorie aufgestellt; als er aber selbst (1900) die Potentialdifferenz zwischen zwei Schwefelsäurelösungen von verschiedener Konzentration maß, fand er statt der erwarteten Bestätigung seiner Theorie eine vollständige Übereinstimmung der Messungsresultate mit der Nernstschen Theorie.

II. Elektromotorische Kraft zwischen einer Elektrode und der Lösung eines ihrer Salze. Wir wollen uns auf den Fall beschränken, daß eine Metallelektrode in die Lösung eines der Salze des Elektrodenmetalls taucht (Cu und $CuSO_4$, Ag und $AgNO_3$ usw.). Wir haben vorhin erwähnt, daß man eine solche Elektrode eine umkehrbare nennt. Zu finden ist hierbei die Größe $E = V_m - V_s$, wo V_m das Potential der Elektrode, V_s das Potential der Lösung ist. Nach Ansicht einiger Forscher, z. B. nach Pellat, ist $E = 0$. Nernst hat die Größe E auf folgende Weise bestimmt. Mit p sei der osmotische Druck, mit c die Konzentration der Lösung bezeichnet, welche Kationen enthält. Der Übergang des Metalls in die Lösung besteht darin, daß sich die positiven Ionen dieses Metalls aus ihm ausscheiden, infolgedessen sich das Metall negativ elektrisiert. Offenbar ist $V_m < V_s$. Geht die Elektrizitätseinheit von der Elektrode zur Lösung

über, so leisten die elektrischen Kräfte eine Arbeit $E = V_m - V_s$, die offenbar negativ ist. Hierbei geht eine an diese Elektrizität gebundene Menge Kationen vom Metall in die Lösung, d. h. zum Drucke p über. Vergrößert man die Konzentration der Lösung bis zum Werte $p + dp$, so erhält man $E + dE$ anstatt E. Nehmen wir an, daß die in Lösung gegangenen Kationen beim Drucke p das Volumen v einnehmen, beim Drucke $p + dp$ aber das Volumen $v + dv$, wo dv eine negative Größe ist. Die von diesen Kationen geleistete Arbeit ist im zweiten Falle um den Betrag $p\,dv$ größer. Wir müssen daher die Gleichung

$$dE + p\,dv = 0$$

haben, oder aber

$$dE = d(V_m - V_s) = -p\,dv = RT\frac{dp}{p}.$$

Dies gibt

$$E = V_m - V_s = RT\,lg\,p + C.$$

Setzt man $C = -RT\,lg\,P$, wo P eine neue Konstante bedeutet, so ist

$$V_m - V_s = RT\,lg\,\frac{p}{P}$$

oder

$$V_s - V_m = RT\,lg\,\frac{p}{P}\ \text{Volt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Hier ist V_s das Potential der Lösung, V_m das Potential des Metalls; der Zahlenwert von R ist durch (34) gegeben. Für Ag ist $k = 1$, für Zn und Cu hat man $k = 2$ zu setzen.

Die physikalische Bedeutung der Größe P bestimmt Nernst auf folgende Weise. Die Gesamtheit der Ionen, im gegebenen Falle der Kationen, die sich aus der Elektrode ausscheiden, besitzt eine gewisse Lösungsspannung, die dem osmotischen Druck völlig analog ist; Nernst nennt sie die Lösungstension, Ostwald den Lösungsdruck. Ist $P > p$, so erfolgt beim Eintauchen des Metalls in die Lösung ein Übergang der Kationen in diese Lösung, welche daher einen Überschuß an positiver Elektrizität erwirbt. Die Kationen verteilen sich längs der Elektrodenoberfläche, um welche sich die in der Elektrode verbliebene negative Ladung ansammelt. Auf diese Weise entsteht eine elektrische Doppelschicht, welche einer bestimmten Potentialdifferenz $V_s - V_m$ [vgl. (47, c), S. 98] entspricht und eine Kraft wachruft, deren Richtung von der Lösung zum Metall führt. Gleichgewicht tritt ein, wenn diese Kraft der Druckdifferenz $P - p$ gleich wird. Zur Bildung einer Doppelschicht genügt eine unmeßbar geringe Ausscheidung von Kationen aus der Elektrode. Für $P = p$ hat man $V_s - V_m = 0$. Ist $P < p$, so schlagen sich Kationen aus der Lösung auf der Elektrode so lange nieder, bis die Doppelschicht, welche auf der Elektroden-

seite positiv ist, der Druckdifferenz $p - P$ das Gleichgewicht hält. Bezeichnet man mit C diejenige Konzentration, welche dem osmotischen Drucke P entsprechen würde, so kann man Formel (42) in folgender Form anschreiben:

$$V_s - V_m = RT lg \frac{C}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

Die Frage, ob der Größe P in Wirklichkeit jene physikalische Bedeutung innewohnt, die Nernst ihr zuschreibt, kann man füglich offen lassen. Wir wollen uns auf folgende überaus wichtige Bemerkung beschränken. Unmittelbare Messungen der Größe $V_s - V_m$, von denen später die Rede sein soll, geben für die Größe P Zahlenwerte, die für verschiedene Metalle teils unwahrscheinlich groß, teils unwahrscheinlich klein sind. Lehfeldt hat indes (1900) gezeigt, daß man, wenn man annimmt, daß die Lösungen nicht das Mariottesche, sondern das van der Waalssche Gesetz (Bd. I und III) befolgen, beispielsweise für Zink anstatt der unwahrscheinlich großen Zahl 10^{19} Atm. nur die Zahl von 20 000 Atm. erhält, welches ein jedenfalls durchaus möglicher Wert ist.

III. Die elektromotorische Kraft eines Konzentrationselementes. Denken wir uns ein Element, welches aus zwei gleichen Metallen M besteht. Dieselben mögen in zwei Lösungen des gleichen Salzes des Metalls M tauchen, deren Konzentrationen c_1 und c_2 jedoch verschieden sind. Wir nehmen an, es sei $c_1 > c_2$; die Lösungen können voneinander durch eine poröse Scheidewand getrennt sein. Bezeichnet man die Potentiale mit V_1, V_1', V_2', V_2, so erhält man folgendes Schema

M	Lösung c_1	Lösung c_2	M
V_1	V_1'	V_2'	V_2

Die Formeln (39) und (43) geben uns

$$V_1' - V_2' = -\frac{u-v}{u+v} RT lg \frac{c_1}{c_2}$$

$$V_1 - V_1' = -RT lg \frac{C}{c_1}$$

$$V_2' - V_2 = RT lg \frac{C}{c_2}.$$

Addiert man diese drei Gleichungen, so erhält man für die elektromotorische Kraft des Konzentrationselementes:

$$V_1 - V_2 = \frac{2v}{u+v} RT lg \frac{c_1}{c_2} \text{ Volt} \quad \ldots \ldots \quad (44)$$

wo die Konstante R aus (34) zu entnehmen ist. Für die elektromotorische Kraft der sogenannten Konzentrationselemente zweiter Art, in denen die Substanz beider Elektroden Anionen der Lösung (z. B.

Hg_2Cl_2 gelöst in HCl) ausscheidet, erhält man eine Formel, welche sich von (44) nur dadurch unterscheidet, daß im Zähler des ersten Faktors $2u$ statt $2v$ steht.

Bemerkenswert ist, daß Helmholtz (1877) schon lange vor Nernst einen Ausdruck für die elektromotorische Kraft der Konzentrationselemente abgeleitet hat, wobei er sich auf den Umstand stützte, daß die Dampfspannung über Lösungen von verschiedener Konzentration nicht die gleiche ist und die Prinzipien der Thermodynamik auf einen gewissen Kreisprozeß anwandte, dem man ein solches Element unterwerfen kann. Nernst hat gezeigt, daß die Formel (44) aus der Helmholtzschen Formel abgeleitet werden kann (bei Annahme sehr verdünnter Lösungen).

Einen durchaus anderen Fall eines Konzentrationselementes hat man vor sich, wenn in einer überall homogenen Lösung eines Salzes des Metalls M sich zwei durch ihren Konzentrationsgrad unterscheidende Amalgame desselben Metalls M befinden. In diesem Falle ist die elektromotorische Kraft offenbar gleich

$$V_1 - V_2 = RT\,lg\,\frac{P}{p} - RT\,lg\,\frac{P_1}{p} = RT\,lg\,\frac{P}{P_1}\ \text{Volt} \qquad (44, a)$$

Hier bedeuten P und P_1 die Lösungsdrucke des Metalls M in seinen beiden Amalgamen, p den osmotischen Druck der Kationen im Elektrolyten. Nimmt man an, daß die Drucke P und P_1 den Konzentrationen C und C_1 des Metalls M in den beiden Amalgamen proportional sind, so erhält man den Ausdruck

$$V_1 - V_2 = RT\,lg\,\frac{C}{C_1} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (45)$$

IV. Zwei Metalle, die sich in Lösungen ihrer Salze befinden (Typus des Daniellelementes). Läßt man die elektromotorische Kraft, welche bei der Berührung von zwei Lösungen auftritt, außer acht, so gibt uns Formel (42) offenbar den Ausdruck

$$V_2 - V_1 = R_1 T\,lg\,\frac{P_1}{p_1} - R_2 T\,lg\,\frac{P_2}{p_2} \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (46)$$

wo P_1 und P_2 die Lösungsdrucke der beiden Metalle, p_1 und p_2 die osmotischen Drucke der Kationen in den beiden Lösungen, R_1 und R_2 Werte der Konstante R sind, die sich voneinander durch den Faktor k unterscheiden können.

Die osmotische Theorie von Nernst kann noch zur Lösung vieler Fragen herangezogen werden, wie z. B. zur Berechnung der elektromotorischen Kraft der Gaselemente, die wir später kennen lernen werden usw. An dieser Stelle beschränken wir uns jedoch auf die angeführten Beispiele der Anwendung dieser jedenfalls bemerkenswerten und geistvollen Theorie. Übrigens haben wir im folgenden Paragraphen noch auf einen Fall hinzuweisen, in welchem diese Theorie Anwendung findet.

Unsere Darstellung der Nernstschen Theorie wäre unvollständig, wenn wir verschweigen wollten, daß sich viele hervorragende Forscher zu dieser Theorie ablehnend verhalten. Zu diesen Forschern gehört Bancroft, welcher unter anderem darauf hinweist, daß z. B. die Nernstsche Formel für die elektromotorische Kraft des Konzentrationselementes nur für den Fall äußerst verdünnter Lösungen mit der Helmholtzschen identisch wird, während letztere Formel für alle Konzentrationen gültig bleibt.

§ 7. Vorläufige Bestimmung des Begriffes der elektrolytischen Polarisation. Die Erscheinung, von welcher es notwendig ist, hier einige Worte zu sagen, wird gewöhnlich einfach „Polarisation" genannt; wir haben für dieselbe in der Überschrift einen bezeichnenderen Namen gewählt, um damit anzuzeigen, daß diese Erscheinung nichts gemeinsames mit der „Polarisation" der Strahlen hat, die wir in Bd. II betrachtet haben.

Die Erscheinung der elektrolytischen Polarisation, zu der wir später zurückkehren werden, besteht in folgendem. Denken wir uns ein offenes Element, für welches die Potentialdifferenz an den Polenden oder die elektromotorische Kraft gleich $E = V_1 - V_2$ ist. Im besonderen Falle kann $E = 0$ sein, wenn z. B. zwei gleichartige Elektroden in demselben Elektrolyten sich befinden. Läßt man durch das Element eine gewisse Elektrizitätsmenge hindurchgehen und stört man hierdurch das vorhandene Gleichgewicht, so tritt im Elemente eine neue elektromotorische Kraft e auf, die sich dieser Bewegung der Elektrizität widersetzt, d. h. die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ ändert sich um einen gewissen Betrag $V_1' - V_2' = e$, welcher innerhalb des Elementes eine Elektrizitätsbewegung hervorzurufen sucht, die eine der vorhandenen Elektrizitätsbewegung entgegengesetzte Richtung hat. Diese Erscheinung heißt Polarisation, die Größe e die elektromotorische Kraft der Polarisation.

Ohne die Frage nach dem Mechanismus des Entstehens von e zu berühren, können wir sagen, daß das Auftreten dieser Größe eine notwendige Folge des Prinzips von Le Chatelier-Braun (Bd. III) darstellt. Wie gezeigt worden war, besteht das genannte Prinzip in folgendem: Jede Einwirkung auf ein System, die dessen Gleichgewicht stört, ruft in demselben eine Gegenwirkung hervor, welche jene Einwirkung zu verringern sucht. Als eine solche Gleichgewichtsstörung erscheint auch der Elektrizitätsdurchgang durch das Element, d. h. die Bewegung der Ionen im Elektrolyten in zwei einander entgegengesetzten Richtungen. Die elektromotorische Kraft e repräsentiert die Gegenwirkung, welche die Ionenbewegung zu vermindern sucht, d. h. dieser Bewegung eine Richtung zu geben sucht, welche der gegebenen entgegengesetzt ist.

Je nach der Zusammensetzung des Elementes und der Strömungsrichtung der Elektrizität ist eine ganze Reihe von verschiedenen Einzelfällen möglich, von denen die beiden folgenden besonderes Interesse verdienen.

1. Zwei verschiedene Elektroden, die beide umkehrbar sind; z. B. zwei Metalle in Lösungen ihrer Salze. In diesem Falle bringt das Hindurchströmen der Elektrizität keine Gleichgewichtsstörung hervor, da die Auflösung des einen Metalles und die Ablagerung von Teilchen desselben Metalles auf der anderen Metallelektrode nur eine gewisse Änderung der Konzentration der Lösung zur Folge hat. Im Idealfalle einer vollkommenen Umkehrbarkeit ist die Polarisation gleich Null, also $e = 0$.

2. Zwei gleichartige Elektroden in einer Flüssigkeit. In diesem Falle ist die ursprüngliche elektromotorische Kraft gleich Null, also $E = 0$. Das Hindurchströmen der Elektrizität, d. h. die Ionenwanderung, ist vom Auftreten einer Potentialdifferenz $V_1' - V_2' = e$ begleitet, welche die Ionen in entgegengesetzten Richtungen zu transportieren sucht. Hierher gehört das klassische Beispiel von zwei Platinelektroden in einer Schwefelsäurelösung; hierher gehört auch der Fall, wo zwei mit Mennige oder Bleiglätte bedeckte Bleiplatten in Schwefelsäure tauchen (gewöhnlicher Akkumulator).

Die Theorie der elektrolytischen Polarisation kann als ein charakteristisches Beispiel für den Widerstreit dienen, in dem sich gegenwärtig verschiedene wissenschaftliche Theorien befinden. Vergleicht man untereinander die Theorien von Helmholtz, Warburg und Nernst, besonders ihre Anwendung auf besondere Einzelfälle, so überzeugt man sich leicht, daß sie auf Prinzipien und Vorstellungen zurückführen, die miteinander wenig gemein haben. Übrigens muß man in Betracht ziehen, daß der Mechanismus des Auftretens einer elektromotorischen Kraft der Polarisation in verschiedenen Fällen ein sehr verschiedener ist. Bleibt man bei der rein äußerlichen Seite der Erscheinung, so kann man sagen, daß infolge des Auftretens der Kationen und Anionen auf den Elektrodenoberflächen Veränderungen entstehen, welche gleichbedeutend mit einem Ersatze dieser Elektroden durch andere sind, weshalb an Stelle der ursprünglichen elektromotorischen Kraft E eine andere tritt, die sich von E um den Betrag e unterscheidet. Besonders klar ist dies für den zweiten der oben erwähnten Fälle, wo gleichartige Elektroden vorhanden sind, so daß $E = 0$ ist: das Auftreten der Ionen macht die Elektroden ungleichartig, infolgedessen hören die beiden elektromotorischen Kräfte an den Berührungsflächen der Elektroden mit dem Elektrolyten auf, einander an Größe gleich, den Vorzeichen nach verschieden zu sein.

Die durch das Auftreten der Ionen hervorgerufenen Veränderungen können sehr verschiedene sein. So erscheint im vorhin erwähnten Beispiele des Bleiakkumulators das Kation H_2 und das Anion SO_4 auf dem

Bleioxyde, weshalb die Kathode desoxydiert wird, die Anode in Bleisuperoxyd übergeht oder an ihrer Oberfläche sich $PbSO_4$ bildet.

In anderen Fällen gelangen die Ionen an der Elektrodenoberfläche zum Stillstand, ohne ihre Ladungen abzugeben, wobei sich an dieser Oberfläche eine elektrische Doppelschicht bildet, d. h. ein Potentialsprung auftritt. Bisweilen erleidet eine bereits vorhandene Doppelschicht infolge der Ionenwanderung diese oder jene Veränderung.

Sehr wichtig ist der Umstand, daß die Veränderung an den Elektrodenoberflächen nur bis zu einer gewissen Grenze gehen kann, welcher das Maximum der möglichen Polarisation entspricht. Hat man eine elektrische Doppelschicht, so wird jene Grenze in dem Augenblick erreicht, wo weitere herantretende Ionen ihre Ladungen den Elektroden abzugeben beginnen, so daß die Kraft der Doppelschicht (S. 98), folglich auch der Potentialsprung, der dieser Doppelschicht entspricht, zu wachsen aufhört.

Es wäre verfrüht, bereits an dieser Stelle die Theorie für die verschiedenen Fälle zu entwickeln, und wir wollen uns daher auch nur auf einige wenige Worte beschränken.

Nehmen wir an, das Element bestehe aus zwei Quecksilberelektroden, zwischen denen sich eine Schwefelsäurelösung befindet, sich also Quecksilberionen und eine sehr schwache, vollständig dissoziierte Lösung des schwefelsauren Quecksilbersalzes befinden. Nernst sieht die Polarisation eines solchen Elementes als Resultat der Wanderung der Quecksilberionen zur Kathode an, infolgedessen die Konzentration der Lösung aufhört, überall die gleiche zu sein und daher eine elektromotorische Kraft des Konzentrationselementes auftritt. In ähnlicher Weise betrachtet Nernst auch den Fall, wo sich zwei Platinelektroden in Schwefelsäurelösung befinden, indem er annimmt, daß diese Elektroden auf ihren Oberflächen Sauerstoff enthalten, dessen Konzentration sich ändert, wenn auf einer Elektrode Sauerstoff, auf der anderen Wasserstoff auftritt. Von einer solchen Auffassung unterscheiden sich die Theorien von Helmholtz und Warburg sehr wesentlich. Die Bildung der Doppelschichten, welche oben erwähnt war, spielt in der von Helmholtz aufgestellten Theorie der Polarisation die Hauptrolle.

In dem Kapitel, welches speziell die Elektrolyse zum Gegenstande hat, werden wir auf die Polarisationserscheinungen zurückkommen.

§ 8. Kapillarelektrometer und Tropfelektroden. Bevor wir zu der experimentellen Untersuchung der Elektrisierung beim Kontakt von ungleichartigen Körpern übergehen, müssen wir eine der Methoden dieser Untersuchung kennen lernen; obgleich viele Forscher auf diese Methode große Hoffnungen gesetzt hatten, ist doch die Zuverlässigkeit und Anwendbarkeit derselben Gegenstand sehr langdauernder und heftiger Debatten gewesen.

Es handelt sich hier um die sogenannten elektrokapillaren Erscheinungen und ihre Anwendbarkeit zur Messung von elektromotorischen Kräften mit Hilfe des von Lippmann erfundenen Kapillarelektrometers und nach der Methode der Tropfelektroden, die insbesondere von Ostwald und Paschen weiter ausgebildet worden ist.

Wir wollen zunächst die Erscheinung, wie sie beobachtet wird, von den Erklärungsversuchen derselben trennen. Denken wir uns Quecksilber und einen Elektrolyten, z. B. eine Schwefelsäurelösung, die miteinander in Berührung gebracht sind. Zwischen dem Quecksilber und dem Elektrolyten bildet sich eine Potentialdifferenz aus, die wir mit V_0 bezeichnen wollen. Die Quecksilberoberfläche besitzt eine gewisse Oberflächenspannung α_0 (Bd. I). Denken wir uns die Potentialdifferenz zwischen dem Quecksilber und dem Elektrolyten in irgend einer Weise geändert und es sei diese Änderung gleich V. In diesem Falle findet man, daß die Oberflächenspannung des Quecksilbers den neuen Wert α annimmt, d. h. sich um den Betrag $\alpha - \alpha_0$ ändert, der eine Funktion von V darstellt, so daß man

$$\alpha - \alpha_0 = f(V) \quad . \quad . \quad (47)$$

setzen kann.

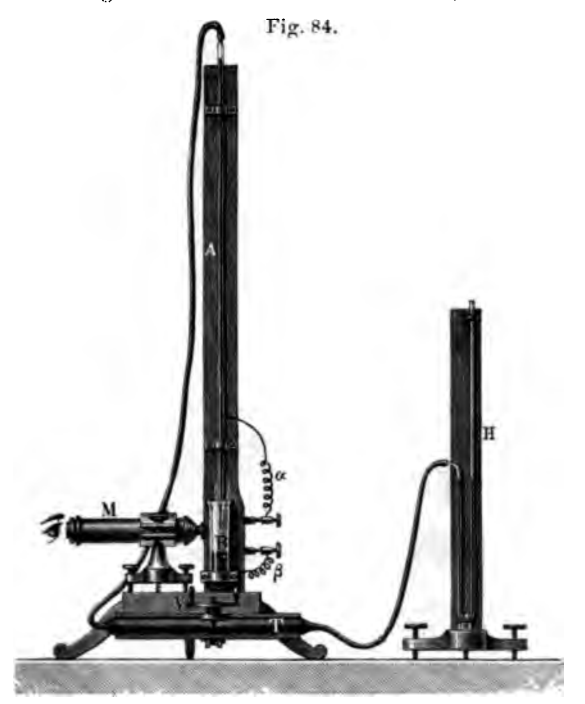
Fig. 83.



Um die Abhängigkeit zu bestimmen, in welcher sich α von V befindet, kann man den einfachen Lippmannschen, von Quincke modifizierten Apparat benutzen. Dieser Apparat (Fig. 83) besteht aus kommunizierenden Röhren, einer breiten und einer kapillaren, die Quecksilber enthalten. Die kapillare Röhre enthält über dem Quecksilber eine Lösung von Schwefelsäure; ihr Ende ist umgebogen und in eine ebensolche, in einem Glasgefäße enthaltene Lösung hineingetaucht; auf dem Boden des Glasgefäßes befindet sich Quecksilber. Zwei Drähte ermöglichen, eine bestimmte Potentialdifferenz V zwischen dem Quecksilber in der Kapillare und dem Quecksilber im Glasgefäße hervorzurufen. Zu diesem Zwecke kann man beispielsweise beide Drähte mit den Polen eines Elementes verbinden. Das Auftreten der neuen Potentialdifferenz ist von einer Wanderung äquivalenter Ionenmengen von H und O nach den beiden Quecksilberoberflächen in der kapillaren Röhre und dem Glasgefäße begleitet. Diese Ionen verteilen sich einerseits auf der sehr kleinen

Quecksilberoberfläche innerhalb der Kapillare, andererseits auf der verhältnismäßig sehr großen Quecksilberfläche im Glasgefäße. Wie wir auch die Rolle dieser Ionen auffassen mögen, ob wir annehmen, daß sie das Auftreten einer elektrischen Doppelschicht hervorrufen, oder daß ihre Anwesenheit eine Änderung des osmotischen Druckes bedingt, jedenfalls muß der von ihnen an der großen Fläche hervorgerufene Potentialsprung sehr klein im Vergleich mit dem Sprunge an der Quecksilberoberfläche in der Kapillare sein. Daher kann man die Annahme machen, daß die ganze Potentialdifferenz V, die man hervor-

Fig. 84.

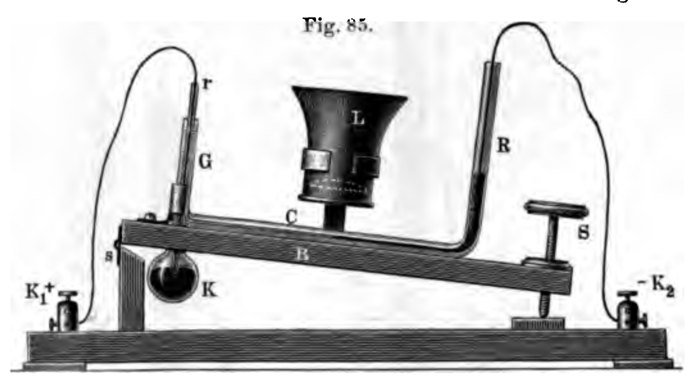


gerufen hatte, ausschließlich an der innerhalb der Kapillaren befindlichen Quecksilberfläche auftritt. Wir wollen die Annahme machen, das Quecksilber innerhalb der Kapillare bilde die Kathode, so daß an seiner Oberfläche eine Polarisation durch Wasserstoff erfolgt. Nun findet man, daß sich das Quecksilberniveau in der Kapillare mit Zunahme von V erniedrigt; hieraus folgt, daß sich die Oberflächenspannung α des Quecksilbers mit Zunahme der Potentialdifferenz V vergrößert. Bläst man durch den mit einem Hahn versehenen, in den weiten Schenkel der kommunizierenden Röhren mündenden Schlauch Luft hinein, so hebt sich das Quecksilberniveau in der Kapillare und man kann es in seine frühere

Lage bringen. Die Größe des hierzu erforderlichen Druckes der hineingeblasenen Luft kann als Maß für die Größe $\alpha - \alpha_0$ dienen.

Das in Fig. 84 (a. v. S.) abgebildete Lippmannsche Kapillarelektrometer beruht auf demselben Prinzip. Das untere Ende der vertikalen Röhre *A* ist zu einer sehr dünnen Kapillare ausgezogen, deren Querschnitt sich nach ihrem in der Nähe der Wandung des Glasgefäßes *B* befindlichen Ende hin verkleinert. Die Röhre ist mit Quecksilber gefüllt, das bis zu dem Querschnitt der Kapillerröhre reicht, in welchem der normale Oberflächendruck gerade hinreicht, um das ganze, Gewicht der Quecksilbersäule zu tragen. Der übrige Teil der Kapillare, sowie das Glasgefäß *B*, auf dessen Boden sich Quecksilber befindet enthalten Schwefelsäurelösung. Das in *A* und *B* befindliche Quecksilber steht durch Drähte mit den Klemmschrauben α und β in Verbindung, von denen Drähte zu irgend einer Quelle einer Potentialdifferenz führen. Das Mikroskop *M* dient zur Beobachtung des Quecksilbermeniskus. Der aus Kautschuk bestehende Behälter *T* ist mit Luft angefüllt und

Fig. 85.



mit dem oberen Ende der Röhre *A*, sowie mit dem Manometer *H* verbunden. Diesen Behälter kann man durch Drehen an einer Schraube mittels zweier Brettchen, zwischen denen sich der Behälter befindet, zusammenpressen. Verbindet man α mit dem negativen, β mit dem positiven Pole der Quelle einer Potentialdifferenz, so steigt das Quecksilberniveau in der Kapillare in die Höhe bis zu einer breiteren Stelle der Kapillare, an welcher, ungeachtet der verminderten Konvexität des Meniskus, der normale Druck den früheren Wert hat. Hierauf preßt man das Reservoir *T* zusammen, bis das Quecksilber in der Kapillare wieder bis zu seinem früheren Orte reicht: das Manometer *H* gibt hierbei an, um wieviel sich der normale Druck, also auch die Oberflächenspannung, vergrößert hat.

Ostwald hat einen relativ einfachen Apparat konstruiert, dessen Einrichtung aus Fig. 85 ersichtlich ist. Die Lupe *L* dient zur Beobachtung des Endes eines Quecksilbersäulchens in der Kapillare *C*, die,

ebenso wie das Kölbchen *K*, Schwefelsäurelösung enthält. Die Empfindlichkeit des Apparates nimmt ab mit Zunahme der Neigung des Röhrchens *C*, unter welchem sich eine Skala befindet. Verschiedene Modifikationen dieses Apparates sind von Berget, Chervet, Claverie u. a. konstruiert worden. S. W. Smith hat (1903) ein transportables Elektrometer konstruiert.

Wir haben vorhin gesagt, daß $\alpha - \alpha_0$ eine Funktion von V ist. Die genauere, zuerst von Lippmann ausgeführte Untersuchung hat folgendes ergeben. Während die (zu dem bereits vorhandenen V_0) hinzutretende Potentialdifferenz V allmählich von Null an wächst, nimmt die Spannungszunahme $\alpha - \alpha_0$ anfänglich schnell, darauf langsamer zu und erreicht bei $V = 0{,}9\,D$ (wo D die elektromotorische Kraft des Daniellelements ist), d. h. ungefähr bei 1 Volt, ihren Maximalwert $\alpha_m - \alpha_0 = 0{,}47\,\alpha_0$, so daß $\alpha_m = 1{,}47\,\alpha_0$ wird; bei weiterer Zunahme von V nimmt die Oberfächenspannung wieder ab, so daß bei $V = 2\,D$ sich der Wert von α nur noch wenig von α_0 unterscheidet.

Die Abhängigkeit der Größe $\alpha - \alpha_0$ von V läßt sich genau bestimmen, wenn man reines Quecksilber wählt; hieraus folgt, daß das Kapillarelektrometer zu sehr genauen Messungen von elektromotorischen Kräften dienen kann, falls letztere weniger als ein Volt betragen.

Ändert man die Konzentration der Schwefelsäurelösung oder ersetzt man diesen Elektrolyten durch andere, so findet man, daß der Maximalwert α_m der Oberflächenspannung vom Elektrolyten nicht abhängt; der Wert V aber, für welchen $\alpha = \alpha_m$ wird, ist für verschiedene Elektrolyte verschieden.

Amalgame, sowie geschmolzenes Woodsches Metall (bei 90°) zeigen ganz analoge Erscheinungen.

Indem wir uns der Erklärung für die betrachteten elektrokapillaren Erscheinungen zuwenden, wollen wir vorausschicken, daß die verschiedenen Erklärungsweisen, von deren Anhängern, wie erwähnt, ein lebhafter Streit geführt wird, durch die wesentlich verschiedenen Vorstellungen über den Mechanismus der Erscheinungen bedingt sind, die an der Quecksilberoberfläche auftreten, während sich die Potentialdifferenz zwischen dem Quecksilber und dem Elektrolyten ändert. Bezeichnet man diese Differenz mit φ, so ist

$$\varphi = V_0 + V \qquad (48)$$

so daß man (47) in der folgenden Form anschreiben kann:

$$\alpha - \alpha_0 = f(V) = f(\varphi - V_0) \qquad (48, a)$$

Die Helmholtzsche Erklärung führt in ihren wesentlichen Zügen auf folgende Vorstellung. An der Berührungsfläche des Quecksilbers und des

Elektrolyten bildet sich eine elektrische Doppelschicht, wobei sich die eine Schicht auf der Quecksilberoberfläche befindet, die andere aus den Ladungen der an dieser Fläche angesammelten Ionen besteht. Die Oberflächenspannung α des Quecksilbers nimmt infolge der Elektrisierung ab, da die gegenseitige Abstoßung zwischen den Elementen der Ladung den Kohäsionskräften, welche die Quecksilberoberfläche zu verringern suchen, entgegenwirkt. Da α größer wird, wenn das Quecksilber als Kathode dient und an seiner Oberfläche die positiv geladenen Kationen (Wasserstoff) anlangen, so folgt hieraus, daß die ursprüngliche Elektrisierung des Quecksilbers, das mit dem Elektrolyten in Berührung steht, positiv ist und daß diese Elektrisierung abnimmt, wenn das Quecksilber die Kathode bildet und sich die an seiner Oberfläche befindlichen Anionen von ihm entfernen. Das Maximum α_m der Oberflächenspannung α tritt ein, wenn die Doppelschicht ganz verschwindet, d. h. wenn $\varphi = 0$, $V = -V_0$ ist. Wenn sich V noch mehr vergrößert, so erhält das Quecksilber bereits negative Elektrisierung, an seiner Oberfläche bildet sich eine Schicht von Kationen und die Spannung α beginnt von neuem abzunehmen. Hierdurch erklärt sich nicht nur das Vorhandensein des Maximums α_m selbst, sondern auch die oben erwähnte Tatsache, daß α_m von der Art des Elektrolyten unabhängig ist.

Bevor wir noch andere Erklärungsweisen der elektrokapillaren Erscheinungen betrachten, wollen wir die Formeln ableiten, welche auf Grund thermodynamischer Erwägungen erhalten werden können und wollen hierauf eine interessante Anwendung betrachten, welche sich auf die Helmholtzsche Theorie stützt. Lippmann hat gezeigt. daß die Änderung der Oberflächenspannung α und des Potentials φ umkehrbare Vorgänge sind: ändert man auf mechanischem Wege die Größe der Quecksilberfläche und hiermit die Spannung α, so tritt eine Änderung von φ ein.

Bezeichnen wir mit s den Flächeninhalt der Quecksilberoberfläche, mit η die Ladung jener Fläche, mit $k = \eta : s$ die Oberflächendichte der Ladung und nehmen wir an, daß sich s und η um ds und $d\eta$ geändert haben. Die Energie U des Systems erfährt in diesem Falle folgende Änderungen: die Energie der Oberflächenspannung vergrößert sich um αds, die Energie der Ladung vergrößert sich um $k\varphi ds$ infolge der Obèrflächenvergrößerung und um $s\varphi dk$ infolge der Dichtezunahme der Ladung selbst. Es ist daher

$$dU = (\alpha + k\varphi) ds + s\varphi dk.$$

Diese Größe muß das vollständige Differential einer gewissen Funktion von s und k sein, folglich ist

$$\frac{\partial(\alpha + k\varphi)}{\partial k} = \frac{\partial(s\varphi)}{\partial s}.$$

Die Größen α und φ hängen von k ab, daher ist

$$\frac{\partial \alpha}{\partial k} + \varphi + k\frac{\partial \varphi}{\partial k} = \varphi,$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial k} + k\frac{\partial \varphi}{\partial k} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = -k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Dies ist die berühmte Gleichung von Lippmann und Helmholtz. Sie stellt einen Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung α, dem Potentialsprunge φ und der Dichte k der elektrischen Ladung her. Planck hat diese Formel aus dem zweiten Hauptsatze der Thermodynamik abgeleitet, ganz unabhängig von irgend einer bestimmten Vorstellung über die Vorgänge, die an der Trennungsfläche zwischen Quecksilber und Elektrolyt auftreten.

Lippmann ist noch weiter gegangen, indem er die Existenz einer elektrischen Doppelschicht, ganz analog einem geladenen Kondensator, annahm. Bezeichnet man mit q die Kapazität der Oberflächeneinheit dieses Kondensators, so daß $\eta = qs\varphi$ ist, dann erhält man, da $\eta = ks$ ist, $k = q\varphi$, $dk = qd\varphi$, d. h. $q = dk:d\varphi$. Jetzt gibt (49)

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} = -\frac{\partial k}{\partial \varphi} = -q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Beobachtungen, von denen im früheren die Rede war, zeigen uns, daß die Abhängigkeit $\alpha = f(\varphi)$ in der Form $\alpha = A + B\varphi + C\varphi^2$ dargestellt werden kann. Möge α seinen Maximalwert α_m für $\varphi = \varphi_m$ annehmen. In diesem Falle ist, wie sich leicht beweisen läßt:

$$-\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} = \frac{2(\alpha_m - \alpha)}{(\varphi_m - \varphi)^2} = q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50, a)$$

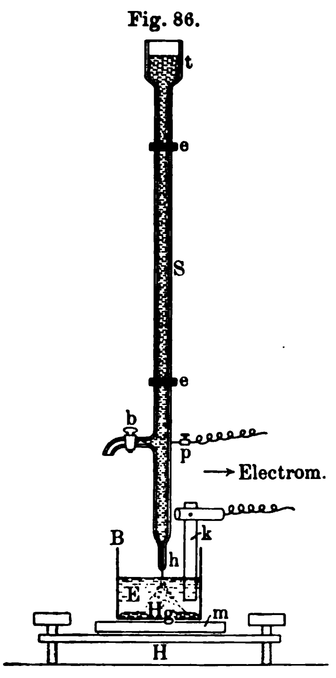
Wir hatten aber (S. 116) gesehen, daß die Kapazität q der Oberflächeneinheit gleich $1:4\pi d$ ist. Die Größen $\alpha_m - \alpha$ und $\varphi - \varphi_m$ lassen sich unmittelbar beobachten, daher konnte Lippmann den Wert der Größen q und d berechnen; er fand (wenn man einen Schreibfehler in seinen Rechnungen verbessert) $d = 1{,}4 \,.\, 10^{-7}$ mm.

Gehen wir nunmehr zu der interessanten Anwendung der Helmholtzschen Theorie auf die sogenannten Tropfelektroden über. Die Bildung einer Doppelschicht erfordert eine gewisse Zeit; hieraus zog Helmholtz den Schluß, daß, wenn man das Quecksilber aus einer kleinen Öffnung mit großer Geschwindigkeit in den Elektrolyten strömen läßt, wobei es in unzählige kleinste Tröpfchen zerfällt, die Potentialdifferenz φ zwischen Quecksilber und Elektrolyt gleich Null wird. Hat sich aber eine Potentialdifferenz bereits ausgebildet,

so wird die Ladung des Quecksilbers so lange von den Tröpfchen fortgeführt, bis sie verschwindet, d. h. bis $\varphi = 0$ wird.

Demgemäß kann man den Elektrolyten mit einem Apparat verbinden, der zur Messung des Grades seiner Elektrisierung dient (empfindliches Elektroskop, Elektrometer, s. u.), ohne hierbei eine neue elektromotorische Kraft in die Kette einzuführen. Diesen Umstand hat zuerst Ostwald (1887) benutzt, indem er eine Tropfelektrode konstruierte, wobei sich die Öffnung für das ausströmende Quecksilber im Innern des Elektrolyten befand. Die Anwendung derartiger Elektroden seitens verschiedener Forscher (Exner und Tuma, Pellat, Braun, Miesler u. a.) führte zu widersprechenden Resultaten, bis Paschen (1890) die Anordnung der Tropfelektrode änderte, indem er die Öffnung über die Oberfläche des Elektrolyten verlegte und zwar so, daß an die Oberfläche selbst die Stelle zu liegen kam, an welcher der zusammenhängende Quecksilberstrahl in kleinste Tröpfchen zerfällt. Die Paschensche Elektrode ist in Fig. 86 abgebildet. *B* ist ein Glasgefäß, das den Elektrolyten *E* enthält; es steht auf einer Ebonitplatte *m*; *h* ist die Öffnung, aus welcher das Quecksilber ausströmt; *k* ist ein Stäbchen aus Metall (oder einer anderen Substanz); *p* ist eine Klemmschraube, die an einem durch die Wandung der Glasröhre *S* hindurchgehenden und mit dem Quecksilber in Berührung stehenden Drahte befestigt ist. Es wird die Annahme gemacht, daß die Potentialdifferenz zwischen *k* und *E* gleich der Potentialdifferenz zwischen *k* und dem Quecksilber in *S*, d. h. zwischen *k* und *p* sei.

Fig. 86.



Die Frage, ob dieser Schluß richtig ist, ist von großer Bedeutung. Ist er richtig, so gestattet die beschriebene Tropfelektrode eine Messung der Potentialdifferenz zwischen einem Metall oder einem anderen festen Körper und einem Elektrolyten, d. h. sie gestattet die Lösung der ein Jahrhundert alten Frage nach der Größe der einzelnen Komponenten der elektromotorischen Kraft eines Elementes. Es existiert gegenwärtig eine ganze Schule von Forschern, die diese Frage für gelöst hält: wie wir aber später sehen werden, begegnet die Anwendung der Methode der Tropfelektrode auch zahlreichen Entgegnungen, abgesehen davon, daß auch die Richtig-

keit der Helmholtzschen Erklärung der elektrokapillaren Erscheinungen von vielen Forschern angezweifelt wird. Die unter Anwendung von Tropfelektroden ausgeführten Arbeiten werden wir später erwähnen.

Warburg hat (1890) eine ganz andere Erklärung für die elektrokapillaren Erscheinungen gegeben. Er hat gezeigt (1889), daß sich in der Schwefelsäurelösung, die sich in Berührung mit dem Quecksilber befindet, ein Schwefelquecksilbersalz bildet, wenn sich in ihr Luftsauerstoff gelöst befindet. An der Quecksilberoberfläche selbst übertrifft die Konzentration der Salzlösung die Konzentration in der übrigen Flüssigkeit um eine gewisse Größe Γ. Im Kapillarelektrometer ist diese Größe an beiden Quecksilberflächen die gleiche und $\Gamma = 0$, falls man eine reine Quecksilberfläche hat ($k = 0$ nach der Theorie von Helmholtz). Wird das Quecksilber in der Kapillare zur Kathode, so scheiden die H-Ionen aus dem Salz Hg aus, wodurch sich die Konzentration der Salzlösung vermindert; gleichzeitig nimmt sie an der anderen Quecksilberfläche (im Glasgefäße) zu. Infolgedessen entsteht ein Konzentrationselement. Bezieht man Γ auf die Flächeneinheit und bezeichnet mit c das elektrochemische Äquivalent des Quecksilbers, so spielt, wie Warburg und Planck gezeigt haben, die Größe $\Gamma : c$ dieselbe Rolle, wie k in der Theorie von Helmholtz, und man erhält anstatt (49) die Gleichung

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} = -\frac{\Gamma}{c} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

In ihren Resultaten gehen die Theorien von Helmholtz und Warburg wesentlich auseinander. Die Größen $\Gamma : c$ und k sind gleichartig; es sind dies auf die Flächeneinheit bezogene Elektrizitätsmengen; aber es sind Größen von ganz verschiedener Ordnung: k ist eine ungeheuer große Zahl, da es die Dichte der Ladung eines Kondensators ist, dessen Oberflächen voneinander in molekularer Entfernung abstehen, während $\Gamma : c$ der Ladung der Quecksilberionen entspricht, die in der Schicht des Elektrolyten verteilt sind, wobei die Dicke der Schicht durchaus keine sehr kleine Größe zu sein braucht. Auch der Ursprung der Ladungen selbst ist ein verschiedener: nach der Theorie von Helmholtz haben wir Ladungswanderungen im Elektrolyten und Quecksilber, die nur bis zu beiden Flächen der Doppelschicht gehen, d. h. wir haben es mit einem Ladungsstrom zu tun; nach der Theorie von Warburg dagegen haben wir es mit einem Elektrizitätsstrome zu tun, welcher ohne Unterbrechung vom Elektrolyten zum Quecksilber geht, also mit einem Leitungsstrom. Warburg beruft sich darauf, daß sich mit Abnahme der Konzentration der Lösung in der Kapillare die Oberflächenspannung α des Quecksilbers vergrößert; diese Tatsache ist durch unmittelbare Beobachtungen von G. Meyer (1892) bestätigt worden; auf diese Weise erklärt sich das Anwachsen von α, wenn φ zunimmt und das Quecksilber als Kathode dient. G. Meyer (1894)

erklärt den Eintritt des Maximums und die darauf folgende Abnahme von α dadurch, daß sich bei großen Werten von φ Metallamalgame bilden, deren Salze im Elektrolyten gelöst sind; für den Fall aber, daß dieser Elektrolyt eine Schwefelsäurelösung ist, konnte G. Meyer keinen derartigen chemischen Prozeß entdecken, der als Ursache für die Abnahme der Größe α angesehen werden könnte. Es gelang ihm nicht, die Bildung eines Wasserstoffamalgams nachzuweisen, der er anfänglich die Abnahme der Oberflächenspannung zuzuschreiben suchte.

Viele Forscher sind bemüht gewesen, experimentelle Beweise zugunsten der einen oder anderen der beiden erwähnten Theorien, sowie für oder gegen die Anwendbarkeit der Tropfelektroden zu erbringen. Beweise zugunsten der Warburgschen Theorie haben G. Meyer, Behn (1897) u. a. geliefert. Jedoch noch im Jahre 1898 bekannte Warburg von neuem, daß seine Theorie die Abnahme von α für den Fall der Schwefelsäurelösung nicht zu erklären vermag.

Zugunsten der Theorie von Helmholtz und der aus ihr abgeleiteten Schlüsse spricht insbesondere eine Arbeit von Rothmund (1894), der jedoch findet, daß der Elektrolyt mit dem ihm entsprechenden Quecksilbersalze gesättigt sein muß, damit das Kapillarelektrometer für $\varphi = 0$ das Maximum von α gibt; befindet sich im Elektrometer ein Amalgam, so muß der Elektrolyt mit dem Salze des im Quecksilber gelösten Metalles gesättigt sein.

Eine kritische Untersuchung der Theorie von Helmholtz haben S. W. Smith (1900) und St. Meyer (1896) geliefert.

Schreber (1894) hat auf theoretischem Wege den Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung α und der Potentialdifferenz φ abgeleitet; er findet

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = -A\varphi e^{B\varphi},$$

wo A und B zwei Konstante sind.

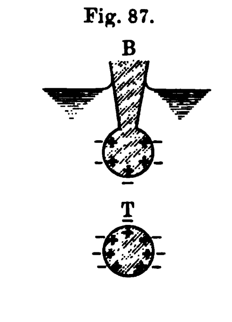
Im Jahre 1896 gab Nernst eine neue Erklärung für die Wirkung der Tropfelektroden; dieselbe stützt sich auf die osmotische Theorie der elektromotorischen Kräfte, die in § 5 behandelt worden ist. Diese Erklärung besteht in folgendem: Wenn Quecksilber mit der Lösung eines Quecksilbersalzes in Berührung steht, z. B. mit Kalomellösung, so vereinigt sich eine gewisse Anzahl Quecksilberionen unverzüglich mit dem Quecksilber und gibt ihm ihre positive Ladung ab; die negativen Anionen des Chlors sammeln sich so lange längs der Oberfläche, bis die entstandene Doppelschicht der Potentialdifferenz (42)

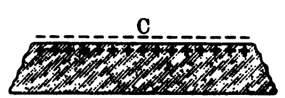
$$E = RT lg \frac{P}{p}$$

entspricht: hier ist p der osmotische Druck des gelösten Salzes, P eine gewisse, für Quecksilber charakteristische Konstante, die aber vom

Elektrolyten abhängt (Lösungsdruck). Der Tropfen *T* (vgl. die von Palmaer stammende Fig. 87), welcher aus der Öffnung des Röhrchens *B* hervorträufelt, bewegt sich zusammen mit den Anionen. Sobald der Tropfen die bereits mit einer genügenden Menge von Anionen bedeckte Quecksilberfläche in *C* erreicht, scheidet er Quecksilberkationen aus, die mit den Anionen zusammen das Salz bilden. Bei ununterbrochenem Heraustr äufeln der Tropfen entsteht eine Abnahme der Konzentration um *B* herum und Zunahme derselben bei *C*, so daß das ganze System ein Konzentrationselement bildet, wie dies auch die Theorie von Warburg voraussetzt. Ohne auf weitere Einzelheiten einzugehen, wollen wir bloß bemerken, daß Palmaer in drei interessanten Arbeiten (1898, 1899 und 1901) bewiesen hat, daß die Tropfelektrode in der Tat diejenigen Konzentrationsänderungen der Lösung hervorruft, von denen die Nernstsche Theorie spricht. Jedoch noch vor Erscheinen der zweiten Arbeit von Palmaer zeigte G. Meyer (1899), daß auch die Warburgsche Theorie die beobachteten Konzentrationsänderungen erklärt, womit auch Palmaer in seiner zweiten Arbeit übereinstimmt. In seiner dritten Veröffentlichung (1901) nimmt Palmaer abermals eine Vergleichung der Theorien von Helmholtz, Warburg und Nernst vor. Er gelangt zu dem Ergebnis, daß die Nernstsche Theorie am meisten befähigt ist, die elektrokapillaren Erscheinungen zu erklären, daß jedoch keine von obigen Theorien über alle Einzelheiten der Erscheinungen Aufschluß zu geben vermag. Hierher gehört beispielsweise die Asymmetrie der beiden Äste der Kurve, welche den Zusammenhang zwischen der Oberflächenspannung und der Potentialdifferenz ausdrückt. Wir wollen darauf hinweisen, daß bei den Versuchen von Palmaer die Öffnung des Röhrchens, wie man aus der schematischen Fig. 87 ersieht, sich innerhalb des Elektrolyten befand. Nernst und Palmaer lassen die Frage nach der Polarisation und ihrem Einfluß auf die Oberflächenspannung des Quecksilbers völlig beiseite.

Fig. 87.





Weitere Untersuchungen sind von Bernstein (1901), van Laar (1902), v. Lerch (1902), Kučera (1903), Gouy (1903, 1906), Krueger (1903), Lenkewitz (1904), Billitzer (1904), Krüger (1904), Christiansen (1905) und Vining (1906) angestellt worden. Van Laar suchte die Asymmetrie der kapillaren Kurve theoretisch zu erklären; er gelangte zu dem wichtigen Ergebnisse, daß das Maximum der Oberflächenspannung nicht mit dem Momente zusammenzufallen braucht, wo die Potentialdifferenz zwischen Quecksilber und Flüssigkeit gleich Null

14*

wird; die Differenz kann bis zu 0,04 Volt gehen. Hieraus zog er den Schluß, daß das Kapillarelektrometer überhaupt nicht zu genauen Messungen der Potentialdifferenz zwischen einem Metalle und Elektrolyten dienen kann.

Gouy hat die Form der kapillaren Kurve in ihrem Zusammenhange mit der Beschaffenheit und Konzentration des Elektrolyten sehr eingehend untersucht; er hat ebenfalls gefunden, daß das Maximum der Kurve nicht mit dem Verschwinden der Potentialdifferenz zwischen Quecksilber und Elektrolyt zusammenfällt. Ferner hat er gefunden, daß für Amalgame die Oberflächenspannung nur vom Elektrolyten und der Potentialdifferenz abhängt, nicht aber von der Art des im Quecksilber gelösten Metalls. Dies Gesetz ist von Christiansen bestätigt worden. Endlich hat Gouy (1906) den Einfluß einer Beimengung von verschiedenen organischen Verbindungen auf die Form der Kurve für eine sehr große Anzahl von Fällen studiert.

Wir wiederholen nochmals, daß wir uns mit den elektrokapillaren Erscheinungen und den Tropfelektroden eingehender beschäftigt haben im Hinblick auf die Hoffnungen, die man auf sie gesetzt hatte; man hatte erwartet, daß sie dazu führen würden, die alte und für die Theorie der elektrischen Erscheinungen fundamentale Frage nach der elektromotorischen Kraft bei der Berührung von Metallen und Elektrolyten zu lösen, folglich auch die Frage nach der Größe der einzelnen Komponenten, aus denen sich die elektromotorische Kraft eines Elementes zusammensetzt.

§ 9. Der gegenwärtige Stand der Frage nach der elektromotorischen Kraft beim Kontakt von Körpern. In den vorhergehenden Paragraphen hatten wir die Erscheinung des Auftretens einer Potentialdifferenz an den Enden einer Reihe sich gegenseitig berührender Substanzen kennen gelernt. Diese Differenz ist gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots$ usw., welche an den Berührungsflächen der verschiedenartigen Substanzen wirken und wird die elektromotorische Kraft der gegebenen Reihe von Substanzen oder des gegebenen Elementes genannt: wir wollen sie mit E bezeichnen.

Für die besonders wichtige Kombination, die aus zwei Leitern A und B erster Klasse und zwei Elektrolyten S_1 und S_2 besteht, haben wir, vgl. (16), S. 176

$$E = A \mid S_1 + S_1 \mid S_2 + S_2 \mid B + B \mid A = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \quad . \quad (52)$$

z. B. für das Daniellelement

$$e_1 = \mathrm{Cu} \mid \mathrm{CuSO_4},\ e_2 = \mathrm{CuSO_4} \mid \mathrm{ZnSO_4},\ e_3 = \mathrm{ZnSO_4} \mid \mathrm{Zn},\ e_4 = \mathrm{Zn} \mid \mathrm{Cu}$$

und

$$E = \mathrm{Cu} \mid \mathrm{CuSO_4} + \mathrm{CuSO_4} \mid \mathrm{ZnSO_4} + \mathrm{ZnSO_4} \mid \mathrm{Zn} + \mathrm{Zn} \mid \mathrm{Cu} \quad . \quad . \quad (52, a)$$

Wir hatten auf S. 177 zwei Fragen aufgeworfen: 1. Von welchen Umständen hängt die Größe E ab? 2. Wie groß sind die Komponenten

ist, haben wir in einigen Fällen E gleich einem Volt angenommen, falls nämlich die Resultate von den Autoren nicht in Volt angegeben waren.

Damit die Summe der vier Komponenten eine positive Größe ergibt, gehen wir vom positiven Pol, dem Cu durch $CuSO_4$, $ZnSO_4$, Zn zum negativen Pole Cu. Das Zeichen (0) soll bedeuten, daß der genannte Forscher die gegebene Größe für sehr klein (beispielsweise gleich 0,01 Volt) oder aber gleich Null hält.

	Jahr	e_1 Cu | $CuSO_4$	e_2 $CuSO_4$ | $ZnSO_4$	e_3 $ZnSO_4$ | Zn	e_4 Zn | Cu
Clifton	1877	—	—	—	0,85
Streintz	1878	—	—	—	0,93
Hallwachs	1886	—	—	—	0,84
Kohlrausch	1850	+ 0,028	— 0,033	0,358	0,75
Ayrton und Perry	1880	+ 0,07	—	0,28	0,43
Exner und Tuma	1888	— 0,406	—	1,275	—
Gouré de Villemontée	1890	+ 0,287	(0)	0,231	0,692
Ostwald	1887	+ 0,38	—	0,73	(0)
Paschen	1891	+ 0,02	+ 0,464	0,58	(0)
Miesler	1887	— 0,22	+ 0,22	1,06	(0)
Pellat	1890	0	+ 0,547	0	0,664
Neumann	1894	+ 0,585	(0)	0,524	(0)
Rothmund	1894	+ 0,445	(0)	0,587	(0)

Weitere Kommentare zu dieser Tabelle sind überflüssig; besonders interessant ist es, wenn man die drei letzten Zeilen zusammenhält. Unsere Tabelle bestätigt, besser als dies mit vielen Worten möglich wäre, alles was vorhin über den gegenwärtigen Stand der ganzen Frage gesagt worden war; sie zeigt uns die totale Nichtübereinstimmung der bisher erhaltenen Messungsresultate und zwingt jeden, der sich leidenschaftslos und durchaus objektiv zur Sache verhält, dem Satze beizustimmen, daß wir gegenwärtig über die Komponenten der elektromotorischen Kraft eines Elementes einfach gar nichts wissen und daß es jetzt, wie vor einem Jahrhundert, fraglich bleibt, ob die Quelle für die Elektrizität in der Berührung der Metalle untereinander oder der Berührung zwischen den Metallen und Elektrolyten zu suchen ist.

Es ist nach alle diesem klar, daß eine ausführliche Beschreibung der verschiedenen Messungen und Angabe der entsprechenden Resultate sich nicht weiter lohnen würde. Wir wollen uns daher auf das allernotwendigste beschränken.

§ 10. Experimentelle Untersuchung der Elektrisierung beim Kontakt von Leitern erster Ordnung. Es ist hier vorzugsweise vom Kontakt zwischen Metallen die Rede.

Folgende Tatsache kann nicht dem geringsten Zweifel unterliegen: Wenn zwei Metalle M und N einander berühren, so treten auf ihnen zwei ungleichnamige, quantitativ gleiche elektrische Ladungen auf.

Wir wollen annehmen, daß diese Metalle zu derselben Zeit eine gewisse Potentialdifferenz $M|N = V_1 - V_2$ erlangen, die gleich der elektromotorischen Kraft ist; letztere sei mit e bezeichnet. Wie wir bereits erwähnt haben, bestreiten viele Forscher die Existenz einer solchen Potentialdifferenz.

Die Geschichte der Entdeckung der Fundamentalerscheinungen ist in Kürze die folgende.

Im Jahre 1789 bemerkte die Frau des Prof. L. Galvani, daß frisch präparierte Froschschenkel Muskelkontraktionen zeigten, sobald in ihrer Nähe elektrische Entladungen erfolgten. Beim Studium dieser Erscheinungen entdeckte Galvani, daß ähnliche Muskelkontraktionen auch auftreten, wenn zwei Punkte der Muskeln zwei verschiedene Metalle berührten, die ihrerseits miteinander in Berührung standen. Er erklärte diese Erscheinung durch die Entladung einer besonderen Nerven- oder Lebensflüssigkeit, welche in den Nerven angesammelt ist und sich durch die Metalle hindurch ausgleicht. Volta wies als Erster darauf hin, daß die Hauptrolle bei dieser Erscheinung der Berührung zwischen den ungleichartigen Körpern zufällt, welche sonach die Quelle ihrer Elektrisierung darstellt. Man kann ihn daher als den Begründer der Kontakttheorie bezeichnen, d. h. jener Theorie, welche annimmt. daß die Berührung von ungleichartigen Körpern schon an sich die Quelle ihrer Elektrisierung bildet.

Wir wollen einige der Grundversuche beschreiben, mit deren Hilfe man die Tatsache, daß Metalle beim Kontakt elektrisiert werden, nachweisen kann.

Auf ein Elektroskop, das hinreichend empfindlich ist, schraubt man eine nicht lackierte kupferne Scheibe (Fig. 88 a. f. S.) und legt auf sie vorsichtig eine isolierte, ebenfalls nicht mit Lack überzogene Zinkplatte. Hebt man hierauf diese letztere ab, so zeigt das Elektroskop, daß in der Kupferscheibe eine Ladung von negativer Elektrizität aufgetreten ist. Vertauscht man die Scheiben miteinander, so erhält man positive Ladung.

Um die Ladung zu verstärken, verfährt man folgendermaßen.

Man schraubt auf das Elektroskop eine lackierte Messingscheibe b (Fig. 89 a. f. S.) und legt auf dieselbe eine ganz gleiche Scheibe a, die mit einem isolierenden Griffe A versehen ist. Diese beiden, durch die isolierenden Lackschichten getrennten Scheiben bilden einen ebenen

Kondensator von sehr großer Kapazität. Die Scheibe *b* wird mit einer Kupferscheibe *k* verbunden; von *a* geht ein Draht aus, dessen Ende *h* in unbeweglicher Lage befestigt wird. Auf *k* legt man die Zinkplatte *z*, die mit einem gläsernen Griffe *B* versehen ist. Hebt man jetzt die Scheibe *z* so hoch, daß ihre obere Fläche das Drahtende *h* berührt, so gehen beide Ladungen auf den Kondensator *ab* über. Man wiederholt nun (etwa 50mal) das Aufsetzen von *z* auf *k* und das Berühren mit *h*.

Fig. 88. Fig. 89.

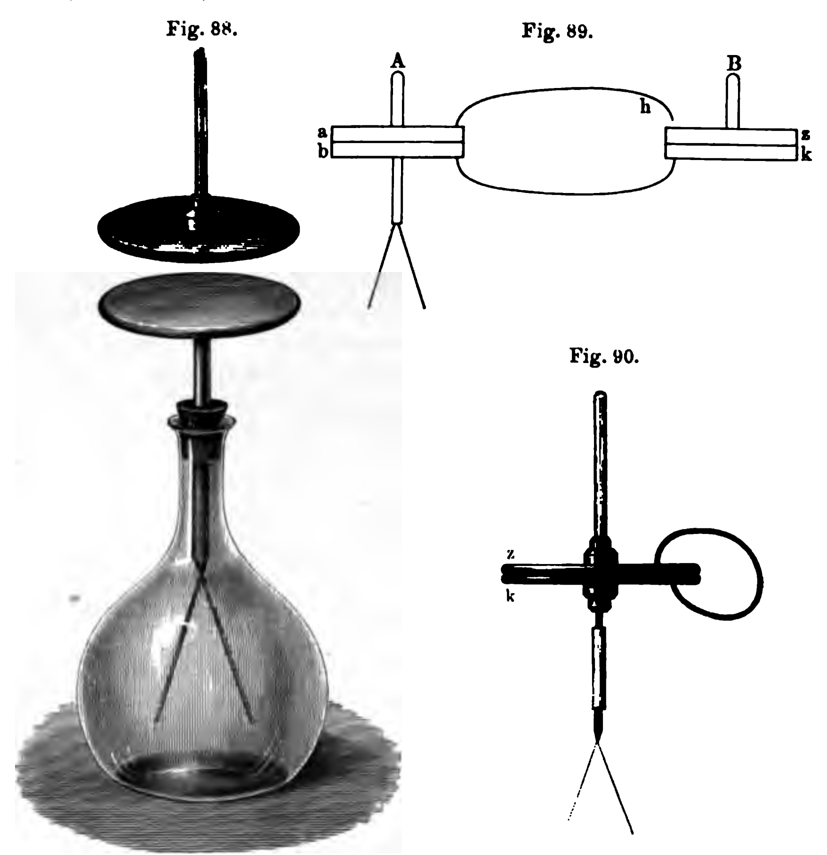


Fig. 90.

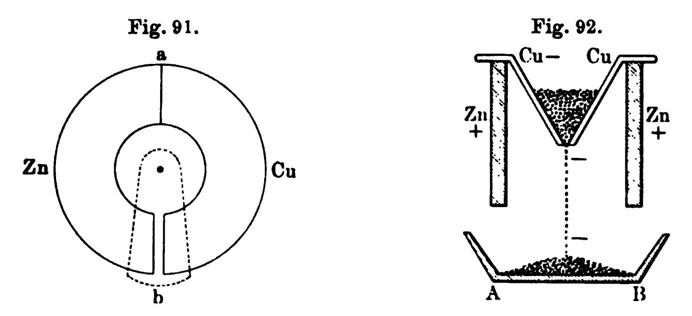
In diesem Falle erhält der Kondensator *ab* relativ große Ladungen, welche sich fast vollständig zu beiden Seiten der die Scheiben *a* und *b* trennenden Lackschicht ansammeln. Hebt man hierauf die Scheibe *a* ab, so läßt sich die Ladung *b* verhältnismäßig sehr leicht durch das Elektroskop erkennen. Lord Kelvin (W. Thomson) hat gezeigt, daß das Gelingen des Versuchs in hohem Maße davon abhängt, wie das Abheben der Scheibe *z* geschieht. Es ist notwendig, daß die Berührung der Scheiben *k* und *z* in allen Punkten möglichst gleichzeitig erfolgt.

Daher gelingt der Versuch besonders gut, wenn die Scheibe *z* mit irgend einem Mechanismus in Verbindung steht, der ihr nur gestattet, sich in senkrechter Richtung zu ihrer Unterfläche zu bewegen.

Um zu zeigen, daß die Elektrisierung nicht von der Berührungsfläche abhängt, überzieht man die obere Fläche einer Kupferscheibe *k* (Fig. 90), die auf ein Elektroskop geschraubt ist, sowie die untere Fläche der Zinkscheibe *z* mit einer Lackschicht. Nachdem man *z* auf *k* gesetzt hat, verbindet man die beiden anderen nicht lackierten Flächen von *k* und *z* durch einen Kupferdraht, wie dies die Figur zeigt. Entfernt man hierauf den Draht und hebt die Scheibe *z* ab, so beobachtet man dieselbe Wirkung auf das Elektroskop, wie beim ersten der oben beschriebenen Versuche. Um eine etwaige Reibung zwischen den ungleichartigen Körpern, die, wie wir sehen werden, ebenfalls eine Elektrizitätsquelle abgibt, zu vermeiden, kann man einen Draht wählen, der zur Hälfte aus Kupfer, zur Hälfte aus Zink besteht und mit dem kupfernen Ende die Scheibe *k*, mit dem aus Zink die Scheibe *z* berühren. Die Wirkung ist dabei die gleiche wie im vorhergehenden Falle.

Wir wollen auf Versuche, bei denen man eine der Platten mit dem Finger zu berühren hat, gar nicht näher eingehen, da die Berührung

Fig. 91. Fig. 92.



mit dem stets mehr oder weniger feuchten Finger die Bedingungen, unter denen die Erscheinung auftritt, kompliziert und ein ganz neues Element hineinbringt, nämlich die Berührung eines Metalles mit einer Flüssigkeit.

Sehr überzeugend ist der folgende Versuch. Man stellt aus zwei flachen Scheiben aus Kupfer und Zink einen Ring (Fig. 91) her, dessen beide Hälften längs der Linie *a* aneinandergelötet sind, während der Ring in *b* offen bleibt. Über dem in horizontaler Lage befindlichen Ringe hängt ein horizontaler flacher Zeiger, dessen Gleichgewichtslage in der Figur durch eine punktierte Kontur angedeutet ist. Elektrisiert man diesen Zeiger positiv, so dreht er sich nach der aus Kupfer bestehenden Ringhälfte hin, ist er negativ elektrisiert, nach der aus Zink bestehenden. W. Thomson hat diesen Versuch modifiziert, indem er

ein Quadrantenelektrometer (S. 36) konstruierte, in welchem das eine Paar der kreuzweise gelegenen Quadranten aus Kupfer, das andere aus Zink bestand. Bei Verbindung der nebeneinander gelegenen (ungleichartigen) Quadranten beobachtete er, falls der Zeiger des Elektrometers elektrisiert war, ebensolche Ablenkungen des letzteren nach der einen oder anderen Seite, wie in dem soeben beschriebenen Versuche mit dem Ringe. Ein anderer seiner Versuche bestand in folgendem: In einen Zinkzylinder (Fig. 92 a. v. S.) wird ein kupferner Trichter gestellt. aus welchem Kupferfeilspäne in ein mit einem Elektroskop verbundenes Gefäß AB herabfallen; letzteres zeigt negative Elektrisierung an.

Es ist sonach gar nicht zu bezweifeln, daß beim Kontakt von Leitern erster Ordnung Elektrisierung beobachtet wird; zu solchen Leitern gehören nicht nur die Metalle, sondern auch andere feste Leiter, wie z. B. Kohle, verschiedene Oxyde, Kiese usw.

Es unterliegt ferner keinem Zweifel, daß man die Leiter erster Ordnung in eine Voltasche Spannungsreihe einordnen kann und daß sie dem Voltaschen Gesetze gehorchen.

Viele Forscher haben sich damit beschäftigt, die Körper in eine Voltasche Reihe einzuordnen, in der jeder Körper beim Kontakt mit dem nachfolgenden positiv, also bei Berührung mit dem vorhergehenden negativ elektrisiert wird. Hierher gehören Volta, Ritter, Seebeck, Péclet, Munk, Pfaff u. a. Diese Versuche haben gezeigt, daß die Stellung eines Körpers in der Voltaschen Reihe in hohem Grade von seinem physikalischen Zustande und insbesondere von der Beschaffenheit seiner Oberfläche abhängt. Unvollkommene Reinheit, Politur und insbesondere Oxydschichten sind hier von großem Einfluß. Daher ist es nicht zu verwundern, daß die Reihenfolge der Körper in den von verschiedenen Forschern aufgestellten Spannungsreihen eine verschiedene ist, wie man dies aus den folgenden Beispielen ersieht:

Volta: (+) Zn, Pb, Sn, Fe, Cu, Ag, Au, C (Graphit), MnO_2 (—).

Seebeck: (+) Zn, Pb (poliert), Sn, Pb (nicht poliert), Sb, Bi, Fe, Cu, Pt, Ag (—).

Pfaff: (+) Zn, Cd, Sn, Pb, Wo, Fe, Bi, Sb, Cu, Ag, Au, Pt, Pd (—).

Péclet: (+) Zn, Pb, Sn, Bi, Sb, Fe, Cu, Au (—).

Auerbach hält folgende Reihe für die wahrscheinlichste: (+) Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Stahl, Cu, Ag, Au, Kohle, Ur, Pt, Pd, MnO_2, PbO_2 (—).

Hesehus findet, daß die Metalle in der Voltaschen Reihe von (+) nach (—) nach zunehmender Dichte aufeinander folgen.

Mit dem Voltaschen Gesetze haben wir uns bereits auf S. 173 bekannt gemacht: wir haben gesehen, daß es durch die Formel

$A|B + B|C = A|C$ ausgedrückt wird, also z. B. Zn | Fe + Fe | Cu = Zn | Cu. Hieraus folgte

$$A|B + B|C + C|D + \cdots + M|N = A|N.$$

Die Potentialdifferenz zweier Metalle (A und N) ist die gleiche, einerlei ob sie einander unmittelbar berühren oder ob sie sich an dem Ende einer beliebigen Reihe von Metallen befinden. Ferner ist

$$A|B + B|C + C|D + \cdots + M|A = 0.$$

Die elektromotorische Kraft, welche in einer Reihe von Metallen wirkt, deren Enden gleichartig (A) sind, ist gleich Null. Auf S. 171 war bereits erwähnt worden, daß sich diese Gesetze nur auf den Fall beziehen, wo alle Teile der Reihe von einander berührenden Körpern ein und dieselbe Temperatur haben.

Bevor wir zu den verschiedenen Bestimmungen der Werte für die elektromotorischen Kräfte $e = M|N$ übergehen, wollen wir uns fragen, worin die verschiedenen Forscher die Quelle jener Elektrisierungen gesucht haben, die beim Kontakt von Metallen zweifellos auftreten. Volta glaubte, daß nicht nur die Berührung von Metallen untereinander, sondern auch die Berührung eines Metalls mit einem Elektrolyten an und für sich, d. h. unabhängig von etwaigen chemischen Reaktionen, die Ursache der beobachteten Elektrisierungen ist. Zu den Anhängern der Kontakttheorie für den Fall einer Berührung unter Metallen gehörte auch Helmholtz, der das Auftreten der Ladungen durch die Annahme erklärte, daß die verschiedenen Metalle die Elektrizität in verschiedenem Maße anziehen: hierbei zieht ein und dasselbe Metall die positive und die negative Elektrizität mit ungleicher Kraft an. So zieht z. B. das Kupfer die negative, das Zink die positive Elektrizität stärker an, wodurch sich auch ihre Elektrisierung beim Kontakt erklärt. Helmholtz glaubte, daß diese Anziehungen nur auf unmeßbar kleine Entfernungen wirken.

Wir wollen bemerken, daß die bisweilen ausgesprochene Meinung, die Kontakttheorie widerspreche dem Prinzip von der Erhaltung der Energie, eine irrige ist. In der Tat zeigt es sich, daß in allen denjenigen Fällen, wo die Berührung zweier Metalle eine scheinbar ununterbrochen wirkende und unerschöpfliche Quelle von irgendwelchen Energieformen darstellt, die wahre Quelle eine ganz andere ist. So erscheint z. B. die elektrische Energie des in Fig. 89 auf S. 216 abgebildeten Kondensators *ab* auf Kosten der Extraarbeit, welche man beim Abheben der Zinkscheibe *z* zu leisten hat, weil die ungleichnamig elektrisierten Scheiben *k* und *z* einander anziehen.

Sehr bald nach Entstehung der Kontakttheorie kam die sogenannte chemische Theorie auf, die im Laufe der Zeit eine große Zahl verschiedenartiger Änderungen erfahren hat. Zu allererst hat bereits im Jahre 1800 Fabroni den Gedanken ausgesprochen, daß die Ursache

der Elektrisierung, welche beim Kontakt von Metallen mit Elektrolyten auftritt, die chemische Wechselwirkung dieser Körper ist. Als Begründer der chemischen Theorie kann man De la Rive (1837) ansehen, der zuerst mit Bestimmtheit den Gedanken aussprach, daß auch beim Kontakt von Metallen die Ursache der Elektrisierung in der Wirkung der feuchten Luftschicht zu suchen ist, die stets zwischen den beiden Metallplatten verbleibt. Wir wollen hier nicht seine recht gezwungenen Erklärungen der Tatsache wiederholen, daß z. B. bei der Berührung von Kupfer mit Zink gerade die entgegengesetzte Elektrisierung beobachtet wird wie in dem Falle, wo Kupfer und Zink nebeneinander in Wasser tauchen. Von Wichtigkeit ist, daß die chemische Theorie in allen Stadien ihrer Entwickelung angenommen hat, daß man die Ursache der Elektrisierung beim Kontakt von Metallen in der Wirkung der umgebenden Luft auf die in Berührung befindlichen Metalle zu suchen hat. Diese Wirkung hat man gewöhnlich für eine rein chemische Wirkung gehalten; man glaubte z. B., die Elektrisierung sei eine Folge der Oxydation, welcher die Metalloberflächen an der Luft ausgesetzt sind. Man hat sehr zahlreiche Untersuchungen zur Lösung der Frage angestellt, welche Rolle dem umgebenden Medium bei der betrachteten Erscheinung zufällt. Die Mehrzahl dieser Untersuchungen konnte jedoch zu keiner Lösung der Frage führen. So konnten beispielsweise die Versuche, einen Metallkontakt im Vakuum hervorzurufen, keine befriedigenden Resultate geben, da das vermeintliche „Vakuum" in Wirklichkeit kein Vakuum, sondern ein von mehr oder weniger verdünnter Luft erfüllter Raum war, in welchem sich die Wirkung der Luft nicht wesentlich von derjenigen zu unterscheiden brauchte, welche die unter atmosphärischem Druck stehende Luft ausübt.

Von sehr viel größerer Bedeutung sind die Versuche, die man in Räumen ausgeführt hat, welche nach sorgfältiger Entfernung der Luft und des Wasserdampfes mit irgend einem anderen Gase gefüllt wurden. Hierher gehören die Versuche von W. Zahn, die in reinem, trockenem Stickstoff ausgeführt worden sind. Besonders wichtig sind die Versuche von J. Brown, welcher das auf S. 36 beschriebene Thomsonsche Quadrantenelektrometer in einen Raum brachte, den man mit verschiedenen Gasen füllen konnte. Hierbei zeigte sich, daß z. B. Kupfer bei Berührung mit Eisen in Luft negativ, im Schwefelwasserstoff aber positiv wurde. Die Bildung von Schichten aus Schwefelmetallen und das Auftreten neuer elektromotorischer Kräfte zwischen diesen Schichten und den Metallen kann die Ursache dieser Erscheinung nicht sein, da nach einiger Zeit, nachdem diese Schichten genügende Dicke erlangt hatten, das Elektrometer gar keine Ablenkung mehr zeigte. Einen Zeichenwechsel beobachtet man auch, wenn Cu und Ni einander in Luft (Cu +) und in HCl-Gas berühren (Cu —). Von anderen Beobachtern

seien noch Spiers und Schultze-Berge genannt; letzterer fand, daß die Anwesenheit von Ozon Au, Pt und Messing stärker negativ macht und daß Pt im Wasserstoff stark positiv wird.

Ferner hat Christiansen gefunden, daß die Potentialdifferenz zwischen Kohle und flüssigem Zinkamalgam von 0,2 bis auf 0,74 Volt anwächst, wenn die Dauer ihrer Berührung mit Luft von 0,002 auf 0,02 Sekunden wächst. Ersetzt man die Luft durch Wasserstoff, so vermindert sich die Differenz um 0,8 Volt. Nimmt man anstatt Kohle reines Quecksilber, so erhält man in (etwas feuchter) Luft $e = 0{,}89$ Volt, in trockenem Sauerstoff aber $e = -0{,}6$ Volt; die Differenz beträgt also 1,5 Volt.

Von großer Bedeutung sind ferner die Versuche von Pellat und Erskine-Murray, welche gezeigt haben, daß selbst ganz geringfügige Änderungen des Zustandes der einander berührenden Metalloberflächen von sehr großem Einfluß sind. Pellat fand, daß die Potentialdifferenz zwischen Cu- und Au-Platten sich änderte, falls sich das Cu im Verlaufe einiger Zeit unter der Einwirkung einer sehr nahen Bleiplatte befand.

Zugunsten dessen, daß das umgebende Medium großen Einfluß auf die Größe e hat, sprechen auch die Versuche von Grove, Gassiot und J. Brown, welche gezeigt haben, daß man auch in dem Falle eine Potentialdifferenz beobachtet, daß sich zwei Metallplatten, ohne einander zu berühren, sehr nahe beieinander befinden. Pellat fand (1881), daß die Spannung der Luft auf die Größe e einwirkt; die Versuche von Bottomley (1885) haben jedoch diese Beobachtung nicht bestätigt. Aus dem Vorhergehenden wird klar, daß das umgebende Medium auf die Größe e einwirkt; die hierher gehörigen Tatsachen widersprechen der Kontakttheorie. Aber auch die alte chemische Theorie, welche annahm, daß in allen Fällen der Berührung von Körpern irgend eine bestimmte chemische Reaktion auftritt, hält in dieser Form vor der Kritik nicht Stand; sie ist fast vollständig aufgegeben worden und wir wollen auch die Versuche von Exner, zu ihr in einigermaßen veränderter Form zurückzukehren, nicht betrachten.

Gegenwärtig ist man mit dem Ausbau einer neuen Antikontakttheorie beschäftigt, welche als chemische Theorie zu bezeichnen unrichtig wäre. Die Anhänger dieser Theorie nehmen an, daß in einer regelrecht offenen Kette (Metall A, ein oder zwei Elektrolyte, Metall B, Metall A, S. 172) die Größe $A \mid B$ sehr klein oder gar gleich Null ist. In dem Falle aber, wo zwei Metalle einander berühren, z. B. im Versuche von W. Thomson (S. 217, Fig. 91) spielt die umgebende Luft die Rolle eines Elektrolyten. Wir haben gesehen, welche Rolle die Ionen in flüssigen Elektrolyten spielen. Die neue Antikontakttheorie stützt sich darauf, daß auch die Gase einer Ionisation unterliegen, die in höherem oder geringerem Grade immer vorhanden

ist. S. Arrhenius hat bereits im Jahre 1888 gezeigt, daß, wenn sich zwischen zwei Drähten aus Zn und Pt Luft befindet, die künstlich (z. B. mit Hilfe von Kathodenstrahlen) ionisiert ist, zwischen diesen Drähten eine Potentialdifferenz auftritt, die bis zu 0,86 Volt beträgt.

In neuester Zeit haben Lodge u. A. die Antikontakttheorie weiter entwickelt, nach welcher die Luft als Elektrolyt zu betrachten ist. Lodge (1900) glaubt, daß zwischen jedem Metall und der umgebenden Luft eine Potentialdifferenz existiert, die z. B. für Zink 1,8 Volt, für Kupfer 0,8 Volt beträgt. Danach befinden sich die verschiedenen Metalle schon vor ihrer Berührung auf verschiedenen Potentialen, die im allgemeinen niedriger als das Potential der umgebenden Luft sind. Bringt man Zn und Cu miteinander in Berührung, so werden ihre Potentiale gleich, wobei eine gewisse Menge negativer Elektrizität vom Zink zum Kupfer geht, weshalb nach Trennung der Metalle hinsichtlich ihrer Außenwirkungen das Kupfer negativ, das Zink positiv elektrisiert scheint im Vergleich zum Zink und Kupfer, die miteinander nicht in Berührung waren und keine Elektrisierungen erkennen lassen, da sie von Ladungen positiver, in den anliegenden Luftschichten vorhandener Elektrizität umgeben sind. Ist V das dem Zink und Kupfer gemeinsame Potential, so hat die Luft in der Umgebung des Zinks das Potential $V = + 1{,}8$ Volt, in der Umgebung des Kupfers $V = + 0{,}8$ Volt. In der Luft selbst erfolgt ein langsames Fallen des Potentials um 1 Volt, das gleich dem Potentialsprunge ist, den man gewöhnlich auf die Berührungsfläche der Metalle bezieht.

Riecke hat als erster (1898) die neue Theorie der beweglichen Elektronen zur Erklärung der Erscheinungen benutzt, welche beim Kontakte von Metallen auftreten.

Wir wollen nun auf einen Umstand hinweisen, dessen Bedeutung gleich groß ist, einerlei, welcher Ansicht man in bezug auf die Ursache der Entstehung von e ist. Es handelt sich hier um die sogenannte Verbindung der Körper mit der Erde (Erdung). Man setzt das Potential des Erdkörpers gleich Null und nimmt an, daß jeder geerdete Körper ebenfalls das Potential Null hat. Diese Annahme ist zulässig, solange von elektrostatischen Erscheinungen die Rede ist, bei denen man es im allgemeinen mit Potentialen zu tun hat, die im Vergleich zu einem Volt sehr groß sind. Die Sache wird aber eine andere, wenn es sich um 1 oder 2 Volt handelt, oder gar um einen Bruchteil, bisweilen sogar um einen kleinen Bruchteil eines Volt. In diesem Falle hat man zu beachten, daß die Erdung eines Körpers, selbst in dem Falle, wo dieser Körper und alle dazwischen befindlichen Leiter aus ein und derselben Substanz bestehen, der Verbindung des Körpers mit einem mehr oder weniger feuchten Erdboden, d. h. einem zweifellosen Elektrolyten entspricht. Es ist klar, daß der Körper auch in diesem Falle ein Potential annimmt, welches vom Potential der Erde verschieden ist.

In Wirklichkeit wird die Sache noch dadurch verwickelter, daß die dazwischen liegenden Körper, z. B. die Gasleitungs- und Wasserleitungsröhren, aus anderen Stoffen bestehen; zwischen ihnen, sowie zwischen dem ersten von ihnen und dem gegebenen Körper treten neue elektromotorische Kräfte auf. Man kann annehmen, daß jeder metallische Körper sich in Verbindung mit der Erde befunden hatte; hieraus folgt bereits, daß verschiedene metallische Körper sich schon vor ihrem Kontakt auf verschiedenen Potentialen befinden können. In jedem Falle hat man daran zu denken, daß die Erdung einen Körper auf ein gewisses Potential bringt, welches von der Beschaffenheit dieses Körpers, von den dazwischen liegenden Körpern und vielleicht auch von der Bodenbeschaffenheit des gegebenen Ortes abhängt.

Wir gehen zu einer kurzen Betrachtung verschiedener Arbeiten über, welche ausgeführt wurden, um die Größe der elektromotorischen Kraft e zu messen, d. h. die Potentialdifferenz einander berührender Metalle. Die im vorhergehenden und in diesem Paragraphen angegebenen Daten lassen es wohl verständlich erscheinen, weshalb wir die numerischen Resultate jener Arbeiten fast völlig übergehen.

R. Kohlrausch (1853) benutzte den in Fig. 48 auf S. 110 abgebildeten Kondensator. Um die Ladung zu messen, welche der Kondensator bei einem gegebenen Versuche erhalten hatte, rückte er die Platten auseinander und verband die eine von ihnen mit einem empfindlichen (Dellmannschen) Elektrometer. Die Angaben dieses Apparates dienten als Maß für die Ladung, also auch für die Potentialdifferenz der Kondensatorplatten. Um z. B. die Differenz Zn|Pt zu messen, wählte er Kondensatorplatten aus Zn und Pt. Nachdem er sie unmittelbar verbunden hatte und hierauf nach der soeben angegebenen Methode die Messung vornahm, fand er am Elektrometer das unmittelbare Maß $A = \mathrm{Zn}|\mathrm{Pt}$ für die gesuchte Größe. Ein anderes Maß und zugleich das Verhältnis der Größe Zn|Pt zur elektromotorischen Kraft D des Daniellelements bestimmte er auf folgende Weise.

Er nahm ein nicht regelrecht offenes Daniellelement, d. h. die Kombination $\mathrm{Cu} - \mathrm{CuSO_4} - \mathrm{ZnSO_4} - \mathrm{Zn}$, in welcher die Potentialdifferenz an den Enden gleich $D - \mathrm{Zn}|\mathrm{Cu}$ war. Nach Verbindung des Zinks mit der Zinkplatte des Kondensators und des Kupfers mit der Platinplatte erhielt er am Elektrometer das Maß für die Größe

$$B = D - \mathrm{Zn}|\mathrm{Cu} + \mathrm{Pt}|\mathrm{Cu} = D - (\mathrm{Zn}|\mathrm{Cu} + \mathrm{Cu}|\mathrm{Pt}) = D - \mathrm{Zn}|\mathrm{Pt}.$$

Nach Verbindung des Zinks mit dem Platin, des Kupfers mit der Zinkplatte erhielt er das Maß der Größe

$$C = D - \mathrm{Zn}|\mathrm{Cu} + \mathrm{Cu}|\mathrm{Zn} + \mathrm{Zn}|\mathrm{Pt} = D + \mathrm{Zn}|\mathrm{Pt}.$$

Die Größen B und C geben die gesuchten Werte von Zn|Pt und D, also auch den Wert ihres Verhältnisses. Kohlrausch fand z. B. $\mathrm{Zn}|\mathrm{Cu} = 0{,}48\,D$. Weitere auf diese Methode bezügliche Einzelheiten

wollen wir nicht angeben. Gerland (1868) und Clifton (1877) bedienten sich bei ihren Messungen einer analogen Methode. Letzterer fand Zn | Cu = 0,852 Volt. Weitere Zahlen wollen wir nicht anführen.

Hankel (1861 bis 1865) bestimmte die Werte von $e = A | B$ folgendermaßen. Auf eine geerdete, horizontale Kupferplatte K legte er eine andere Metallplatte A. Hierauf wurde eine zweite Kupferplatte K_1 bis zu einem gewissen kleinen Abstande δ der Platte A von oben her genähert; diese Entfernung betrug 0,94 mm und sollte bei allen Versuchen die gleiche sein. Die Platte K_1 wurde auf kurze Zeit geerdet, hierauf in beträchtliche Höhe gehoben und mit einem (Hankelschen) Elektrometer verbunden. Die Ablesung S des letzteren diente als Maß für die Ladung der Platte K_1 im Augenblicke ihrer Erdung. Ersetzte Hankel die Platte A durch eine Platte B eines anderen Metalls, so erhielt er eine andere Ablesung S_1. Es läßt sich leicht beweisen, daß $S - S_1 = \beta . A | B$ ist, wo β einen gewissen Proportionalitätsfaktor darstellt. Auf diese Weise konnten das Verhältnis verschiedener Werte von e oder diese Zahlenwerte selbst gefunden werden, wobei Zn | Cu = 100 gesetzt wurde.

Hallwachs (1886) benutzte das auf S. 36 beschriebene Quadrantenelektrometer. Wie wir später sehen werden, wird die Ablenkung S der Elektrometernadel durch die Formel

$$S = C(V_1 - V_2)\,[V - \tfrac{1}{2}(V_1 + V_2)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

bestimmt, wo V das Potential der Nadel, V_1 und V_2 die Potentiale der beiden Paare kreuzweis gelegener, miteinander verbundener Quadranten sind. Hallwachs benutzte ein Elektrometer, dessen Quadranten aus Messing bestanden. Ferner stellte er sich eine Reihe von Nadeln aus Cu, Ag, Pt, Al und Zn her. Das eine Quadrantenpaar verband er mit der Erde, das andere mit der Nadel und gleichzeitig zuerst mit einem Pole einer Batterie, deren anderer Pol geerdet war. Bezeichnen wir mit E das Potential, welches hierbei von den Quadranten angenommen wurde, mit e die Potentialdifferenz zwischen der Nadel und den Messingquadranten. In diesem Falle ist $V_1 = E$, $V_2 = 0$, $V = E + e$ und Formel (53) gibt für die Ablenkung der Nadel

$$S_1 = CE(\tfrac{1}{2}E + e).$$

Vertauscht man die Batteriepole, so erhält man $V_1 = -E$, $V_2 = 0$, $V = -E + e$ und die Ablenkung

$$S_2 = CE(\tfrac{1}{2}E - e).$$

Hieraus ist

$$e = \tfrac{1}{2}E\,\frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53,\text{a})$$

Durch Einführung verschiedenartiger Korrektionen gelang es Hallwachs, auf diese Weise die relativen Werte der Größen A | Messing,

folglich auch der Größen $A \mid B$ zu finden. Von den Resultaten besitzen diejenigen besonderes Interesse, die negativen Charakter haben. Es erwies sich, daß die Größe Cu | Q (wo Q Messing bedeutet) im Verlaufe von 18 Stunden von 0,018 bis auf 0,056 zunimmt; Zn | Q im Laufe von vier Stunden von 0,825 bis 0,775 abnimmt; die Größe Al | Q war im Verlaufe eines halben Jahres von 0,94 auf 0,2 gesunken und stieg hierauf nach Reinigung der Nadel bis auf 0,94 an. Alle obigen Zahlen bedeuten Volt. Hallwachs findet Zn | Cu = 0,843 Volt.

Ayrton und Perry verfuhren folgendermaßen: sie brachten zwei horizontale Metallplatten A und B an den Enden einer horizontalen Tafel an, die um eine, durch ihre Mitte hindurchgehende vertikale Achse drehbar war. Über A und B wurden zwei horizontale Messingplatten M und N gebracht, die untereinander oder mit den Quadranten des Elektrometers verbunden werden konnten. Zuerst wurden M und N untereinander verbunden, hierauf A mit B; es traten dann auf M und N durch die Ladungen der Platten A und B induzierte Ladungen auf. Wenn man jetzt M und N mit den Quadranten des Elektrometers verbände, so würde die Nadel, die auf hohem Potential erhalten wurde, in Ruhe bleiben. Hierauf wurde die Tafel samt den Platten um 180° gedreht, und dann die Platten M und N mit dem Elektrometer verbunden. Die Ablenkung der Nadel kann als Maß für die gesuchte Größe $e = A \mid B$ gelten. Ayrton und Perry fanden Zn | Cu = 0,75 Volt.

Weitere Untersuchungen sind ausgeführt worden von Christiansen (1893), Exner (1882 bis 1887), Uljanin (1887), Exner und Tuma (1888), Pellat (1880, 1887), Schulze-Berge (1881), J. Brown (1887, 1899), Spiers (1900), Majorana (1899), Erskine-Murray (1898), Lord Kelvin (1897), Grimsehl (1902), Lodge, Hesehus, Brown (1903), Warburg (1904) u. a. Wir wollen einige von diesen Arbeiten betrachten; auf ihre Resultate war zum Teil schon in der ersten Hälfte dieses Paragraphen hingewiesen worden. Sehr interessant ist die erste der beiden Methoden von Pellat. Er brachte die Potentialdifferenz e beider Metalle auf Null, indem er sie durch eine andere Potentialdifferenz e' kompensierte, die man beliebig ändern und sehr genau messen konnte. Als Größe e' wählte er die Potentialdifferenz eines festen und eines sich verschiebenden Punktes auf einem Draht, durch welchen ein elektrischer Strom floß: zwischen diesen Punkten bestand mithin ein Potentialgefälle, wie dies auf S. 162 bereits erwähnt wurde und weiter unten ausführlich betrachtet werden soll. Einer Modifikation der Pellatschen Methode bediente sich Spiers (1900) beim Studium des Einflusses, welchen das umgebende Gas auf die Größe e ausübt. Übrigens hat W. Thomson bereits früher (1861) eine ähnliche Kompensationsmethode angewandt.

Majorana hat eine Reihe von überaus lehrreichen Versuchen ausgeführt. Zwei vertikale Metallplatten, z. B. aus Zink und Kupfer, werden zunächst, während sie sich in großem Abstande voneinander befinden, geerdet, wobei sie ungleiche Ladungen annehmen. Nähert man sie darauf einander (bis auf 0,5 mm), so treten in ihnen infolge von Induktion „Annäherungsladungen" auf, die man am Elektrometer nachweisen kann. Erdet man die Platten während der Annäherung, so kann man, nachdem sie voneinander entfernt worden sind, in ihnen „Entfernungsladungen" nachweisen und messen. Ferner gelang es Majorana, eine gegenseitige Anziehung von Metallen zu beobachten, während letztere miteinander in leitender Verbindung standen. Ein versilberter Quarzfaden hängt vor einer polierten Metallplatte, die sich in etwas geneigter Lage befindet, so daß, wenn man sie allmählich dem Faden nähert, sie zuerst das untere Fadenende berühren muß. Bei mikroskopischer Beobachtung des Fadenendes und seines durch die Platte erzeugten Spiegelbildes bemerkte Majorana eine plötzliche Annäherung dieses Endes an die Oberfläche der (aus Zink bestehenden) Platte, sobald ihre Entfernung 0,1 mm betrug. Später (1900) hat Majorana Anziehung zwischen zwei horizontalen Platten beobachtet, von denen die obere mit dem Wagebalken einer sehr empfindlichen Wage verbunden war. Die Bewegung des Wagebalkens wurde nach der Fizeau-Pulfrichschen Methode (Bd. III) beobachtet. Die Größe e wurde nach der Pellatschen Methode kompensiert und hierdurch die Werte für $e = M \mid Ag$ gemessen; M bedeutet hier das Metall der Platte. Majorana fand Zn | Ag = 0,9 Volt, Cu | Ag = 0,4 Volt; hieraus ist Zn | Cu = 0,5 Volt.

Majorana hat endlich noch die Werte e für die Kombinationen Zn | Au, Al | Au und Fe | Au bei — 180° (Temperatur der flüssigen Luft) gemessen und gefunden, daß bei einer so niedrigen Temperatur die Größe e verschwindend klein ist; so fällt sie z. B. für Zn | Au von 0,88 bei Zimmertemperatur bis auf 0,05 bei — 180°.

Zwischen Lord Kelvin und Lodge kam es zu einem interessanten Streit: ersterer verteidigte die Kontakttheorie, letzterer hält daran fest, daß e gleich Null ist (s. oben). Lord Kelvin berief sich unter anderem auf die Arbeiten von Erskine-Murray (1898), welcher unter Benutzung der Kompensationsmethode gefunden hat, daß ein Bedecken der Metallflächen mit einer isolierenden Schicht (Wachs, Glas), wobei nur ihre Berührungspunkte unbedeckt bleiben, nicht auf den Wert von e einwirkt, während doch letzterer in hohem Grade vom Zustande der Oberfläche, z. B. dem Grade ihrer Politur, abhängt.

J. Brown (1903) fand, daß die Größe e = Zn | Cu gleich Null wird, wenn sich zwischen diesen Metallen Öl von 145° befindet: er erklärt dies dadurch, daß sich im Öl das elektrolytische Häutchen auflöst, welches die Metalle überzieht und als Ursache für das Auf-

treten der Größe e anzusehen ist. Warburg (1904) hat obiges Resultat bestätigt gefunden. Er fand, daß e nicht von der Art des umgebenden Gases abhängt und daß es in völlig trockenem Gase fast gleich Null wird; die Kontakttheorie hält er für vollständig widerlegt.

Die Frage bleibt also offen. Man hat übrigens zu bedenken, daß alle Versuche, welche die Existenz von Ladungen auf in Kontakt befindlichen Metallen nachweisen, an sich nichts beweisen, denn es handelt sich bei unserer Frage nicht um das Vorhandensein von Ladungen, an dem niemand jemals gezweifelt hat, sondern darum, wo wo man ihre Quelle zu suchen hat.

Auf eine unrichtige Definition der Größe e, auf die man sich bisher zuweilen berufen hat, muß noch hingewiesen werden. Da beim Übergang der Einheit der Elektrizitätsmenge von einem Metalle zum anderen die Arbeit $\pm e$ geleistet wird, so nahm man an, daß an der Berührungsfläche eine Wärmemenge q frei werden muß, die gleich

$$q = \pm e$$

ist. Edlund (1869 bis 1871) hielt es für möglich, durch Messung von q die Größe e zu finden und fand, daß sie für verschiedene Metallpaare sehr klein war. Diese Methode ist aber unrichtig. Wir hatten auf S. 188 die Formel (33) abgeleitet und hieraus sieht man, daß q in einem anderen, komplizierteren Zusammenhange mit e steht. Nur in dem Falle, daß e der absoluten Temperatur proportional ist, erhält man die Formel $q = \pm e$.

Die Nichtleiter (Dielektrika) werden bei Berührung untereinander oder mit Leitern, wie es scheint, ebenfalls elektrisiert. Die ersten Versuche in dieser Richtung sind von Davy, Fechner, Munk und A. C. Becquerel angestellt worden. Genauere Untersuchungen haben J. Thomson (1876), Ayrton und Perry (1878), Hoorweg (1880), Knoblauch (1901) und Hesehus (1901) ausgeführt.

Man findet z. B., daß Wachs bei Berührung mit Schwefel positiv, bei Berührung mit Kautschuk, Schellack, Messing usw. negativ elektrisiert wird. Die Nichtleiter können nicht in eine Voltasche Reihe eingeordnet werden und folgen daher natürlich auch nicht dem Voltaschen Gesetze.

A. Coehn (1898) kommt zu dem Schlusse, daß derjenige von zwei einander berührenden Körpern positiv elektrisiert wird, der die größere Dielektrizitätskonstante hat. Wie Heydweiller gezeigt hat, gilt diese Regel jedenfalls nur für Nichtleiter.

§ 11. Experimentelle Untersuchung der Elektrisierung beim Kontakt von Elektrolyten mit Leitern erster Klasse. Im § 6 hatten wir die Nernstsche Theorie kennen gelernt, die in einer

ganzen Reihe von Spezialfällen einen bestimmten Aufschluß über die Größe der elektromotorischen Kraft gibt, die beim Kontakt von Elektrolyten untereinander und mit Leitern erster Klasse wirkt.

Ferner hatten wir in § 8 die Methoden des Kapillarelektrometers und der Tropfelektroden kennen gelernt, die nach der Meinung einiger Forscher die Potentialdifferenz beim Kontakt eines Metalls mit einem Elektrolyten zu messen gestatten. An dieser Stelle wollen wir, ähnlich wie dies im vorhergehenden Paragraphen geschehen war, die verschiedenen Messungsresultate dieser Potentialdifferenz in historischer Reihenfolge betrachten.

Die Existenz einer Elektrisierung beim Kontakt eines Metalls mit einem flüssigen Elektrolyten kann in folgender Weise nachgewiesen werden. Auf ein empfindliches Elektroskop (Fig. 93) wird eine horizontale Scheibe aus dem zu untersuchenden Metalle geschraubt, z. B. eine Zinkscheibe; sie ist in unserer Figur nicht sichtbar, sie hat dieselbe Größe wie die Scheibe *a* und mit ihr steht das untere Ende des Drahtes *d* in Berührung. Auf die Zinkplatte legt man ein Glas- oder Glimmerplättchen *b*, das etwas größeren Durchmesser hat und auf dieses ein Blatt Fließpapier *a*, welches mit der betreffenden Flüssigkeit, z. B. mit Wasser, angefeuchtet ist. Man kann auch derart verfahren, daß man mittels eines Pinsels eine Flüssigkeitsschicht auf die Oberfläche von *b* aufträgt. Hierauf berührt man mit dem isoliert gehaltenen Zinkdraht *d* gleichzeitig die untere Scheibe und in *c* die Flüssigkeitsschicht; die Ladungen sammeln sich hierbei zu beiden Seiten des Plättchens *b* an. Entfernt man den Draht *d* und hebt das Plättchen *b* zugleich mit der Flüssigkeit ab, so erhält man im Elektroskop einen Ausschlag, der durch die Ladung der unteren Metallplatte hervorgerufen wird. Ersetzt man das Elektroskop durch ein Elektrometer, so kann man außer dem Vorzeichen auch die Größe der Ladung bestimmen. Beides hängt von der Art des Metalls und der Flüssigkeit ab.

Fig. 93.



Diese Methode hat insbesonders Buff (1842) angewandt. Er fand, daß in Wasser und in einer Lösung von Ätzkali alle Metalle negativ elektrisiert werden; in schwacher Schwefelsäurelösung werden nur Pt und Au positiv; in konzentrierter Salpetersäure wird Zink sehr schwach negativ, Pt, Au, Cu, Fe positiv usw.

Flüssigkeiten folgen beim Kontakt mit Metallen dem Voltaschen Gesetze nicht, wie dies aus folgendem Beispiele ersichtlich ist: $H_2O|Zn > H_2O|Cu$, d. h. $Cu|H_2O + H_2O|Zn > 0$; wenn H_2O in Berührung mit Zn und Cu dem Voltaschen Gesetze folgen würde, so hätte man $Cu|H_2O + H_2O|Zn = Cu|Zn$ und daher $Cu|Zn > 0$, während die Versuche $Zn|Cu > 0$ ergeben, mithin $Cu|Zn < 0$.

Hankel (1865) hat die Größen $M|H_2O$, wo M irgend ein Metall bedeutet, mit der Größe $Zn|Cu$ nach einer Methode, analog der auf S. 228 beschriebenen, verglichen. Die untere Kupferplatte war durch einen weiten, mit Wasser gefüllten Trichter ersetzt, der mit einer vertikalen, ebenfalls Wasser enthaltenden Röhre verbunden war; in letztere tauchte das geerdete Metall. Ohne diese Versuche von Hankel ins Detail verfolgen zu wollen, bemerken wir, daß sie einen erstaunlich großen Einfluß der Metalloberfläche dargetan haben. Je nachdem die frisch hergestellte polierte Platte erst eben in die Flüssigkeit getaucht war oder sich in ihr eine Zeitlang (10 bis 30 Minuten) befunden hat oder vor dem Eintauchen ins Wasser in Luft aufbewahrt gewesen, wurden ganz verschiedene Zahlenwerte erhalten; das gleiche wurde beim Vergleiche von polierten Metallen mit solchen beobachtet, die mit der Feile bearbeitet waren. Unter der Annahme, daß $Zn|Cu = 100$ sei, fand Hankel Zahlen, die z. B. für Pt zwischen + 14 und — 16 schwanken, für Au zwischen 10 und — 19, für Pd zwischen + 3 und — 23, für Messing zwischen + 8 und — 116, für Fe zwischen + 27 und — 23, für Zn zwischen — 16 und — 45, für Al zwischen — 25 und — 78, für Hg zwischen — 6 und — 30 usw.

Gerland (1868, 1883) benutzte eine Methode, welche derjenigen von Kohlrausch, die auf S. 223 beschrieben war, analog ist; eine der horizontalen Platten eines Kondensators war durch eine Glasplatte ersetzt, auf welcher ein von Wasser durchtränktes Blättchen Fließpapier lag. Die numerischen Werte, welche Hankel und Gerland erhielten, stimmen untereinander nicht überein, worüber man sich auch nach dem soeben über den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit des Metalls gesagten nicht wundern kann.

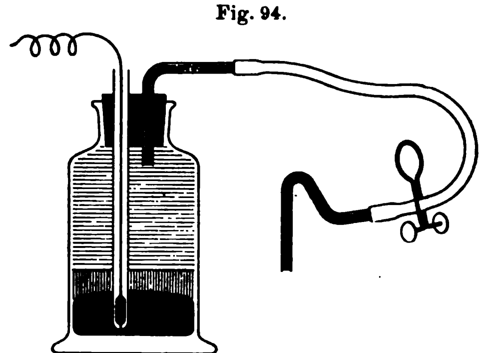
Kohlrausch hat auf ähnliche Weise die Größe e für den Fall der Berührung von Metallen mit Lösungen von Salzen und Säuren bestimmt. Einige seiner Resultate sind in der Tabelle auf S. 214 angeführt worden. Ferner sind ähnliche Untersuchungen ausgeführt worden von Clifton, Ayrton und Perry (1878), Exner und Tuma (1888), Gouré de Villemonté (1890), Pellat (1889) u. a. Ayrton und Perry benutzten die auf S. 228 beschriebene Methode, wobei eine der Metallplatten durch ein flaches, mit der betreffenden Flüssigkeit gefülltes Porzellanschälchen ersetzt war.

In § 8 auf S. 201 u. ff. hatten wir das Kapillarelektrometer und die Methode der Tropfelektroden kennen gelernt, die Forscher

namhaft gemacht, welche sich ihrer bedient und auf die Bedenken hingewiesen, die ihrer Anwendung zur Bestimmung der Potentialdifferenz zwischen Metallen und Elektrolyten entgegenstehen. Wir haben nun noch in Kürze auf die Resultate hinzuweisen, welche die erwähnten Forscher erhalten haben.

Ostwald (1887) findet, daß Zn und Cd in allen Säuren negativ, Cu, Sb, Bi, Ag und Hg positiv werden. In allen verdünnten Sauerstoffsäuren (Schwefel-, Salpeter-, Phosphor-, Ameisen-, Essig-, Oxalsäure usw.) ist die Elektrisierung des gegebenen Metalls die gleiche. Paschen und Rothmund haben die Potentialdifferenz e zwischen Quecksilber (sowie zwischen flüssigen Amalgamen) und Elektrolyten gemessen. Hierbei zeigte sich, daß bei geringem Gehalt an dem im Quecksilber gelösten Metall (0,01 Proz.) die Amalgame die gleichen Werte für e ergeben, wie die reinen Metalle selbst. Paschen fand für Quecksilber und schwache Schwefelsäure $e = 0{,}840$ Volt; Rothmund, der die Säure mit Schwefelquecksilbersalz sättigte, fand $e = 0{,}926$ Volt. Für Kupferamalgam fand Rothmund $e = 0{,}445$ Volt; für Zinkamalgam

Fig. 94.



$$e = -0{,}587 \text{ Volt.}$$

In neuerer Zeit hat man darauf geachtet, daß man es mit völlig reinen Flüssigkeiten zu tun hat, wobei man „Normallösungen", die ein Grammäquivalent der gelösten Substanz auf 1 Liter der Lösung enthalten, zugrunde legte; verkürzt spricht man demgemäß von n.-Lösungen.

Ostwald hat in Vorschlag gebracht, die elektromotorischen Kräfte verschiedener „Elektroden", d. h. verschiedener Kombinationen von Leitern erster Klasse und Elektrolyten, mit einer „normalen Elektrode" zu vergleichen und letztere folgendermaßen herzustellen. In ein Glasgefäß (Fig. 94) wird Quecksilber gegossen und darüber eine Schicht von Calomel gebracht; hierauf füllt man das Gefäß mit einer n.-Lösung (oder einer $^1/_{10}$ n.-Lösung) von Chlorkalium. Durch den Deckel des Gefäßes hindurch wird ein durch eine Glasröhre isolierter Platindraht hindurchgeführt, sowie eine Glasröhre mit angesetztem Kautschukschlauch, welche mit derselben Lösung gefüllt sind. Die elektromotorische Kraft dieser Elektrode beträgt 0,560 Volt.

Nachdem wir die Versuchsergebnisse hinsichtlich der Berührung von Metallen mit Elektrolyten betrachtet haben, wollen wir zu den Untersuchungen des Falles übergehen, wo zwei Metalle A und B

sich nebeneinder in einem Elektrolyten S befinden. Die elektromotorische Kraft einer solchen Kombination ist gleich $A|S + S|B$. Wir wollen diese Größe mit (A, B) bezeichnen. Bringt man drei Leiter erster Klasse A, B und C in ein und denselben Elektrolyten S, so erhält man drei Größen: $(A, B) = A|S + S|B$; $(B, C) = B|S + S|C$ und $(A, C) = A|S + S|C$. Da jedoch $S|B + B|S = 0$ ist, so ist offenbar $(A, B) + (B, C) = (A, C)$.

Den experimentellen Untersuchungen wurde übrigens folgende kompliziertere Kombination $A|S + S|B + B|A$ unterworfen, die eine regelrecht offene Kette darstellt. Wir haben im § 3 gesehen, daß derartige Kombinationen der analogen Formel

$$(A, B) + (B, C) = (A, C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

genügen, wenn man die symbolische Bezeichnung $A|S + S|B + B|A = (A, B)$ einführt.

Formel (54) zeigt uns, daß man in bezug auf einen bestimmten gegebenen Elektrolyten die Metalle in eine Reihe einordnen kann, welche der Voltaschen Reihe insofern analog ist, als jedes Metall bei Kombination innerhalb dieses Elektrolyten mit einem der vorhergehenden negativ, mit einem der folgenden aber positiv wird. Die Verteilung der Metalle in einer derartigen Reihe hängt von der Art des Elektrolyten S ab. Mit der Frage nach derartigen Anordnungen der Metalle haben sich zahlreiche Forscher beschäftigt, so z. B. Fechner (wässerige NaCl-Lösung), Davy (Lösungen von H_2SO_4, KHO, K_2S); Faraday (Lösungen von H_2SO_4, HNO_3, HCl, KHO, K_2S), Poggendorff (Lösungen von H_2SO_4, NH_4Cl, KCy), De la Rive (HNO_3), Schoenbein (HNO_3) u. a. Wir wollen einige dieser Reihen anführen:

Wasser. Fechner: Zn, Pb, Sn, Fe, Sb, Bi, Cu, Ag, Au; Matthiessen: K, Na, Ca, Mg.

H_2SO_4-Lösung. Faraday: Zn, Cd, Sn, Pb, Fe, Ni, Bi, Sb, Cu, Ag.

KHO-Lösung. Faraday: Zn, Sn, Cd, Sb, Pb, Bi, Fe, Cu, Ni, Ag.

K_2S-Lösung. Faraday: Cd, Zn, Cu, Sn, Sb, Ag, Pb, Bi, Ni, Fe.

KCy-Lösung. Poggendorff: Zn, Cu, Cd, Sn, Ag, Ni, Sb, Pb, Hg, Pd, Bi, Fe, Pt, C.

Konzentrierte Salpetersäure. De la Rive: Sn, Zn, Fe, Cu, Pb, Hg, Ag, Fe.

Es ist wohl selbstverständlich, daß auch diese Reihen von der physikalischen und chemischen Beschaffenheit der Metalloberflächen in hohem Grade abhängig sein müssen.

Ferner sind von vielen Seiten eingehende Untersuchungen über die Kombination aus zwei Leitern und einem Elektrolyten angestellt worden. Auf einige der erhaltenen Resultate wollen wir hier verweisen.

Die Superoxyde stehen im allgemeinen am Ende der Reihen, d. h. sie sind negativ, wenn man sie innerhalb eines beliebigen Elektrolyten mit Metallen kombiniert; die Oxyde von Cu, Fe und Pb sind bei Kombination mit den reinen Metallen ebenfalls negativ. Geschmolzene Salze, aber auch heißes Glas und heißer Glimmer können die Rolle eines Elektrolyten S spielen und sogar recht merkliche Potentialdifferenzen geben. Oberbeck und Edler haben (1891) die Kombination Hg — S — *Am* untersucht, wo *Am* ein Amalgam bedeutet, das im allgemeinen geringe Mengen eines anderen Metalles M enthält. Hierbei zeigte sich, daß für sehr viele Lösungen S von Salzen und Säuren die Reihenfolge der Metalle M, deren Amalgame abnehmende Potentialdifferenzen gegenüber dem Quecksilber ergeben, die gleiche ist, nämlich: Zn, Cd, Sn, Pb, Bi. Das Metall des Salzes hat, wenn es nicht mit dem Metall M identisch ist, fast gar keinen Einfluß; ist das Metall des Salzes aber das Metall M selbst, so nimmt die Potentialdifferenz ab. So gibt z. B. Cadmiumamalgam in Lösungen von NaBr, KBr und $ZnBr_2$ die Werte 0,630, 0,641 und 0,624 Volt, in $CdBr_2$-Lösung jedoch den kleineren Wert 0,561 Volt.

Kohle und metallisches Natrium geben außerordentlich große elektromotorische Kräfte, die für einige Flüssigkeiten, wie Corminas gezeigt hat, bis zu 4,5 Volt gehen. Hoorweg und Righi haben gefunden, daß man beim Ersatz von Elektrolyten durch sehr schlechte flüssige Leiter, wie z. B. durch geschmolzenes Wachs, Stearin, Schellack, Schwefel oder verschiedene Öle, ebenfalls bisweilen recht bedeutende elektromotorische Kräfte erhält.

Zu dem in Betracht gezogenen Typus gehört auch die besondere Art von Konzentrationselementen, die aus einer Flüssigkeit und zwei Amalgamen bestehen, welche sich durch den Konzentrationsgrad des gelösten Metalles voneinander unterscheiden. Die Nernstsche Theorie hat uns für diese die Formel (45), S. 198, geliefert. G. Meyer (1891) hat die Kombinationen Zn und $ZnSO_4$, Cd und CdJ_2, Sn und $SnCl_2$, Cu und $CuSO_4$, Na und NaCl, Na_2CO_3, Na_2SO_4, Pb und essigsaures Blei untersucht, wobei sich die Metalle in zwei Amalgamen von verschiedener Konzentration befanden. Die Messungen führten zu Resultaten, welche mit der Nernstschen Formel (45) vollkommen übereinstimmen.

Zu der Kombination des von uns betrachteten Typus gehört auch die berühmte Voltasche Säule, in der zu allererst eine Steigerung der elektromotorischen Kraft durch Hintereinanderschaltung von gleichartigen Kombinationen verschiedenartiger Körper erhalten wurde. Die Voltasche Säule, die wir uns vertikal aufgestellt denken wollen, besteht aus einer großen Zahl übereinander geschichteter Kupfer- und Zinkscheiben, wobei zwischen jedes Paar solcher Platten eine Tuchscheibe gebracht ist, die mit Wasser oder besser mit schwacher Schwefel-

säure-, Kochsalz-, Salmiaklösung usw. angefeuchtet ist; wir wollen diese Flüssigkeit mit S bezeichnen. Alle Scheiben müssen die gleiche Reihenfolge einhalten, es muß z. B. auf die Tuchscheibe stets eine Kupfer- oder stets eine Zinkscheibe folgen. Man erhält also beispielsweise folgende Reihenfolge

$$\text{Cu—Zn—}S\text{—Cu—Zn—}S\text{—Cu—Zn—}S\text{—Cu usw.} \quad . \quad . \quad . \qquad (55)$$

Ob das Potential von unten nach oben wächst oder abnimmt, hängt durchaus nicht davon ab, welche Scheiben (Cu, Zn oder S) sich an den Enden der Säule befinden, sondern bloß von ihrer Reihenfolge, d. h. davon, ob sich unmittelbar über S eine Zink- oder Kupferscheibe befindet. Das Potential wächst immer in der Richtung von S nach Cu oder, was dasselbe ist, von Cu zu Zn, oder von Zn zu S. Bei der Verteilung (55) und ebenso bei der Verteilung S—Cu—Zn—S—Cu—Zn—S usw. wächst das Potential von unten nach oben. Bei der Verteilung

$$\text{Cu—}S\text{—Zn—Cu—}S\text{—Zn—Cu—}S\text{—Zn—Cu usw.} \quad . \qquad (55,a)$$

oder etwa bei der Verteilung Zn—Cu—S—Zn—Cu—S—Zn usw. nimmt das Potential von unten nach oben ab. Eine regelrecht zusammengestellte Säule muß mit der gleichen Scheibe anfangen und endigen, als welche man auch S anzusehen hat. Bezeichnet man ein System aus zwei Metallscheiben und einer angefeuchteten Tuchscheibe als ein Plattenpaar, so muß eine aus n Plattenpaaren bestehende Säule insgesamt $3n + 1$ Scheiben enthalten. Es ist das natürlichste, wenn Kupfer den Anfang und das Ende bildet, da an die Säulenenden gewöhnlich Kupferdrähte befestigt werden. In diesem Falle kann die Säule als unterste eine Kupfer-, als oberste eine Zinkplatte haben und im ganzen aus $3n$ Scheiben bestehen, da der obere Kupferdraht die obere Kupferplatte ersetzt. Es möge die elektromotorische Kraft der Säule, d. h. die Potentialdifferenz ihrer Enden, mit E bezeichnet sein. Nehmen wir ferner an, daß die Potentiale in der Richtung nach oben anwachsen, daß also Zn unmittelbar über Cu liegt. Die ganze Säule kann man sich dann in n gleiche Teile zerlegt denken, die wir als Elemente bezeichnen wollen; die elektromotorische Kraft jedes derartigen Elementes bezeichnen wir mit e; zwischen den Elementen wirkt keinerlei elektromotorische Kraft, so daß $E = ne$ ist. Die Grenze zwischen zwei benachbarten Elementen muß in der Mitte einer der Scheiben liegend gedacht werden und zwar einer Scheibe aus derjenigen Substanz, mit welcher die Säule anfängt und endigt (gewöhnlich Cu). Demgemäß beginnt und endigt jedes Element mit ein und derselben Substanz und besteht, mit Ausnahme der beiden an den Enden befindlichen Elemente, aus je zwei ganzen und zwei halben Scheiben. So wird beispielsweise eine aus vier Elementen bestehende Säule nach folgendem Schema zerteilt, falls an den Enden sich Cu befindet:

$$\mathrm{Cu{-}Zn{-}}S\mathrm{{-}Cu}\,|\,\mathrm{Cu{-}Zn{-}}S\mathrm{{-}Cu}\,|\,\mathrm{Cu{-}Zn{-}}S\mathrm{{-}Cu}\,|\,\mathrm{Cu{-}Zn{-}}S\mathrm{{-}Cu} \qquad (55,\mathrm{b})$$

Das Zeichen Cu | Cu stellt hier eine einzige Scheibe dar, die nur in Gedanken in zwei Hälften zerlegt ist. Befände sich an den Säulenenden Zn odes S, so erhielte man folgende Teilungen:

$$\mathrm{Zn{-}}S\mathrm{{-}Cu{-}Zn}\,|\,\mathrm{Zn{-}}S\mathrm{{-}Cu{-}Zn}\,|\,\mathrm{Zn{-}}S\mathrm{{-}Cu{-}Zn}\,|\,\mathrm{Zn{-}}S\mathrm{{-}Cu{-}Zn} \qquad (55,\mathrm{c})$$

$$S\mathrm{{-}Cu{-}Zn{-}}S\,|\,S\mathrm{{-}Cu{-}Zn{-}}S\,|\,S\mathrm{{-}Cu{-}Zn{-}}S\,|\,S\mathrm{{-}Cu{-}Zn{-}}S\;. \qquad (55,\mathrm{d})$$

Der Wert von e, also auch von E, ist in allen Fällen derselbe, es ist daher offenbar:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cu}\,|\,\mathrm{Zn} + \mathrm{Zn}\,|\,S + S\,|\,\mathrm{Cu} &= \mathrm{Zn}\,|\,S + S\,|\,\mathrm{Cu} + \mathrm{Cu}\,|\,\mathrm{Zn}\\ &= S\,|\,\mathrm{Cu} + \mathrm{Cu}\,|\,\mathrm{Zn} + \mathrm{Zn}\,|\,S.\end{aligned}$$

Es ist klar, daß die Anbringung zweier Kupferdrähte oder zweier anderer gleichartiger Drähte an die Säulenenden den Wert von E bei den beiden letzten Schemen nicht verändert, da ja $\mathrm{Cu}\,|\,\mathrm{Zn} + \mathrm{Zn}\,|\,\mathrm{Cu} = 0$ und $\mathrm{Cu}\,|\,S + S\,|\,\mathrm{Cu} = 0$ ist. Es wird uns nun auch klar, weshalb E nicht von der Art der Platten an den Säulenenden, sondern nur von der oben charakterisierten Anordnung derselben abhängt. Als Elemente der Säule darf man in keinem Falle Kombinationen aus je drei Scheiben (z. B. Cu—Zn—S) ansehen, da dann zwischen den benachbarten Kombinationen noch elektromotorische Kräfte wirken (z. B. $S\,|\,\mathrm{Cu}$).

Nimmt man an, daß die Potentiale von unten nach oben hin wachsen, so nennt man das untere Säulenende das negative, das obere das positive; bisweilen bezeichnet man diese Säulenenden als Pole der Säule. Erdet man einen der Pole, so wird der andere entsprechend seiner Benennung elektrisiert. Erdet man eine der mittleren Scheiben, so wird die untere negativ, die obere positiv elektrisiert.

Bisweilen setzt man die Säule derart zusammen, daß sie eine ganze Anzahl von Plattenpaaren ($3n$ Scheiben) enthält, d. h. man legt die letzte Scheibe nicht darauf, vgl. die Schemata (55, b, c, d). In diesem Falle ist die Anzahl der Elemente keine vollständige und man hat für diese drei Schemata $E = ne - S\,|\,\mathrm{Cu}$, $E = ne - \mathrm{Cu}\,|\,\mathrm{Zn}$, $E = ne - \mathrm{Zn}\,|\,S$. Das Vorzeichen der Elektrizität an den Enden der Säule ist in allen drei Schemata (55, b, c, d) ein und dasselbe und bleibt unverändert, wenn man eine Scheibe oder zwei Scheiben entfernt. Demgemäß ist klar, daß Cu und Zn, wenn sie sich am Säulenende befinden, sowohl als positiver, wie auch als negativer Pol dienen können.

Mit der theoretischen und experimentellen Erforschung der Säule haben sich beschäftigt Volta, Dellmann, Peltier, Péclet, Ritter, Fechner, Biot, Erman, Jäger, Branly (1873) und insbesondere Angot (1874).

Eine Abänderung der Voltasäule sind die sogenannten Trockensäulen, die ihren Namen nicht ganz mit Recht erhalten haben. Sie

unterscheiden sich von der Voltasäule vorzugsweise dadurch, daß die feuchte Schicht (das von Flüssigkeit durchtränkte Tuch) in ihnen durch eine scheinbar trockene Schicht ersetzt ist, die aber in Wirklichkeit immer, wenn auch nur Spuren von Flüssigkeit enthält, so z. B. Spuren von Wasser aus der stets mehr oder weniger feuchten umgebenden Luft. Trockensäulen haben konstruiert Behrens, Zamboni, Bohnenberger, Jäger, Riffault, Maréchaux, de Luc u. a.

Behrens hat die Säule aus zwei Metallen (Zn und Cu oder Stanniol und Messing) und Blättern von vergoldetem Papier konstruiert, das zunächst mit Kochsalzlösung durchtränkt und darauf getrocknet wurde. Zambonis Säule besteht aus Scheiben von versilbertem (Legierung aus Sn und Zn) und vergoldetem (Kupfer-) Papier, sowie aus versilbertem Papier, dessen weiße Seite mit einer Schicht von Mangansuperoxyd bedeckt ist. Die Enden derartiger aus einer großen Zahl (z. B. 2000) solcher Scheiben bestehenden Säulen sind beständig mit ungleichnamigen Elektrizitäten geladen. Leitet man diese Ladungen ab, so stellen sie sich recht langsam von neuem her. Wenn man eine solche Trockensäule in der Tat völlig trocken werden läßt, so hört, wie Erman und Parrot gezeigt haben, ihre Wirksamkeit auf. In gewöhnlicher feuchter Luft behalten die Trockensäulen im Verlaufe von Jahrzehnten ihre Wirksamkeit bei. Mit der Anwendung von Trockensäulen zur Konstruktion von empfindlichen Elektroskopen werden wir weiter unten bekannt werden. Auf S. 36 war bereits das Fechnersche Elektroskop (Fig. 8) beschrieben worden, das eine horizontale Trockensäule enthält.

§ 12. Experimentelle Untersuchung der Elektrisierung beim Kontakt von zwei Elektrolyten. Auf S. 192 hatten wir die Anwendung der Nernstschen Theorie zur Berechnung der elektromotorischen Kraft der Berührung von Lösungen kennen gelernt, die sich nur durch ihren Konzentrationsgrad unterscheiden, und erwähnt, daß u. a. Planck diese Theorie auf den allgemeinen Fall angewandt hat, wo sich zwei ungleichartige, aufeinander chemisch nicht reagierende Flüssigkeiten berühren.

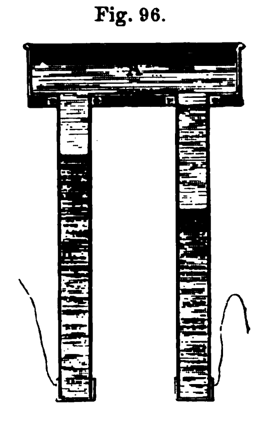
Wir wollen nun die Resultate der experimentellen Untersuchungen dieser Frage betrachten. Der erste, der das Auftreten einer elektromotorischen Kraft bei der Berührung von Flüssigkeiten beobachtete, war Nobili. Später ist von Fechner (1838) folgende Methode angewandt worden. Er nahm vier Glasgefäße (Fig. 95), von denen *a* und *b* mit der einen Flüssigkeit (S), *A* mit einer zweiten (S_1) und *B* mit einer dritten Flüssigkeit (S_2) gefüllt wurden. Von den drei Hebern, welche die Glasgefäße verbanden, enthielten 1 und 3 die in *a* und *b* befindliche Flüssigkeit S, der Heber 2 eine der in *A* und *B* befindlichen Flüssigkeiten. Ferner waren in *a* und *b* zwei Platin-

platten eingetaucht, deren Potentialdifferenz e gemessen wurde. Da sich beide Platten in ein und derselben Flüssigkeit befanden, so wirkte offenbar die Berührung des Platins mit dieser Flüssigkeit nicht auf den Wert von e ein, der sich aus drei Teilen zusammensetzte: $e = S \mid S_1 + S_1 \mid S_2 + S_2 \mid S$. Wirken die Flüssigkeiten aufeinander chemisch ein, so muß einer von diesen drei Teilen durch zwei ersetzt werden. Liefern die Lösungen S_1 und S_2 eine neue Lösung S', so muß $S_1 \mid S_2$ durch die Summe $S_1 \mid S' + S' \mid S_2$ ersetzt werden; so wird z. B. für $S_1 = KHO$ und $S_2 = HNO_3$ als Zwischenschicht KNO_3 gewählt. Die bloße Existenz der Größe e für eine große Anzahl von Kombina-


Fig. 95.



Fig. 96.



tionen zeigt, daß die Flüssigkeiten bei ihrer gegenseitigen Berührung im allgemeinen das Voltasche Gesetz nicht befolgen. Eine Ausnahme machen einige Lösungen von isomorphen, analog gebildeten Salzen; so ist z. B.

$$KCl \mid KBr + KBr \mid KJ + KJ \mid KCl = 0.$$

Hieraus sieht man, daß die Lösungen von KCl, KBr und KJ bei ihrer gegenseitigen Berührung das Voltasche Gesetz befolgen. Das gleiche gilt von vielen Salzen vom Typus MSO_4, M_2SO_4 (außer dem Ammoniumsalze), MNO_3, $M(NO_3)_2$, MCl und MCl_2.

Wild vermied die Anwendung von Hebern, indem er sich des in Fig. 96 abgebildeten Apparates bediente. In den Boden eines Gefäßes A sind zwei vertikale Röhren eingesetzt, die unten durch zwei gleiche metallene Böden verschlossen sind. In beide Röhren wurde zuerst ein und dieselbe Flüssigkeit gebracht, in der rechten Röhre auf diese Flüssigkeit vorsichtig eine andere gegossen und endlich in das Gefäß A und den obersten Teil der linken Röhre eine dritte Flüssigkeit. Gemessen wurde die Potentialdifferenz der Metallböden: war sie gleich Null, so bedeutete dies, daß die Flüssigkeiten das Voltasche Gesetz befolgen. Einen ähnlichen Apparat benutzte S. Schmidt.

Quantitative Messungen haben Kohlrausch (1850), E. Du Bois-Reymond (1867), Worm-Müller (1870), Bichat und Blondlot (1883, 1885), Gouré de Villemontée (1890), Paschen (1890) u. a. ausgeführt.

Worm-Müller fand, daß die Kombination Wasser—Säure—Lauge—Wasser bedeutende elektromotorische Kräfte e, die bis zu 0,5 Volt gehen, geben kann, wenn man z. B. Ätznatron und eine von den Säuren HCl, HNO_3, H_2SO_4 nimmt. Ferner zeigte sich, daß für die Reihe, welche aus Säure, Lauge und Salzlösung von der Zusammensetzung und Konzentration besteht, wie sie bei der Vereinigung der beiden ersten entstehen, $e = 0$ wird. Ändert man jedoch die Konzentration der Lösung, so erhält e einen von Null verschiedenen Wert. Die Säure wird positiv bei Berührung mit der Lauge oder der Salzlösung, die Salzlösung aber positiv in bezug auf die Lauge.

Bichat und Blondlot haben die Potentialdifferenz $e = S_1 \mid S_2$ von zwei einander berührenden Flüssigkeiten S_1 und S_2 nach zwei Methoden gemessen. Die erste erinnerte an die Methode von Fechner, bei der zweiten benutzten sie das Kapillarelektrometer und bestimmten zuerst die Größen $S_1 \mid Hg$ und $S_2 \mid Hg$, gestützt auf die Theorie, welche annimmt, daß das Maximum der Oberflächenspannung erhalten wird, wenn durch künstliche Polarisation die Potentiale der Flüssigkeit und des Quecksilbers einander gleich geworden sind. Hierauf bestimmten sie die Größe $Hg \mid S_1 + S_1 \mid S_2 + S_2 \mid Hg$, indem sie ins Elektrometer die Flüssigkeit S_2 brachten. Auf diese Weise wurde die Größe $S_1 \mid S_2$ erhalten. Die nach den beiden Methoden erhaltenen Werte waren völlig verschieden, so z. B. für zwei Lösungen von H_2SO_4 und Na_2SO_4: die erste Methode ergab $e = H_2SO_4 \mid Na_2SO_4 = +0,129$ Volt, die zweite $e = -0,20$ Volt. Bichat und Blondlot erklären dies dadurch, daß sich im ersten Falle die Flüssigkeiten in Berührung mit der Luft befanden, infolgedessen neue elektromotorische Kräfte auftraten.

Paschen (1890) bediente sich der Methode der Tropfelektroden, die wir auf S. 207 u. ff. ausführlich betrachtet haben. Er fand z. B. $CuSO_4 \mid ZnSO_4 = 0.46$ Volt.

Die Potentialdifferenz E bei Berührung zweier Lösungen, die sich durch ihren Konzentrationsgrad unterscheiden, ist von vielen untersucht worden. Paschen maß die Größe E nach der Methode der Tropfelektroden und fand, daß für die Lösungen von $ZnSO_4$, KCl und HCl eine verdünntere Lösung, für $CuSO_4$-Lösung dagegen eine konzentriertere Lösung das höhere Potential aufweist.

Auf S. 192 haben wir die Nernstsche Lehre behandelt, die zur Formel (39) für die Größe E führt. Experimentelle Prüfungen dieser Formel haben Nernst (1890), Negbauer (1891) u. a. vorgenommen; sie erhielten völlig befriedigende Resultate. Für zwei Schwefelsäurelösungen, deren Konzentrationen sich wie 1 : 10 verhalten, gibt die Nernstsche Theorie den Wert $E = 0,042$ Volt; Couette fand durch Versuche $E = 0,055$ Volt; eine ebenso befriedigende Übereinstimmung gaben zwei Lösungen von $ZnSO_4$.

Nachdem wir die Fälle der Berührung eines Elektrolyten mit einem Metall und zweier Elektrolyte untereinander betrachtet haben, können wir jetzt zu dem Falle der Berührung von zwei Elektrolyten S_1 und S_2 mit einem Metall A übergehen. In diesem Falle ist die elektromotorische Kraft E gleich

$$E = A \mid S_1 + S_1 \mid S_2 + S_2 \mid A.$$

Hier ist besonders der Fall interessant, wo S_1 und S_2 Lösungen der gleichen Art, jedoch von verschiedener Konzentration sind, wobei das Metall A in dem gelösten Salze enthalten ist. In diesem Falle repräsentiert E die elektromotorische Kraft eines Konzentrationselements, dessen Theorie zuerst von Helmholtz (1877) und später von Nernst (1888) entwickelt worden ist. Auf S. 197 hatten wir Formel (44) abgeleitet, welche die Berechnung des Wertes von E für das Konzentrationselement gestattet. Noch vor den genannten Forschern haben experimentelle Untersuchungen ähnlicher Elemente (zum Teil auch für den Fall, daß A nicht im Salze enthalten oder daß S die Lösung einer Säure ist) Walker (1825), Faraday (1840), Bleekrode (1871), Eccher (1865, publiziert 1879), Kittler (1881), Pagliani (1886) u. a. ausgeführt. Unter ihnen fand Eccher, daß für die gegebenen Substanzen E nicht von den absoluten Werten der Konzentrationen c_1 und c_2 der beiden Lösungen, sondern nur von dem Verhältnis $c_1 : c_2$ dieser Größen abhängt, wie dies auch die Nernstsche Formel (44) fordert.

Die Helmholtzsche Formel, deren Identität mit der Nernstschen Formel bei sehr verdünnten Lösungen bewiesen werden kann, haben Helmholtz selbst und Moser (1881) geprüft; letzterer für die Lösungen von CdJ_2, $ZnSO_4$ und $CuSO_4$, wobei sich eine vollständige Übereinstimmung der Resultate mit den nach der Formel errechneten zeigte. Die Nernstsche Formel ist von vielen Forschern geprüft worden, wie von Nernst selbst, von Jahn, Lehfeldt u. a. Als Beispiel wollen wir die Kette anführen, die aus zwei Lösungen von $AgNO_3$ zwischen Ag-Elektroden ($c_1 : c_2 = 10$) besteht. Der Versuch ergibt $E = 0{,}055$ Volt. Nach Anbringung einer Korrektur an seiner Formel, die darauf Rücksicht nimmt, daß in einer konzentrierteren Lösung der Dissoziationsgrad geringer ist, findet Nernst durch Rechnung 0,057 Volt (ohne diese Korrektur erhielt er 0,0608 Volt).

Eine weitere Verallgemeinerung stellt die Kombination von zwei Metallen oder überhaupt zwei Leitern A und B erster Klasse mit zwei Elektrolyten S_1 und S_2 dar; für diese wird die elektromotorische Kraft E durch die Summe $E = A \mid S_1 + S_1 \mid S_2 + S_2 \mid B$ dargestellt oder, wenn man eine regelrecht offene Kette wählt, durch die Summe $E = A \mid S_1 + S_1 \mid S_2 + S_2 \mid B + B \mid A$. Im § 4 hatten wir die theoretische Lösung einiger Fragen, die sich auf eine derartige Kombination beziehen, gegeben und die wichtigen Formeln (25), S. 183,

und (31), S. 186 abgeleitet. Die Betrachtung der verschiedenen Arten von Elementen wollen wir auf das Kapitel verschieben, welches den elektrochemischen Erscheinungen überhaupt gewidmet ist. Es sei an dieser Stelle bloß darauf hingewiesen, daß eine ganze Reihe von Experimentaluntersuchungen die völlige Richtigkeit der Formeln (25) und (31) dargetan hat. Auf diese Untersuchungen selbst werden wir später zurückkommen.

§ 13. Berührung von Gasen mit Leitern erster und zweiter Klasse. Auf S. 222 war darauf hingewiesen worden, daß die Potentialdifferenz, welche zwischen einander berührenden Metallen wahrgenommen wird, von einigen Forschern, wie z. B. von Lodge, dadurch erklärt wird, daß eine solche Differenz zwischen den Metallen und den sie umgebenden Gasen, z. B. der Luft, auftritt. Ferner haben wir eine Reihe von Untersuchungen angeführt, welche den Einfluß des umgebenden Mediums auf den Potentialunterschied einander berührender Metalle direkt beweisen.

Fig. 97.

Kohlrausch (1850), Ayrton und Perry (1880), Bichat und Blondlot (1883), Gouré de Villemontée und Kenrick (1896) leiten aus ihren Versuchen ab, daß zwischen Gasen und Flüssigkeiten bei ihrer gegenseitigen Berührung ebenfalls eine gewisse Potentialdifferenz auftritt. Die letzten beiden der genannten Autoren bedienten sich der Methode der Tropfelektroden; Kenrick fand, daß die Potentialdifferenz besonders groß wird, wenn man zu den Lösungen anorganischer Salze (KCl) geringe Mengen von organischen Substanzen, wie z. B. Spiritus, Äther, Kampfer usw., hinzufügt.

Einen komplizierteren Fall der Berührung von Metallen, Gasen und Flüssigkeiten repräsentieren die sogenannten Gaselemente, die aus einer Flüssigkeit bestehen, in die zwei gleiche, mit verschiedenen Gasen gewissermaßen gesättigte Metalle tauchen.

Der erste, welcher ein Gaselement konstruiert und untersucht hat, war Grove (1839). In die seitlichen Röhren einer dreihalsigen Flasche V (Fig. 97) setzte er am oberen Ende geschlossene Röhren ein, die lange

Platinplatten, befestigt an in die Röhren eingeschmolzenen Platindrähten, enthielten. Das ganze Gefäß, sowie die Röhren wurden mit schwacher Schwefelsäurelösung gefüllt. Hierauf wurde mittels einer umgebogenen Röhre durch die Öffnung *B* in die eine Seitenröhre Sauerstoff O, in die andere Wasserstoff H eingeführt. Ein solches Element besaß eine recht beträchtliche elektromotorische Kraft (mehr als 1 Volt), wobei das Pt, das sich im O befand, die Rolle des positiven Pols übernahm, d. h. ein höheres Potential hatte, als das im H befindliche Pt.

Es versteht sich von selbst, daß die Quelle der elektromotorischen Kraft sich in der Flüssigkeit befinden muß, nicht aber in den höheren Teilen der Röhren, wo das Pt die Gase unmittelbar berührt. Dies wird dadurch bewiesen, daß man den Groveschen Apparat durch einen anderen ersetzen kann, in welchem die beiden Platinplatten in zwei voneinander durch eine poröse Scheidewand getrennte Flüssigkeiten tauchen, wobei eine der Flüssigkeiten mit Sauerstoff, die andere mit Wasserstoff gesättigt ist, wie dies Schönbein und andere gezeigt haben. Füllt man beim Groveschen Apparat nur eine Seitenröhre mit H, so erhält man ebenfalls eine recht große elektromotorische Kraft *e*. Füllt man jedoch die Röhre nur mit O, so erhält man für *e* einen kleinen Wert, der indes stark zunimmt, wenn man den O ozonisiert.

Die sich im Gaselement abspielenden Vorgänge zeigen, daß mit Gas gleichsam gesättigtes Platin und reines Platin beim Eintauchen in ein und dieselbe Flüssigkeit ein Element bilden, welches eine bestimmte elektromotorische Kraft hat. Das Wesen der Sache besteht zweifellos nicht darin, daß die Gasschicht die Platinoberfläche bloß mechanisch überdeckt, sondern daß das Gas ins Innere des Metalles hineindringt (diffundiert).

Nimmt man an Stelle von O und H andere Gase, so findet man, daß alle in Kombinationen untereinander und mit verschiedenen Metallen in dieselbe Reihe eingeordnet werden können, in welche sie zu stehen kommen, wenn man sie paarweise kombiniert (S. 218). Die ganze Reihe hat folgende Gestalt: (Pt + Cl), (Pt + Br), (Pt + J), (Pt + O), (Pt + NO), (Pt + CO_2), (Pt + N), Metalle, welche das Wasser nicht zersetzen, (Pt + C_2H_4), (Pt + Äther), (Pt + Alkohol), (Pt + S), (Pt + P), (Pt + CO), (Pt + H), Metalle, welche das Wasser zersetzen. Bemerkenswert ist, daß sämtliche Metalle, welche das Wasser nicht zersetzen, eine ununterbrochene Gruppe bilden, unter deren Gliedern nicht ein einziger von den Körpern (Pt + Gas) vorkommt, und dasselbe gilt auch von den Metallen, welche das Wasser zersetzen. Ähnliche Erscheinungen treten auf, wenn man anstatt Pt andere Metalle wählt. Besonders wichtig ist, daß sie auch auftreten, wenn man poröse Kohle wählt, nicht aber bei fester, nicht poröser Kohle, in deren Inneres keine Gase einzudringen vermögen.

Eingehende Experimentaluntersuchungen über das Gaselement liegen vor von Beetz (1849), Peirce (1879), Markowsky (1891), Bose (1900) und Wulf (1904). Wir wollen mit Pt_H und Pt_O die Platinplatten mit Wasserstoff bzw. Sauerstoff bezeichnen. Beetz fand

$$Pt_H \mid H_2SO_4 \mid Pt = 0{,}826 \text{ Volt}$$
$$Pt \mid H_2SO_4 \mid Pt_O = 0{,}190 \text{ „}$$
$$Pt_H \mid H_2SO_4 \mid Pt_O = 1{,}02 \text{ „}$$

Markowsky, der diese Zahlen sehr sorgfältig bestimmt hat, findet

$$Pt_H \mid H_2SO_4 \mid Pt = 0{,}646 \text{ Volt}$$
$$Pt \mid H_2SO_4 \mid Pt_O = 0{,}372 \text{ „}$$
$$Pt_H \mid H_2SO_4 \mid Pt_O = 1{,}02 \text{ „}$$

Beide Beobachter erhalten für die Kombination Pt_H und Pt_O den gleichen Wert von 1,02 Volt, obgleich ihre Werte für die Komponenten recht verschieden sind. Eine elektromotorische Kraft erhält man auch in dem Falle, daß beide Platinplatten mit ein und demselben Gase bedeckt sind, das sich unter verschiedenem Druck befindet, was sich leicht erreichen läßt, wenn man an einer der Elektroden dem wirksamen Gase irgend ein anderes, indifferentes Gas beimengt. Solche Elemente hat Bose (1900) untersucht, der das Gaselement überhaupt sehr eingehend und von allen Gesichtspunkten aus studiert hat; er fand u. a., daß die durch die Anwesenheit des Gases hervorgerufene elektromotorische Kraft sich in direkter Abhängigkeit von der Löslichkeit dieses Gases in dem Metalle befindet, aus welchem die Elektrode besteht. Wulf (1904) hat die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft vom Druck untersucht und sie (bis zu 1000 Atm.) in Übereinstimmung mit der Theorie von Helmholtz gefunden.

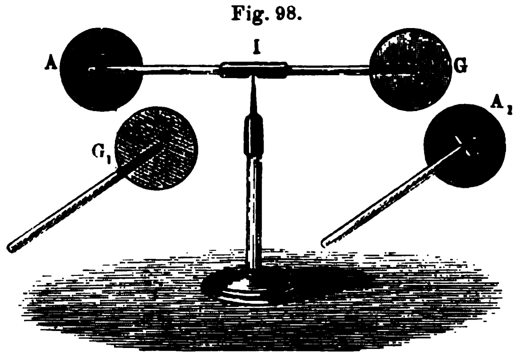
§ 14. Reibung als Elektrizitätsquelle. Triboelektrizität.

In den §§ 3 bis 13 hatten wir die einfache Berührung der Körper als Elektrizitätsquelle betrachtet. Übergehend zur Betrachtung anderer Quellen wenden wir uns vor allem der Reibung zu. Die Elektrisierung beim Reiben von Nichtleitern hat die Menschheit zu allererst mit einigen der einfachsten elektrischen Erscheinungen bekannt gemacht; sie stellte bis zum Ende des 18. Jahrhunderts die einzigste bekannte Elektrizitätsquelle dar, wenn man von der elektrostatischen Induktion, die man auch zu den Elektrizitätsquellen rechnen kann, absehen will. Die Fähigkeit des geriebenen Bernsteins, leichte Körper anzuziehen, war bereits im Altertum bekannt. Bis zum Jahre 1600 blieb diese Tatsache die einzige in dem unbegrenzten Gebiete der gegenwärtig bekannten elektrischen Erscheinungen. Im Jahre 1600 fand Gilbert, daß auch andere Körper (Schwefel, Harz, Glas, Edelsteine usw.) beim Reiben die Fähigkeit erlangen, leichte Körper anzuziehen. Hiernach entdeckte Otto v. Guericke (1671) die Tatsache,

daß diese leichten Körper nach der Berührung mit geriebenen Körpern von letzteren abgestoßen werden. Im Jahre 1694 fand Boyle, daß die Anziehung beiderseitig erfolgt, d. h. daß auch die geriebenen Körper ihrerseits von den sie umgebenden Körpern angezogen werden. Ferner entdeckte im Jahre 1729 Stephen Gray den Unterschied zwischen den Eigenschaften der Leiter und Nichtleiter und elektrisierte zuerst Leiter, die er an Isolatoren befestigte. Im Jahre 1734 wies Dufay als erster darauf hin, daß es zwei Arten von Elektrizität gibt, und fand die Regeln für ihre Wechselwirkung. Winkler (1744) bediente sich zuerst eines ledernen Kissens als Reibzeug, und Canton (1762) überzog diese Reibkissen mit Zinnamalgam, das in der Folge von Kienmayer durch ein Amalgam aus Zinn und Zink ersetzt wurde.

Beim Reiben zweier Körper aneinander werden beide elektrisiert, wobei ihre Ladungen an Größe gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt werden. Die Elektrisierung beim Reiben und das Auftreten von ungleichartigen Ladungen können auf folgende Weise nachgewiesen werden: auf einer vertikalen Spitze (Fig. 98) ist ein Glasstab frei drehbar, an dessen Enden eine Glasscheibe G und eine Holzscheibe A, die auf der einen Seite mit amalgamiertem Leder überzogen ist, sich befinden. Zwei ebensolche Scheiben G_1 und A_1 sind an den Enden von Glasstäbchen befestigt. Reibt man aneinander A und G_1 oder auch G und A_1 (oder A und G, A_1 und G_1), so werden G und G_1 positiv elektrisiert, A und A_1 negativ. Bringt man der Reihe nach A_1 und G_1 an A und G heran, so kann man sich davon überzeugen, daß A und A_1, G und G_1 gleichnamig elektrisiert sind, A und G_1 aber, sowie A_1 und G ungleichnamig. Sehr viele Forscher haben den Einfluß der verschiedenen Umstände, wie z. B. der Größe der reibenden Oberflächen, der Geschwindigkeit der Bewegung, der Größe des Druckes beim Reiben usw. auf die erhaltene Elektrisierung untersucht. So hat z. B. Riecke gefunden, daß unter sonst gleichen Umständen die erreichbare Maximaldichte der Ladung um so kleiner ist, je größer die sich aneinander reibenden Oberflächen sind.

Fig. 98.



Sämtliche Körper können in einer Reihe angeordnet werden, in der jeder beim Reiben gegen einen von den vorhergehenden negativ, gegen einen der folgenden positiv elektrisiert wird. Solche Reihen haben Wilcke, Young, Herbert, Faraday u. a. aufgestellt. Die

Wilckesche Reihe lautet: Glas, Wolle, Federn, Holz, Lack, weißes Wachs, mattes Glas, P, S, Metalle. Faraday hat die folgende Reihe aufgestellt: Katzen- und Bärenfell, Flanell, Elfenbein, Federn, Bergkristall, Flintglas, Baumwolle, weiße Seide, Menschenhand, Holz, Gummilack, Metalle (Fe, Cu, Messing, Sn, Ag, Pt), Schwefel. Es muß übrigens beachtet werden, daß ganz geringfügige Änderungen in den Oberflächeneigenschaften der Körper, wie auch die Art des Reibens, die Temperatur usw. in sehr bedeutendem Grade auf die Stellung eines Körpers in dieser Reihe einwirken. Es seien hierfür einige Beispiele angeführt. Mattes Glas wird negativ beim Reiben gegen Wolle, Holz, Papier und die trockene Menschenhand; gewöhnliches Glas dagegen positiv. Reibt man aneinander mattes und glattes Glas, so wird ersteres (—), letzteres (+). Gewöhnliches Glas wird nach Erwärmung an einer Flamme von Öl, Äther, Schwefel, Kohle, Wasserstoff, sowie nach Eintauchen in H_2SO_4, HCl, HNO_3 und darauf folgendem Abspülen und Trocknen (—) in den Fällen, wo es früher (+) wurde. Eine frische Guttaperchafläche wird beim Reiben gegen fast alle Körper (—), eine alte dagegen (+). Ein baumwollenes oder seidenes Band wird bisweilen verschiedenartig elektrisiert, je nachdem man es der Länge oder der Quere nach reibt. Besonders interessant ist in dieser Beziehung die Tatsache, daß auch gleichartige Körper, beispielsweise die beiden Hälften eines entzweigebrochenen und dem Anschein nach gleichartigen Körpers, beim Reiben aneinander ungleichnamig elektrisiert werden. Negativ gegenüber allen Körpern wird, wie es scheint, die Schießbaumwolle. Eis wird beim Reiben gegenüber vielen festen Körpern positiv, auch beim Reiben am Wasser.

Die Abhängigkeit der Reibungselektrizität von den Eigenschaften der gewählten Körper hat Hesehus (1901) von sehr vielen Ge sichtspunkten aus studiert. Er hat auf Fälle hingewiesen, wo beim Reiben von durchaus verschiedenartigen Körpern keine Elektrisierung auftritt (Metall und gewisse Holzarten). Ferner hat er aus Versuchen, die von Georgiewski angestellt waren, gefolgert, daß beim Reiben von zwei chemisch gleichartigen Körpern der dichtere von ihnen positiv elektrisiert wird. Die Verdichtung konnte durch Schleifen (Metalle, Gips, Marmor, Ebonit, Holz u. a.) oder durch Deformation (Pressung von Glas, Ausrecken von Gummi) erzielt werden; eine gebogene Ebonitplatte gibt auf der konkaven Seite (+), auf der konvexen Seite (—) beim Reiben gegen eine ungebogene Platte. Staub, der an der Oberfläche eines Körpers dahingleitet, aus dem er sich gebildet hat (Marmor, Glas, Schneestaub), wird negativ elektrisiert.

Die Reihe, von welcher oben die Rede war und in die man die Dielektrika einordnen kann, fällt mit der Reihe zusammen, die man erhält, wenn man dieselben Körper nach ihrem Härtegrade ordnet. Als Beispiel gibt Hesehus folgende Reihe an: (+) Diamant (10), Topas

(8), Bergkristall (7), poliertes Glas (5), Glimmer (3), Kalkspat (3), Schwefel (2), Wachs ($<\frac{1}{4}$) (—). Die in Klammern beigefügten Zahlen bezeichnen den Härtegrad nach der bei den Mineralogen gebräuchlichen Skala (Bd. I). Bei der Berührung von Metallen erhält man gerade die entgegengesetzte Erscheinung (vgl. S. 218). Bei flüssigen Dielektrika erhält (+) diejenige Substanz, die eine größere Oberflächenspannung oder größere Dielektrizitätskonstante (s. u.) besitzt. Bei der Erwärmung wird das Dielektrikum zunächst negativ in bezug auf dieselbe nicht erwärmte Substanz; bei höherer Temperatur jedoch wird es positiv. So ist Schwefel bei 80° (—), bei 120° jedoch stark (+), falls er momentan in Berührung mit kaltem Schwefel gebracht wird.

Hesehus hat ferner gefunden, daß unter der Einwirkung von Radium Glas, Quarz und Glimmer schnell die Fähigkeit erlangen, beim Reiben gegen die gleichen Substanzen, die keiner Radiumwirkung ausgesetzt waren, positiv elektrisiert zu werden. Ebonit, Schwefel und Selen werden zuerst negativ, nach lange dauernder Radiumwirkung jedoch ebenfalls positiv.

Die Reibungselektrizität von Metallen haben Cavallo, Hauy, de la Rive, Macfarlane, Gaugain, Faraday, Dessaignes und viele andere untersucht. De la Rive fand, daß alle Metalle negativ elektrisiert werden, wenn man sie mit der trockenen Hand, Elfenbein, Horn, Korkholz, Kautschuk und Harz reibt. Ist die Metalloberfläche mit einer Oxydschicht bedeckt, so beobachtet man bisweilen auch positive Elektrisierung. Macfarlane und Gaugain finden, daß alle Metalle beim Reiben an Schwefel positiv elektrisiert werden. Es zeigt sich, daß die von den verschiedenen Beobachtern erhaltenen Resultate äußerst widersprechend sind. Quecksilber wird ebenfalls elektrisiert, wenn man in dasselbe ein Stäbchen aus Glas, Hartgummi, Kalkspat usw. eintaucht und schnell wieder herauszieht. Von praktischem Interesse ist die Elektrisierung von Pulvern, die man der Reibung aussetzt. Streut man ein Pulver durch ein Sieb oder z. B. durch ein Stück Tüll, so wird es im allgemeinen elektrisiert: es werden z. B. pulverisierter Schwefel und ebenso Mennigepulver beim Sieben durch Tüil negativ elektrisiert. Siebt man jedoch ein Gemenge aus Schwefel und Mennige durch Tüll, so wird infolge der Reibung zwischen den Teilchen beider Substanzen der Schwefel negativ, die Mennige aber positiv elektrisiert. Siebt man das Gemenge auf die Oberfläche eines Körpers, dessen verschiedene Teile ungleichnamig elektrisiert sind, so sammelt sich der Schwefel an den Stellen an, welche positiv elektrisiert sind, die Mennige dagegen an den Stellen, wo die Elektrisierung eine negative ist. Auf diese Weise bilden sich an der Oberfläche Figuren aus roten und gelben Flecken. Man bezeichnet derartige Figuren im allgemeinen als Lichtenbergsche Figuren, nach dem Namen des Forschers, der sich, um die Elektrizitätsverteilung auf Nichtleitern zu studieren,

vorzugsweise des Bestreuens solcher Körper mit Pulvern bediente. Ein Gemenge aus Schwefelblumen und Mennige hat zuerst Villarsy (1788) in Anwendung gebracht. Buerker (1900) hat gezeigt, daß ein Gemenge aus drei Pulvern — Karmin, Lykopodium und Schwefelblumen — sehr schöne Resultate gibt. Die positiven Stellen geben grellrote, die negativen gelbe Flecken, deren Details viel besser sichtbar werden als bei Anwendung von Schwefel und Mennigepulver.

Ebert und Hoffmann haben (1900) gezeigt, daß Metalle (Messing, Al, Fe, Zn, Pb, Cu, Ag, Au, Pt, Pd, Sn), sowie Nichtleiter (Siegellack, Glas, Holz, Gummi) beim Eintauchen in flüssige Luft stark elektrisiert werden und zwar negativ. Sie haben sich davon überzeugt, daß die Ursache hierfür in der Reibung dieser Körper an kleinen Eisstückchen, die in der flüssigen Luft enthalten sind, zu suchen ist. Somit werden augenscheinlich fast alle Körper beim Reiben an sehr kaltem Eise negativ elektrisiert.

Trockene Gase und (überhitzte) Dämpfe werden beim Reiben an der Oberfläche von festen Körpern augenscheinlich gar nicht elektrisiert. Hinsichtlich der Reibung von Gasen an Flüssigkeiten kann man auf den Versuch von Lord Kelvin verweisen, nach welchem Gase, wenn man sie durch Wasser oder Salzlösungen hindurchtreten läßt, elektrisiert werden. Bei Reibung eines Gas- oder Dampfstrahles, welcher flüssige Teilchen enthält, tritt bisweilen sehr starke Elektrisierung auf. Diese Erscheinung ist zuerst von Armstrong (1844) untersucht worden, darauf von Faraday; letzterer hat insbesondere die Reibung von feuchten Dämpfen, die unter hohem Druck durch Röhren von verschiedenem Material strömten, untersucht. Faraday fand, daß Luft, welche Wasserdampf, Terpentin- oder Olivenöldampf enthält, beim Reiben gegen Kupfer elektrisiert wird. Die Elektrisierung des Wasserdampfes, welcher aus einem Kessel durch eine Röhre ins Freie tritt, hängt von der Art der Tropfen, die in diesem Dampfe enthalten sind, sowie vom Material der Röhre ab. Meist wird der Dampf positiv elektrisiert; die Elektrisierung ist eine besonders kräftige, wenn der Dampf durch eine gewundene Röhre strömen muß, deren Innenwandung aus gewissen Holzsorten besteht. Auf dieser Erscheinung beruht die Konstruktion der Elektrisiermaschine von Armstrong, die weiter unten beschrieben werden soll. Flüssige Kohlensäure wird, wenn man sie aus einer eisernen Flasche durch eine Röhre ausströmen läßt, ebenfalls stark elektrisiert; wenn man jedoch die Röhre erwärmt, so daß durch sie nur gasförmige Kohlensäure hindurchgeht, so läßt sich keine Elektrisierung beobachten.

Bis jetzt ist die Frage nach dem Mechanismus beim Auftreten der Reibungselektrizität noch nicht gelöst. Das wahrscheinlichste ist, daß die Reibung nur einen Spezialfall der Berührung von Körpern darstellt und zwar einen solchen, der die Wirkung jener Ursachen besonders begünstigt, welche überhaupt die Elektrisierung beim Kontakt hervorrufen.

Hesehus hat für die Elektrisierung der Körper beim Kontakt, also auch beim Reiben, eine Erklärung gegeben, die sich auf die Elektronentheorie stützt. Bei der Berührung von Körpern vermindert sich die Oberflächenspannung, wodurch ein Teil der Elektronen frei wird. Die negativen Elektronen müssen hierbei, da sie die beweglicheren sind, aus dem Körper schneller heraustreten als die positiven. Unterscheiden sich die einander berührenden Körper nur durch ihre Dichte, so gibt der dichtere Körper mehr Elektronen ab, wird daher positiv elektrisiert. Dasselbe bezieht sich aber auch auf erwärmte Dielektrika, deren Dichte bei der Temperatursteigerung abnimmt. Bei starker Erwärmung aber erhält die gesteigerte Dissoziation, d. h. die schnellere Ausscheidung von Elektronen, das Übergewicht, so daß sich daher das Vorzeichen der Elektrisierung umkehrt (S. 244). Bei den Metallen spielt die Fähigkeit, Ionen auszusenden, die mit Zunahme der Dichte des Metalles abnimmt, die Hauptrolle. Je größer die Dielektrizitätskonstante K einer Substanz ist, um so kleiner ist die Kraft der Wechselwirkung zwischen den Elektronen, vgl. (11) auf S. 41, und um so leichter geht ihre Ausscheidung vor sich. Es wird dasjenige von zwei einander berührenden Dielektriken positiv elektrisiert, welches das größere K hat (S. 227).

Die Reibungselektrizität kann man auch als Triboelektrizität bezeichnen. Letztere Bezeichnung hatte man zuerst für die Elektrizität angewandt, die in einigen besonderen Fällen beim Reiben von ungleichartigen Metallen auftritt; es hat sich jedoch später herausgestellt, daß gerade in diesem Falle der beim Reiben auftretenden Erwärmung die Hauptrolle zufällt und daß hier eine thermoelektrische Erscheinung vorliegt, mit der wir uns weiter unten bekannt machen wollen.

Das Zerschaben und Zerbrechen von Körpern bildet ebenfalls eine Elektrizitätsquelle. Viele Forscher sind der Ansicht, daß man dasselbe in allen speziellen Fällen mit der im vorhergehenden behandelten Elektrizitätsquelle, der Reibung, identifizieren könne. Andere dagegen sind der Ansicht, daß das mechanische Zerreißen eines Körpers, das beim Zerschaben und Zerbrechen erfolgt, in vielen Fällen eine ganz andere Wirkung hervorbringt, als ein Reiben seiner Oberfläche. Läßt man die abgeschabten Stückchen eines Körpers auf eine mit einem Elektroskop verbundene Metallplatte niederfallen, so ist es leicht, ihren elektrischen Zustand zu zeigen. Hierbei findet man, daß Eis positiv elektrisiert ist, was mit den auf S. 245 erwähnten Versuchen von Ebert und Hoffmann im Einklange ist. Für andere Substanzen hängt das Resultat bisweilen davon ab, ob das Zerschaben mit einem stumpfen oder mit einem scharfen Messer vorgenommen wird; im ersteren Falle findet die Elektrizität des Messers noch Zeit, auf die abgeschabten Teilchen überzugehen. Wüllner findet, daß die abgeschabten Siegellackteilchen bisweilen positiv elektrisiert sind.

Auf S. 227 hatten wir eine Arbeit von Coehn erwähnt. Die in dieser Arbeit mitgeteilte Regel, daß beim Kontakt zweier Körper derjenige positiv elektrisiert werde, der die größere Dielektrizitätskonstante besitzt, gilt auch für die Elektrisierungen, die beim Reiben von Dielektrika auftreten.

§ 15. Weitere Elektrizitätsquellen. Nachdem wir den Kontakt und die Reibung betrachtet haben, wollen wir nun noch eine Übersicht über andere Elektrizitätsquellen geben, von denen einige in anderen Teilen dieses Buches ausführlicher betrachtet werden sollen. Wir wollen hierbei auch solche Erscheinungen betrachten, die lange Zeit hindurch als Elektrizitätsquellen gegolten haben und zum Teil auch noch jetzt von einigen Forschern als solche angesehen werden jedoch offenbar nicht als solche gelten können.

I. Übergang von Körpern aus einem Aggregatzustande in den anderen. Wir erwähnen diese erwiesenermaßen irreale Elektrizitätsquelle im Hinblick auf die historische Bedeutung der alten Streitfrage, ob eine Elektrisierung beim Übergange der Körper aus einem in den anderen Aggregatzustand (die Kristallisation, vgl. II, soll hiervon ausgenommen werden), insbesondere beim Verdunsten und Sieden, erfolgt Viele Forscher, unter ihnen auch Volta und in späterer Zeit besonders Palmieri, haben behauptet, daß die Verdunstung des Wassers eine Elektrizitätsquelle sei und daß der Dampf hierbei positiv elektrisiert werde.

Die sorgfältigsten Untersuchungen zahlreicher Gelehrten (Blake, Kalischer, Petinelli) haben jedoch gezeigt, daß selbst stürmisches Verdunsten von reinem Wasser keine Elektrizitätsquelle bildet. Bringt man aber in einen kleinen, bis zum Glühen erhitzten Tiegel einen Tropfen irgend einer Salzlösung (insbesondere $CuSO_4$-Lösung), so nimmt dieser Tropfen bekanntlich zunächst die Form eines Sphäroids an (Bd. III), kommt hierauf, nachdem sich die Temperatur des Tiegelchens genügend erniedrigt hat, in unmittelbare Berührung mit den Tiegelwandungen und verdunstet darauf fast momentan, während er zum Teil nach allen Seiten hin verspritzt wird. Ein mit dem Tiegel verbundenes Elektroskop zeigt in diesem Augenblicke eine recht starke Elektrisierung. Es unterliegt hierbei keinem Zweifel, daß die Quelle für diese Elektrisierung in der Reibung zwischen den Flüssigkeitströpfchen und dem Salze, das sich an der inneren Tiegelwandung angesetzt hat, sowie zwischen diesem Salze und der Wandung zu suchen ist. Die Elektrisierung des Tiegels ist fast immer negativ; positiv ist sie, falls der Tropfen Br, J oder KHO enthält.

II. Kristallisation. Auch die Kristallbildung repräsentiert eine sehr zweifelhafte Elektrizitätsquelle. Beim Erstarren einer geschmolzenen Substanz zeigt sich auf derselben nicht selten die Anwesenheit von elektrischen Ladungen, die sich jedoch leicht durch Reibung an

den Gefäßwandungen seitens der halb erstarrten Substanz erklärt, welche sich zusammenzuziehen fortfährt und einen anderen Koeffizienten der Wärmeausdehnung besitzt als das Gefäß (z. B. geschmolzener Schwefel in einem Glasgefäße). Es gibt Fälle, wo die Kristallbildung im Inneren von Lösungen von Lichtentwickelung begleitet ist, die an elektrische Entladungen erinnert. Eine derartige Erscheinung ist schon seit lange bei der Kristallisation von arseniger Säure, Pottasche, Soda und einigen anderen Salzen beobachtet worden. Bandrowski hat ein überaus intensives Leuchten, ja bisweilen schwache Funken in Lösungen auftreten gesehen, in denen eine sehr schnelle Kristallisation erfolgte, so z. B. in gesättigter Lösung von NaCl in Wasser beim Mischen derselben mit Spiritus. Es ist leicht möglich, daß auch in diesem Falle die Quelle der Elektrisierung Reibung im Inneren der Lösung war. Möglicherweise spielt hierbei auch eine der anderen Elektrizitätsquellen mit, die gerade bei Kristallen auftreten und die weiter unten behandelt werden sollen (Piezoelektrizität und Pyroelektrizität).

III. Chemische Reaktionen. Wie wir gesehen haben (S. 219), suchte die ältere chemische Theorie die Elektrizitätsquelle beim Kontakt von Körpern in irgend einem chemischen Prozesse, der sich unmittelbar zwischen den sich berührenden Körpern abspielt oder aber zwischen diesen Körpern und dem umgebenden Medium. Daher war die Frage, ob chemische Vorgänge eine Elektrisierung der reagierenden Stoffe oder der bei der Reaktion entstehenden Stoffe hervorrufen können, von größtem Interesse. Gegenwärtig kann man als feststehend gelten lassen, daß chemische Reaktionen an sich keine Elektrizitätsquelle darstellen, d. h., daß es keine Reaktionen gibt, bei denen die reagierenden Stoffe oder aber die Reaktionsprodukte eine Elektrisierung zeigen, welche dieser chemischen Reaktion selbst zugeschrieben werden muß. Freilich gibt es eine große Zahl von Fällen, wo eine Elektrisierung eines der reagierenden Körper an einem mit ihm verbundenen Elektroskope leicht nachweisbar ist. Betrachtet man aber diese Erscheinungen näher, so findet man folgendes.

In einigen Fällen bildet Reibung der verschiedenen Körper, die während der Reaktion stattfindet, die eigentliche Elektrizitätsquelle. Hierher gehören Reaktionen, die von Explosionen begleitet sind. In anderen Fällen tritt während der Reaktion eine Berührung der Körper ein, die auch ohne merkliche Reaktion eine Elektrizitätsquelle bildet. Ein Beispiel hierfür hat man in der Auflösung von Metallen in Säuren; letztere ist von einer negativen Elektrisierung der Säure begleitet. Man beobachtet aber eine ebensolche Elektrisierung beim Kontakt von Metallen mit Säuren, Salzlösungen und überhaupt mit Elektrolyten, falls auch keine merkliche Reaktion auftritt.

Endlich gibt es nicht wenig Fälle, für welche eine Angabe der wahren Elektrizitätsquelle sehr schwierig ist. Hierher gehört z. B. das

Verbrennen von Kohle auf einer Metallplatte, die mit einem Elektroskop verbunden ist. Letzteres zeigt hierbei negative Elektrisierung an, während eine Metallplatte, die sich über der Kohle befindet, positiv elektrisiert wird. Es liegt hier eine sehr komplizierte Erscheinung vor, Berührung von Metallen, Kohle und Kohlensäure und man darf nicht behaupten, daß der Oxydationsprozeß der Kohle an sich die Ursache für die Elektrisierung ist. F. Exner hat eine ganze Reihe von Versuchen angestellt, durch welche er zu beweisen suchte, daß beispielsweise die Oxydation von Metallen von einer Elektrisierung derselben begleitet ist; Schulze-Berge u. a. aber haben gezeigt, daß die Exnerschen Versuche nicht beweiskräftig sind.

Schon bei der bloßen Fragestellung, ob chemische Reaktionen Elektrizitätsquellen bilden, sind Mißverständnisse verschiedener Art möglich. Die in Reaktion tretenden Stoffe besitzen einen Energievorrat, der in andere Formen übergehen kann, in Wärmeenergie, in Energie von sichtbarer Bewegung, in strahlende Energie und unter gewissen Umständen auch in elektrische Energie. Wenn ein Dampf- oder Gasmotor eine Holtzsche Elektrisiermaschine (s. u.) oder eine Dynamomaschine in Bewegung versetzt, so geht ein Teil des ursprünglichen Vorrats an chemischer Energie (Heizmaterial, Gas) zum Schluß in elektrische Energie über. Es wird aber offenbar Niemand die chemische Energie in diesen Fällen für die Quelle der elektrischen Energie in dem Sinne halten, in welchem wir in diesem Kapitel den Ausdruck „Elektrizitätsquelle“ gebrauchen. Ausgehend vom Prinzip der Erhaltung der Energie könnte man im allgemeinen sagen, daß als Quelle der elektrischen Energie jede andere Energieform dienen kann, wenn auch nicht unmittelbar, und daß es keinerlei andere Quellen derselben geben kann.

In einer geschlossenen Kette (mit derselben werden wir uns weiter unten bekannt machen) tritt die elektrische Energie des Stromes — was jedoch nur unter besonderem Vorbehalt gilt — als Äquivalent der sich im Elemente abspielenden chemischen Reaktionen auf. Es folgt aber hieraus keineswegs, daß diese Reaktionen die Ursache bilden, daß sie als unmittelbare „Quelle“ der elektrischen Energie des Stromes dienen. Eine geschlossene Kette ähnelt einer recht komplizierten Maschine, bei der während ihrer Arbeit entweder die ganze chemische Energie in elektrische Energie übergeht oder ein Teil derselben, oder nicht bloß die ganze chemische Energie, sondern auch zugleich ein Teil der Wärmeenergie der umgebenden Körper. Im Elemente sind freie, sich bewegende Ionen vorhanden und erfolgt die Bildung neuer Ionen, während andere wiederum verschwinden. Die chemischen Reaktionen und das Auftreten von Elektrizität gehen hier einander parallel und man darf daher nicht eine von diesen Erscheinungen als die Ursache oder als die Quelle der anderen ansehen. Die ältere chemische Theorie

mußte die Voraussetzung machen, daß die chemischen Reaktionen an und für sich Elektrizitätsquellen sind, da sie durch diese die Kontaktelektrizität erklärte. Wie aber bereits erwähnt war, ist bis jetzt keine einzige Tatsache bekannt, welche die Richtigkeit dieser Annahme bestätigt und wir müssen daher sagen, daß eine chemische Reaktion an sich nicht als unmittelbare Quelle für das Auftreten von elektrischen Ladungen dient. Das Vorhandensein von Ionen spielt eine hervorragende, ja vielleicht die Hauptrolle bei der Elektrisierung. Komplizierter wird die Sache, wenn man die Frage aufwirft: welche Rolle fällt denn überhaupt den Ionen bei chemischen Reaktionen zu? Man kann sich vorstellen, daß die chemischen Translokationen und die Elektrisierung unter gewissen Verhältnissen einander parallel auftreten als Resultat ein und derselben Hauptursache, als welche die freien Ionen dienen können.

IV. Thermoelektrizität. Wir haben gesehen, daß in einer Reihe von hintereinander geschalteten Leitern erster Klasse, z. B. einer Reihe von Metallen $A, B, C, \ldots M, A$, in welcher der letzte dem ersten gleich ist, die Summe der wirkenden elektromotorischen Kräfte gleich Null ist, d. h. daß sich die an den Enden der Reihe befindlichen Metalle A auf demselben Potential befinden. Dies gilt aber nur für den Fall, daß sich alle Berührungsstellen oder Lötstellen der verschiedenartigen Metalle auf ein und derselben Temperatur befinden. Sind aber diese Temperaturen ungleich, erwärmt oder kühlt man z. B. eine oder mehrere Lötstellen, so findet man, daß die am Ende der Reihe befindlichen Metalle A sich auf ungleichem Potential befinden. Hieraus ersieht man, daß bei ungleicher Temperatur der Lötstellen die Summe der in der gegebenen Reihe wirkenden elektromotorischen Kräfte nicht gleich Null ist, daß eine Temperaturänderung der Lötstellen die Ursache der Erscheinung bildet oder, was dasselbe ist, die Ursache für das Auftreten neuer elektromotorischer Kräfte bildet, die man als thermoelektromotorische Kräfte bezeichnet. Aus dem Gesagten folgt, daß zwischen den thermoelektrischen und den elektrischen Erscheinungen, welche überhaupt beim Kontakt von Leitern erster Klasse beobachtet werden, ein enger Zusammenhang bestehen muß. Eine ausführlichere Betrachtung der thermoelektrischen Erscheinungen wird weiter unten folgen. An dieser Stelle sei nur noch erwähnt, daß diese Erscheinungen auch an den Berührungsstellen von Metallen und Elektrolyten, sowie von Elektrolyten untereinander auftreten.

V. Pyroelektrizität. Kristalle, die man der Erwärmung oder der Erkaltung unterworfen hat, zeigen an bestimmten Stellen ihrer Oberfläche einen elektrischen Zustand. Die hierher gehörigen Erscheinungen nennt man pyroelektrische. Man hat sie zuerst am Turmalin beobachtet, der in Europa seit dem Ende des 17. Jahrh. bekannt

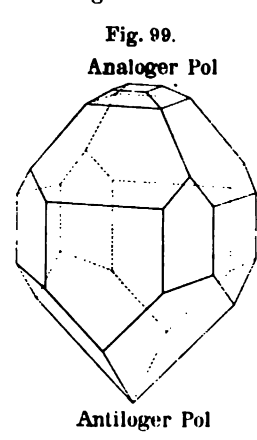
wurde. Im Jahre 1707 wird in einem Buche erwähnt, daß der polnische Militärarzt Daum von der Insel Ceylon einen Stein mitgebracht habe, welcher, wenn man ihn in heiße Asche bringt, letztere zuerst anzieht und dann abstößt. Aepinus (die Originalabhandlung ist im Jahre 1762 in Petersburg gedruckt worden) erkannte als Erster den elektrischen Charakter dieser Erscheinung und beobachtete, daß die beiden Enden des Turmalins ungleichnamig elektrisiert werden. Weitere Untersuchungen haben Wilcke, Wilson, Muschenbroeck und Bergmann ausgeführt. Im Jahre 1759 machte Canton die wichtige Entdeckung, daß die ungleichnamigen Elektrizitäten an beiden Enden des Kristalls nicht deswegen auftreten, weil der Kristall auf diese oder jene Temperatur gebracht ist, sondern weil sich seine Temperatur ändert. Während einer Temperaturerhöhung treten an zwei Enden ungleichnamige Elektrizitäten auf, während der Erkaltung erscheinen an denselben Enden die entgegengesetzten Elektrizitäten. Die Intensität der Elektrisierung ist um so größer, je schneller die Temperaturänderung erfolgt. Erwärmt man zuerst eine Kristallhälfte, die sich darauf abkühlt, während sich die andere infolge der Wärmeleitung erwärmt, so erhält man an beiden Enden vorübergehend gleichnamige Elektrisierungen. Zerbricht man einen sich abkühlenden Kristall, der zuerst als Ganzes erwärmt worden war, so findet man, daß jedes Stück dieselben Eigenschaften besitzt wie der ganze Kristall, d. h. daß seine Enden ungleichnamig elektrisiert sind. Ein sich abkühlender, zu Pulver zerriebener Turmalin bildet Klümpchen von aneinander haftenden kleinen Kristallen, die auseinanderfallen, sobald die Temperatur des Pulvers sich zu ändern aufhört. Dasjenige Ende, das bei der Temperaturerhöhung positiv elektrisiert wird (Temperatur und Potential nehmen gleichzeitig zu oder ab), wird nach dem Vorschlage von Rose der analoge Pol genannt, das entgegengesetzte Ende der antiloge Pol.

Canton, Hauy, Brewster, Gaugain u. a. haben pyroelektrische Erscheinungen auch an anderen Kristallen (Topas, Boracit, Titanit, Quarz u. a.) entdeckt. Die umfangreichste Untersuchung der pyroelektrischen Eigenschaften der Kristalle stammt von Hankel.

Hauy hat zuerst darauf hingewiesen, daß die pyroelektrischen Kristalle hinsichtlich ihrer äußeren Form eine Besonderheit zeigen, die man als Hemimorphismus bezeichnet und die im wesentlichen darin besteht, daß die Verteilung der Flächen an den beiden Enden einer gewissen kristallographischen Achse eine ungleiche ist. Als Beispiel sei das Kieselzinkerz angeführt, dessen Kristall in Fig. 99 (a. f. S.) abgebildet ist; in ihm ist der analoge Pol bei vertikal gestellter Achse durch die horizontalen Seitenflächen des Prismas definiert, der antiloge Pol aber durch die Flächen des rhombischen Oktaeders. Hauy hat die Entdeckung gemacht, daß der Boracit vier „elektrische Achsen“

hat, deren jede ungleichnamige Pole hat, wobei die Asymmetrie, d. h. der Hemimorphismus, auf jeder dieser Achsen zu beobachten ist. Kolenko und Hankel haben gefunden, daß der Quarz drei elektrische Achsen hat, also sechs Pole, die auf den sechs parallelen Kanten des sechsseitigen Prismas liegen; hier wird jene Asymmetrie in der Verteilung der Flächen einer trigonalen Pyramide und eines trigonalen Trapezoeders beobachtet, auf welche bereits in Bd. II im Kapitel über die Drehung der Polarisationsebene von Strahlen hingewiesen worden war.

Fig. 99.



Früher glaubte man, daß der Hemimorphismus eine notwendige Bedingung für die pyroelektrischen Erscheinungen sei und daß die elektrischen Achsen stets Polarität besitzen, d. h. daß die Enden dieser Achsen ungleichnamige Elektrizität aufweisen. Hankel ist der erste, welcher gezeigt hat, daß alle Kristalle die Erscheinungen der Pyroelektrizität zeigen, wenn keine Nebenumstände dies verhindern, wie z. B. eine allzu große Leitfähigkeit der Oberflächenschicht. Die einzige Bedingung, die erfüllt sein muß, ist das Vorhandensein von ungleichen Achsen. Solche aber treten selbst in den Kristallen des regulären Systems auf, da die Achsen, welche durch die Kristallflächen hindurchführen, den durch die Kanten hindurchführenden Achsen nicht gleich sind. Diese elektrischen Achsen sind jedoch nicht polar, d. h. es treten an beiden Enden der Achse Elektrizitäten vom gleichen Vorzeichen auf; dafür sind die Achsen selbst beispielsweise während des Erkaltens abwechselnd an beiden Enden positiv und negativ. Die polaren Achsen bilden auf diese Weise eine ebensolche Ausnahme wie auch der Hemimorphismus. Titanit und Boracit besitzen nach Hankel die Eigentümlichkeit, daß sowohl beim Erwärmen als beim Erkalten auf einigen Polen des Titanits ein Zeichenwechsel der Elektrisierung erfolgt und beim Boracit sogar eine Elektrisierung zweimal durch die entgegengesetzte ersetzt wird.

In hemimorphen Kristallen, welche eine oder mehrere polare Achsen besitzen, beobachtet man eine Elektrisierung auch in dem Falle, daß die sich ändernde Temperatur im ganzen Kristalle die gleiche ist. In symmetrischen Kristallen mit nicht polaren Achsen tritt Elektrisierung nur bei ungleichmäßiger Erwärmung auf, die mit inneren elastischen Spannungen im Kristall verbunden ist. Quantitative Beobachtungen der pyroelektrischen Erscheinungen hat unter anderem Gaugain ausgeführt.

Kundt hat darauf hingewiesen, daß sich ein Gemenge aus Schwefelblumen und Mennige (S. 244) in bequemer Weise zur Ermittelung der

Verteilung beider Elektrizitäten auf Kristalloberflächen anwenden läßt. Er hat auch einen Apparat konstruiert, der sich zur Untersuchung von Kristallen eignet. Ein Dreifuß *a* (Fig. 100) trägt einen Ring *b*, auf welchen ein kegelförmiges Hohlgefäß *c* gestellt wird; im Zentrum des Gefäßes *c* befindet sich das Reservoir des Thermometers *f*; *e* ist eine Glimmerplatte.

Von oben her können Röhrchen *d* verschiedenen Kalibers aufgesetzt werden, in welche die zu untersuchenden Kristalle eingesetzt werden. Ist die gehörige Temperatur erreicht, so nimmt man das Gefäß *c* mittels des Hakens *g* (derselbe ist in der Figur zweimal dargestellt), der in den Bügel *h* hineingreift, ab. Den erkaltenden Kristall bestreut man mit Schwefelmennige.

Fig. 100.



Riecke hat den Umstand in Betracht gezogen, daß sich die Ladung η während der Erkaltung nicht nur deshalb ändert, weil sich die Geschwindigkeit der Erkaltung selbst ändert, sondern auch wegen der Leitfähigkeit der Oberflächenschicht und hat die Abhängigkeit der Größe η von der Zeit theoretisch untersucht. Bei bedeutender Temperaturerhöhung verschwinden die pyroelektrischen Erscheinungen, wahrscheinlich weil der Kristall hierbei leitend wird.

Die Theorie der pyroelektrischen Erscheinungen ist von G. Wiedemann, W. Thomson (Lord Kelvin), Riecke, Lippmann, J. und P. Curie, Duhem und Voigt entwickelt worden. Bei Anwendung der beiden Hauptsätze der Thermodynamik auf die pyroelektrischen Erscheinungen läßt sich leicht herleiten, daß die latente Wärme bei Änderung des Potentials einen von Null verschiedenen Wert hat, d. h. daß bei der Elektrisierung eines Pols eine Erwärmung oder Abkühlung des Kristalls erfolgen muß, je nachdem diese Elektrisierung bei Abkühlung oder Erwärmung des Kristalls erfolgt.

Straubel (1902) hat diesen Satz zuerst experimentell bestätigt durch Versuche am Turmalin.

W. Thomson (1878) und Riecke (1885) haben eine Theorie aufgestellt, die sich auf die Annahme stützt, daß die Teilchen eines Kristalles stets polar elektrisiert sind, d. h. daß sie sich analog einem polarisierten Dielektrikum oder, wie wir später sehen werden, analog einem permanenten Magneten verhalten. Jedes Teilchen hat demnach

seine ungleichnamigen Ladungen, deren Wirkung jedoch nicht zutage tritt, da sie von den Wirkungen der im umgebenden Medium induzierten Ladungen überdeckt wird. Während einer Temperaturänderung wird das eingetretene Gleichgewicht gestört, das sich nur allmählich wieder herstellt. Riecke hat gefunden, daß erwärmter und hierauf sich abkühlender Turmalin Spuren von Elektrisierung noch im Verlauf von 30 Stunden zeigte, obgleich schon nach einer Stunde seine Temperatur die Temperatur der Umgebung um nicht mehr als $^1/_2{}^0$ übertraf.

Von der Voigtschen Theorie soll etwas weiter unten die Rede sein.

VI. Piezoelektrizität. Hauy machte bereits im Jahre 1817 die Beobachtung, daß Kalkspat beim Zusammenpressen elektrisiert wird. J. und P. Curie haben diese Erscheinung gleichsam von neuem entdeckt und sie an verschiedenen Kristallen sorgfältig untersucht. Die Elektrizität, die beim Druck auftritt, wird Piezoelektrizität genannt. Man beobachtet sie leicht beim Turmalin, wenn man ihn in derselben Richtung einer Kompression unterwirft, die weiter oben die elektrische Achse genannt wurde. Beim Zusammendrücken treten die gleichen Elektrisierungen auf wie bei der Abkühlung; beim Ausdehnen — z. B. beim Nachlassen der Kompression — dieselben wie bei der Erwärmung. Somit erzeugen gleichartige Volumenänderungen auch gleichartige Elektrisierungen, einerlei, ob sie durch thermische oder durch mechanische Ursachen hervorgerufen sind. J. und P. Curie haben gefunden, daß die auf den Kristallen auftretenden Elektrizitätsmengen, proportional der Druckänderung auf die Flächeneinheit, proportional der Größe dieser zur Kristallachse senkrechten Fläche und von der Länge des Kristalles unabhängig sind. Hieraus geht hervor, daß die gegebene totale Druckänderung das Auftreten zweier gleicher Elektrizitätsmengen von entgegengesetztem Vorzeichen bewirkt, die ihrerseits von den Dimensionen der Kristalle unabhängig sind. Ohne auf weitere Einzelheiten einzugehen, wollen wir betonen, daß Temperaturänderung und künstliche Deformation an denselben Stellen eines Kristalls Elektrisierungen hervorrufen, die ihrem Vorzeichen nach zusammenfallen, wenn die künstliche Deformation derjenigen entspricht, die durch die entsprechende Temperaturänderung hervorgerufen wird. Die sich hierin zeigende Verwandtschaft zwischen den pyroelektrischen und piezoelektrischen Erscheinungen mußte auf den Gedanken bringen, daß die pyroelektrischen Erscheinungen ihrem Wesen nach piezoelektrische Erscheinungen sind, d. h. die Elektrisierungen bei Änderungen der Temperatur zu ihrer Quelle jene Deformationen haben, von denen die Temperaturänderungen begleitet sind. Und in der Tat haben viele Forscher — W. Thomson, Curie, Röntgen, Riecke, Voigt u. a. — beide Arten von Erscheinungen zu erklären gesucht, indem sie von einer Grundhypothese ausgingen. Wir wollen uns darauf beschränken, auf die Theorie von Voigt hinzuweisen, der davon ausging, daß der elektrische

Zustand eines Kristallmoleküls von der Deformation abhängt, die es erfährt und sich zugleich mit dieser Deformation ändert. Beim Ausbau dieser Theorie hat Voigt (1892 bis 1895) allgemeine Formeln abgeleitet, welche die pyroelektrischen und piezoelektrischen Erscheinungen von der qualitativen und quantitativen Seite aus bestimmen. Seine späteren Untersuchungen (1898) aber haben ihn davon überzeugt, daß in den Kristallen, welche polare Achsen, also auch Hemimorphismus besitzen, eine wirkliche Pyroelektrizität vorhanden ist, die unmittelbar durch Temperaturänderung hervorgerufen wird. Es zeigte sich, daß beim Turmalin 80 Proz. der beobachteten Pyroelektrizität in Wirklichkeit Piezoelektrizität war, die infolge der durch die Temperaturänderung bewirkten Deformation auftrat. Die übrigen 20 Proz. bildeten die wirkliche Pyroelektrizität des Turmalins. Eine ausführliche Behandlung des geometrischen Teiles der Voigtschen Theorie, insbesondere eine Untersuchung der sogenannten piezoelektrischen Fläche, die von Voigt eingeführt worden ist (es ist dies eine Fläche 4. Ordnung), kann man in der Dissertation von Bidlingmaier (1900) finden.

Neuere Untersuchungen über die Wirkung von nicht homogenen Deformationen, hervorgerufen durch einen heißen Luftstrahl, und von homogenen, bei hydrostatischer Pressung, hat P. P. Koch (1906) ausgeführt. Er fand, daß in einem Cubikcentimeter Turmalin bei allseitigem Druck einer Dyne das elektrische Moment $8{,}0 . 10^{-8}$ C. G. S.-Einheiten entsteht.

Lord Kelvin hat (1893) ein Modell eines piezoelektrischen Kristalles aus einer Reihe aneinander gelöteter Kupfer- und Zinkplatten, die voneinander durch Schichten einer elastischen Substanz getrennt sind, hergestellt; noch früher (1882) haben J. und P. Curie auf ein derartiges Modell verwiesen.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß nach den Beobachtungen von Röntgen die Torsion eines Kristalles, beispielsweise eines zylindrischen Quarzstäbchens, ebenfalls Elektrisierung hervorruft, die beim Retordieren ihr Vorzeichen ändert.

Die Frage nach der entgegengesetzten Erscheinung, d. h. nach den durch Elektrisierung hervorgerufenen Deformationen, wird im folgenden Kapitel behandelt werden.

VII. Strahlende Energie als Elektrizitätsquelle. In einigen Fällen wird Elektrisierung mehr oder weniger unmittelbar durch strahlende Energie hervorgerufen. Wir rechnen hierzu nicht die Erscheinungen, die man im photoelektrischen Elemente beobachtet, das aus zwei gleichen Platten besteht, z. B. aus zwei jodierten Silberplatten in einer Flüssigkeit; belichtet man eine von diesen Platten, während man die andere im Dunkeln hält, so tritt zwischen ihnen eine Potentialdifferenz auf. Der Grund dieser Erscheinung, auf die wir weiter unten zurückkommen werden, liegt offenbar in einer photochemischen Wirkung, welcher die lichtempfindliche Platte unterworfen wird

Es gibt noch andere Erscheinungen, bei denen die Erzeugung von Elektrizität durch strahlende Energie eine mehr unmittelbare ist.

Hankel fand, daß einige Kristalle Elektrisierung zeigen, wenn man sie mit Sonnenlicht, Bogenlicht oder Gaslicht bestrahlt. Hierbei hat man zwei Fälle zu unterscheiden.

Bei Belichtung von farblosem Bergkristall tritt auf den sechs Seitenkanten des Prismas Elektrisierung auf; dabei ist die Elektrisierung auf zwei benachbarten Kanten ungleichnamig. Sie ist ihrem Vorzeichen nach identisch mit der Elektrisierung, welche bei Abkühlung des Kristalls erfolgt, woraus ersichtlich ist, daß man diese Erscheinung nicht als eine pyroelektrische ansehen darf. Das Maximum der Elektrisierung wird nach etwa 40 Sekunden erreicht; unterbricht man die Belichtung, so verschwindet die Elektrisierung (nach ungefähr 40 Sekunden), ohne ihr Vorzeichen geändert zu haben. Hankel fand, indem er die Strahlenquelle und den Bestand der Strahlen änderte, daß die wirksamsten Strahlen die infraroten sind. Er bezeichnete diese Erscheinung als aktinoelektrische.

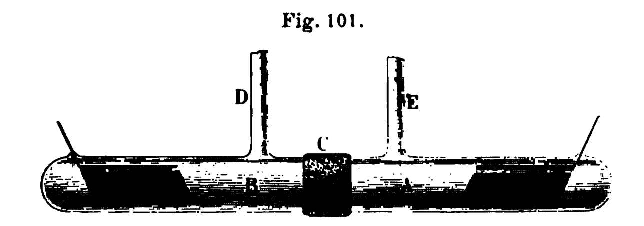
Eine Erscheinung ganz anderer Art beobachtete Hankel an farbigen Kristallen des Flußspats, insbesondere an grünen. Sie werden bei Belichtung ebenfalls elektrisiert, und ist hierbei die Verteilung der Elektrizitäten auf ihnen die gleiche wie bei der Erwärmung. Wenn man jedoch die Belichtung unterbricht, so verschwindet die Elektrisierung langsam, ohne ihr Vorzeichen zu ändern, wie dies sein müßte, wenn die Ursache für die Elektrisierung in der Erwärmung bestände. Am stärksten wirken die violetten und ultravioletten Strahlen. Offenbar haben wir es hier mit einer chemischen Wirkung der Strahlen zu tun, welche vielleicht die dem Kristall seine Färbung verleihende Substanz verändern. Dies wird auch noch dadurch bestätigt, daß nach andauernder Belichtung die Empfindlichkeit der Kristalle gegenüber der Wirkung der Strahlen abnimmt. Hankel bezeichnete die zuletzt betrachtete Erscheinung als eine photoelektrische.

Auf. S. 159 hatten wir in Kürze auf die Zerstreuung der negativen Elektrizität verwiesen, die durch ultraviolette Strahlen bewirkt wird. Hallwachs und Righi haben fast gleichzeitig (1888) die Entdeckung gemacht, daß einige Metalle bei Belichtung mit ultravioletten Strahlen positiv elektrisiert werden. Diese Erscheinung ist außer von den Entdeckern von Stoletow, Borgmann, Bichat und Blondlot, Elster und Geitel, Hoor u. a. untersucht worden. Bichat und Blondlot fanden, daß die Elektrisierung verstärkt wird, wenn man auf die Metallplatte einen kräftigen Luftstrom lenkt, der indes an sich keine Elektrisierung hervorruft. Die Elektrisierung hängt von der Art des Metalles ab; sie ist besonders kräftig auf Platten aus Zn und Al, die, wie Elster und Geitel gezeigt haben, sogar unter der Einwirkung der Sonnenstrahlen elektrisiert werden.

VIII. **Strömen von Flüssigkeiten durch poröse Zwischenwände und durch enge Röhren.** Quincke machte (1859) die Entdeckung, daß, falls eine Flüssigkeit unter Druck durch eine poröse Wandung strömt, die austretende Flüssigkeit, sowie die Flüssigkeit, welche noch nicht bis zur Wandung gelangt ist, elektrisiert werden, und zwar die erstere in der Mehrzahl der Fälle positiv, die letztere negativ.

Zwei Glasröhren *A* und *B* (Fig. 101) sind voneinander durch eine poröse Scheidewand getrennt und mit Wasser gefüllt, welches unter

Fig. 101.



Druck durch die seitlich angebrachte Röhre *D* einströmt und durch *E* ausströmt. In *A* und *B* befinden sich zwei Platinplatten, die mit in das Glas eingeschmolzenen Drähten in Verbindung stehen. Verbindet man diese Drähte mit einem Elektrometer, so kann man ihre Elektrisierung nachweisen.

Fig. 102.



In Fig. 102 ist ein Apparat abgebildet, der ebenfalls dazu dienen kann, diese Erscheinung zu zeigen. Auf ein poröses Tongefäß, das sich innerhalb eines Glasgefäßes befindet, ist ein Trichter *G* aufgekittet, dessen Röhre *K*, wie die Figur zeigt, zweimal umgebogen ist. In das Glas- und das Tongefäß wird Wasser gegossen. Im Innern von *G* sowie außen befinden sich zylindrisch geformte Platinplatten *P* und P_1. In der Röhre *V* zerlegt man, während der Hahn *H* geschlossen ist, Wasser mittels eines elektrischen Stromes. Der Druck des hierbei entstehenden Knallgases wird durch das geschlossene Manometer *Q* gemessen. Öffnet man nun den Hahn *H*, so übt man auf das im Tongefäß befindliche Wasser einen Druck aus. Zwischen den beiden Platinplatten tritt jetzt eine Potentialdifferenz auf, wobei das Potential der äußeren Platte sich als das höhere erweist.

Die Potentialdifferenz zwischen den Platten hängt von der Substanz der Scheidewand ab und ist der Druckdifferenz zu beiden Seiten der Scheidewand proportional, hängt aber weder von der Dicke, noch auch von dem Flächeninhalt der Scheidewand ab. Beträgt die Druckdifferenz 1 Atm., so erhält man folgende Potentialdifferenzen (D = der E. M. K. des Daniellelementes):

Schwefel	9,77 D	Asbest	0,22 D
Quarzsand	6,20 „	Porzellan	0,20 „
Seide	1,25 „	Elfenbein	0,031 „
Gebrannter Ton . . .	0,36 „	Tierblase	0,015 „

Zöllner hat (1872) gezeigt, daß eine ähnliche Erscheinung auftritt, wenn man die poröse Scheidewand durch eine Kapillarröhre ersetzt. Die Potentialdifferenz ist auch hier proportional der Druckdifferenz und hängt von der Länge und dem Querschnitt nicht ab, falls die Röhre eine solche Länge und einen solchen Durchmesser hat, daß das Strömen der Flüssigkeit durch sie dem Poiseuilleschen Gesetz (Bd. I) folgt. Experimentaluntersuchungen hierüber haben Haga, Elster, Clark, Dorn, Edlund und Gouré de Villemontée (1897) ausgeführt. Eine theoretische Erklärung dieser Erscheinung, die sich in engem Zusammenhange mit der Erscheinung der elektrischen Endosmose, mit der wir uns in der Folge bekannt machen werden, befindet, hat Helmholtz (1879) gegeben. Er nimmt an, daß zwischen der Wandung der Kapillarröhrchen, welche die porösen Körper durchsetzen, und der Flüssigkeit sich eine elektrische Doppelschicht bildet, wobei sich die positive Schicht auf der Seite der Flüssigkeit befindet. Wenn sich die Flüssigkeit bewegt, so reißt sie zum Teil auch die Schicht der positiven Elektrizität mit sich, die sich in dem Gefäße ausscheidet, in welches die Flüssigkeit strömt. Die Flüssigkeit, welche in die Kapillare eintritt, findet auf deren Wandungen negative Elektrizität vor, welche in ihr positive induziert, während die negative in das Gefäß übergeht, aus welchem die Flüssigkeit in die poröse Scheidewand hineinströmt. Die theoretische Untersuchung hat Helmholtz zu jenen Gesetzen geführt, welche weiter oben angeführt worden sind.

Gouré de Villemontée fand (1897), daß das Strömen einer leitenden Flüssigkeit (Salzlösung, Quecksilber) durch Röhren oder durch ein ausgezogenes Rohrende keine Potentialdifferenz hervorruft.

IX. Elektrizität von Tieren und Pflanzen. In den Muskeln, Drüsen und Nerven der Tiere wirken elektromotorische Kräfte, deren Untersuchung Gegenstand der Physiologie ist. Einige Fische (Torpedo narce, Torpedo Galvaniix, Narcine brasiliensis, Gymnotus electricus, Malepterurus electricus) besitzen besondere Organe, die ganz gewaltige Potentialdifferenzen, also auch Elektrizitätsmengen, die sich durch die benachbarten Körper entladen, zu erzeugen imstande sind. Bei einigen

der genannten Fische (Torpedo) liegt dieses Organ in der Kopfseite des Körpers, bei anderen (Gymnotus) befindet es sich im Schwanze. Beim Torpedo besteht es aus einer großen Anzahl (400 bis 1000) nebeneinanderliegender zylindrischer oder prismatischer Säulchen, die aus aufeinanderliegenden, sehr dünnen, voneinander durch eine klebrige Substanz getrennten Blättchen bestehen. Die Entladungen dieses Organs erfolgen durch Willensakte zum Schutze oder beim Überfall auf die Beute. Wenn man beim Gymnotus an Kopf und Schwanz, oder beim Torpedo an Rücken und Bauch gekrümmte Metallplatten anbringt, kann man Elektroskopladungen, starke elektrische Schläge und sogar elektrische Funken erhalten.

X. Variables Magnetfeld, neue Strahlen und radioaktive Substanzen. Wir erwähnen hier diese Quellen elektromotorischer Kräfte nur, um eine gewisse Vollständigkeit unserer Übersicht über die verschiedenen Elektrizitätsquellen zu erlangen. In der Folge werden wir uns mit ihnen eingehend bekannt machen.

§ 16. Elektrisiermaschinen. Wir werden hier einige von den Apparaten betrachten, die man gegenwärtig benutzt, um schnell und in bequemer Weise kräftige elektrische Ladungen zu erhalten, für welche daher die Bezeichnung „Elektrizitätsquellen" wohl die passendste wäre. Die alte Benennung „Elektrisiermaschinen" erscheint heutzutage gar zu unbestimmt, wir halten es jedoch für unnötig, sie durch eine andere zu ersetzen. Streng genommen besteht die Aufgabe dieser Maschinen darin, auf zwei gegebenen Leitern (Konduktoren) eine bestimmte Potentialdifferenz aufrecht zu erhalten. Diese Konduktoren kann man als unmittelbare Quellen von elektrischen Ladungen benutzen, oder man kann Entladungen zwischen ihnen oder zwischen anderen, mit ihnen verbundenen Leitern erhalten.

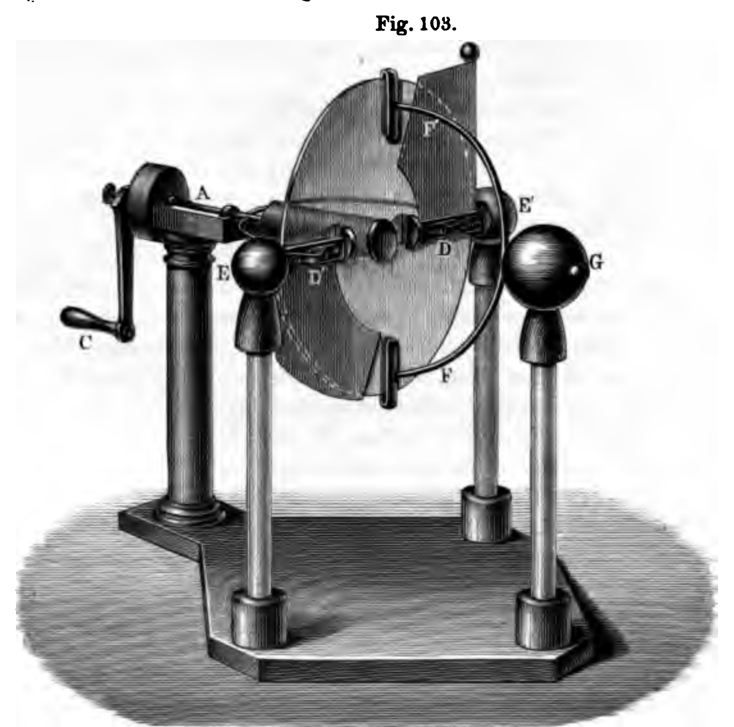
Die elektrische Energie, in welcher Form sie auch bei Wirkung der Maschine erscheinen mag, hat ihren Ursprung in mechanischer Arbeit, die zu einem Inbewegungsetzen (gewöhnlich zum Drehen) beweglicher Teile der Maschine, zum Überwinden von Anziehungs- oder Abstoßungskräften, die in jedem Augenblicke zwischen den ungleichnamig oder gleichnamig elektrisierten sich bewegenden Teilen der Maschine wirken, verbraucht wird. Wo der betreffende Arbeitsaufwand stattfindet, ist in jedem einzelnen Falle leicht zu ermitteln, wir werden deshalb auf diese Frage nicht näher eingehen.

Die Zahl der zu verschiedenen Zeiten konstruierten Elektrisiermaschinen ist eine sehr große. Einige Einzelheiten hierüber kann man in dem Werke von John Gray: „Die Influenzmaschinen" (franz. Übers. von G. Pelissier unter dem Titel „Les machines électriques à influence", Paris 1892) finden, ferner in dem Werke von G. Wiedemann: „Die Lehre von der Elektrizität", Bd. I, S. 925—982. Gewöhnlich unter-

scheidet man Reibungselektrisiermaschinen und Influenzmaschinen. Gebraucht werden gegenwärtig fast ausschließlich die letzteren.

In Fig. 103 ist eine von den zahlreichen Formen der Reibungselektrisiermaschinen abgebildet. Die an der Achse A befestigte Glasscheibe wird mit Hilfe der Kurbel C in Drehung versetzt, wobei ihre Oberfläche sich an zwei Paar Reibkissen D und D' reibt, die mit amalgamiertem Leder überzogen sind. Der Konduktor G steht mit

Fig. 103.



zwei metallenen, gabelförmigen Saugern in Verbindung, welche die Glasscheibe von beiden Seiten umfassen und sich am obersten und untersten Teile derselben befinden. Die der Scheibe zugekehrten Oberflächen der Sauger sind mit Spitzen versehen (in der Figur nicht sichtbar). Wenn die beim Reiben an den Reibkissen positiv elektrisierte Glasoberfläche in die Nähe der Sauger kommt, ruft sie in dem metallenen Systeme, welches von den Saugern, dem Drahtbogen FF' und dem Konduktor G gebildet wird, induzierte Elektrizitäten wach, wobei sich die positive auf dem Konduktor G ansammelt, während die negative sich durch die Spitzen der Sauger zerstreut und auf die Glasoberfläche übertragen wird, deren positive Ladung sie vernichtet. Dreht man die

Kurbel C in der Uhrzeigerrichtung, so wird die Scheibe in den unterhalb D und oberhalb D' gelegenen Quadranten elektrisiert. Die negative Elektrizität der Reibkissen geht längs dem horizontalen Metallbogen zur Achse A, die man mit der Erde verbindet. Dreht man den Bogen

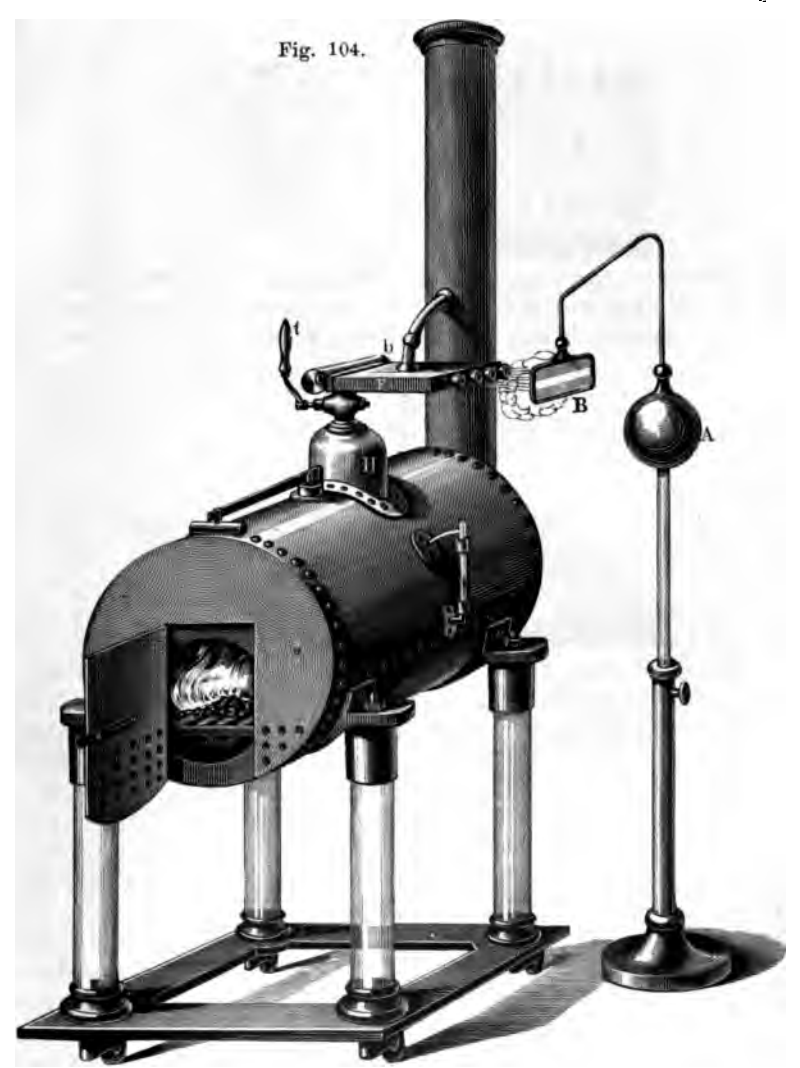


Fig. 104.

FF' in die horizontale Stellung, so daß die Sauger mit den Kugeln E und E' in Verbindung kommen, und bringt den anderen Bogen in vertikale Lage, so beginnt die negative Elektrizität sich auf dem Konduktor G anzusammeln, während die positive in die Erde abfließt.

Zu den Reibungselektrisiermaschinen gehört auch die Dampfelektrisiermaschine von **Armstrong**, die in Fig. 104 (a. v. S.) abgebildet ist. Ihre Wirkung beruht darauf, daß übersättigter, Wassertröpfchen enthaltender Dampf positiv elektrisiert wird, wenn er unter Druck durch

Fig. 105.





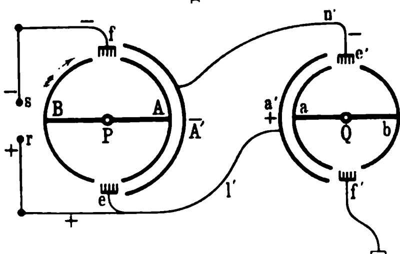
enge Röhren strömt (vgl. S. 245). Der Apparat besteht aus einem Dampfkessel, der von Glasfüßen getragen wird. Der Dampf strömt durch das Gehäuse *b* und wird nach seinem Austritt ins Freie auf die

Fig. 106.



mit dem Konduktor *A* verbundenen Spitzen des Saugers *B* gelenkt. Die innere Einrichtung des Gehäuses und der Ausflußröhrchen ist in Fig. 105 dargestellt. Der Dampf strömt durch die im Innern des Gehäuses befindlichen, parallelen Röhren, deren Innenwandung aus **Holz** besteht. Von außen sind diese Röhren mit Lampendocht oder Bindfaden umwickelt, der durch in das Gehäuse gegossenes Wasser angefeuchtet wird; hierdurch wird eine mäßige Abkühlung des Dampfes und die Bildung von Wassertröpfchen in ihm bewirkt. Ferner strömt der Dampf durch einen gewundenen Kanal (Fig. 105, rechts), wobei er starke Reibung erfährt. Während die Maschine in Tätigkeit ist, wird der Konduktor *A* positiv, der Kessel aber, den man entweder erdet oder mit einem anderen Konduktor verbindet, negativ geladen.

Fig. 107.



Die **Influenzmaschinen** beruhen auf dem Hervorrufen von Elektrizität durch Induktion (Influenz). Bisweilen sondert man von ihnen eine besondere Gruppe von Maschinen ab, die man **Duplikatoren** nennt. Aber auch ihre Wirkung beruht auf Induktion. Sie sind dadurch charakterisiert, daß eine gegebene, mehr oder weniger konstante Ladung in einem beweglichen Leiter Induktion hervorruft, wobei dann die eine von den induzierten Elektrizitäten durch Bewegung jenes Leiters auf den Konduktor übertragen wird. Diese Manipulation wiederholt sich fortgesetzt. Bei anderen Influenzmaschinen vergrößert sich die ursprünglich induzierte Ladung allmählich, während sich die Maschine in Tätigkeit befindet. Wären keine Elektrizitätsverluste durch Zerstreuung vorhanden, so würde die Ladung, während die Maschine in Tätigkeit ist, für den Duplikator in arithmetischer, für die anderen Influenzmaschinen in geometrischer Progression wachsen.

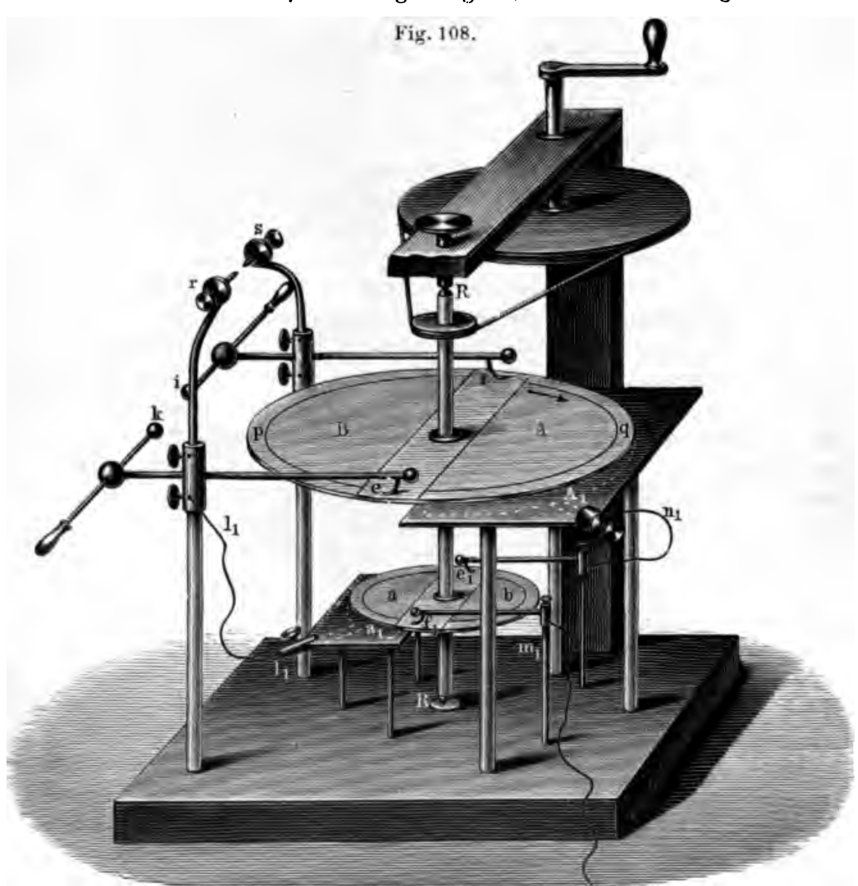
Der einfachste hierhergehörige Apparat ist der **Elektrophor**; derselbe besteht aus einem flachen Teller *a* (Fig. 106) aus Metall, welcher einen festen Harzkuchen oder eine erstarrte Mischung von Harz und gewissen anderen Substanzen (Wachs, Kolophonium, Schellack, Terpentin usw.) enthält; die Oberfläche des Harzkuchens muß eben und glatt sein. Meist wird gegenwärtig statt des zerbrechlichen Harzkuchens eine ebene, polierte Ebonitscheibe verwandt, die dann, da der Metallteller in Fortfall kommt, auf eine gut leitende Unterlage gesetzt oder auf ihrer Unterseite mit Stanniol überzogen wird. Peitscht man den Harzkuchen mit einem Fuchsschwanz oder einem Stück Katzenfell, so wird seine Oberfläche negativ elektrisiert. Hierauf legt man auf letztere einen isolierten Metalldeckel *b*, der auch durch einen mit Stanniol überzogenen Holz- oder Pappdeckel ersetzt werden kann. Die auf der Oberfläche *a* befindliche Elektrizität ruft in *b* Induktion hervor. Man berührt nun die Oberfläche von *b* mit dem Finger und leitet hierdurch die negative Elektrizität ab, während sich an der Unterfläche von *b* positive Elektrizität ansammelt; diese Fläche berührt wegen der stets vorhandenen Unebenheiten die Oberfläche von *a* nur in wenigen Punkten. Hebt man jetzt den Deckel *b* ab, so ist in ihm eine positive Ladung enthalten, die man auf einen beliebigen anderen Leiter übertragen, beispielsweise zur Ladung einer Leidener Flasche benutzen kann. Setzt man den Elektrophordeckel *b* wiederum auf *a*, berührt ihn mit dem Finger und hebt ihn darauf ab, so erhält man eine neue Ladung. Diese Manipulation kann man sehr viele Male hintereinander vornehmen.

Die Influenzmaschinen des gegenwärtig üblichen Typus, die große Elektrizitätsmengen liefern, sind zuerst von A. **Toepler** (1865, damals in Riga), **Holtz** (1865) und Th. **Schwedow** (1868) konstruiert worden.

Das Prinzip, auf welchem die Konstruktion der ersten von **Toepler** konstruierten Maschine beruht, ist leicht aus der schematischen Fig. 107 zu erkennen, in welcher die ebenen Scheiben der Deutlichkeit wegen

durch zylindrisch gebogene ersetzt sind. Die feste Scheibe *A'* ist negativ elektrisiert. Beide Scheiben *A* und *B* drehen sich um die Achse *P*, wobei sie die Bürsten (Metallpinsel) *f* und *e* berühren. Bewegt sich die Scheibe *B* nach rechts, so wird auf ihr (+) induziert, während (—) durch den Metallstab *f* zur Kugel *s* geht; nimmt *B* die Lage von *A*

Fig. 108.

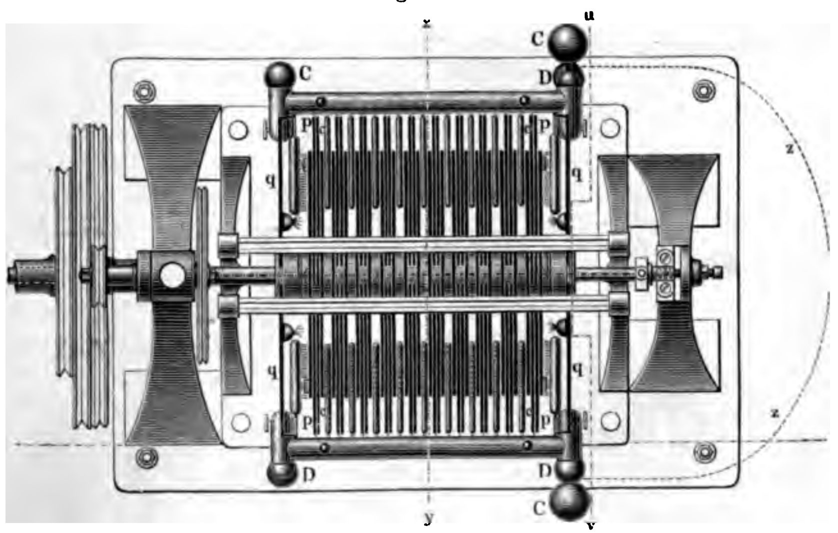


ein, so hört ihre Verbindung mit *f* und *s* auf. Ferner kommt die Scheibe *B* in Berührung mit der Bürste *e*, und bevor sie noch die in der Figur angegebene Stellung erreicht, geht ihre gesamte Ladung durch *e* zur Kugel *r* über. Dieselben Erscheinungen wiederholen sich bei jeder vollen Umdrehung sowohl der Scheibe *B*, als auch der Scheibe *A*: die eine der induzierten Elektrizitäten geht durch *f* nach *s*, die andere — etwas später — durch *e* nach *r*. Um nicht bloß die wirksame Ladung der Scheibe *A* aufrecht zu erhalten, sondern sie auch noch zu

vergrößern, ist noch ein zweiter Apparatteil vorhanden, der im wesentlichen eine Wiederholung des ersten bildet. Die Induktion erfolgt hier durch die positive Ladung der Scheibe a'; die Scheiben a und b erwerben (—), bevor sie die Bürste f' berühren, wobei (+) zur Erde abfließt. Hierauf geben sie ihre (—) der Bürste e' ab, sobald sie bereits der Lage nahe sind, in welcher sich in unserer Figur die Scheibe b befindet. Die negative Elektrizität geht aus e' auf die Scheibe A' über und vergrößert deren Ladung. Die positive Ladung der Scheibe a' wird durch die seitliche Verzweigung von den Leitern *e r* erhalten. Es ist klar, daß die Ladungen auf A' und a' einander gegenseitig verstärken, bis schließlich die unter den gegebenen Umständen größtmög-



Fig. 109.



lichen elektrischen Spannungen auf r und s oder irgend welchen mit ihnen verbundenen Leitern erreicht sind.

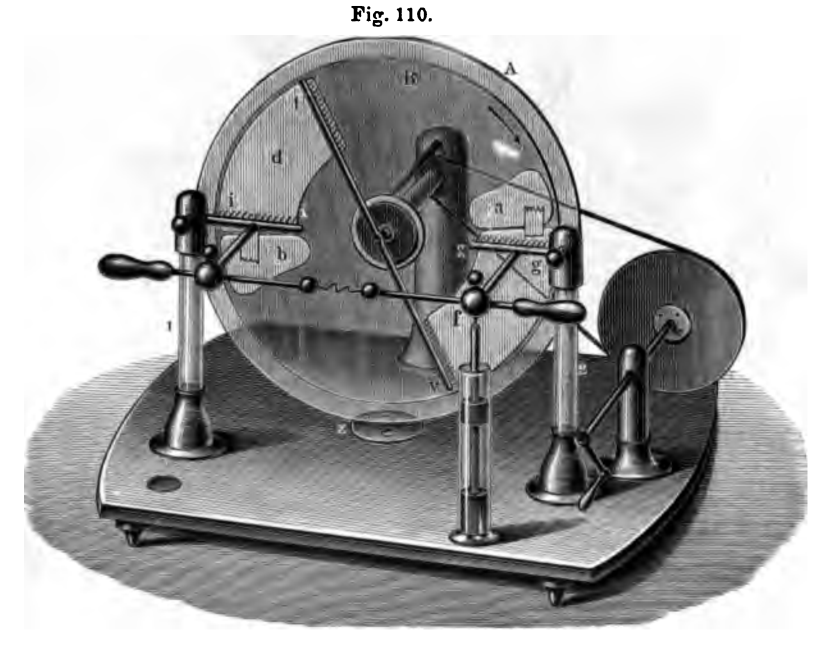
Die Gesamtansicht der Toeplerschen Maschine ist in Fig. 108 gegeben, in welcher des leichteren Verständnisses wegen die einzelnen Teile mit den gleichen Buchstaben bezeichnet sind, wie in der schematischen Fig. 107. Die beiden Glasscheiben, auf welchen sich die Stanniolbelegungen A, B und a, b befinden, sind um die gemeinsame Achse RR drehbar; die Stanniolbelegungen A_1 und a_1 auf den festen Glasscheiben sind den Belegungen A und a an Größe gleich. Die Drähte n_1 n_1 und l_1 l_1 dienen zum Verbinden von e_1 mit A_1 und e mit a_1; f_1 ist geerdet.

Der soeben betrachtete Apparat ist überaus typisch, er stellt den Repräsentanten einer sehr großen Zahl von Influenzmaschinen, die ihrem Aussehen nach durchaus verschieden sind, dar. In der Folge hat

Toepler Maschinen gebaut, bei welchen sich auf einer gemeinsamen Achse eine große Anzahl von Scheiben befindet, deren Elektrisierung gleichzeitig von einem gemeinsamen „Generator" aufrecht erhalten wird. In Fig. 109 (a. v. S.) ist eine solche Maschine im Querschnitt dargestellt. Mit *p* sind hier die festen Scheiben bezeichnet, mit *c* die Bürsten, die sich in den Zwischenräumen zwischen je zwei beweglichen Scheiben befinden; die beweglichen Scheiben selbst sind durch kürzere schwarze Striche angedeutet. Auf eine ausführlichere Beschreibung dieser Maschine werden wir hier nicht eingehen und verweisen in bezug hierauf unsere Leser auf das Literaturverzeichnis.

Wir gehen nunmehr zur Beschreibung der gegenwärtig sehr verbreiteten Holtzschen Influenzmaschine über; eine Form derselben ist

Fig. 110.

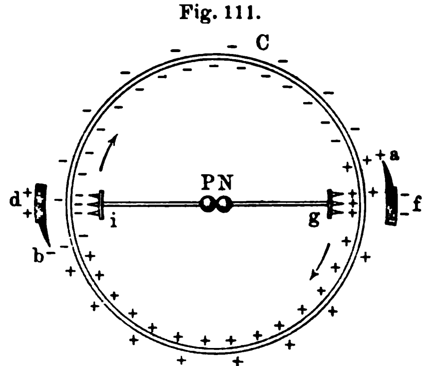


in Fig. 110 abgebildet. Die feste Glasscheibe *A* stützt sich auf das Ebonitplättchen *z* und wird mit Hilfe von Ebonitklammern, die in der Figur fortgelassen sind, in vertikaler Stellung erhalten. Diese Scheibe hat zwei Ausschnitte *a* und *b*, die bisweilen bis an den Scheibenrand reichen. Auf der Rückfläche der Scheibe sind Papierbelege *d* und *f* aufgeklebt, die in gespitzte oder gezahnte Papierstreifen auslaufen. Letztere sind derart umgebogen, daß sie durch die Scheibenausschnitte hindurchreichen und der Rückseite der beweglichen Glasscheibe *B*, die keine Ausschnitte hat, genähert sind. Gegenüber der Vorderfläche von *B* befinden sich die Sauger *gg* und *ii*, d. h. mit zahlreichen Stacheln ver-

sehene Metallstäbe; sie werden von den Glasfüßen (1) und (2) getragen und sind mit zwei in Kugeln endigenden, gegeneinander verschiebbaren Konduktoren verbunden. Auf der Achse, um welche *B* in schnelle Rotation versetzt werden kann, ist ein sogenannter diametraler Konduktor *tv* befestigt, dessen Enden den Enden der Papierbelegungen *d* und *f* gegenüberstehen und ebenfalls mit Stacheln versehen sind. An die vorderen verschiebbaren Konduktoren sind zwei enge Leidener Flaschen mit sehr niedrigen Belegungen angeschlossen, deren äußere Belegungen durch einen Metallstreifen unterhalb des Brettes, auf welchem der Apparat montiert ist, miteinander verbunden sind. In der Figur ist nur eine von diesen Flaschen dargestellt.

Um die Maschine in Tätigkeit zu versetzen, hat man die Konduktorkugeln aneinander zu schieben und die bewegliche Scheibe in Drehung zu versetzen, während man zu gleicher Zeit eine der Papierbelegungen, beispielsweise *d*, elektrisiert. Hierfür genügt es, an *d* eine geriebene Kautschukplatte oder den Knopf einer kleinen, geladenen Leidener Flasche zu halten. Die Drehung von *B* muß gegen die gezahnten Papierstreifen gerichtet sein, also in der Pfeilrichtung erfolgen. Bald nachdem das Drehen begonnen hat, erweist sich die Maschine als geladen und beginnt zu wirken. Schiebt man jetzt die Konduktorkugeln auseinander, während *B* fortgesetzt rotiert, so geht zwischen jenen Kugeln eine ununterbrochene Entladung vor sich. Durch Verbindung der Konduktoren mit anderen Leitern kann man je nach Wunsch eine oder beide Elektrizitäten, die fortwährend jenen Konduktoren zuströmen, zur Benutzung erhalten.

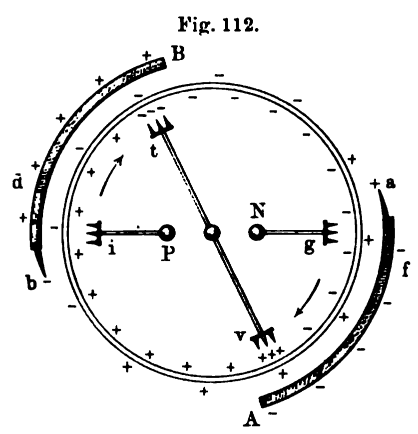
Fig. 111.



Um die Wirkungsweise dieser Maschine verständlich zu machen, wollen wir eine von Bertin ersonnene schematische Darstellung derselben zu Hilfe nehmen. Die vordere, bewegliche Scheibe sei hier durch den drehbaren Zylinder *C* (Fig. 111) repräsentiert, dessen Innenfläche der Vorderseite der beweglichen Scheibe oder — genauer gesagt — dem ringförmigen Teile dieser Oberfläche entspricht, welcher an den Saugern *gg* vorübergeht. Ebenso entspricht die Außenfläche von *C* der Rückseite der beweglichen Scheibe. Die Sauger *g* und *i*, deren Stacheln senkrecht zur Vorderseite der Scheibe stehen, sind richtig dargestellt, nämlich senkrecht zur Innenfläche des Zylinders. Das System der Konduktoren und die Entladerkugeln *P* und *N* sind in vereinfachter

Weise dargestellt. Die hintere, feste Scheibe ist ganz fortgelassen, dafür aber sind die Papierbelegungen *d* und *f*, sowie die gezahnten Papierstreifen *a* und *b* angedeutet. Nehmen wir an, es seien, wie oben gesagt, die Entladerkugeln aneinandergeschoben, so daß man von *g* bis *i* gewissermaßen nur einen einzigen Körper vor sich hat. Der Belegung *f* erteilen wir nun eine negative Ladung und beginnen den Zylinder in der Pfeilrichtung zu drehen. Das (—) auf *f* erzeugt im System *gi* Induktion, weshalb aus *g* (+) auf die Innenfläche des Glases überströmt. Dieses (+) wird bei Drehung des Zylinders auf *db* übertragen, weshalb sich die Papierbelegung *d* positiv elektrisiert, während (—) in relativ geringer Menge aus der Spitze *b* auf die Rückseite der Scheibe (Außenfläche) hinüberströmt. Unter der Einwirkung beider Belegungen *d* und *f* erfolgt ein verstärktes Ausströmen von (—) aus *i* und (+) aus *g*. Beim Vorübergehen an *i* wird die Glasoberfläche umgeladen und wird dabei negativ. Das (—) vergrößert bei Annäherung an *f* dessen Ladung, wobei (+) aus der Spitze *a* auf die Rückseite der Scheibe übergeht. Im weiteren wiederholen sich dieselben Erscheinungen. Das (—) auf der oberen und das (+) auf der unteren Hälfte der Scheibe vergrößern schnell die Ladungen der Papierbelegungen *f* und *d* bis zum erreichbaren Maximum, wobei auch das maximale Ausströmen des (+) aus den Spitzen *g* und des (—) aus den Spitzen *i* erreicht wird. Das Umladen der Scheibe erfolgt derart, daß während einer halben Umdrehung der Scheibe von *g* und *i* die Elektrizitätsmengen $+2e$ und $-2e$ ausströmen, wenn man mit $\pm e$ die Elektrizitätsmengen bezeichnet, welche sich auf der oberen und unteren Scheibenhälfte befinden. Ist das Maximum der Ladung von *f* und *d* erreicht, so wird es durch die Ladungen aufrecht erhalten, die sich den Spitzen *a* und *b* nähern. Das Ausströmen der Elektrizität aus diesen Spitzen auf die Rückseite der Scheibe ist relativ geringfügig, spielt augenscheinlich keine besondere Rolle und hängt von der Geschwindigkeit ab, mit welcher die Belegungen *f* und *d* ihre Ladungen verlieren. Im System *iPNg* findet ununterbrochen Induktion von seiten der Papierbelegungen *d* und *f* statt, wobei das (+) nach *g*, das (—) nach *i* strömt. Rückt man, nachdem sich die Maschine geladen hat, die Entladerkugeln auseinander, so erfolgt die Induktion gesondert in den Teilen *iP* und *Ng*, weshalb nach *P* ununterbrochen (+), nach *N* jedoch (—) strömt, also die Entladerkugeln

Fig. 112.



oder die Konduktoren als Elektrizitätsquellen dienen können. Hierbei tritt aber folgender störender Umstand auf. Schiebt man die Entladerkugeln so weit auseinander, daß zwischen ihnen keine Entladung stattfinden kann, oder aber geben die mit den Entladerkugeln verbundenen Leiter ihre Ladungen nicht schnell genug ab, so kann es leicht eintreten, daß die weitere Induktion in *iP* oder *gN* unmöglich wird. Dann hört das Ausströmen der Elektrizität aus den Spitzen *i* und *g* auf, weshalb der Ladungsverlust nicht mehr von den Papierbelegungen *d* und *f* ersetzt wird. Die Maschine hört dann auf zu arbeiten, oder sie ladet sich um, weil beispielsweise (—) nach *g* zurückströmt und auf die Scheibenoberfläche übergeht.

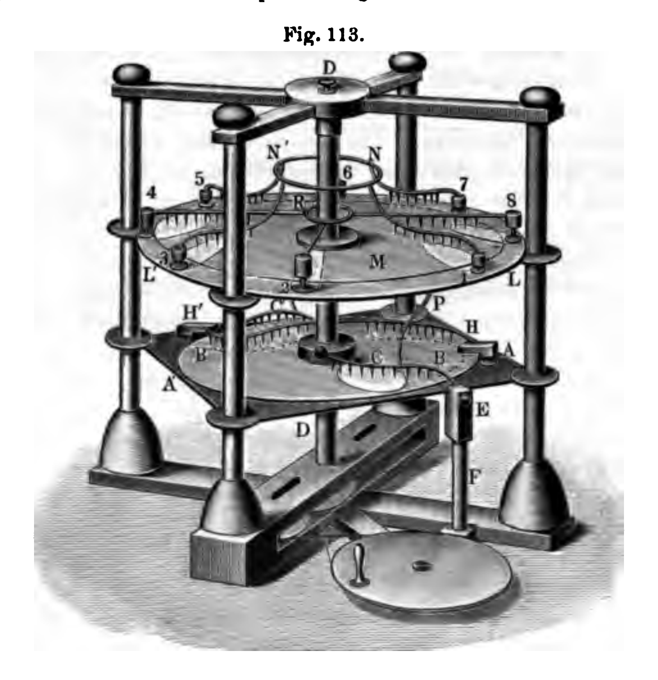
Zur Vermeidung dieses Übelstandes dient der sogenannte diametrale Konduktor *tv* (Fig. 112), von dem bereits oben die Rede war. Aus unserer schematischen Fig. 112 ist die Wirkungsweise desselben leicht zu erkennen. Die Papierstreifen *d* und *f* sind hier in bedeutend größerem Maßstabe dargestellt als in Fig. 111; man sieht hierbei, daß sich die Sauger *t* und *v* gegenüber den breiten Enden der Papierbelegungen befinden müssen. Wenn die Entladerkugeln *P* und *N* einander berühren, hat der diametrale Konduktor keine Bedeutung. Sind dagegen jene Kugeln sehr weit auseinandergerückt, oder werden aus anderen Gründen ihre Ladungen nicht verausgabt, so daß das Ausströmen der Elektrizität aus den Spitzen *i* und *g* aufhört, so beginnt der Konduktor *tv* ebenso zu wirken, wie das Leitersystem *iPNg* der Fig. 111. Der Ladungswechsel der Scheibe erfolgt in *t* und *v*; dies genügt, um die Elektrisierung der Belegungen *d* und *f* aufrecht zu erhalten, also auch den Ladungszustand der Maschine zu wahren, die sogleich in der früheren Weise zu wirken anfängt, sobald ein Verausgaben der nach *N* und *P* strömenden Ladungen, also auch ein Ausströmen der Elektrizität aus den Saugern *i* und *g* beginnt.

Das Papier der Belegungen kann nicht durch einen zu schlechten oder zu guten Leiter ersetzt werden. Im ersten Falle könnte eine Induktion nicht in der oben beschriebenen Weise erfolgen, im letzteren würden sich die Ladungen bei kurzdauerndem Stillstand der Maschine nicht erhalten, sondern aus den Spitzen auf die Rückseite der beweglichen Scheibe übergehen. Hierin liegt auch der Grund, weshalb diese Influenzmaschine nicht nur in feuchter, sondern auch in allzu trockener Luft nur schlecht oder auch gar nicht wirkt. Die Aufgabe der festen Scheibe ist, wie man sehen kann, eine dreifache: sie trägt die Papierbelegungen und verhindert einen Ladungsverlust derselben; außerdem wird ihre der beweglichen Scheibe zugekehrte Oberfläche allmählich ungleichnamig mit jener Scheibe elektrisiert, d. h. wenn man dem Schema der Fig. 111 folgt, positiv auf der oberen und negativ auf der unteren Hälfte. Die Ladung der festen Scheibe verhindert, indem sie auf die Ladung der

beweglichen einwirkt, ein Zerstreuen der letzteren während der Zeit, wo die Scheibe sich von einem Sauger zu anderen dreht.

Die Influenzmaschine von Th. Schwedow (1868) ist in Fig. 113 abgebildet. Die beiden Glasscheiben *B* und *M* sind auf der gemeinsamen Achse *DD* befestigt. Unter *B* befindet sich eine Platte *A* aus Hartgummi, in welcher sich zwei symmetrisch gelegene Ausschnitte befinden, von denen der eine, der sich gerade unterhalb des Saugers *C* befindet, in der Figur sichtbar ist. Unter *M* befindet sich eine feste Glasscheibe *L*, auf deren Oberseite acht längliche Papierstreifen geklebt sind (1, 2, 3 usw.). Die unpaarzahligen Streifen sind untereinander

Fig. 113.



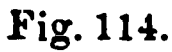
und mit dem Leiter *P* verbunden: die paarzahligen sind ebenfalls untereinander und mit einem entsprechenden Leiter auf der anderen Seite verbunden. Über den unpaarzahligen Streifen befinden sich vier Sauger, die einerseits am Ringe *N* endigen, während ihre anderen Enden isoliert sind. Die übrigen vier Saugkämme, die sich über den paarzahligen Papierstreifen befinden, sind mit dem Ringe *R* verbunden. Die Platte *A* und die Scheibe *B* werden von den Zweigen der Doppelkämme *C* und *C'* umfaßt. Der obere Zweig *C*, welcher mit dem Leiter *P* verbunden ist, kommt gerade über den Ausschnitt der Scheibe *A* zu liegen. Der andere Zweig, in der Figur nicht sichtbar, befindet sich unterhalb *A*; er führt zuerst am Rande der Scheibe *B* entlang

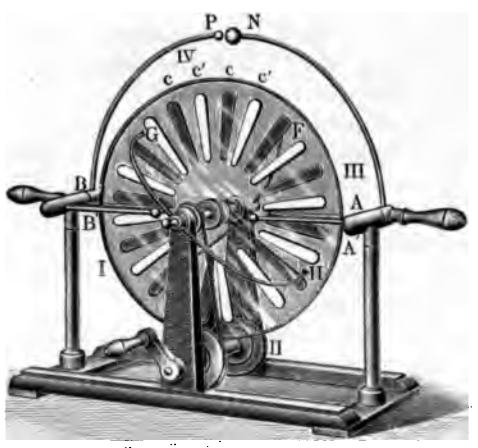
und darauf in der Richtung der rechten Hälfte von HH'; seine Lage ist durch Punkte angedeutet. Um die Maschine zu laden, hält man unter dem Ausschnitte der Scheibe A, also unter dem Saugkamme C, eine geriebene Hartgummiplatte und versetzt die Achse in Drehung gegen die Uhrzeigerrichtung. Es strömt dann von C (+) auf die Scheibe B, während (—) durch P auf die ungeradzahligen Papierbelegungen und außerdem auf den unteren Zweig des Saugkammes C übergeht, weshalb aus der rechten Hälfte des Saugers $H'H$ auf die Scheibe B (+) überströmt und (—) zum Ende H' geht. Kommt die Scheibe B mit (+) an den Saugkamm C' heran, so strömt auf sie aus C' (—) über und (+) geht auf die paarzahligen Belegungen und außerdem auf den unteren Zweig des Saugers C' über, weshalb sich das Ausströmen von (—) aus der linken Hälfte des Saugers $H'H$ verstärkt, also auch das Ausströmen von (+) aus der rechten Hälfte. Die Scheibe kommt unter C' und H' mit negativer Ladung hervor, die wiederum beim Vorübergang an C und H positiv wird. Unter der Wirkung der Ladung der Papierbelegungen strömt auf die Scheibe M (+) aus den vier Saugern des Systems N und (—) aus den vier Saugern des Systems R, so daß in jedem Punkte der Oberfläche von M bei einer vollen Umdrehung dieser Scheibe sich das Vorzeichen der Elektrisierung achtmal ändert. Zum Ringe N strömt fortgesetzt (—), zum Ringe R dagegen (+). Diese beiden Ringe dienen als die Konduktoren, von denen elektrische Ladungen des einen oder anderen Vorzeichens entnommen werden können. Augenscheinlich übertrifft diese Influenzmaschine die Holtzsche hinsichtlich der von ihr gelieferten Elektrizitätsmenge.

Zur Ladung der Maschinen von Holtz und Schwedow bedarf es eines anderweitigen geladenen Körpers. Neuerdings sind vorzugsweise selbsterregende Maschinen im Gebrauch; bei diesen nimmt eine von vornherein auf einer der induzierenden Papier- oder Metallbelegungen auftretende Ladung schnell an Stärke zu und ruft auf den übrigen Belegungen die erforderlichen Ladungen hervor. Die Entstehungsweise der Anfangsladung, die ganz geringfügig sein kann, läßt sich nicht immer mit Sicherheit angeben. Es können hierbei Ladungen mitspielen, die von früher her auf der Maschine zurückgeblieben sind, die Reibung einiger Apparatteile aneinander (der Metallpinsel an den Glasflächen), der Kontakt von ungleichartigen Körpern (der Pinsel und Metallbelege), Induktion seitens benachbarter Körper, die zufällig elektrisiert waren, die Luftelektrizität usw.

Zu den selbsterregenden Maschinen gehören die Toeplerschen (späterer Konstruktion), die Vossche, sowie insbesondere die Holtz-Wimshurstsche. Die letztgenannte Maschine ist zuerst von Holtz konstruiert worden. Später hat sie, offenbar selbständig, Wimshurst erfunden, mit dessen Namen sie meist genannt wird, ungeachtet der wiederholten Prioritätsansprüche von Holtz (z. B. in der Zeitschr. f.

phys. u. chem. Unterr. **17**, 193, 1904). Wir wollen diese Influenzmaschine die Holtz-Wimshurstsche nennen. Sie besteht (Fig. 114) aus zwei Glas- oder Ebonitscheiben, die sich um eine gemeinsame Achse nach entgegengesetzten Richtungen drehen. Auf ihre nach außen gekehrten Oberflächen sind eine Reihe von Metallstreifen c und c' geklebt. Die horizontalen doppelten Saugkämme AA' und BB' reichen um beide Scheiben herum: sie stehen mit den Entladerkugeln P und N in Verbindung, die ihrerseits mittels besonderer isolierter Handhaben einander genähert oder voneinander entfernt werden können. GH und FE (der Buchstabe E fehlt in dieser Figur, er müßte durch den vorderen Träger der Scheibenachse verdeckt werden) sind zwei diametrale Konduktoren, die gegen einander senkrecht stehen und mit der horizontalen Richtung AB einen Winkel von 45° bilden. An den Enden


Fig. 114.



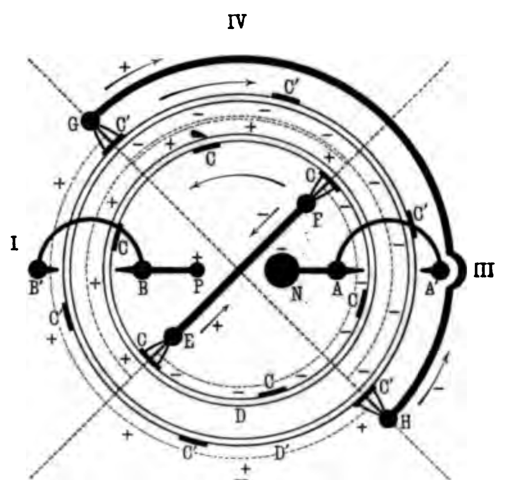
dieser beiden Konduktoren befinden sich Metallpinsel, welche die Oberflächen der beiden Scheiben leicht berühren.

Die Konduktoren GH und FE teilen den beiden Scheiben zusammengenommen entsprechenden geometrischen Kreis in vier Quadranten, die mit den römischen Ziffern I bis IV bezeichnet sind.

Um die Wirkungsweise dieser Maschine verstehen zu lernen, wollen wir uns der schematischen Fig. 115 bedienen. Auch hier sind, ebenso wie in Fig. 111, die Kreisscheiben durch zylindrische Scheiben D und D' ersetzt: der Drehungssinn letzterer ist durch Pfeile angedeutet, CC ... und $C'C'$ ... bedeuten die Metallbelegungen. Der Zylinder D' entspricht der vorderen, der Zylinder D der hinteren Scheibe der Fig. 114. Die diametralen Konduktoren mit den Pinseln sind durch eine Gerade FE und die bogenförmige Linie GH angedeutet: AA' und BB' sind die

Sauger, welche, wie gesagt, beide Scheiben gabelförmig umfassen, *P* und *N* sind die Entladerkugeln. Überhaupt sind in Fig. 115 alle Teile mit den gleichen Buchstaben bezeichnet, wie in Fig. 114. Nehmen wir an, es sei die Hälfte *HB'G* (I, II) der Scheibe *D'* auf irgend eine Weise positiv, die Scheibenhälfte *GA'H* (III, IV) dagegen negativ elektrisiert worden. Unter der Einwirkung dieser beiden Elektrisierungen wird dann in *EF* Induktion erfolgen; aus *E* wird (—), aus *F* dagegen (+) ausströmen, wodurch auf dem Teile *EAF* (II, III) der sich drehenden Scheibe *D* alle Belegungen *C* negative, in der Scheibenhälfte *FBE* (IV, I) jedoch positive Ladungen erhalten. Diese Ladungen rufen ihrerseits Induktion im Konduktor *GH* hervor. Aus *G* strömt (—), aus *H* (+) aus, weshalb auf der Hälfte *GA'H* (III, IV) der sich drehenden Scheibe *D'* die negative, auf der Hälfte *HB'G* (I, II) die positive Elektrisierung verstärkt wird. Dies ruft nun eine verstärkte Induktion auf *EF*, also auch eine Verstärkung der Ladung beider Hälften der Scheibe *D* hervor usf. Es ist klar, daß die rotierenden Scheiben gewissermaßen durch Wechselwirkung ihre Ladungen gegenseitig verstärken, wobei die diametralen Konduktoren jede Scheibe in zwei ungleichnamig elektrisierte Hälften teilen. Auf den Quadranten II und IV sind die Elektrisierungen der Scheiben ungleichnamig, die Ladungen ziehen einander an, was ihre Zerstreuung verhindert. Auf den Quadranten I und III dagegen sind die Elektrisierungen der Scheiben gleichnamig und es stoßen sich die Ladungen ab. Gerade in der Mitte dieser Quadranten befinden sich die gabelförmigen Sauger *AA'* und *BB'*: man sieht leicht ein, daß sich auf der Kugel *P* positive, auf *N* dagegen negative Elektrizität ansammeln muß.

Fig. 115.



Ohne die Beschreibungen verschiedener Maschinen fortzusetzen, wollen wir nur noch einige solcher Typen erwähnen, die gegenwärtig besonders verbreitet oder aber an sich von größerem Interesse sind.

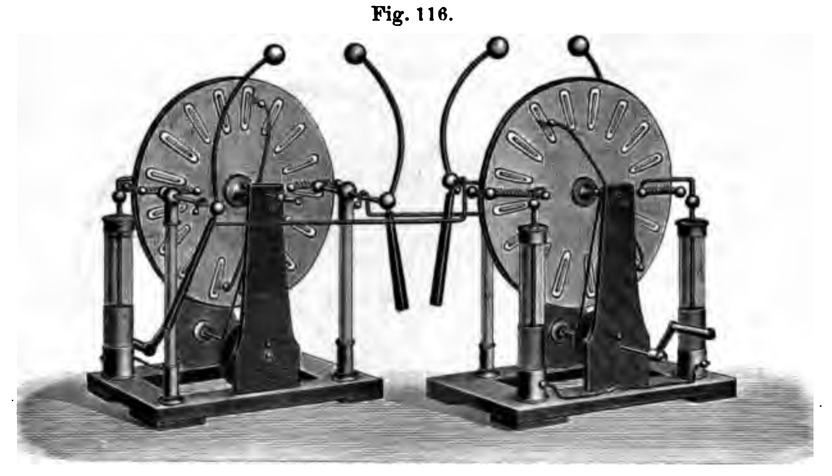
Von Duplikatoren nennen wir die Maschinen von Nicholson (1788), Belli (1831), Varley (1860), W. Thomson (1867), Righi (1872). Hierher kann man auch die Wasserinfluenzmaschine von

W. Thomson (1860) rechnen und ebenso seinen „replenisher", der bei gewissen Apparaten, mit denen wir uns noch bekannt machen werden, vorkommt; er dient dazu, auf einem gegebenen Körper einen gewissen Grad der Elektrisierung aufrecht zu erhalten.

Die Holtzsche Maschine ist modifiziert, oder ihr ähnliche Apparate sind konstruiert worden von: Teplow, Puschkow, Kundt (1868), Leyser (1873), Bleekrode (1871) und von Holtz (1867) selbst, der eine „doppeltwirkende" Maschine mit zwei in entgegengesetzter Richtung rotierenden Scheiben konstruiert hat.

Zu erwähnen sind ferner die Maschinen von Carré (1868), Kaiser (1869), Musäus (1872) und Wommelsdorf (1902). In neuerer Zeit hat man begonnen, Maschinen zu bauen, bei denen die Zahl der beweglichen Scheiben bis zu 30 und darüber hinausgeht. Die Be-

Fig. 116.



stimmung derartiger Maschinen ist, nicht nur große Potentialdifferenzen, sondern auch bedeutende Elektrizitätsmengen zu liefern.

Zum Schluß wollen wir noch auf einen interessanten Umstand hinweisen. Unter den verschiedenen Elektrisiermaschinen gibt es einige, die reversibel sind. Das heißt, wenn man sie durch Aufwand von mechanischer Arbeit in entsprechende Bewegung versetzt, so werden sie zu Quellen elektrischer Energie; wenn man aber umgekehrt Elektrizität oder genauer elektrische Energie zu ihnen strömen läßt, so beginnen sie selbst sich zu bewegen, es erfolgt also dann in ihnen umgekehrt Verbrauch von elektrischer Energie zur Leistung von mechanischer Arbeit. Hierher gehören die Maschinen von Holtz, Holtz-Wimshurst u. a. Verbindet man untereinander beispielsweise zwei Holtz-Wimshurstsche Maschinen mittels zweier Stäbe oder Drähte, wie aus Fig. 116 ersichtlich, und versetzt die eine von ihnen in Dre-

hung, so gerät auch die andere (die sich hierbei in einem gewissen Abstande von der ersten befinden kann) in Drehung. Demnach erlauben diese zwei Maschinen eine elektrische Arbeitsübertragung in die Ferne. Eine geeignetere Methode derartiger Übertragungen werden wir in der Folge kennen lernen.

Literatur.

Zu § 2.

Giese: W. A. **37**, 576, 1889.
Nernst: Zeitschr. f. phys. Chem. **13**, 531, 1894.
Richarz: W. A. **52**, 397, 1894; Verh. Berl. phys. Ges. **10**, 73, 1891.
J. J. Thomson: Phil. Mag. (5) **46**, 528, 1898.
Planck, Verh. d. deutsch. phys. Ges. **2**, 237, 1900; Arch. Néerl. (2) **6**, 55, 1901; Ann. d. Phys. (4) **9**, 640, 1902.
Stoney: Phil. Trans. Dubl. Soc. (2) **4**, 563, 1891.
Budde: W. A. **35**, 562, 1885.
Werner: Zeitschr. f. anorg. Chem. **3**, 267, 1893; **8**, 153, 1895; Zeitschr. f. phys. Chem. **12**, 35, 1893.
Lieben: Phys. Zeitschr. **1**, 237, 1900.
F. Kohlrausch: W. A. **6**, 1906, 1879.
Lodge: Brit. Assoc. Report. 1886, p. 389.
Cattaneo: Rendic. R. Acc. dei Lincei (5) **5**, 207, 1896 (II. Sem.).

Zu § 4.

Helmholtz: Berl. Ber. 1882, S. 825; Ges. Abh. **2**, 958.
W. Thomson: Phil. Mag., Dez. 1851; Math. and Phys. Papers **1**, 472.
Gockel: W. A. **24**, 618, 1885; **33**, 10, 1888; **40**, 450, 1890.
Czapski: W. A. **21**, 209, 1884.
Jahn: W. A. **28**, 21, 491, 1886.
Bugarszky: Zeitschr. f. anorg. Chem. **14**, 145, 1897.
Chruschtschow und Litnikow: Compt. rend. **108**, 937, 1889.
Lippmann: Compt rend. **99**, 895, 1884.
Jahn: W. A. **28**, 21, 491, 1886; **50**, 189, 1893.

Zu § 5.

Peltier: Ann. de chim. et phys. (2) **56**, 371, 1834.

Zu § 6.

Nernst: Zeitschr. f. phys. Chem. **2**, 613; **4**, 129, 1889; W. A. **45**, 360, 1892.
Planck: W. A. **39**, 161, 1890; **40**, 561, 1890; **44**, 385, 1891.
Loven: Zeitschr. f. phys. Chem. **20**, 593, 1896.
Couette: Journ. de phys. (3) **9**, 200, 269, 652, 1900.
Pellat: Ann. de chim. et phys. (6) **19**, 556, 1890.
Lehfeldt: Zeitschr. f. phys. Chem. **35**, 257, 1900.

Zu § 7.

Helmholtz: Berl. Ber. 1883, S. 647; Wiss. Abh. **3**, 92.
Warburg: W. A. **38**, 321, 1889.
Nernst: Theoretische Chemie, 2. Aufl., S. 676. Stuttgart 1898.

Zu § 8.

Lippmann: Pogg. Ann. **149**, 546, 1873; W. A. **11**, 320, 1880; Compt. rend. **76**, 1407, 1873; **95**, 686, 1892; Thèses de Doctorat No. 365; Ann. de chim. et phys. (5) **5**, 494, 1875; **12**, 265, 1877; Journ. de phys. (2) **2**, 116, 1883.
Quincke: Pogg. Ann. **139**, 70, 1870; **153**, 161, 1874.
Ostwald: Zeitschr. f. phys. Chem. **1**, 403, 583, 1887; **3**, 354, 1889; **4**, 570, 1889; **7**, 226, 1891; **25**, 188, 1898; Allg. Chemie, 2. Aufl., [II] **1**, 813, 1893; Phil. Mag. (5) **22**, 70, 1886; Compt. rend. **108**. 232, 1889.
Helmholtz: W. A. **7**, 337, 1879; **16**, 30, 1882; Berl. Ber. 1881, S. 945.
Planck: W. A. **32**, 488, 1887; **40**, 561, 1890; **44**, 385, 1891.
Warburg: W. A. **38**, 321, 1889; **41**, 1, 1890; **67**, 493, 1899; Ann. d. Phys. (4) **6**, 125, 1901; Verh. Berl. phys. Ges. **17**, 24, 1898.
Exner und Tuma: Wien. Ber. **97**, 917, 1888; Exners Repert. **25**, 597, 1889; **26**, 91, 1890.
Braun: W. A. **41**, 448, 1890; **44**, 510, 1891.
Miesler: Wien. Ber. **96**, 983, 1321, 1887.
Paschen: W. A. **39**, 43, 1890; **40**, 36, 1890; **41**, 42, 801, 899, 1890; **43**, 576, 1891.
G. Meyer: W. A. **45**, 508, 1892; **53**, 846, 1894; **56**, 680, 1895; **67**, 433, 1899.
Behn: W. A. **61**, 748, 1897.
Rothmund: Zeitschr. f. phys. Chem. **15**, 1, 1894.
S. W. Smyth: Phil. Trans. 1900, p. 193; Zeitschr. f. phys. Chem. **32**, 433, 1900.
St. Meyer: Wien. Ber. **105**, 22, 1896; W. A. **67**, 433, 1899.
Schreber: W. A. **53**, 109, 1894.
Nernst: Beil. zu W. A. **58**, I—XVI, 1896; Zeitschr. f. Elektrochem. **4**, 29, 1897—1898.
Palmaer: Zeitschr. f. phys. Chem. **25**, 265, 1898; **28**, 257, 1899; **36**, 664, 1901.
Chervet: Journ. de phys. (2) **3**, 258, 1884.
Berget: Lum. électr. **37**, 83, 1890; Compt. rend. **114**, 531, 1892.
Claverie: Journ. de phys. (2) **2**, 420, 1883.
S. W. Smyth: Phil. Mag. (6) **5**, 398, 1903.
Pellat: Compt. rend. **104**, 1099, 1887; **108**, 667, 1889; Ann. de chim. et phys. (6) **19**, 568, 1890.
Einthoven: Arch. f. d. ges. Physiol. **79**, 1, 26, 1900.
Bernstein: Zeitschr. f. phys. Chem. **38**, 200, 1901.
Van Laar: Zeitschr. f. phys. Chem. **41**, 385, 1902; Phys. Zeitschr. **4**, 326, 1903.
Kucera: Ann. de Phys. (4) **11**, 529, 698, 1903.
Gouy: Ann. de chim. et phys. (7) **29**, 145, 1903; Compt. rend. **134**, 1305, 1902; **136**, 653, 1903; Ann. de chim. et phys. (8) **8**, 291, 1906: **9**, 75, 1906.
Vining: Ann. de chim. et phys. (8) **9**, 272, 1906.
Billitzer: Wien. Ber. **112**, 1553, 1586, 1734, 1904; **113**, 637, 1904; Ann. d. Phys. (4) **11**, 902, 937, 1903; **13**, 827, 1904; Zeitschr. f. phys. Chem. **48**, 513, 542, 1904; **49**, 709, 1904; **51**, 167, 1905.
Christiansen: Ann. d. Phys. (4) **16**, 382, 1905.
Krüger: Gött. Nachr. 1904, S. 33; Zeitschr. f. phys. Chem. **45**, 1, 1903.

Zu § 10.

Volta: Grens Journ. **3**, 479, 1796; **4**, 129, 1797: Ann. de Chim. (1), **40**, 225, 1802: Gilberts Ann. **9**, 380, 1801; **10**, 425, 1802; **12**, 498, 1803: Phil. Trans. 1793, I, p. 10.
Ritter: Gilberts Ann. **16**, 293, 1804.

Seebeck: Abh. Berl. Akad. 1822, S. 295.
Péclet: Ann. de chim. et phys. (3) **2**, 243, 1841.
Munk: Pogg. Ann. **35**, 55, 1835.
Pfaff: Pogg. Ann. **51**, 209, 1840.
Auerbach: Handb. d. Physik v. Winkelmann **3**, (1), 113. Breslau 1893.
Helmholtz: Erhaltung der Kraft. Berlin 1847, S. 47; W. A. **11**, 737, 1880; Wiss. Abh. **1**, 48, 910.
Fabroni: Journ. de phys. **6**, 384, 1800; Gilberts Ann. **4**, 428, 1800.
De la Rive: Ann. de chim. et phys. **37**, 225, 1828; **39**, 297, 1828; **62**, 147, 1836; Pogg. Ann. **15**, 98, 1829; **37**, 506, 1836; **40**, 355, 1837.
Zahn: Unters. über Kontaktelektrizität. Leipzig, Teubner, 1882.
J. Brown: Proc. R. Soc. London **41**, 294, 1887; **64**, 369, 1899; Phil. Mag. (5) **6**, 142, 1878; **7**, 108, 1879; **11**, 212, 1881; (6) **5**, 591, 1901.
Spiers: Phil. Mag. (5) **49**, 70, 1900.
Schultze-Berge: W. A. **12**, 290, 1881.
Christiansen: W. A. **48**, 726, 1893; **56**, 644, 1895; **57**, 682, 1896; **62**, 545, 1897; **69**, 661, 1899; Overs. o. d. klg. danske Vidensk. Selsk. Forh. 1899, p. 153.
Pellat: Ann. de chim. et phys. (5) **24**, 1, 1881; Journ. de phys. (1) **9**, 145, 1880; **10**, 68, 1881; (2) **1**, 416, 1882; Compt. rend. **80**, 998, 1875; **90**, 990, 1880; **94**, 1247, 1882; Travaux du congres internat. de physique **4**, 76, Paris 1901.
Erskine-Murray: Phil. Mag. (5) **45**, 398, 1898; **46**, 228, 1898; Proc. R. Soc. **63**, 113, 1898.
Grove: Literary Gazette, 21. Jan. 1843.
Gassiot: Phil. Mag. **25**, 283, 1844.
Bottomley: Brit. Ass. Report, 1885.
Exner: Wien. Ber. **80**, 1879; **81**, 1880; **81**, 551, 1882; **95**, 595, 1887; W. A. **5**, 388, 1878; **6**, 353, 1879; **9**, 591, 1880; **10**, 265, 1880; **11**, 1034, 1880; **12**, 280, 1881; **15**, 412, 1882; **32**, 53, 515, 1887.
Lodge: Phil. Mag. (5) **19**, 153, 340, 448, 1885; **49**, 351, 454, 1900; Proc. Phys. Soc. **17**, 369, 1901.
Sv. Arrhenius: W. A. **33**, 638, 1888.
Riecke: W. A. **66**, 545, 1898.
R. Kohlrausch: Pogg. Ann. **82**, 1, 1851; **88**, 472, 1853.
Gerland: Pogg. Ann. **83**, 513, 1868.
Clifton: Proc. R. Soc. **26**, 299, 1877.
Hankel: Elektr. Unters. V und VI; Pogg. Ann. **115**, 57, 1862; **126**, 286, 1865; Abh. kgl. sächs. Ges. **6**, 1, 1861; **7**, 385, 1865.
Hallwachs: W. A. **29**, 1, 1886.
Ayrton u. Perry: Phil. Trans. 1880, p. 1; Proc. R. Soc. **27**, 1878.
Uljanin: W. A. **30**, 699, 1887.
Exner u. Tuma: Wien. Ber. **97**, 917, 1888.
Majorana: Acc. dei Lincei (5) **8**, 1. Sem., 188, 255, 302, 1899; **9**, 2. Sem., 132, 162, 1900; N. Cim. (4) **9**, 335, 1899; Arch. Sc. phys. et nat. (4) **8**. 113, 1899; **11**, 266, 1901; Phil. Mag. (5) **48**, 241, 255, 292, 1899.
Lord Kelvin: Phil. Mag. (5) **46**, 82, 1898.
Edlund: Pogg. Ann. **137**, 474, 1869; **140**, 435, 1870; **141**, 404, 534, 1871.
Grimsehl: Phys. Zeitschr. **4**, 43, 1902; Verh. d. phys. Ges. 1902, S. 262.
Warburg: Berl. Ber. 1904, S. 850.

Nichtleiter:

Davy: Ann. de chim. **63**, 230, 1807.
Fechner: Galvanismus 1829, S. 21.

Munk: Pogg. Ann. 35, 57, 1835.
A. C. Becquerel: Traité d'électr. 2, 100, 1834.
Coehn: W. A. 64, 217, 1898; 66, 1191, 1898; Zeitschr. f. phys. Chem. 25, 651, 1898.
Heydweiller: W. A. 66, 535, 1898.
J. Thomson: Proc. R. Soc. London 25, 169, 1876; Phil. Mag. (5) 3, 389, 1877.
Ayrton and Perry: Proc. R. Soc. 27, 219, 1878.
Hoorweg: W. A. 11, 144, 1880.
Knoblauch: Zeitschr. f. phys. Chem. 39, 225, 1901.

Zu § 11.

Buff: Ann. d. Chem. u. Pharm. 42, 5, 1842; 45, 137, 1844.
Gerland: Pogg. Ann. 133, 513, 1868.
Hankel: Abh. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 7, 1865.
Kohlrausch: Pogg. Ann. 79, 177, 1850.
Clifton: Proc. R. Soc. 26, 299, 1877.
Ayrton and Perry: Proc. R. Soc. 27, 196, 1878; Phil. Trans. London 1, 1, 1880.
Exner u. Tuma: Wien. Ber. 97, 917, 1888.
Gouré de Villemontée: Journ. de phys. (2) 9, 65, 326, 1890; 10, 76, 1891.
Pellat: Compt. rend. 108, 667, 1889.
Ostwald: Zeitschr. f. phys. Chem. 1, 583, 1887.
Paschen: W. A. 41, 117, 1890; 43, 568, 1891.
Rothmund: Zeitschr. f. phys. Chem. 15, 1, 1894.
Fechner: Schweiggers Journ. 53, 1828.
Poggendorff: Pogg. Ann. 66, 597, 1845; 70, 60, 1847; 73, 337, 619, 1848.
Schönbein: Pogg. Ann. 43, 229, 1838.
Oberbeck u. Edler: W. A. 42, 209, 1891.
Corminas: Centralbl. f. Elektrotechn. 7, 491, 1885.
Hoorweg: W. A. 11, 133, 1880.
Righi: N. Cim. 14, 131, 1876; Accad. di Modena (3) 2, 1876; Mem. di Bologna (4), 8, 749, 1888.
G. Meyer: Zeitschr. f. phys. Chem. 7, 477, 1891.
Volta: Phil. Trans. 1800, p. 402; Gilberts Ann. 6, 340, 1800; 10, 389, 421, 1802; Ann. de chim. 40, 225, 1802.
Dellmann: Pollichia 20, 43, 1863; Fortschr. d. Phys. 1863, S. 391.
Ritter: Gilberts Ann. 7, 373; 8, 385; 9, 212, 1801.
Fechner: Pogg. Ann. 41, 236, 1837; 44, 44, 1838.
Jäger: Gilberts Ann. 13, 401, 1803; 49, 53, 1815; 50, 214, 1815; 51, 187, 1815.
Peltier: Notices sur la vie et les travaux de Peltier, p. 94. Paris 1847.
Péclet: Ann. de chim. et phys. (3) 2, 233, 1841.
Erman: Gilberts Ann. 7, 485, 1801; 25, 1, 1807.
Biot: Ann. de chim. 47, 5, 1803; Gilberts Ann. 18, 149, 1804; Traité de physique 2, 478.
Branly: Ann. de l'École Norm. 2, 201, 1873.
Angot: Ann. de l'École Norm. 3, 253, 1874; Compt. rend. 78, 1846, 1874.
Behrens: Gilberts Ann. 23, 1, 1806.
Zamboni: Gilberts Ann. 49, 41, 1815; 51, 182, 1815; 60, 151, 1819; Schweiggers Journ. 10, 129, 1812.
Bohnenberger: Gilberts Ann. 53, 348, 1816.
Riffault: Ann. de chim. 57, 61, 1806; Gilberts Ann. 22, 313, 1806

Maréchaux: Gilberts Ann. **23**, 224, 1806.
De Luc: Gilberts Ann. **49**, 100, 1815.
Pulvermacher: Dingl. Journ. **122**, 29, 1851.
Parrot: Gilberts Ann. **55**, 165, 1817.

Zu § 12.

Nobili: Ann. de chim. et phys. **38**, 239, 1828; Pogg. Ann. **14**, 169, 1828.
Fechner: Pogg. Ann. **48**, 1, 225, 1839.
Wild: Pogg. Ann. **103**, 353, 1858.
L. Schmidt: Pogg. Ann. **109**, 106, 1860.
R. Kohlrausch: Pogg. Ann. **79**, 200, 1850.
Du Bois-Reymond: Reicherts Arch. 1867, Heft 4, S. 453.
Worm-Müller: Pogg. Ann. **140**, 114, 380, 1870.
Bichat et Blondlot: Compt. rend. **97**, 1202, 1883; **100**, 791, 1885; Journ de phys. (2) **2**, 533, 1883.
Gouré de Villemontée: Journ. de phys. (2) **9**, 326, 1890.
Paschen: W. A. **41**, 42, 177, 1890.
Nernst: Zeitschr. f. phys. Chem. **4**, 155, 1889.
Negbauer: W. A. **44**, 737, 1891.
Couette: Journ. de phys. (3) **9**, 276, 652, 1900.
Jahn: Zeitschr. f. phys. Chem. **33**, 545, 1900.
Lehfeldt: Zeitschr. f. phys. Chem. **37**, 308, 1901.
Helmholtz: W. A. **3**, 201, 1877; Ges. Abh. **1**, 840.
Walker: Pogg. Ann. **4**, 421, 1825.
Faraday: Exp. Rev. Ser. 17, § 1975 u. ff. 1840.
Bleekrode: Pogg. Ann. **142**, 611, 1871.
Eccher: N. Cim. (3) **5**, 5, 1879.
Kittler: W. A. **12**, 572, 1881; **15**, 391, 1882.
Pagliani: Atti della R. Accad. di Torino **21**, 518, 1886.
Moser: W. A. **14**, 61, 1881.
Nernst: Zeitschr. f. phys. Chem. **2**, 613, 1888; **4**, 129, 1889.

Zu § 13.

Kohlrausch: Pogg. Ann. **76**, 200, 1850.
Ayrton and Perry: Phil. Trans. 1880, p. 16.
Bichat et Blondlot: Journ. de phys. (2) **2**, 533, 1882; **3**, 52, 1883.
Gouré de Villemontée: Journ. de phys. (2) **10**, 76, 1891.
Kenrick: Zeitschr. f. phys. Chem. **19**, 625, 1896.
Grove: Phil. Mag. (3) **14**, 129, 1839; **21**, 417, 1842; Phil. Trans. 1843; Pogg Ann. **58**, 202, 1842.
Schönbein: Pogg. Ann. **56**, 135, 235, 1842; **58**, 361, 1843; **62**, 220, 1844.
Beetz: Pogg. Ann. **77**, 493, 1849; **90**, 42, 1853; **132**, 460, 1867; W. A. **5**, 1, 1877.
Peirce: W. A. **8**, 98, 1879.
Markowsky: W. A. **44**, 457, 1891.
Bose: Phys. Zeitschr. **1**, 228, 1900; Zeitschr. f. phys. Chem. **34**, 701, 1900.
Wulf: Zeitschr. f. phys. Chem. **48**, 87, 1904.

Zu § 14.

Gilbert: De magnete 1600, Lib. II, Cap. II.
Otto v. Guericke: Exp. nova Magdeb. 1672, Lib. IV, Cap. XV.
Boyle: De mechanica electricitatis produtione. Genev. 1694.
St. Gray: Phil. Trans. 1731, 1732, 1735, 1736.

Dufay: Mém. Par. 1733, 1734.
Winkler: Gedanken von den Eigenschaften der Elektrizität. 1744.
Canton: Phil. Trans. 1762.
Kienmayer: Voigts Magazin (3) **6**, 106, 1789.
Riecke: W. A. **49**, 459, 1893.
Wilcke: Phil. Trans. 1759.
Young: Lectures on nat. philos. London **2**, 246, 1807.
Riess: Reibungselektrizität **2**, 362—399, Berlin 1853.
Faraday: Exp. Res. § 2138 u. ff.; Pogg. Ann. **60**, 321, 1843.
Herbert: Theoria phenom. electric. Vindob. 1788, p. 163.
Cavallo: Compl. treat. of electricity **1**, 21: **2**, 73; **3**, 111, 1795.
Hauy: Ann. de chim. et phys. **8**, 1818.
De la Rive: Pogg. Ann. **37**, 506, 1836; Bibl. univ. **59**, 13.
N. Hesehus: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **33**, 1, 48, 77, 1901; **34**, 1, 15, 25, 1902; **35**, 478, 482, 575, 1903; **37**, 29, 1905; Iswestija d. Petersb. technol. Inst. 15 u. 16.
Macfarlane: Proc. R. Soc. Edinb. 1883—1884, p. 412.
Gaugain: Compt. rend. **59**, 493, 1864; Ann. de chim. et phys. (4) **6**, 25, 1865.
Faraday (Metalle): Exp. Res. § 2138 u. ff.
Dessaignes: Ann. de chim. et phys. **2**, 59, 1816.
Lichtenberg vgl. **Riess:** Reibungselektrizität **2**, 205.
Villarsy: Journ. général de France 1788; Voigts Magazin (4), **8**, 176.
Bürker: Ann. d. Phys. (4) **1**, 474, 1900.
Ebert u. Hoffmann: Ann. d. Phys. (4) **2**, 706, 1900.
Lord Kelvin, Maclean and Galt: Proc. R. Soc. **57**, 335, 1895.
Armstrong: Mech. Mag. **43**, 64, 1845; Ann. de chim. et phys. (2) **75**, 328, 1840; (3) **7**, 401, 1843; **10**, 105, 1844.
Faraday (Dämpfe): Exp. Res. Ser. **18**, 1843; Pogg. Ann. **60**, 319, 1843.
Wüllner: Lehrb. d. Experimentalphysik, 5. Aufl., **3**, 189, Leipzig 1897.

Zu § 15.

I. Volta: Phil. Trans. 1782; Collezione dell'op. I, **1**, 270; Meteorol. Briefe 144 u. 206.
Palmieri: N. Cim. **13**, 236, 1861; Rendic. di Napoli **24**, 26, 194, 318, 1885; 1887; 1888.
Blake: W. A. **19**, 519, 1883.
Kalischer: W. A. **20**, 614, 1883; **29**, 407, 1886.
II. Bandrowski: Phys. Chem. **15**, 324, 1892.
V. Aepinus: Recueil sur le tourmaline, Pétersb. 1762, p. 1; Mem. Akad. Berlin 1756, p. 105.
Wilcke: Disputatio phys. exp. de electricit. contrariis, Rostock 1757, p. 51; Abh. schwed. Akad. **28**, 113, 1776; **30**, 3, 1768.
Wilson: Phil. Trans. 1759, p. 308.
Muschenbroeck: Introductio ad philos. nat. Lugd. 1762, **1**, § 889—900.
Bergmann: Opuscula **5**, 402, 1766.
Canton: Priestley, History of electr. 1767, p. 323; Phil. Trans. London 1759, p. 398.
Hauy: Traité de minéralogie **3**, 15; Grundlehren d. Physik. Weimar 1804; Mém. de l'Inst. An. IV, **1**, 49.
Brewster: Schweiggers Journ. **43**, 94, 1825; Edinb. Journ. of Sc. **1**, 208, 1825; **2**, 1825; Pogg. Ann. **2**, 298, 1824.

Hankel: Pogg. Ann. **49**, **50**, **53**, **56**, **61**, **74**; W. A. **13**, **18**; Abh. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. **4**, **6**, **8**, **15**, **18**, **20**, **21**.
Kolenko: W. A. **29**, 416, 1889.
G. Wiedemann: Elektrizität, 3. Aufl. 336, 1883.
W. Thomson (Lord Kelvin): Phil. Mag. (5) **5**, 24, 1878.
Riecke: W. A. **28**, 43, 1886; **31**, 799, 889, 1887; **40**, 306, 1890; Gött. Nachr. 1891, S. 121, 223.
Gaugain: Ann. de chim. et phys. (3) **57**, 5, 1859.
J. et P. Curie: Compt. rend. **91**, 294, 383, 1880; **92**, 35, 186, 1881; **93**, 204, 1137, 1881; **95**, 914, 1882; **106**, 1207, 1889.
Duhem: Ann. de l'école norm. (3) **5**, 263, 1886; **9**, 167, 1892.
Straubel: Gött. Nachr. 1902, Heft 2, S. 1; Phil. Mag. (6) **4**, 220, 1902.
Riecke u. Voigt: Abh. d. k. Ges. d. Wiss. Göttingen 1892; W. A. **45**, 523, 1892.
Voigt: W. A. **41**, 722, 1890.
Kundt: W. A. **20**, 592, 1883; **28**, 145, 1886.
Riecke: W. A. **31**, 889, 1887.
VI. Hauy: Mém. du Musée d'hist. nat. **3**, 1817; Schweigg. Jahrb. **20**, 383.
J. et P. Curie: Compt. rend. **91**, 294, 383, 1880; **92**, 186, 350, 1881; **93**, 204, 1137, 1881; **95**, 914, 1882; **106**, 1207, 1888; Journ. de phys. (2) **1**, 245, 1882.
W. Thomson (Lord Kelvin): Phil. Mag. (5) **5**, 24, 1878; **36**, 331, 342, 384, 1893; Compt. rend. **117**, 463, 1893.
Röntgen: W. A. **18**, 213, 534, 1883; **19**, 319, 513, 1883; **39**, 16, 1890.
Riecke u. Voigt: W. A. **45**, 523, 1892.
Voigt: W. A. **31**, 721, 1887; **41**, 722, 1890; **51**, 638, 1894; **66**, 1030, 1898; Abhandl. d. k. Ges. d. Wiss. Gött. **36**, 1890; Gött. Nachr. 1905, S. 394.
P. Koch: Ann. d. Phys. (4) **19**, 567, 1906.
Bidlingmaier: Ingaug.-Diss. Göttingen 1900.
VII. Hankel: Abh. k. sächs. Ges. d. Wiss. **20**, 203, 459, 1881.
Hallwachs: W. A. **33**, 301, 1888; **34**, 731, 1888; **37**, 666, 1889; **40**, 332, 1890.
Righi: Rendic. Acc. dei Lincei **4**, II, 16, 1888; **5**, I, 860, 1889; N. Cim. (3) **24**, 256, 1888; **25**, 11, 123, 193, 1889; **26**, 135, 217, 1889; Compt. rend. **107**, 559, 1888; W. A. **41**, 505, 1890.
Stoletow: Compt. rend. **106**, 1149, 1543, 1888; **107**, 91, 1888; **108**, 1241, 1889; Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **21**, 159, 1889; Journ. de phys. (2) **9**, 468, 1890.
Bichat et Blondlot: Compt. rend. **106**, 1349, 1888; **107**, 29, 557, 1888.
Hoor: Exners Repert. **25**, 91, 1889.
Elster u. Geitel: W. A. **38**, 40, 497, 1889.
Borgman: Compt. rend. **108**, 733, 1889.
VIII. Quincke: Pogg. Ann. **107**, 1, 1859; **110**, 38, 1860.
Zöllner: Pogg. Ann. **148**, 640, 1873; Ber. k. sächs. Ges. **24**, 317, 1872.
Haga: W. A. **2**, 326, 1877; **5**, 287, 1878.
Elster: W. A. **6**, 553, 1879.
Clark: W. A. **2**, 335, 1877.
Dorn: Pogg. Ann. **160**, 56, 1877; W. A. **5**, 29, 1878; **9**, 517, 1880; **10**, 70, 1880.
Edlund: Pogg. Ann. **156**, 251, 1877; W. A. **1**, 184, 1877; **3**, 489, 1878; **8**, 127, 1879; **9**, 95, 1880.
Gouré de Villemontée. Journ. de phys. (3) **6**, 59, 1897; Éclair. électr. **8**, 491, 1896.
Helmholtz: W. A. **7**, 351, 1879; Ges. Abh. **1**, 855.

Zu § 16.

Armstrong: Mech. Mag. **43**, 64, 1845; Ann. d. chim. et phys. (2) **75**, 328, 1840; (3) **7**, 401, 1843; **10**, 105, 1844.
Toepler: Pogg. Ann. **125**, 469, 1865; **127**, 117, 1866; **130**, 518, 1867; **131**, 232, 1867; Berl. Ber. 1879, S. 950.
Holtz: Pogg. Ann. **126**, 157, 1865; **127**, 320, 1865; **130**, 130, 287, 1867; **136**, 171, 1869; **139**, 513, 1870; **156**, 627, 1875; Carls Repert. **17**, 682, 1881; W. A. **13**, 623, 1881; Ann. de chim. et phys. (4) **13**, 195, 441, 1868.
Schwedow: Pogg. Ann. **144**, 597, 1871; Die Bedeutung der Nichtleiter für die Elektrizität (russ.). St. Petersburg 1868.
Bertin: Ann. de chim. et phys. (4) **13**, 191, 1868.
Voss: Dingl. Journ. **237**, 476, 1880.
Wimshurst: Elektrotechn. Ztschr. **5**, 328, 1884.
Carré: Carls Repert. **6**, 62, 1870.
Wommelsdorf: Ann. d. Phys. (4) **9**, 651, 1902; Phys. Ztschr. **6**, 177, 1905.
Bleekrode: Pogg. Ann. **156**, 288, 1875.
Musäus: Pogg. Ann. **143**, 285, 1872; **146**, 288, 1872.
Nicholson: Phil. Trans. **16**, 505, 1788.
Belli: Annali d. Soc. del Regno Lomb. Venet. 1831, p. 11.
Varley: Specification of Patent 1860, No. 206.
W. Thomson (Lord Kelvin): Reprint of papers 1872, p. 339; Proc. R. Soc. 1867.
Righi: N. Cim. **7—8**, 123, 1872.

Drittes Kapitel.

Wirkung des elektrischen Feldes auf die in demselben befindlichen Körper.

§ 1. Einleitung. Bringt man irgend einen Körper in ein elektrisches Feld, so lassen sich gewisse Erscheinungen beobachten, deren Charakter in erster Linie von der Art des gewählten Körpers abhängt. Man kann diese Erscheinungen als das Resultat der Einwirkung ansehen, welche das Feld auf den Körper ausübt. Die Zahl dieser Erscheinungen ist nicht groß, sie ist unvergleichlich kleiner als die Zahl der verschiedenartigen Erscheinungen, welche man beobachten kann, wenn ein Körper in ein Magnetfeld gebracht wird, das augenscheinlich einen viel tiefer gehenden Einfluß auf die Eigenschaften der Körper hat als das elektrische Feld. Es ist übrigens auch möglich, daß dieser Unterschied ein bloß scheinbarer ist und daher kommt, daß die Wirkungen des Magnetfeldes besser studiert sind, als die Wirkungen des elektrischen Feldes. Der Charakter der Erscheinungen, denen dies Kapitel gewidmet ist, hängt davon ab, ob der Körper ein Leiter oder ein Dielektrikum ist.

Im ersten Kapitel hatten wir die Eigenschaften des elektrischen Feldes betrachtet. Selbstverständlich läßt sich keine strenge Grenze zwischen den Eigenschaften des Feldes und seinen Wirkungen auf die Körper ziehen, da diese Wirkungen offenbar entweder an sich Feldeigenschaften darstellen oder sich aus diesen Eigenschaften als notwendige Folgen ergeben. Es ist daher auch nicht zu verwundern, daß einige von diesen Wirkungen schon weiter oben betrachtet worden sind. Der Vollständigkeit halber wollen wir dieselben auch hier mit erwähnen.

Die Hauptwirkungen des elektrischen Feldes auf die in demselben befindlichen Körper sind die folgenden:

1. Die elektrostatische Induktion, d. h. das Auftreten von elektrischen Ladungen an der Oberfläche von Leitern.

2. Das Auftreten von ponderomotorischen Kräften, welche dem Coulombschen Gesetze gemäß wirken.

3. Die Polarisation der Dielektrika und die hiermit in engem Zusammenhange stehende Erscheinung der Restladung.

4. Die Elektrostriktion, d. h. das Auftreten von elastischen Verschiebungen (Spannungen) in der Substanz des Körpers.

5. Der Einfluß des Feldes auf die optischen Erscheinungen der Körper.

6. Der Einfluß des Feldes auf die Elastizität und die innere Reibung der Körper.

7. Der Einfluß des Feldes auf die Temperatur der Körper.

Die erste unter den aufgezählten Erscheinungen ist von uns schon betrachtet worden und wir haben gesehen, wie das Auftreten von Ladungen an der Oberfläche von Leitern, die in ein elektrisches Feld gebracht sind, sich als notwendige Folge der Grunderscheinungen jener beiden Theorien ergibt, die wir durch „Bild A" und „Bild B" gekennzeichnet haben. Auf diese Erscheinung haben wir nicht nötig zurückzukommen.

§ 2. Coulombsches Gesetz. Bringt man in ein elektrisches Feld einen Körper, der bereits elektrisiert ist oder durch die Feldwirkung selbst eine Ladung erhält, so wird ein solcher Körper der Wirkung eines Kräftesytems unterworfen, das man im allgemeinen als einen Komplex von Kräften ansehen kann, die auf die unendlich kleinen Teile, in welche man sich die Ladung zerlegt denken kann, einwirken. Bezeichnet V die Potentialfunktion des elektrischen Feldes, η' die auf einem der unendlich kleinen Volum- oder Oberflächenelemente des Körpers konzentrierte Ladung, so wirkt auf η' eine Kraft f, die gleich ist [vgl. (40), S. 88]

$$f = -\eta' \frac{\partial V}{\partial n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und die Richtung der Normalen n zur Niveaufläche des Potentials hat. Läßt man für das Potential V im homogenen Medium die

Formel (37, b), S. 84, gelten:

$$V = \frac{1}{K}\int\frac{d\eta}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wo K die Dielektrizitätskonstante bedeutet, so legt man dadurch der Berechnung der ponderomotorischen Wirkungen des elektrischen Feldes auf die in ihm befindlichen Körper das Coulombsche Gesetz zugrunde, das durch die Formel

$$f = \frac{\eta\eta'}{Kr^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ausgedrückt wird, oder für Luft durch die Formel

$$f = \frac{\eta\eta'}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Die Wechselwirkung zweier Elektrizitätsmengen ist 1. indirekt proportional dem Quadrate ihres Abstandes und 2. direkt proportional dem Produkte dieser Mengen. Aus dem vorhergehenden leuchtet ein, daß sich dieses Gesetz auf den Fall bezieht, wo η und η' gewissermaßen in zwei Punkten konzentriert sind. oder wo die Dimensionen der von ihnen eingenommenen Oberflächen oder Volumina im Vergleiche zur Entfernung r unendlich klein sind. Es ist überaus wichtig, daß der zweite Teil des Coulombschen Gesetzes durch den Versuch geprüft werden kann, wie wir sogleich sehen werden, während in dem Coulombschen Gesetze, das sich auf die magnetischen Kräfte bezieht, dies nicht möglich ist, denn im Bereiche der magnetischen Erscheinungen kann die sogenannte „magnetische Menge“ nur als eine Größe definiert werden, welche der im gegebenen magnetischen Felde auf sie einwirkenden magnetischen Kraft proportional ist.

Sehen wir nunmehr zu, wie das Coulombsche Gesetz experimentell geprüft werden kann. Hierzu muß man sich der Drehwage bedienen, mit deren Hilfe Coulomb selbst dies Gesetz gefunden hat.

Im ersten Bande haben wir die Konstruktion und Theorie der unifilaren Drehwage kennen gelernt. In Fig. 117 ist eine solche zu elektrostatischen Messungen geeignete Drehwage abgebildet. Am unteren Ende des Fadens hängt ein sehr leichtes zylindrisches Stäbchen aus Schellack, an welches zu beiden Seiten dünne Glasstäbchen geklebt sind. An einem von diesen Stäbchen (rechts) ist ein vergoldetes Holundermarkkügelchen angebracht, am anderen eine vertikale Glimmerscheibe, die als Gegengewicht und zugleich zur Dämpfung der Schwingungen des Stäbchens dient. Den oberen Teil des Apparates wollen wir hier nicht beschreiben, da hierüber bereits im ersten Bande das Nötige mitgeteilt ist. Dieser Teil dient dazu, das Stäbchen in die erwünschte An-

fangsstellung zu bringen (hierbei muß sich das Holundermarkkügelchen unter dem Mittelpunkte der Öffnung *a* befinden), und namentlich auch dazu den Drehungswinkel β des oberen Fadenendes zu messen. Zur

Fig. 117.



Messung des Drehungswinkels α des Stäbchens, d. h. des unteren Fadenendes, kann eine Skala dienen, die auf der Außenfläche des Glaszylinders in der Höhe des Stäbchens angebracht ist (in unserer Figur ist diese Skala nicht angedeutet). Die Winkel α und β werden nach ent-

gegengesetzten Richtungen von der Ruhestellung bei nicht elektrisierten Kügelchen gezählt, so daß der Torsionswinkel φ des Fadens gleich

$$\varphi = \alpha + \beta \quad \text{. . . . .} \quad (5)$$

ist. Läßt man am Stäbchen ein Drehmoment M wirken, so ist

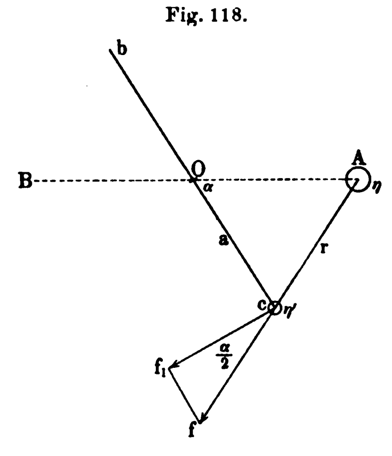
$$M = C\varphi \quad \text{. . . . .} \quad (5, a)$$

Der Torsionskoeffizient C des Fadens kann nach der Formel (vgl. Bd. I)

$$C = \frac{\pi^2 K}{T^2} \quad \text{. . . . .} \quad (5, b)$$

bestimmt werden, wo T die Dauer der Torsionsschwingungen der unifilaren Drehwage, K das Trägheitsmoment des am unteren Fadenende aufgehängten Körpers ist. Man kann demnach, wenn erforderlich, den Zahlenwert des Koeffizienten C bestimmen.

Fig. 118.



Zur Bestimmung des Gesetzes der Quadrate, für den Fall von abstoßenden Kräften, verfährt man folgendermaßen. Man führt durch die Öffnung a ein vertikales Glasstäbchen ein, das an seinem unteren Ende eine elektrisierte Metallkugel A trägt; die Länge dieses Stäbchens muß eine derartige sein, daß das Zentrum des Metallkügelchens in die Lage kommt, welche zuvor das Zentrum des Holundermarkkügelchens innehatte, das nach Einbringung von A von diesem zunächst angezogen, nach erfolgter Berührung aber abgestoßen wird. Mit η möge die auf A übrigbleibende Elektrizitätsmenge bezeichnet werden, mit η' die auf das Holundermarkkügelchen übergehende Elektrizitätsmenge. Setzen wir der Allgemeinheit halber voraus, wir hätten das obere Fadenende um einen gewissen Winkel β gedreht, so daß der Torsionswinkel φ von dem Drehungswinkel α verschieden ist und bedeute in Fig. 118, die in der Horizontalebene liegt, A die abstoßende Kugel, AB die ursprüngliche Stellung des Stäbchens, das sich nun unter der Einwirkung der Repulsivkraft f um den Winkel α, also in die Lage cb gedreht habe. Es sei f_1 die zu bc senkrechte Komponente der Kraft f, ferner sei $Oc = a$, $Ac = r$. Dann ist offenbar

$$r = 2a \sin\frac{\alpha}{2} \quad \text{und} \quad f_1 = f\cos\frac{\alpha}{2};$$

das Drehungsmoment M ist [vgl. (5, a)] gleich

$$M = f_1 a = f a \cos\frac{\alpha}{2} = C\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Nachdem man die Winkel α und φ gemessen, dreht man das obere Fadenende nach der einen oder anderen Seite hin, wodurch sich β, α und φ ändern; bezeichnet man die neuen Werte dieser Winkel mit β', α' und φ', den neuen Wert der Kraft mit f', so erhält man an Stelle der Formel (6) den Ausdruck

$$f' a \cos\frac{\alpha'}{2} = C\varphi' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6, a)$$

Hieraus erhält man durch das Experiment das Verhältnis der Kräfte für zwei Lagen des Kügelchens c:

$$\frac{f}{f'} = \frac{\varphi}{\varphi'} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha'}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Gemäß dem Coulombschen Gesetze müssen wir haben

$$\frac{f}{f'} = \left(\frac{r'}{r}\right)^2 = \left(\frac{2\, a \sin\frac{\alpha'}{2}}{2\, a \sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \frac{\sin^2\frac{\alpha'}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} \quad . \; . \; . \quad (7, a)$$

Ist das Coulombsche Gesetz richtig, so muß das auf experimentellem Wege gefundene Kräfteverhältnis (7) dem auf Grund jenes Gesetzes theoretisch hergeleiteten Verhältnis (7, a) gleich sein. Setzt man die beiden Verhältnisse (7) und (7, a) einander gleich, so ist

$$\varphi \sin\frac{\alpha}{2}\, tg\,\frac{\alpha}{2} = \varphi' \sin\frac{\alpha'}{2}\, tg\,\frac{\alpha'}{2} \quad . \; . \; . \; . \quad (7, b)$$

Dreht man das obere Fadenende weiter nach der einen oder anderen Seite, so erhält man die neuen Winkel φ'', α'', φ''', α''' usw. Formel (7, b) zeigt, daß, wie man auch immer diese Winkel, also die Entfernung des Kügelchens c von A variieren mag, stets die Gleichung

$$\varphi \sin\frac{\alpha}{2}\, tg\,\frac{\alpha}{2} = B \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

erfüllt sein muß, in der B eine Konstante ist. Substituiert man in (6) den Wert

$$f = \frac{\eta\eta'}{r^2} = \frac{\eta\eta'}{4\, a^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

so erhält man

$$\varphi \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\eta \eta'}{4 a C} = B \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (8, a)$$

d. h. einen Ausdruck für die in Formel (8) vorkommende Konstante B. Sorgfältig angestellte Versuche haben gezeigt, daß der Gleichung (8) durch die verschiedenen Werte der Winkel α und φ, die man nach der genannten Messungsmethode erhält, in der Tat Genüge geleistet wird. Man muß aber dabei im Auge behalten, daß man nur unter der Voraussetzung Zahlenwerte erhält, die als eine Bestätigung des Coulombschen Gesetzes gelten können, daß man gewisse Korrektionen einführt, von denen die allerwesentlichste die Korrektion wegen der Elektrizitätszerstreuung ist. Formel (8, a) zeigt, in welcher Weise sich die Zahl B im Zusammenhange mit der Größe der Ladungen η und η' ändert. Natürlich muß das Gesetz für die Änderung der Größen η und η' mit der Zeit zuvor für die zwei Kugeln, die sich innerhalb der Drehwage befinden, ermittelt werden. Dabei muß bemerkt werden, daß man bei Einführung dieser Korrektion die zweite Hälfte des Coulombschen Gesetzes für bereits bewiesen ansieht. Eine zweite Korrektion muß angebracht werden, falls die Dimensionen der Kugeln A und c nicht sehr klein im Vergleich zum Abstande r sind. In diesem Falle werden sich die Ladungen nicht gleichmäßig auf den Oberflächen der beiden Kugeln verteilen. Die erforderliche Korrektion wird auf Grund der Poissonschen Formeln über die Verteilung der Elektrizität auf zwei benachbarten Leitern berechnet.

Eine weitere Korrektion hat man in dem Falle anzubringen, daß die Hülle des Apparates nicht aus Glas, sondern aus einer leitenden Substanz besteht. Es erscheint dann auf der Innenfläche induzierte Elektrizität, die auf das bewegliche Kügelchen einwirkt.

Um die zweite Hälfte des Coulombschen Gesetzes unabhängig von der ersten durch das Experiment zu prüfen, kann man in folgender Weise verfahren. Man nimmt, nachdem man die Winkel α und φ in der angegebenen Weise gemessen hat, die Kugel A aus dem Apparate heraus, berührt mit ihm eine andere Kugel von der gleichen Größe und bringt es darauf wieder schnell an seine frühere Stelle. Hierauf macht man den Winkel β um so viel kleiner, daß man die frühere Ablenkung α des Stäbchens erhält, wobei man sich zu einer genaueren Einstellung eines kleinen Fernrohres bedient, wie dies in Fig. 117 angedeutet ist. Wir haben nun die Formeln

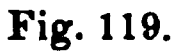
$$f a \cos \frac{\alpha}{2} = C \varphi$$

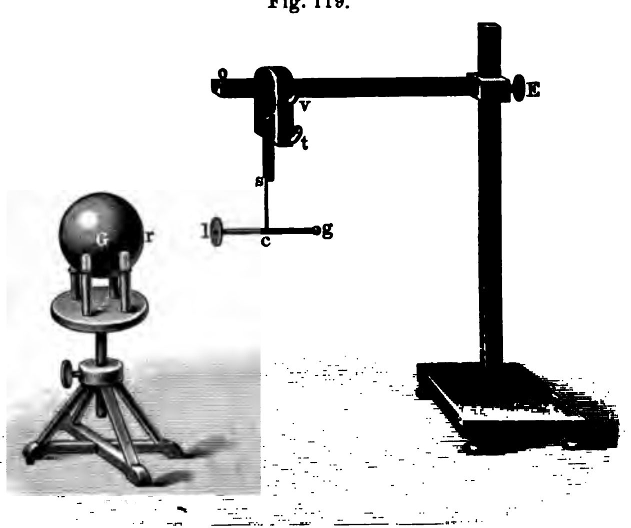
$$f' a \cos \frac{\alpha}{2} = C \varphi',$$

d. h. $f : f' = \varphi : \varphi'$. Bei der zweiten Messung hatte sich die Ladung von A auf die Hälfte vermindert, es muß daher $f' = 0{,}5 f$, also auch

$\varphi' = 0{,}5\,\varphi$ sein. Die letztere Formel wird ebenfalls durch den Versuch bestätigt, wenn man an ihr eine Korrektion wegen der Elektrizitätszerstreuung anbringt, wobei dann der Koeffizient offenbar kleiner als 0,5 werden muß.

Die Prüfung des Gesetzes der Quadrate mit Hilfe der Drehwage bereitet für den Fall von Anziehungskräften große Schwierigkeiten, da sich die Gleichgewichtslage des beweglichen Kügelchens leicht als instabil erweisen kann. Ohne diesen Fall genauer betrachten zu wollen, erwähnen wir bloß, daß Coulomb diese Prüfung in folgender Weise vorgenommen hat. Er stellte eine positiv elektrisierte Metallkugel G (Fig. 119) von 32 cm Durchmesser auf vier Glasfüßchen auf. In einiger


Fig. 119.



Entfernung von derselben hängte er an einem Kokonfaden ein Schellackstäbchen gl auf, an dessen Ende l sich eine kleine vergoldete Papierscheibe befand. Dieses Scheibchen wurde für einen Augenblick geerdet, worauf es eine induzierte negative Ladung behielt. Hierauf bestimmte Coulomb für verschiedene Werte der Entfernung $d = Gl$ die zugehörigen Schwingungsdauern T des Stäbchens, das aus der Gleichgewichtslage durch Drehung um die Achse sc gebracht war und von der Kugel G angezogen wurde. Die Schwingungsdauer T wird durch die Formel

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{f\,a}}$$

ausgedrückt, wo K das Trägheitsmoment des Stäbchens, a die Länge cl und f die Kraft bedeutet, welche auf das Scheibchen l einwirkt. Die

Kraft f ist aber indirekt proportional d^2, es sind also die Schwingungsdauern T direkt proportional den Entfernungen d, was auch durch die Versuche mit hinreichender Genauigkeit bestätigt wurde.

Nach Coulomb haben den Genauigkeitsgrad seines Gesetzes untersucht Egen (1825), Harris (1832), Marié-Davy (1850), Riess u. a. Das Gesetz, das nun den Namen Coulombs trägt, ist bereits 12 Jahre vor Coulomb, nämlich um das Jahr 1773, von Cavendish entdeckt, aber nicht veröffentlicht worden. Diese Untersuchung von Cavendish wurde erst im Jahre 1879 bekannt, als seine Manuskripte, die im physikalischen Laboratorium der Universität Cambridge aufbewahrt waren, von Maxwell publiziert wurden. Hierbei zeigte sich, daß Cavendish seine Versuche nach einer Methode angestellt hatte, die viel genauer war als die Methode von Coulomb. Maxwell hat die Versuche von Cavendish in einer etwas veränderten Form wiederholt, wobei er auch empfindlichere Apparate zu Hilfe nahm. Unter der Annahme, daß die Wechselwirkung zweier Elektrizitätsmengen indirekt proportional dem $n$ten Grade ihres Abstandes ist, und unter der weiteren Annahme, daß $n = 2 \pm t$ sei, konnte Maxwell aus seinen Beobachtungen den Schluß ziehen, daß t nicht größer als $\frac{1}{21600}$ sein könne. Hieraus kann man schließen, daß jenes Gesetz, das man gerechterweise als das Cavendish-Coulombsche Gesetz bezeichnen müßte, vollständig genau ist.

Es bleibt uns nun noch übrig, die überaus wichtige Frage nach der Wechselwirkung von elektrisierten Leitern, die in ein Dielektrikum gebracht sind, zu betrachten. Es seien η_1 und η_2 die Ladungen, V_1 und V_2 die Potentiale der Leiter in der Luft, K das Induktionsvermögen des Dielektrikums, $f_0(\eta)$ die Kraft der Wechselwirkung in Luft, $f_K(\eta)$ dieselbe Kraft im Dielektrikum. Wir hatten die allgemeinen Formeln (11) auf S. 41 und (37) auf S. 83

$$f = \frac{\eta\eta_1}{Kr^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$V = \frac{\eta}{Kr} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Die erste von diesen Formeln zeigt, daß bei gegebenen Ladungen

$$f_K(\eta) = \frac{f_0(\eta)}{K} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

ist. Nehmen wir jedoch an, die Leiter seien mit Elektrizitätsquellen verbunden, die in ihnen die konstanten Potentiale V_1 und V_2 aufrecht erhalten. Formel (10) zeigt uns, daß bei Einführung in ein Dielektrikum die Potentiale Kmal kleiner werden. Damit sie keine Änderung erfahren, muß sich die Ladung Kmal vergrößern, so daß man anstatt η_1 und η_2 die Ladungen $K\eta_1$ und $K\eta_2$ hat. Aus Formel (9) folgt, daß die Kraft f erstens K^2mal größer, zweitens Kmal kleiner,

d. h. also zuletzt K mal größer werden muß, somit haben wir bei gegebenen Potentialen

$$f_K(V) = K f_0(V) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Formeln (11) und (12) zeigen, daß die Wechselwirkung von elektrisierten Leitern bei gegebenen Ladungen indirekt proportional, und bei gegebenen Potentialen direkt proportional der Dielektrizitätskonstante des umgebenden Mediums ist.

§ 3. Polarisation der Dielektrika und Restladung. Wenn man ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld bringt, so wird es, wie wir gesehen haben (S. 74), polarisiert. Ausgehend von den Grundvorstellungen des Bildes A haben wir angenommen, daß durch die Feldwirkung Induktion in jenen sehr kleinen Teilchen des Dielektrikums erfolge, denen wir die Fähigkeit der Elektrizitätsleitung zuschrieben. Als Maß für die Polarisation Π in einem gegebenen Punkte des Dielektrikums hatten wir das elektrische Moment um diesen Punkt herum, reduziert auf die Volumeinheit, angenommen und hatten gesehen [vgl. (33, d), S. 75], daß die Größe Π numerisch gleich ist der Dichte k' der Ladung auf einer zu den Kraftlinien senkrechten Oberfläche. Die Polarisation Π ist proportional der Feldintensität F, so daß man

$$\Pi = \gamma F \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

setzen kann, wo γ die elektrische Suszeptibilität des Dielektrikums ist, die mit der Dielektrizitätskonstante K, welche wir auch als elektrische Permeabilität bezeichneten (S. 77), durch die Relation

$$K = 1 + 4\pi\gamma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13,a)$$

verbunden ist.

Bezeichnet man entsprechend der Theorie von Clausius und Mossotti mit g das Verhältnis des von den leitenden Partikeln eingenommenen Volumens zum Gesamtvolumen des Dielektrikums, so findet man, daß g und K durch die Formel

$$g = \frac{K-1}{K+2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13,b)$$

miteinander verknüpft sind, vgl. (33, h), (34) und (35, c). Endlich hatten wir noch die Formel (34, b), S. 77, welche zeigte, daß die elektrische Permeabilität gleich

$$K = \frac{F'}{F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13,c)$$

ist, wobei F' die Feldintensität im Dielektrikum bedeutet (eine genauere Definition s. auf S. 76).

Bringt man ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld, so wirkt auf dasselbe eine Kraft ein, die unter sonst gleichen Verhältnissen um

so größer ist, je größer Π ist, oder, was dasselbe besagt, je größer γ oder K ist.

Nähert man einem geladenen Leiter ein Dielektrikum, so vermindert sich das Potential des Leiters, also vergrößert sich seine Kapazität. Die Kapazität eines Kondensators ist dem Induktionsvermögen K des Zwischendielektrikums proportional.

Wir haben hier eine Reihe von Formeln und Tatsachen wiederholt, die bereits früher abgeleitet und erläutert worden waren. Es muß jetzt vor allen Dingen darauf hingewiesen werden, daß sich alle diese Formeln und Schlüsse auf ein ideales Dielektrikum beziehen, in welchem erstlich sich die Polarisation momentan herstellt und hierauf sich nicht mehr ändert und das außerdem einen idealen Nichtleiter repräsentiert, d. h. die Elektrizität gar nicht leitet. Ein solches ideales Dielektrikum ist z. B. die Luft bei gewöhnlichem Atmosphärendruck. Pellat (1881) hat gezeigt, daß sich ein Luftkondensator in weniger als 0,002 Sekunden vollkommen ladet.

Die flüssigen und festen Dielektrika haben im allgemeinen Eigenschaften, durch welche sie sich von idealen Dielektrika mehr oder weniger entfernen. Erstlich erreicht in ihnen die Polarisation nach dem Auftreten des elektrischen Feldes fast momentan einen gewissen Wert und fährt hierauf fort, im Verlaufe eines bedeutenden Zeitraumes zu wachsen, so daß sich auch K als abhängig von der Dauer der Feldwirkung erweist. Zweitens besitzen die flüssigen und festen Dielektrika eine gewisse, wenn auch relativ sehr geringe Leitfähigkeit. Ist diese Leitfähigkeit nicht sehr klein, so kann es sich ereignen, daß der elektrische Zustand des in das elektrische Feld gebrachten Dielektrikums nach einiger Zeit dem elektrischen Zustande des sich unter den gleichen Verhältnissen befindenden Leiters gleich wird. Der Charakter der Erscheinung ist dann derart, als ob K mit der Zeit einen unendlich großen Wert annimmt. Die Mehrzahl der Dielektrika nimmt jedoch keinen derartigen Zustand an; die Größe K nähert sich, indem sie von einem gewissen momentan erlangten Anfangswerte K_0 an wächst, asymptotisch einem gewissen Maximalwerte.

Hält man am Bilde A fest, so hat man zu sagen, daß die Induktion in den leitenden oder halbleitenden Teilchen nicht mit einem Male ihren Maximalwert erreicht. Hält man sich an das Bild B, so kann man sagen, daß die Induktionsröhren nicht mit einem Male in voller Zahl ins Innere des Dielektrikums eindringen. Die Erscheinung erinnert ihrem Charakter nach an die elastische Nachwirkung.

Gaugain, Wüllner u. a. haben diese Erscheinung untersucht. Wüllner näherte zu diesem Zwecke eine elektrisierte horizontale Metallplatte, die mit einem Elektrometer verbunden war und sich über einem flüssigen oder festen Dielektrikum befand, von oben her der Oberfläche dieses Dielektrikums bis auf eine Entfernung von 2,93 mm. Hierbei

beruht die Ursache der betrachteten Erscheinung nicht hierauf, da sie auch in dem Falle eintritt, daß man die Belegungen durch Wasser ersetzt, welches die Glasoberfläche unmittelbar berührt.

Faraday u. a. nahmen an, daß die beiden Elektrizitäten, indem sie sich gegenseitig anziehen, ins Innere des Dielektrikums eindringen und nach erfolgter Entladung allmählich wieder nach außen gelangen. Diese Erklärung kann jedoch schon aus dem Grunde nicht richtig sein, weil hierbei die Ursache der entgegengesetzten Bewegung der sich anziehenden Ladungen unaufgeklärt bleibt.

Gestützt auf das Vorhergehende kann man die Entstehung der Restladung folgendermaßen erklären. Wir haben gesehen, daß die Polarisation des Dielektrikums nicht plötzlich erfolgt, sondern ganz allmählich ihren Maximalwert erreicht. Dementsprechend verschwindet die Polarisation auch nicht momentan nach Aufhören der Wirkung der elektrischen Außenkräfte — mit anderen Worten — nach Entladung der Metallbelegungen bleibt das Dielektrikum bis zu einem gewissen Grade polarisiert. Diese Polarisation ruft auf den Belegungen gewisse Ladungen hervor (oder hält sie zurück), die sich allmählich in dem Maße freimachen, als die Polarisation des Dielektrikums verschwindet. Nicht wesentlich verschieden von dieser Erklärung ist auch die folgende: Wie wir sahen, ist die Oberfläche eines polarisierten Dielektrikums mit einer Ladung bedeckt, deren Dichte mit k' bezeichnet worden war. Die Ladung der mit dem Dielektrikum sich berührenden Belegung geht zum Teil auf die Oberfläche des letzteren über; dauert die Einwirkung genügend lange an, so kann es sich ereignen, daß diese Ladung und die Ladung k' einander zum Teil aufheben. Nach der Entladung bleibt das Dielektrikum wiederum zum Teil polarisiert, was die Ursache für das Zustandekommen von neuen freien Ladungen auf der Belegung abgibt. Belli und Hopkinson (1872) fanden, daß, falls man eine Leidener Flasche ladet, sie nach einiger Zeit entladet und sogleich wieder mit der entgegengesetzten Elektrizität ladet, hierauf wieder ladet, wie das erste Mal usf., nach der letzten Entladung auf den Belegungen allmählich Ladungen von wechselndem Vorzeichen auftreten, die gewissermaßen nacheinander nach außen gelangen.

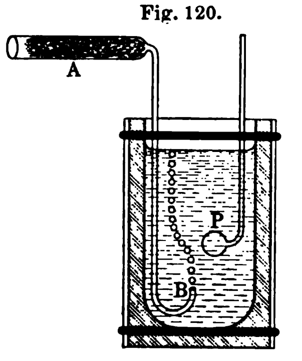
Bezold hat die Richtigkeit der Faradayschen Annahme, daß die Elektrizität einfach ins Innere des Dielektrikums eindringt, zu beweisen gesucht. Die Untersuchungen von Wüllner (1874 und 1887), Giese, Dieterici, Hopkinson, Neyreneuf, Gaugain u. a. aber sprechen zugunsten der Theorie, die sich auf eine zurückbleibende Polarisation des Dielektrikums stützt.

Eine tiefergehende Theorie für die Entstehung der Restladung haben Hopkinson (1876) und Maxwell (Treatise I) gegeben. Ersterer von ihnen hat die Erscheinung als eine elektrische Nachwirkung, ganz analog der elastischen Nachwirkung aufgefaßt. Eine derartige

Auffassung betrachtet den elektrischen Zustand des Dielektrikums als abhängig von seiner „elektrischen Vorgeschichte". Etwas analoges sehen wir in der Boltzmannschen Theorie der elastischen Nachwirkung.

Maxwell gelangte zu dem Schlusse, daß sich eine Restladung nur bilden könne, falls das Dielektrikum inhomogen sei. Hiermit stimmten die Resultate überein, die man bei Versuchen mit möglichst reinen, homogenen Dielektriken erhalten hat. So haben z. B. Rowland und Nichols gefunden, daß gute Kristalle vom Bergkristall fast gar keine und isländischer Feldspat gar keine Restladung geben. Ferner hat Muraoka gefunden, daß vollkommen reines Paraffin, Paraffinöl, Petroleum, Terpentinöl und Xylol ebenfalls keine Restladung geben, während dieselbe in einem Dielektrikum auftritt, das aus mehreren Schichten dieser Substanzen besteht. Dasselbe Resultat hat auch Hertz für Benzin und Arons für Paraffin erhalten.

Fig. 120.



Besonders interessant ist, daß eine Erschütterung des im elektrischen Felde befindlichen Dielektrikums seine Polarisation begünstigt, also seine latente Restladung vergrößert. Umgekehrt vergrößert eine Erschütterung nach erfolgter Entladung die Geschwindigkeit, mit welcher die Polarisation verschwindet, also auch die Restladung sich auf den Belegungen ansammelt.

Temperaturerhöhung wirkt ähnlich wie Erschütterung; je höher die Temperatur, um so größer ist die Restladung. Diesen Einfluß haben beispielsweise J. Hopkinson und E. Wilson (1897) untersucht.

Die Kräfte, welche auf ein im elektrischen Felde befindliches Dielektrikum wirken, erzeugen im allgemeinen eine bestimmte Bewegung desselben. Befindet sich ein Nichtleiter mit der Dielektrizitätskonstante K_1 innerhalb eines unbegrenzten anderen Nichtleiters, z. B. eines flüssigen (K_2), so wird er im elektrischen Felde denselben Kräften unterworfen, als ob er sich im Vakuum befände, während seine Dielektrizitätskonstante gleich $K_1 - K_2$ ist. Ist $K_2 > K_1$, so müssen die Kräfte ihr Vorzeichen wechseln. Wir wissen z. B., daß ein Dielektrikum von einem elektrisierten Körper angezogen wird. Aus dem Gesagten folgt, daß ein Dielektrikum, welches in ein „stärker dielektrisches" Medium gebracht ist, d. h. in ein Medium mit größerem K, von einem elektrisierten Körper abgestoßen werden muß. Diese Sätze erinnern an das Archimedische Prinzip. Puccianti (1904) hat einen Versuch angestellt, welcher diese Abstoßung zeigen sollte. In einem Gefäß mit Vaselinöl befinden sich ein in eine Kugel P

endigender Metalldraht (Fig. 120 a. v. S.) und eine Glasröhre *AB* (in *A* befindet sich Watte), durch welche ein Strom von Luftbläschen gesandt wird. Diese Luftbläschen werden abgestoßen, wenn *P* elektrisiert ist. Seddig (1905) hat aber darauf hingewiesen, daß die verschiedene Leitfähigkeit von Luft und Öl bei diesem Versuche eine Rolle spielen muß.

Im homogenen Felde sucht das Dielektrikum eine bestimmte Lage anzunehmen. Eine homogene und isotrope Kugel befindet sich in einem solchen Felde immer in Ruhe. In Kristallen hat die Größe *K*, also auch die Polarisation, in verschiedenen Richtungen verschiedene Werte, wie dies dem Maxwellschen Gesetze $K = n^2$ entspricht, wo *n* der Brechungsquotient von Strahlen mit großer Wellenlänge ist. Ein Kristall sucht allgemein eine solche Lage anzunehmen, daß hierbei die Richtung der größten Polarisation mit der Richtung der Kraftlinien zusammenfällt. Die Gleichgewichtsbedingungen eines kristallinischen Körpers im elektrischen Felde haben Knoblauch (1851), Root (1876), Boltzmann (1874) und Righi (1897) untersucht.

Quincke (1896) hat gefunden, daß Dielektrika, die sich innerhalb einer nichtleitenden Flüssigkeit zwischen den Platten eines geladenen Kondensators befinden, äußerst merkwürdige Bewegungen ausführen (Drehungen, gegenseitige Abstoßungen, Anziehungen usw.). Quincke selbst erklärt diese Bewegungen durch die Wirkung des elektrischen Feldes auf die äußerst dünne Luftschicht, welche am Dielektrikum haftet. Dagegen haben Heydweiller, Graetz und Schweidler gezeigt, daß diese Bewegungen ihre Erklärung finden, wenn man annimmt, daß die das Dielektrikum umgebende Flüssigkeit die Elektrizität zum Teil leitet.

§ 4. Elektrostriktion. Die elektrischen Kräfte, welche auf die Ladung irgend eines Körpers wirken, können eine Verschiebung dieser Ladung im Körper oder an seiner Oberfläche bewirken. Man nennt die Kräfte in diesem Falle elektromotorische. Ist aber eine solche Verschiebung nicht möglich, wie z. B. in dem Falle, wo die Kräfte senkrecht zur Oberfläche des elektrisierten Körpers wirken, so wirken die Kräfte auf den Körper selbst ein, bilden also ponderomotorische Kräfte. Hierher gehört auch der Fall eines im elektrischen Felde befindlichen Dielektrikums. Die auf die Ladungen der polarisierten Teilchen einwirkenden Kräfte führen, wie wir gesehen haben, auf Spannungen längs der Induktionsröhren und zu Drucken auf die Seitenflächen dieser Röhren. Die Größe *P* der Spannung sowie des Druckes wird durch die Formel

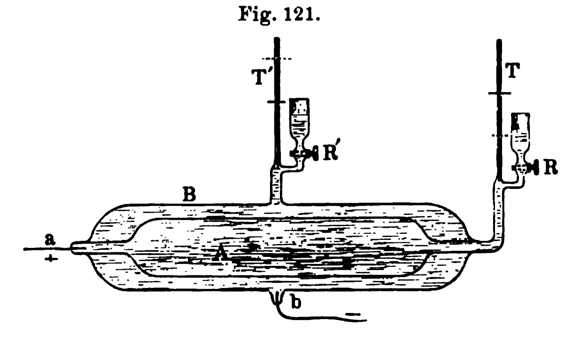
$$P = \frac{F^2 K}{8\pi} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

vgl. (32, k), S. 63 bestimmt. Unter der Einwirkung dieser Spannungen und Drucke, die als ponderomotorische Kräfte betrachtet werden können,

müssen im Dielektrikum Spannungen auftreten, die im allgemeinen elastische Änderungen im Innern des Körpers nach sich ziehen. Die hierher gehörigen Erscheinungen nennt man Elektrostriktion. Wenden wir uns zu den Resultaten der experimentellen Untersuchungen dieser Erscheinungen.

Schon Fontana (1831), Volpicelli (1856) und Govi (1866) hatten bemerkt, daß sich das Volumen einer Leidener Flasche oder ihr ähnlicher Apparate bei der Elektrisierung vergrößert. Die erste genaue Untersuchung hat Duter (1878) ausgeführt. Der Apparat von Duter ist in Fig. 121 abgebildet; er stellt eine besondere Form einer Leidener Flasche dar, deren Belegungen durch Flüssigkeiten ersetzt sind. Das Gefäß *A*, in welches ein Draht *a* eingeschmolzen ist, steht mit einer Kapillare *T* in Verbindung. Es befindet sich im Innern eines weiteren Gefäßes *B*, in welches ein Draht *b* eingeschmolzen ist und welches in eine Kapillare *T'* mündet. Beide Gefäße sind mit angesäuertem

Fig. 121.



Wasser gefüllt. Ladet man diese Leidener Flasche, indem man beispielsweise den einen der Drähte mit einer Elektrizitätsquelle verbindet, den anderen erdet, so senkt sich die Flüssigkeit in *T*, während sie in *T'* steigt. Hieraus folgt, daß sich das Volumen eines Kondensators bei seiner Ladung vergrößert. Will man sich darauf beschränken, die Änderung des inneren Kondensatorvolumens zu bestimmen, so kann man sich eines Gefäßes von der Form eines Thermometers mit großem Reservoir bedienen, in welches ein kleiner Draht eingeschmolzen ist; es ist mit angesäuertem Wasser gefüllt und in ein Gefäß mit ebensolchem Wasser getaucht, in welches das Ende eines zweiten Drahtes hineinragt. Duter fand, daß die Volumenänderung direkt proportional dem Quadrate der Potentialdifferenz und indirekt proportional der ersten Potenz der Wanddicke des Gefäßes (*A* in Fig. 121) ist; das zweite von diesen Resultaten ist jedoch nicht richtig. Nächst Duter hat sich insbesondere Quincke damit beschäftigt, die Volumänderung eines Dielektrikums bei seiner Elektrisierung zu studieren. Er fand, daß diese Änderung indirekt proportional dem Quadrate der

Wanddicke des Gefäßes ist, welches Resultat auch mit der Theorie im Einklange steht. Dasselbe Gesetz hat Quincke auch für kristallinische Körper bestätigt gefunden; ferner auch — und außer ihm Korteweg und Julius — für Kautschuk. Endlich haben Wüllner und M. Wien (1902) die Versuche von Quincke nach einer verbesserten Methode wiederholt, die ihnen ermöglichte, viele Fehlerquellen zu vermeiden. Sie fanden, daß die Volumänderung von kugel- und zylinderförmigen Kondensatoren aus Glas etwas kleiner ist, als sie es sein müßte, falls es sich um rein mechanische Wirkungen handeln würde.

Die Längenänderung eines Dielektrikums bei seiner Polarisation haben Righi (1879), Röntgen (1880), Quincke (1880), Cantone (1881) und More (1900) untersucht. Righi war der erste, welcher nachwies, daß eine Glasröhre an Länge zunimmt, wenn man sie von innen und außen mit Stanniol beklebt und den so entstandenen zylindrischen Kondensator ladet. Röntgen erhielt eine beträchtliche Längenzunahme eines Kautschukstreifens bei der Elektrisierung von dessen beiden Seiten mit Hilfe zweier mit den Polen einer Holtzschen Maschine verbundener Metallsauger. Quincke hat im Glase eine „restierende Längenzunahme" nach Aufhören der Elektrisierung beobachtet.

Im Jahre 1900 erschien eine sehr sorgfältig ausgeführte Arbeit von More, welcher fand, daß Verlängerungen, sowie überhaupt Formenänderungen in Dielektrika ausschließlich durch freie Ladungen hervorgerufen werden, d. h. durch Ladungen, deren Vorhandensein an einer gegebenen Stelle eine Änderung des Induktionsflusses an dieser Stelle bewirkt; neuere Versuche (1903) haben ihm dasselbe Resultat geliefert. Eine Polarisation des Dielektrikums, die keine Änderungen dieses Flusses beim Übergange aus dem umgebenden Raume in dieses Dielektrikum bewirkt und von gewissen Spannungen und Drucken P begleitet ist, wirkt nach seiner Meinung gar nicht auf die Dimensionen des Dielektrikums ein. Zwischen More und Sacerdote ist ein langdauernder Streit aus Anlaß dieser Versuche entstanden. Die Frage bleibt daher noch offen.

Die Elektrostriktion in Flüssigkeiten haben Quincke und Röntgen untersucht, sind aber dabei zu widersprechenden Resultaten gelangt. Ersterer fand, daß sich das Volumen einiger Flüssigkeiten im elektrischen Felde vergrößert, dasjenige anderer aber verkleinert, letzterer hingegen fand für alle Flüssigkeiten eine Zunahme des Volumens.

Ein besonderes Verhalten zeigen die Kristalle, welche die Erscheinung der Piezoelektrizität (S. 254) aufweisen, d. h. sich infolge von Zusammendrückung, Ausreckung, wie überhaupt von Einwirkung mechanischer Kräfte elektrisieren. Es läßt sich leicht nachweisen, daß solche Kristalle umgekehrt eine Änderung ihrer Dimensionen infolge

von Elektrisierung erleiden müssen, wobei das Vorzeichen der Änderung (z. B. Verlängerung oder Verkürzung) von dem Vorzeichen der Elektrisierung abhängen muß. Die Versuche von Curie (1881), Röntgen und Kundt haben dies bestätigt. Curie u. a. überzogen die zur elektrischen Achse senkrechten Flächen eines Kristalls, z. B. eines Turmalins, mit Stanniolblättchen, die sie ungleichnamig elektrisierten. War die Elektrisierung die gleiche, wie sie durch eine Zusammendrückung des Kristalls in der Längsrichtung erfolgt, so trat Verlängerung ein. Curie hat sogar (1888) ein Elektrometer konstruiert, das auf der Änderung der Dimensionen eines Quarzplättchens infolge von Elektrisierung beruht.

Von großem Interesse ist die Frage nach der Elektrostriktion in Gasen, d. h. nach dem Einfluß des elektrischen Feldes auf das Volumen, oder, was dasselbe ist, auf die Spannung einer gegebenen Gasmenge. Daß ein solcher Einfluß vorhanden sein muß, läßt sich leicht vorhersehen. Denken wir uns einen geladenen Kondensator, dessen Dielektrikum irgend ein Gas bildet. Verdünnt man dies Gas, so wird sein Dielektrizitätsvermögen K kleiner; infolgedessen verringert sich die Kapazität des Kondensators und vergrößert sich das Potential, bis zu welchem er geladen ist. Auch ohne strengere Herleitung können wir uns weiter auf das Prinzip von Le Chatelier-Braun stützen, das, wie wir gesehen haben (Bd. III), bei den verschiedensten Naturerscheinungen bestätigt wird: jede Einwirkung ruft eine Gegenwirkung hervor, welche diese Einwirkung abzuschwächen sucht. Elektrisiert man einen Kondensator, indem man sein Potential vergrößert, so muß im Gase eine Änderung erfolgen, welche die Verringerung des Potentials, d. h. eine Zunahme der Kapazität des Kondensators begünstigt. Eine solche Änderung aber ist die Verdichtung des Gases. Hieraus dürfen wir folgern, daß unter der Einwirkung des elektrischen Feldes eine Verdichtung des Gases erfolgen muß, also eine Zunahme seiner Spannung oder eine Verkleinerung seines Volumens. Dasselbe Resultat wollen wir auch auf theoretischem Wege ableiten. Wir wählen das Potential V des Kondensators und den Druck p des dazwischen befindlichen Gases als unabhängige Variable. Strömt die Elektrizitätsmenge $d\eta$ hinzu, so ändert sich V und p; wir setzen

$$d\eta = c\,dV + h\,dp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die Größe h ist positiv, denn bei Kompression des Gases ($dp > 0$) nimmt die Kapazität zu, es ist daher für $V = const$ der Wert $d\eta > 0$. Die Ladung η ist eine Funktion der Größen V und p; die Größe $d\eta$ ist das totale Differential dieser Funktion, es ist daher

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{\partial h}{\partial V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15,\text{a})$$

Strömt die Elektrizitätsmenge $d\eta$ hinzu, und vergrößert sich das Volumen v des Gases um dv, so vergrößert sich die Energie E des Systems um den Betrag

$$dE = V d\eta - p\,dv$$

oder für isotherme Änderungen ($pv = const$)

$$dE = V d\eta + v dp = c V dV + (hV + v)\,dp.$$

Auch diese Größe ist ein vollständiges Differential, folglich ist

$$\frac{\partial (cV)}{\partial p} = \frac{\partial (hV + v)}{\partial V}$$

$$V \frac{\partial c}{\partial p} = V \frac{\partial h}{\partial V} + h + \frac{\partial v}{\partial V}.$$

Hieraus folgt, vgl. (15, a):

$$\frac{\partial v}{\partial V} = -h \quad \text{. . . . .} \quad (16)$$

Da $h > 0$ ist, so beweist diese Formel, daß sich mit Anwachsen des Potentials V das Gasvolumen v verkleinert. Kennt man die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten des Gases, also auch der Kapazität des Kondensators vom Drucke p, so ist es leicht, h, also auch die Volumenänderung Δv des Gases, welche beim Auftreten des Feldes erfolgt, zu berechnen. Man erhält schließlich die Formel

$$\frac{\Delta v}{V} = -\frac{1}{8\pi}\frac{\partial K}{\partial p} F^2 \quad \text{. . . . . .} \quad (16, a)$$

wo Δv die Änderung des Volumens v beim Auftreten des Feldes F und K die Dielektrizitätskonstante des Gases ist.

Quincke (1880) und ebenso Warren de la Rue und Hugo Müller konnten diese kleine, von der Theorie vorhergesagte Volumänderung Δv nicht bemerken; sie wurde zuerst von Mache (1898) und Gans (1903) beobachtet und gemessen.

Die Theorie der Erscheinungen der Elektrostriktion in festen, flüssigen und gasförmigen Körpern haben Maxwell, Helmholtz, Lorberg, Duhem, Lippmann, Kirchhoff, Pockels, Korteweg, Sacerdote, Voigt, Schiller, Kapustin u. a. behandelt. Wir beschränken uns auf die entsprechenden Literaturangaben (S. 306).

§ 5. Einwirkung des elektrischen Feldes auf die optischen Eigenschaften, die Elastizität und die innere Reibung der Dielektrika. Ein isotropes, in ein elektrisches Feld gebrachtes Dielektrikum wird optisch anisotrop, also auch doppeltbrechend. Besonders wichtig ist, daß diese Erscheinung auch in Flüssigkeiten beobachtet wird; dies zeigt, daß im gegebenen Falle die Anisotropie nicht allein durch Elektrostriktion erklärt werden kann, d. h. durch

optischen Erscheinung zerfallen. Kerr nennt jene Flüssigkeiten positiv, in welchen sich der senkrecht zu den Kraftlinien polarisierte Strahl (d. h. der dem außerordentlichen entsprechende Strahl) langsamer ausbreitet, und negativ diejenigen Flüssigkeiten, in welchen sich dieser Strahl schneller als der andere ausbreitet. Die positiven Flüssigkeiten wirken wie ein positiver Kristall, dessen Achse den Kraftlinien parallel ist, oder wie Glas, welches in der Richtung dieser Linie gedehnt ist.

Zu den positiven Flüssigkeiten gehört der Schwefelkohlenstoff, die Elemente Br, P und S im flüssigen Zustande, ferner Wasser, die Kohlenwasserstoffe: Pentan, Hexan, Paraffin, Naphtalin u. a., einige Säuren, wie z. B. Essigsäure, Ameisensäure, Milch- und Oleïnsäure, Phenol, Aceton, Chloral usw. Zu den negativen gehören: die Alkohole mit Ausnahme des Methylalkohols, Palmitin- und Stearinsäure, Äthyl- und Amyläther, Glykol, Glycerin, Kokosöl, Schweinefett, Wachs, Anilin, Chloroform, Bromoform, Chlorwasser usw. Kerr hat (1885) gezeigt, daß die hier beschriebene Erscheinung auch, woran man bis dahin gezweifelt hatte, im homogenen Felde auftritt.

Wenden wir uns nunmehr der quantitativen Seite der Erscheinung zu. Als Maß für die elektro-optische Wirkung kann man den Gangunterschied δ zweier Strahlen wählen, welche parallel und senkrecht zu den Kraftlinien polarisiert sind. Die Größe δ wächst offenbar proportional der Dicke l der polarisierten Flüssigkeitsschicht; ferner fand Kerr, daß δ proportional dem Quadrate der Feldintensität wächst, d. h. proportional $\left(\frac{V_1 - V_2}{d}\right)^2$, wo V_1 und V_2 die Potentiale der Elektroden, d ihr Abstand ist. Die Größe δ, ausgedrückt in Wellenlängen λ des entsprechenden Strahles, wird durch die Formel

$$\delta = cl\frac{(V_1 - V_2)^2}{d^2} \quad \dots\dots\dots \quad (17)$$

bestimmt. Quincke (1883), Lemoine (1896), W. Schmidt (1902) u. a. haben den Zahlenwert des Koeffizienten c bestimmt. Quincke fand folgende Zahlen, wobei l und d in Centimetern, $V_1 - V_2$ in el.-st. C. G. S.-Einheiten (jede gleich 300 Volt) ausgedrückt sind:

	Schwefelkohlenstoff	Benzol	Terpentinöl	Äther
$c \cdot 10^8 =$	$+ 32{,}8\,\lambda$	$+ 3{,}84\,\lambda$	$+ 0{,}109\,\lambda$	$- 6{,}4\,\lambda$

Lemoine fand für CS_2 den Wert $37\,\lambda$.

W. Schmidt (1902) fand, daß sich die Konstante c mit Zunahme der Temperatur verkleinert. Ferner fand er, daß sie von der Wellenlänge λ abhängt und daß ihr Wert für Gemische sich in keinem einfachen Zusammenhange mit den Werten derselben Größe für die Bestandteile des Gemisches befindet. Für Nitrobenzol wurde der außerordentlich große Wert $c \cdot 10^8 = 2200\,\lambda$ erhalten; derselbe ist

60 mal so groß wie der Wert von c für CS_2, der bis dahin als der größte galt.

De Metz (1902) beobachtete das Kerrsche Phänomen in reinem Wasser und in wässerigen Lösungen von Kollodium (4 Proz.) und Gelatine (3 Proz.), wenn er die Elektroden mit einer 0,5 mm dicken Schicht von festem Kautschuk bedeckte.

Elmén (1905) findet für CS_2, daß für kleine Werte von $V_1 - V_2$ (beginnend mit 200 Volt pro 1 mm) die Größe δ bei weiterer Abnahme der Größe $\frac{V_1 - V_2}{d}$ langsamer abnimmt, als es der Formel (17) entspricht, so daß c für eine gegebene Substanz keine Konstante ist.

Kerr hatte aus seinen Beobachtungen gefolgert, daß das elektrische Feld die Fortflanzungsgeschwindigkeit v nur dann beeinflußt, wenn das Licht senkrecht zu den Kraftlinien polarisiert ist. Die Theorien von Voigt und Pockels führten aber zu dem Resultat, daß eine Einwirkung, wenn auch von anderer Größe, auch auf parallel zu den Kraftlinien polarisierte Strahlen zu erwarten sei. Äckerlein (1906) hat nun nach einer von Mandelstam vorgeschlagenen Methode Nitrobenzol und Orthonitrotoluol untersucht und gefunden, daß die Größe v tatsächlich durch ein elektrisches Feld beeinflußt wird, sowohl wenn das Licht senkrecht, als wenn es parallel zu den Kraftlinien polarisiert ist. Es zeigte sich, daß im ersteren Falle eine Verzögerung, im letzteren eine Beschleunigung der Strahlen stattfindet. Bei Nitrobenzol verhält sich die Verzögerung zu der Beschleunigung annähernd wie 2 : 1. Dies Resultat widerspricht den oben erwähnten Theorien, welche eine Beeinflussung durch das Feld für beide Polarisationsfälle in gleichem Sinne fordern.

Blondlot (1888) hat zuerst zu bestimmen gesucht, wie schnell die optische Anisotropie zugleich mit dem elektrischen Felde erscheint und verschwindet; er fand, daß die Verspätung noch nicht $^1/_{40000}$ Sek. beträgt. Im Jahre 1899 bedienten sich Abraham und Lemoine einer von ihnen erdachten geistreichen Methode zur Messung von sehr kleinen Zeiträumen durch Messung der Entfernung, welche in dieser Zeit das Licht zurücklegt. Sie entluden einen Kondensator, zwischen dessen Platten sich Schwefelkohlenstoff befand. Das Licht des Entladungsfunkens wurde durch diese Flüssigkeit hindurchgesandt, nachdem es, reflektiert von mehreren Spiegeln, einen Weg zurückgelegt hatte, dessen Länge sich leicht messen ließ. Hierbei zeigte sich, daß $^1/_{400000000}$ Sek. nach Verschwinden des Feldes die Hälfte der Anisotropie bereits verschwunden war, nach $^1/_{100000000}$ Sek. aber keine Spur von ihr mehr übrig war. Die Theorie dieser Methode ist von J. James (1904) erweitert worden.

Quarz wird, wenn man ihn in ein elektrisches Feld bringt, dessen Kraftlinien senkrecht zu seiner Achse sind, zu einem zweiachsigen

Kristall. Röntgen, Kundt, Czermak und Pockels haben diese Erscheinung untersucht.

Ein großes Interesse bietet die Frage nach der Wirkung des elektrischen Feldes auf das Emissionsvermögen der Körper, z. B. auf das Spektrum leuchtender Dämpfe, d. i. die Frage bezüglich einer, dem im Magnetfelde auftretenden Zeemanschen Phänomen, das wir später kennen lernen werden, analogen Erscheinung. Voigt hat auf theoretischem Wege gefunden, daß auch im elektrischen Felde eine Verdoppelung der Spektrallinien auftreten muß, daß aber der Abstand der Linien sehr klein sein muß. So kann er z. B. in einem Felde von 300 Volt pro 1 cm nicht über 1 : 20 000 des Abstandes der Natriumlinien D_1 und D_2 hinausgehen.

Es erübrigt noch, einige Änderungen der Eigenschaften von Dielektrika zu betrachten, die durch das elektrische Feld hervorgerufen werden. Quincke fand, daß sich der Torsionskoeffizient des Glases und Kautschuks verkleinert, derjenige des Glimmers und der Guttapercha aber vergrößert.

Duff (1896) und Quincke (1897) haben gefunden, daß das elektrische Feld die innere Reibung fester Dielektrika vergrößert, und zwar am meisten in einer zu den Kraftlinien senkrechten Richtung. König (1886) und G. Pacher, L. Finazzi (1900), sowie auch Ercolini (1903) konnten eine derartige Feldwirkung nicht wahrnehmen, während Pochettino (1903) dieselbe am Benzol, Xylol und Petroleum nachgewiesen hat.

§ 6. Erwärmung der Dielektrika während ihrer Polarisation. Unterwirft man ein Dielektrikum der Einwirkung eines pulsierenden (d. h. entstehenden und verschwindenden) oder eines wechselnden (d. h. seine Richtung wechselnden) elektrischen Feldes, so findet ein gewisser Arbeitsaufwand statt, der eine Erwärmung des Dielektrikums zur Folge hat. Zur Untersuchung dieser Erscheinungen ist eine große Zahl von Arbeiten ausgeführt worden, die in der Literaturübersicht aufgezählt sind. Der Erste, welcher eine Erwärmung des Glases einer Leidener Flasche beobachtet hat, war Siemens (1861); später haben Naccari und Bellati (1882) die Erwärmung eines flüssigen Dielektrikums (Petroleum) im veränderlichen Elektrizitätsfelde beobachtet.

Eine eingehende Untersuchung hat J. Borgman im Jahre 1886 ausgeführt. Er brachte 30 mit Stanniol beklebte und mit Kupferspänen gefüllte Röhren in eine gemeinsame, mit einem empfindlichen Manometer verbundene Röhre. Als er darauf alle Röhren einer wechselnden Elektrisierung unterwarf, beobachtete er eine Erwärmung der Röhren. Hierbei fand er, daß die Erwärmung proportional der Potentialdifferenz war, bis zu welcher die Röhren geladen wurden.

Dieses Gesetz ist später auch von anderen Beobachtern, die sich seit 1892 mit dieser Frage beschäftigt haben, bestätigt worden.

In der Lehre vom Magnetfelde werden wir die Erscheinung der Hysteresis kennen lernen, die darin besteht, daß die Wirkung des Feldes (Magnetfeldes) bei gegebener Intensität desselben verschieden ist, je nachdem der betreffende Intensitätswert bei Zunahme oder bei Abnahme der Intensität erreicht wird. Die Schnelligkeit der Feldänderung spielt dabei fast gar keine Rolle und wirkt kaum auf die Erwärmung ein, welche, wie wir sehen werden, bei vorhandener Hysteresis die variable Magnetisierung begleitet.

Steinmetz (1892) und Kleiner (1893) haben die Erwärmung der Dielektrika im pulsierenden oder variablen Elektrizitätsfelde insbesondere der elektrischen Hysteresis zugeschrieben.

Arno (1892), der das Dielektrikum der Einwirkung eines elektrischen Drehfeldes unterwarf (analog dem magnetischen Drehfelde, das wir später kennen lernen werden), war der Erste, welcher gezeigt hat, daß die Erwärmung von der Schnelligkeit abhängt, mit welcher die Änderung des Feldes erfolgt; er hat daher den Gedanken bezüglich der Hysteresis verworfen. Er erklärte die Erwärmung dadurch, daß die Polarisation des Dielektrikums hinter dem Felde zurückbleibt wenn sich letzteres schnell ändert. Dieses Zurückbleiben, das um so größer ist, je schneller das Feld wechselt, muß ebenfalls zu seiner Folge einen gewissen Verlust an elektrischer Energie haben, die in Wärme übergeht.

Ferner hat Hess (1893) eine Theorie aufgestellt, nach welcher die Erwärmung eine Folge der wechselnden Ladungen und Entladungen der leitenden Teilchen ist, welche, wie wir gesehen haben, nach der Meinung einiger Forscher in der nichtleitenden Masse des Dielektrikums verteilt sind und gewissermaßen die Träger der Polarisation des Dielektrikums repräsentieren.

Neuere Arbeiten von Porter und Morris (1895), Elster (1895), Schaufelberger (1897), Pellat und insbesondere Beaulard (1900), Maccarone (1901) und Corbino (1905) haben gezeigt, daß eine elektrische Hysteresis nicht existiert und daß die Erwärmung des Dielektrikums nur infolge des Zurückbleibens der Polarisation geschieht, auf das Arno verwiesen hatte. Was in den dielektrischen Substanzen vor sich geht, erinnert in seinem Charakter an die Erscheinung der inneren Reibung oder Viskosität und man kann daher sagen, daß die Dielektrika eine „zähe Hysteresis“ (hystérésis visqueuse) zeigen.

Bei langsamer Feldänderung hängt die Polarisation nicht von der Richtung dieser Änderung ab und fehlt die zähe Hysteresis: sie wächst mit der Schnelligkeit der Feldänderung, von welcher, wie gesagt, die magnetische Hysteresis fast unabhängig ist. Auf eine besondere

Art des Einflusses der Elektrisierung auf die Temperatur der pyroelektrischen Kristalle war bereits auf S. 252 hingewiesen worden.

Eine vollständige Theorie der Arnoschen Versuche ist von Lampa (1906) entwickelt worden. Die im elektrischen Drehfelde beobachteten Rotationen werden durch diese Theorie in dem oben angegebenen Sinne erklärt; eine elektrische, der magnetischen analoge Hysteresis wird auch von Lampa nicht angenommen.

Literatur.

Zu § 2.

Coulomb: Mém. de l'Acad. royale des sc. 1785, p. 572; Collect. des mém. rel. à la phys. **1**, 107, 1884.
Cavendish: The Electrical Researches of the Honorable Henry Cavendish. Edit. by J. C. Maxwell, 1879, p. 104.
Riess: Reibungselektrizität, S. 93.
Harris: Phil. Trans. 1834, part. II, p. 213; 1836, part. II, p. 431.
Marié-Davy: Compt. rend. **31**, 863, 1850; Mém. de l'Acad. de Montpellier **2**, 149.
Egen: Pogg. Ann. **5**, 294, 1825.

Zu § 3.

Pellat: Journ. de phys. (1) **10**, 385, 1881.
Gaugain: Ann. de chim. et phys. (4) **2**, 276, 1864.
Wüllner: Ber. Münch. Akad. 1874; Pogg. Ann. **153**, 22, 1874; W. A. **32**, 19, 1887; W. A. **1**, 247, 361, 1877.
Boltzmann, Romich u. Nowak: Wien. Ber. **70**, 380, 1874.
Cohn u. Arons: W. A. **28**, 454, 1886; **33**, 13, 1888.
R. Kohlrausch: Pogg. Ann. **91**, 56, 1854.
Faraday: Exper. Researches § 1297 u. ff.
Belli: Corsi di fisica sperimentale **3**, 294, 331, 1838.
Hopkinson: Phil. Trans. **167**, 599, 1876; Phil. Mag. (5) **2**, 314, 1876; Proc. R. Soc. **25**, 496, 1876.
Bezold: Pogg. Ann. **114**, 433, 1861; **125**, 132, 1863; **137**, 223, 1869.
Giese: W. A. **9**, 161, 1880.
Dieterici: W. A. **25**, 291, 545, 1885.
Neyreneuf: Ann. de chim. et phys. (5) **5**, 392, 1875.
Rowland u. Nichols: Phil. Mag. (5) **11**, 414, 1881.
Hertz: W. A. **20**, 279, 1883.
Hopkinson u. Wilson: Phil. Trans. **189**, 109, 1897.
Puccianti: Phys. Zeitschr. **5**, 92, 1904.
Seddig: Phys. Zeitschr. **6**, 414, 1905.
Knoblauch: Pogg. Ann. **83**, 289, 1851.
Root: Pogg. Ann. **158**, 31, 425, 1876.
Boltzmann: Wien. Ber. **80**, 275, 1879.
Righi: Compt. rend. **88**, 1262, 1879; R. Acc. delle Sc. Ist. d. Bologna 1897, 30. Mai.
Quincke: W. A. **59**, 417, 1896; **62**, 67, 1897.

Heydweiller: Verh. phys. Ges. **16**, 32, 1887.
Graetz: Ann. de Phys. (4) **1**, 530, 1900.
Schweidler: Wien. Ber. **106**, 526, 1897.

Zu § 4.

Fontana: Lettre inedite di Volta. Pesaro **15**, 1831.
Volpicelli: Arch. de Genève **32**, 323, 1856.
Govi: N. Cim. **21**, 18, 1866.
Duter: Compt. rend. **87**, 828, 960, 1036, 1878; **88**, 1260, 1879; Journ. de phys. (1) **8**, 82, 1879.
Quincke: W. A. **10**, 161, 374, 514, 1880; **19**, 545, 705, 1883.
Righi: Compt. rend. **88**, 1262, 1879; Mem. di Bologna **10**, 407, 1879.
Röntgen: W. A. **11**, 771, 1880; **18**, 227, 547, 1883; **19**, 320, 1883.
Cantone: Rend. Acc. dei Lincei (4) **4**, 344, 471, 1888.
More: Phil. Mag. (5) **50**, 198, 1900; **2**, 527, 1901; **6**, **1**, 1903.
Curie: Compt. rend. **93**, 1137, 1881; **106**, 1287, 1888; Journ. de phys. (2) **8**, 149, 1889.
Kundt: W. A. **18**, 230, 1883.
Warren de la Rue et Hugo Müller: Compt. rend. **89**, 637, 1879.
Wüllner u. M. Wien: Ann. de Phys. (4) **9**, 1217, 1902.
Maxwell: Treatise I, Cap. 5, § 103—107.
Helmholtz: W. A. **13**, 385, 1881; Wiss. Abh. **1**, 798.
Lorberg: W. A. **21**, 300, 1884.
Lippmann: Ann. d. chim. et phys. (5) **24**, 145, 1881.
Duhem: Leçons sur l'électricité et le magnétisme **2**, 405, 1892; Journ. de phys. (3) **9**, 28, 1900.
Kirchhoff: W. A. **24**, 52, 1885; **25**, 601, 1885; Abhandl.-Nachträge S. 91, 114.
Pockels: Grunerts Archiv **12**, 57, 1893.
Korteweg: Compt. rend. **88**, 338, 1879; W. A. **9**, 48, 1880; **12**, 647, 1881.
Sacerdote: Journ. de phys. (3) **8**, 457, 531, 1899; **10**, 196, 200, 1901; Ann. de phys. et chim. (7) **20**, 289, 1900; Compt. rend. **126**, 1019, 1898; Thèses, Paris 1899; Phil. Mag. (6) **1**, 357, 1901.
Schiller: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **26**, 208, 1894; Kiewer Univ. Nachr. 1894.
Kapustin: Einfluß d. elektr. u. magn. Kräfte usw. auf Volumen und Druck der Gase (russ.). St. Petersburg 1895; Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **27**, 103, 129, 1895.
Boltzmann: Wien. Ber. (2) **81**, 9, 1880.
Mache: Wien. Ber. **107**, 708, 1898.
Gans: Ann. d. Phys. (4) **11**, 797, 1903.
Voigt: W. A. **69**, 297, 1899.

Zu § 5.

Néculcéa: Le Phénomène de Kerr. Scientia phys.-math. No. 16, 1902.
Kerr: Phil. Mag. (4) **50**, 337, 446, 1875; (5) **8**, 85, 229, 1879; **9**, 159, 1880; **13**, 153, 248, 1882; **20**, 363, 1885; **37**, 380, 1894; **38**, 144, 1894.
Röntgen: W. A. **10**, 77, 1880; **18**, 213, 534, 1883; **19**, 319, 1883.
Brongersma: W. A. **16**, 222, 1882.
Quincke: W. A. **7**, 588, 1879; **10**, 536, 1880; **19**, 729, 1883; **62**, 1, 1897; Berl. Ber. 1883, S. 4; Phil. Mag. (5) **38**, 144, 1894.
Lemoine: Compt. rend. **122**, 835, 1896.
Blondlot: Compt. rend. **106**, 349, 1888; Journ. de phys. (2) **7**, 91, 1888.

Elmen: Ann. d. Phys. (4) **16**, 350, 1905.
Äckerlein: Phys. Zeitschr. **7**, 594, 1906.
De-Metz: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **34**, 521, 1902.
Abraham et Lemoine: Compt. rend. **129**, 206, 1899; Journ. de phys. (3) **9**, 262, 1900; Naturw. Rundschau **14**, 499, 1899.
J. James: Ann. d. Phys. (4) **15**, 954, 1904.
Kundt: W. A. **18**, 228, 1883.
Czermak: Wien. Ber. **97**, 301, 1888.
Voigt: W. A. **69**, 297, 1899; Ann. d. Phys. (4) **4**, 197, 1901.
W. Schmidt: Ann. d. Phys. (4) **7**, 142, 1902.
Pockels: N. Jahrb. f. Mineral. **7**, 201, 1890 (Beilage); Abh. Göttingen **39**, 1894; 1896, S. 102.
Duff: Phys. Rev. **4**, 23, 1895.
König: W. A. **25**, 624, 1885.
Ercolini: N. Cim. (5) **5**, 249, 1903.
Pocher e Finazzi: Atti d. R. Ist. Veneto **59**, II, 1899—1900.
Pochettino: Rend. Acc. dei Lincei (5) **12**, II, 363, 1903.

Zu § 6.

Siemens: Pogg. Ann. **125**, 137, 1865.
Naccari e Bellati: Atti di Torino **17**, 26, 1882; Journ. de phys. (2) **1**, 430, 1882.
Borgman: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **18**, 1, 1886; Journ. de phys. (2) **8**, 217, 1888.
Steinmetz: Elektrotechn. Zeitschr. **13**, 227, 1892; Lum. électr. **44**, 95, 1892.
Kleiner: W. A. **5**, 138, 1893; Vierteljahrsschr. d. Zürich. naturf. Ges. **37**, 322, 1892.
Arno: Rendic. Acc. d. Lincei (5) **3**, 585; **5**, 262, 1892; 1893; 1894; **7**, 167, 1899; N. Cim. (4) **5**, 52, 1897; Journ. de phys. (3) **8**, 607, 1898.
Hess: Journ. de phys. (3) **2**, 145, 1893; Éclair. électr. **3**, 210, 1895.
Porter and Morris: Proc. R. Soc. **57**, 469, 1895; Journ. de phys. (3) **5**, 34, 1896.
Benischke: Wien. Ber. **102**, 13. Dezember 1893.
Düggelin: Vierteljahrsschr. d. Zürich. naturf. Ges. **40**, 121, 1895.
H. F. Weber: Arch. sc. phys. et natur. (4) **2**, 519, 1896.
Guye et Denso: Compt. rend. **140**, 433, 1905.
Elster: Elektrotechn. Zeitschr. 15. Juni 1895.
Beaulard: Journ. de phys. (3) **9**, 422, 1900; Compt. rend. **130**, 1182, 1900.
Schaufelberger: W. A. **62**, 635, 1897; **65**, 635, 1898; **67**, 307, 1899; Inaug.-Diss. Zürich 1898.
Corbino: Phys. Zeitschr. **6**, 138, 1905.
Maccarone: Phys. Zeitschr. **3**, 57, 1901; N. Cim. (5) **4**, 313, 1902.
Lampa: Wien. Ber. **115**, 1659, 1906.

Viertes Kapitel.

Elektrostatische Messungen.

§ 1. **Einleitung.** Beim Studium des elektrischen Feldes haben wir uns mit verschiedenartigen elektrischen, genauer gesagt elektrostatischen Größen bekannt gemacht. In diesem Kapitel werden wir nun die Methoden betrachten, welche zur Messung jener Größen dienen. Alles, was wir im ersten Bande über die Kunst, Messungen auszuführen, gesagt haben, bezieht sich natürlicherweise auch auf den Gegenstand dieses Kapitels. Es gibt zahlreiche Werke, die speziell den elektrischen Messungen gewidmet sind; in ihnen kann man alle die Einzelheiten finden, auf welche wir hier nicht eingehen können. Eine wirkliche Kenntnis der Meßmethoden kann nur im physikalischen Laboratorium, bei der praktischen Anwendung derselben, erlangt werden.

Zur Messung einiger elektrischer Größen gibt es Apparate, die in den Stand setzen, mehr oder weniger unmittelbar die gesuchten Zahlenwerte der zu messenden Größen zu erhalten. Andere elektrische Größen können nur auf Umwegen gemessen werden, durch Kombination von verschiedenen Apparaten und Beobachtungen. Zwischen diesen beiden Meßmethoden läßt sich natürlich keine strenge Grenze ziehen.

Einige Apparate und Meßmethoden sind bereits in den vorhergehenden Kapiteln beschrieben worden. Wir werden sie hier um der Vollständigkeit unserer Übersicht willen nochmals erwähnen.

Hinsichtlich des elektrischen Potentials und der elektromotorischen Kraft beschränken wir uns vorläufig auf eine Angabe der elektrostatischen Meßmethoden. Andere Methoden werden später beschrieben werden.

Bei Betrachtung der Methoden zur Messung der Dielektrizitätskonstanten K haben wir auf Erscheinungen hinzuweisen, mit denen wir uns erst in den späteren Kapiteln dieses Buches bekannt machen werden. Im gegebenen Falle erschien es uns richtiger, die Übersicht über die hauptsächlichsten Methoden an einer Stelle zu geben.

§ 2. **System der elektrostatischen Einheiten.** Für die Messung der Größen sind die Einheiten dieser Größen, die wir im ersten Kapitel kennen gelernt haben, besonders wichtig. Um der besseren Übersicht willen stellen wir hier diese Größen nebst ihren Dimensionsformeln und den zu ihrer Definition dienenden Ausdrücken zusammen. Gemeint sind immer die elektrostatischen (el.-st.) Einheiten. Einen besonderen Fall bilden die el.-st. C. G. S.-Einheiten. Auf S. 42

war bereits mitgeteilt worden, daß man das Induktionsvermögen K nicht als unbenannte Zahl aufzufassen braucht, daß man dasselbe in die Dimensionsformeln als physikalische Größe einzuführen hat, deren Dimension noch nicht feststeht; wir haben z. B. die Formel (13, a) auf S. 42 derart geschrieben, daß wir in ihr die Dimension von K beibehielten, indem wir $[K]$ schrieben. In der folgenden Übersicht ist überall die Dimension des Induktionsvermögens beibehalten worden. Hierbei sind aber keine Klammern gebraucht worden, was zu bedeuten hat, daß wir unter K das Symbol der Einheit für das Induktionsvermögen verstehen wollen, ähnlich wie L, M und T symbolisch für die Einheiten der Länge, Maße und Zeit gebraucht werden. Der Faktor K^n ist durch das Multiplikationszeichen abgetrennt, um dadurch die üblichen Dimensionsformeln, die man erhält, falls K als unbenannte Zahl angesehen wird, besser hervortreten zu lassen. Wir gehen nunmehr zu der Übersicht der Einheiten selbst über. Die Definitionen der el.-st. Einheit überhaupt und der el.-st. C. G. S.-Einheit im besonderen wollen wir zusammenfassen.

1. Elektrizitätsmenge η; vgl. (11), S. 41,

$$f = \frac{\eta\eta'}{Kr^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die el.-st. (C. G. S.-)Einheit der Elektrizitätsmenge wirkt auf eine ihr gleiche, um die Längeneinheit (1 cm) entfernte, mit einer Kraft, welche gleich der Krafteinheit (1 Dyne) ist. Dimension, vgl. (13, a), S. 42

$$[\eta] = K^{\frac{1}{2}} . L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad \ldots\ldots \quad (1, a)$$

$3 . 10^{10}$ el.-st. C. G. S.-Einheiten bilden eine el.-m. (elektromagnetische) Einheit.

$3 . 10^9$ el.-st. C. G. S.-Einheiten bilden 1 Coulomb (S. 41).

3000 el.-st. C. G. S.-Einheiten bilden 1 Mikrocoulomb.

2. Oberflächendichte k; es sei s der Inhalt der Oberfläche, vgl. (2), S. 32,

$$k = \frac{\eta}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$[k] = [\eta] : L^2 = K^{\frac{1}{2}} . L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad \ldots \quad (2, a)$$

3. Intensität des elektrischen Feldes oder einfach Feld F; vgl. (1), S. 23,

$$F = \frac{f}{\eta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Die el.-st. (C. G. S.-)Einheit des Feldes ist das Feld in demjenigen Punkte, in welchem auf die el.-st. (C. G. S.-)Einheit der Elektrizitätsmenge die Krafteinheit (1 Dyne) wirkt.

$$[F] = K^{\frac{1}{2}} . L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3, a)$$

4. Kraftfluß Φ; vgl. (16), S. 44,

$$\Phi = \iint F_n ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$[\Phi] = [F] L^2 = K^{-\frac{1}{2}} . L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (4, a)$$

Gleichlautend mit $\left[\frac{\eta}{K}\right]$, wie es nach (18) auf S. 45 sein muß.

5. Induktion B; vgl. (28, e), S. 57,

$$B = KF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$[B] = K . [F] = K^{\frac{1}{2}} . L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (5, a)$$

6. Induktionsfluß Ψ; vgl. (16, a), S. 44,

$$\Psi = \iint KF_n ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$[\Psi] = [B] L^2 = K^{\frac{1}{2}} . L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6, a)$$

Gleichlautend mit (1, a), wie es nach (18, a) auf S. 45 sein muß.

7. Oberflächenspannung P; vgl. (25), S. 53,

$$P = \frac{2 \pi k^2}{K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$[P] = \frac{1}{K} [k]^2 = L^{-1} M T^{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7, a)$$

Ps ist eine gewisse Kraft und in der Tat repräsentiert $[Ps] = [P] L^2 = L M T^{-2}$ die Dimension einer Kraft.

8. Elektrische Verschiebung $\mathfrak{D}$; vgl. S. 62,

$$\mathfrak{D} = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$[\mathfrak{D}] = K^{\frac{1}{2}} . L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8, a)$$

Gleichlautend mit (5, a), vgl. Formel (32, i), S. 63, wonach $[\mathfrak{D}] = [KF] = [B]$ ist.

9. Elektrisches Moment m; vgl. S. 75,

$$m = \eta l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$[m] = [\eta] L = K^{\frac{1}{2}} . L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9, a)$$

10. Polarisation des Dielektrikums Π: vgl. (33, d), S. 75, v ist das Volumen,

$$\Pi = \frac{m}{v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$[\Pi] = [m] L^{-3} = K^{\frac{1}{2}} . L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad \ldots \quad (10,\mathrm{a})$$

Gleichlautend mit (2, a) und (5, a), wie es nach (32, d) auf S. 62 sein muß.

11. Elektrisches Potential oder elektromotorische Kraft V: vgl. (37), S. 83; r ist eine Länge

$$V = \frac{\eta}{Kr} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$[V] = [\eta] K^{-1} L^{-1} = K^{-\frac{1}{2}} . L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad \ldots \quad (11,\mathrm{a})$$

oder, vgl. (38), S. 85 (R ist eine Arbeit)

$$[V] = \frac{[R]}{[\eta]} = \frac{L^2 M T^{-2}}{K^{\frac{1}{2}} . L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}} = K^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Die el.-st. (C. G. S.-)Einheit des Potentials ist die Potentialdifferenz zweier Punkte, falls beim Übergange der el.-st. (C. G. S.-)Einheit der Elektrizitätsmenge aus einem von ihnen zum anderen die Einheit der Arbeit (1 Erg Arbeit) geleistet wird.

$\frac{1}{300}$ el.-st. C. G. S.-Einheit bildet 1 Volt.

Die Arbeit Volt-Coulomb ist gleich einem Joule = 0,102 mkg = 0,24 Grammkalorien.

Die Arbeitsfähigkeit Volt-Coulomb pro Sekunde ist gleich einem Watt ($\frac{1}{736}$ HP).

12. Kapazität (elektrische Kapazität) q: vgl. (49, a), S. 99,

$$q = \frac{\eta}{V} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$[q] = [\eta] : [V] = K . L \quad \ldots\ldots \quad (12,\mathrm{a})$$

Die el.-st. (C. G. S.-) Einheit der Kapazität ist die Kapazität eines Leiters, welcher durch eine el.-st. (C. G. S.-)Einheit der Elektrizitätsmenge bis auf eine el.-st. (C. G. S.-)Einheit des Potentials gebracht wird. Dies ist z. B. die Kapazität einer Kugel in Luft, deren Radius gleich der Längeneinheit (1 cm) ist.

$9 . 10^{11}$ el.-st. C. G. S.-Einheiten der Kapazität bilden ein Farad, das durch 1 Coulomb auf 1 Volt gebracht wird.

900000 el.-st. C. G. S.-Einheiten der Kapazität bilden 1 Mikrofarad, das durch 1 Mikrocoulomb auf 1 Volt gebracht wird.

Wir empfehlen dem Leser die Homogenität der im ersten Kapitel abgeleiteten Formeln zu prüfen, d. h. sich davon zu überzeugen, ob in jeder Formel alle Glieder von derselben Dimension sind. Hierbei hat man in einigen Formeln $[K] = 1$ zu setzen, d. h. anzunehmen, daß K von der nullten Dimension ist. So z. B. in Formel (34) auf S. 75, $K = 1 + 4\pi\gamma$; die Zahl 1 ist das Induktionsvermögen der Luft, das gleich Eins gesetzt ist.

§ 3. Elektrometer. Messung der Elektrizitätsmengen und Potentiale. Apparate, welche zur Messung der Elektrizitätsmengen und Potentiale dienen können, heißen Elektrometer. Elektroskope von relativ einfacher Bauart können nur dann als Elektrometer dienen, wenn sie mit einer Skala verbunden sind, an welcher entlang sich die beweglichen Teile verschieben, und wenn sie zudem graduiert (geeicht) sind, d. h., wenn durch vorherige Untersuchung festgestellt ist, einem wie großen Potentiale jeder Teilstrich der Skala entspricht. Die wichtigsten Elektroskope sind bereits auf S. 34 ff. beschrieben oder erwähnt worden. Der Divergenzwinkel φ der Elektroskopblättchen dient nicht, wie man bisweilen angegeben findet, als Maß für das Potential V, bis zu welchem die Blättchen geladen sind. Die gegenseitige Abstoßung f der Blättchen ist proportional dem Produkt ihrer Ladungen, von denen jede dem Potential V proportional wäre, wenn sich die Kapazität q des ganzen Apparates nicht beim Divergieren der Blättchen ändern würde; außerdem ändert sich f auch noch im Zusammenhange mit φ. Die Untersuchungen von Kolaček haben gezeigt, daß V und φ, falls φ kleiner ist als 18°, durch eine Gleichung von folgender Form miteinander verknüpft sind:

$$V^2 = a\varphi + b\varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

a und b sind hierbei Konstante, welche ein für allemal für das gegebene Elektroskop bestimmt werden können.

Von Elektrometern haben wir bereits die Drehwage (S. 284) und das Kapillarelektrometer (S. 204) eingehend betrachtet; kurz beschrieben haben wir das Quadrantenelektrometer. Wir wollen nunmehr zu einer ausführlicheren Betrachtung verschiedener Elektrometer übergehen, um zu sehen, in welcher Weise dieselben zur Messung von Elektrizitätsmengen und Potentialen verwandt werden.

I. Das Elektrometer von Hankel ist in Fig. 124 abgebildet. Es besteht aus einem Gehäuse, dessen vordere Seite aus Glas ist. Im Innern desselben hängt ein Goldblättchen b zwischen zwei Metallplättchen a und g; letztere sind mit einer Batterie aus 100 bis 200 einfachen, in Reihe geschalteten Elementen aus Cu, Zn und Wasser verbunden und dadurch ungleichnamig elektrisiert. Batterien aus solchen einfachen Elementen werden oft zu verschiedenen Zwecken verwandt:

man stellt sie aus kleinen Gläschen, beispielsweise aus Reagenzgläschen, her, die man reihenweise in runde Öffnungen eines horizontalen Brettes oder Pappstückes hineinsetzt und durch Paraffin befestigt. Hierauf

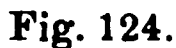


Fig. 124.

füllt man sie mit Wasser und hängt in die benachbarten paarweise bügelförmige (∩) Drähte aus Cu und Zn (Branly nimmt Pt an Stelle des Cu) hinein. Auf das Wasser gießt man eine Schicht von Paraffin und bringt auf letzteres, nachdem es erstarrt ist, noch einige Tropfen Paraffinöl. Anstatt der beschriebenen einfachen Batterie bedient man

sich gegenwärtig meist einer Batterie von hintereinander geschalteten Akkumulatoren (s. u.), da eine solche eine sehr konstante Potentialdifferenz besitzt. Die Mitte der Batterie verbindet man mit der Erde, die Endplatten dagegen mit denjenigen Körpern, die man auf ungleichnamigen Potentialen von gleicher Höhe erhalten will. In unserem Falle werden die Plättchen *a* und *g* derart mit den Endplatten der Batterie verbunden. Mittels einer Schraube *s* läßt sich die Entfernung dieser Plättchen vom Goldblatte *b* variieren. Die Bewegungen des Blättchens werden durch ein Mikroskop beobachtet, dessen Okular mit einer Skala versehen ist. Der Apparat muß mit Hilfe von Elementen, deren elektromotorische Kraft bekannt ist, graduiert sein. Hankel hat dies Elektrometer bei seinen Untersuchungen an pyroelektrischen Kristallen benutzt.

II. Drehwage. Die Beschreibung derselben findet sich auf S. 284. Wir wollen zeigen, wie man sie zur Messung von Elektrizitätsmengen η oder Potentialen V benutzt. Auf S. 288 hatten wir die Formel (8, a) abgeleitet; wir wollen derselben jetzt folgende Form geben:

$$\eta\eta' = 4aC\varphi \sin\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\alpha}{2} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

wo η und η' die Elektrizitätsmengen auf dem festen und den beweglichen Kügelchen sind, a die Länge des Stäbchens, von seinem Aufhängepunkt bis zum Mittelpunkt des Kügelchens gerechnet, C der Torsionskoeffizient des Fadens, den man nach Formel (5, b) auf S. 286 aus Beobachtungen der Torsionsschwingungen der Wage bestimmen kann, α der Drehungswinkel des Stäbchens, $\varphi = \alpha + \beta$ der Torsionswinkel des Fadens, wobei β der Drehungswinkel seines oberen Endes ist.

Mit Hilfe der Drehwage kann man in verschiedenen Fällen Ladungen und Potentiale vergleichen oder messen. Es sei A das feste, B das bewegliche Kügelchen. Betrachten wir einige besondere Fälle.

1. Es werde verlangt, zwei Elektrizitätsmengen η und η_1 miteinander zu vergleichen, die in zwei Fällen, z. B. bei Berührung mit zwei verschiedenen Punkten irgend eines elektrisierten Körpers, auf das Kügelchen A übergegangen sind. Hier sind zwei Fälle möglich.

a) Das Kügelchen B war bereits gleichnamig mit η und η_1 elektrisiert. Offenbar hat man dann außer (14) auch noch die Formel

$$\eta_1\eta' = 4aC\varphi_1 \sin\frac{\alpha_1}{2}\, tg\frac{\alpha_1}{2} \quad \ldots \quad (14, a)$$

Dividiert man (14) durch (14, a), so erhält man das gesuchte Verhältnis $\eta:\eta_1$, ausgedrückt durch die bekannten Größen $\alpha, \varphi, \alpha_1$ und φ_1. Macht man $\alpha_1 = \alpha$, so erhält man

$$\eta:\eta_1 = \varphi:\varphi_1 \quad \ldots\ldots \quad (14, b)$$

b) Das Kügelchen B wird jedesmal in Berührung mit dem Kügelchen A gebracht. In diesem Falle teilt sich die Ladung η in zwei Teile $k\eta$ und $k'\eta$, wo $k + k' = 1$ ist. Formel (14) nimmt jetzt folgende Form an:

$$kk'\eta^2 = 4aC\varphi \sin\frac{\alpha}{2} tg\frac{\alpha}{2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14, c)$$

In Formel (14, a) kommt jetzt auf die linke Seite $kk'\eta_1^2$ zu stehen und man erhält daher das Verhältnis $\eta^2 : \eta_1^2$. Macht man $\alpha_1 = \alpha$, so ist

$$\frac{\eta}{\eta_1} = \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14, d)$$

2. Es soll in absoluten Einheiten die Elektrizitätsmenge η gemessen werden, die unter gegebenen Verhältnissen auf die Kugel A übergegangen war. Kugel B wird durch Berührung mit A elektrisiert. Nimmt man die Dimensionen der Kugeln A und B als bekannt an, so kann man in den Planaschen Tabellen, von denen auf S. 141 die Rede war, die Faktoren k und k' finden. Hat man den Torsionskoeffizienten C bestimmt, so erhält man η aus (14, c) nach der Formel

$$\eta = \sqrt{\frac{4aC}{kk'}\varphi \sin\frac{\alpha}{2} tg\frac{\alpha}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14, e)$$

In dieser Formel muß der Winkel φ in Einheiten ausgedrückt sein, die gleich $57^0 17' 45'' \cdots = 57^0{,}296 \ldots$ sind; man ersieht dies aus der Grundformel $M = C\varphi$, vgl. (5, a), S. 286. Ist in Formel (5, b), S. 286, die Zeit T in Sekunden ausgedrückt, und sind bei Berechnung von K als Einheiten der Länge und Masse das Centimeter und Gramm gewählt und ist endlich a in (14, e) ebenfalls in Centimetern ausgedrückt, so erhält man η in el.-st. C. G. S.-Einheiten.

Von den erforderlichen Korrektionen wegen gegenseitiger Induktion der Kugeln und Einwirkung der die Kugeln umschließenden Hülle war bereits auf S. 288 die Rede.

Nimmt man alle Messungen bei ein und demselben Winkel α vor und berechnet ein für allemal die Größe

$$Q = \sqrt{\frac{4aC}{kk'} \sin\frac{\alpha}{2} tg\frac{\alpha}{2}},$$

so wird η aus der einfachen Gleichung

$$\eta = Q\sqrt{\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14, f)$$

gefunden, wo φ in den erwähnten Winkeleinheiten ausgedrückt ist.

3. Hat man η bestimmt und kennt den Radius R der Kugel A, so kann man auch das Potential V dieser Kugel nach der Formel $V = \eta : R$, folglich auch das Potential der Elektrizitätsquelle bestimmen, mit welcher die Kugel A vorher durch einen genügend langen Draht verbunden war.

III. Das Elektrometer von Kohlrausch stellt eine Vervollkommnung des Dellmannschen Elektrometers dar, in welchem zuerst die Kugel *A* der Drehwage durch ein dem drehbaren Stäbchen ganz nahe gebrachtes Scheibchen ersetzt war. Das Elektrometer von Kohl-

Fig. 125. Fig. 126.



rausch ist in Fig. 125 abgebildet; sein wichtigster Bestandteil gesondert in Fig. 126. Es besteht aus dem Gehäuse *A* mit Doppelwandungen, das auf drei Stellschrauben steht. Als Deckel dient eine Spiegelglasscheibe mit einer Öffnung in der Mitte, durch welche ein längs der Achse der Röhre *B* hinabreichender Faden hindurchgeht, dessen oberes Ende in der Art wie der Faden einer Drehwage befestigt ist. Der Griff *g* und der Zeiger *z*, der sich auf dem geteilten Kreise *K* vom Nullpunkte *o* aus bewegt, dienen dazu, den Drehungswinkel β des oberen Fadenendes zu messen. Am unteren Fadenende ist das Schellackstäbchen *m* (Fig. 126) befestigt und an diesem der horizontale Silberdraht *nn* mit kugelförmigen Enden; letzterer liegt in der Ruhelage, für $\beta = 0$, zu beiden Seiten hart an dem Silberplättchen *aa*, das an der Röhre *c* befestigt

ist. Man kann diese Röhre ein wenig heben und senken, indem man mittels der Schraube *d* auf einen besonderen Hebel wirkt. Ist die Röhre *c* gehoben, so berührt *aa* die Nadel *nn*. Innerhalb *c* befindet sich eine zweite Röhre, längs deren Achse der Draht *r* verläuft, der an ihr durch zwei isolierende Schellackplättchen befestigt ist. Am unteren Ende dieses Drahtes hängt der kleine Ring *r*; das obere Ende des Drahtes *r* ist spiralförmig gerollt und berührt die Brücke *bb* nicht. Hebt man jedoch mit Hilfe des Hebels die innere Röhre, so berührt der Draht jene Brücke. Es sind demnach der Draht *r*, das Plättchen *aa* und die Nadel *nn* im allgemeinen voneinander isoliert, mit Hilfe der Hebel *e* und *d* aber kann man sie zur Berührung bringen.

Innerhalb *A* befindet sich die horizontale geteilte Kreisscheibe K_1; zur Ablesung der Lage, welche die Nadel *nn* inne hat, dient die Lupe *l*.

Man kann den Apparat zum Vergleichen zweier Elektrizitätsmengen η und η_1 gebrauchen. Zu diesem Zwecke dreht man den Griff *g* um 90°, so daß sich die Nadel *nn* senkrecht zu *aa* stellt. Hierauf hebt man beide Röhren und verbindet *r* mit der Elektrizitätsquelle, wobei eine gewisse Elektrizitätsmenge η auf *aa* und *nn* übergeht. Hierauf senkt man beide Röhren und dreht den Griff *g* so lange, bis die Nadel *nn* mit *aa* einen gewissen Winkel α bildet, wobei dann der Zeiger *z* einen gewissen Winkel β mit der Nullstellung bildet. Die Torsion des Fadens ist gleich $\varphi = \alpha + \beta$. Hierauf wiederholt man die Beobachtung bei der zweiten der zu vergleichenden Elektrizitätsquellen, wobei dann auf *aa* und *nn* die Elektrizitätsmenge η_1 übergeht; der Winkel α ist der frühere geblieben, doch ist an Stelle von β der Winkel β_1 getreten, so daß der Torsionswinkel $\varphi_1 = \alpha + \beta_1$ ist. Da die relative Lage der einander abstoßenden Körper *aa* und *nn* in beiden Fällen die gleiche ist, so ist das Moment des Kräftepaares, das auf *nn* wirkt, offenbar proportional dem Produkte der Ladungen auf *aa* und *nn*; diese Ladungen sind proportional η und daher ist das Moment des Kräftepaares proportional η^2. Es ist $\eta^2 = b\varphi = b(\alpha + \beta)$, wo *b* ein Proportionalitätsfaktor ist. Für das gesuchte Verhältnis findet man:

$$\frac{\eta}{\eta_1} = \frac{V}{V_1} = \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi_1}} = \sqrt{\frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta_1}} \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Hier sind V und V_1 die Potentiale der Quellen, sie sind proportional den Ladungen η und η_1, falls α das gleiche bleibt, d. h. die Kapazität unveränderlich ist. Unter Anwendung einer Batterie von Elementen mit bekannter elektromotorischer Kraft kann man das Elektrometer eichen, d. h. die Potentiale V für die verschiedenen α und β bestimmen.

IV. Das Quadrantenelektrometer von W. Thomson (Lord Kelvin). Eine allgemeine Beschreibung dieses wichtigen Apparates war

bereits auf S. 36 gegeben worden; Fig. 10 stellte eine der relativ einfachen Formen desselben dar. Wir erinnern daran, daß seine wesentlichsten Bestandteile die folgenden sind: vier Quadranten, die kreuzweise miteinander in Verbindung stehen, und eine über ihnen oder in

Fig. 127.



ihrem Innern befindliche breite Scheibe, die sogenannte Nadel. Wir wollen die Potentiale der beiden Quadrantenpaare mit V_1 und V_2, das Potential der Nadel mit V bezeichnen.

In Fig. 127 ist ein Querschnitt durch eine der komplizierteren Elektrometerformen dargestellt. Übrigens sind auch hier nicht alle

Teile, die bei den kompliziertesten Formen vorkommen, vorhanden. Wir wollen uns auf kurze Andeutungen beschränken, da die sehr komplizierten Apparate in der Praxis fast gar nicht gebraucht werden. Um die Nadel auf dem konstanten Potential V zu erhalten, hat Thomson dem Apparate die Form einer Leidener Flasche gegeben; es ist ein Glasgefäß, das von außen mit Stanniolstreifen beklebt ist und in seinem Innern ein gewisses Quantum Schwefelsäure, die als innere Belegung dient, enthält. Die Quadranten sind in c und d zu sehen; von der Nadel u geht ein Draht nach oben, an diesem ist ein Spiegelchen befestigt, das nach der Methode der Spiegelablenkung zum Messen der Nadeldrehung dient. Der Draht nebst dem Spiegelchen und der Nadel sind an einem feinen Seidenfaden aufgehängt; bisweilen ist die Aufhängung eine bifilare. Von der Nadel geht ein Draht w aus, an dessen unterem Ende ein dickeres Platinstäbchen hängt, das in die Schwefelsäure taucht. Auf diese Weise nimmt die Nadel das Potential V der Schwefelsäure an, die ihre Ladung durch einen in der Figur fortgelassenen Draht erhält. Mittels einer kleinen Elektrisiermaschine (replenisher), die ebenfalls nicht dargestellt ist, kann man das Potential V vergrößern oder verkleinern. Um V immer auf demselben Werte zu erhalten, benutzt man das Plättchen S, das ebenfalls mit der Schwefelsäure in Verbindung steht. Dasselbe zieht das kleine Scheibchen α an, das am kurzen Arme eines Hebels angebracht ist; der lange Hebelarm δ ist an seinem Ende mit einem horizontalen Faden versehen, dessen Lage mittels der Lupe φ beobachtet wird. Der „replenisher" erhält diesen Faden immer in derselben Stellung, wodurch die Nadel stets auf demselben Potential V erhalten wird. Gegenwärtig braucht man fast ausschließlich eine Batterie von Elementen oder Akkumulatoren, um die Nadel oder die Quadranten auf konstantem Potential zu erhalten.

Da man die Nadel elektrisieren muß, hat man sie an einem Metalldrahte aufzuhängen oder sie metallisch mit der Schwefelsäure zu verbinden. Hierdurch wird die Empfindlichkeit des Apparates in hohem Maße vermindert. Aus diesem Grunde haben Nernst und Dolezalek (1901) einen Apparat konstruiert, in welchem eine kleine Trockensäule mit der Nadel verbunden ist und mit ihr zusammen an einem Quarzfaden hängt. Dieses Elektrometer gibt Ablenkungen von 0,1 mm bei 3 m Skalenabstand, wenn der Potentialunterschied nur 10^{-5} Volt betrug. Indessen stellt die Gewichtsvergrößerung des aufgehängten Systems einen wesentlichen Mangel dar. Himstedt schlug vor, einen versilberten Quarzfaden anzuwenden, der die Elektrizität zur Nadel leiten könne; ein Übelstand ist hierbei die Schwierigkeit, die das Versilbern so äußerst dünner Fädchen bereitet.

Im Jahre 1901 hat Dolezalek ein äußerst einfaches und bequemes Quadrantenelektrometer konstruiert, das von den obigen Mängeln frei

und zugleich äußerst empfindlich ist. Dieses Elektrometer erfreut sich gegenwärtig einer großen Verbreitung. Die sehr leichte Nadel aus zwei Blättchen von sogenanntem Silberpapier (mit einer dünnen Zinnschicht überzogenes Papier) hängt an einem Quarzfaden, dessen Oberfläche durch Eintauchen in eine Lösung von $CaCl_2$, $MgCl_2$, Phosphorsäure oder Kalilauge (es bildet sich dabei durch die Kohlensäure der Luft K_2CO_3) leitend gemacht ist. Die nach dem Eintrocknen der Lösung auf der Fadenoberfläche übrig bleibenden Spuren der hygroskopischen Substanz erhalten jene Oberfläche dauernd feucht, was zur Elektrizitätsleitung hinreicht. Ungeachtet des außerordentlich großen Widerstandes eines solchen Fädchens, der 10^{10} bis 10^{11} Ohm beträgt, ladet sich die Nadel fast momentan, da die Kapazität des Apparates im ganzen 10^{-5} Mikrofarad beträgt. Zum Laden der Nadel kann eine Akkumulatorenbatterie oder eine kleine Trockensäule dienen. Ist die Nadel auf 110 Volt geladen, so gibt eine den Quadranten mitgeteilte Potentialdifferenz von 0,001 Volt eine Ablenkung von 2,4 mm bei einem Skalenabstand von 2 m und einer Fadendicke von 0,009 mm. Die Ablenkungen sind den erzeugten Potentialdifferenzen bis zu Ablenkungen von 200 mm (gegen 0,08 Volt) streng proportional. Die Empfindlichkeit erhöht sich noch bedeutend, wenn man einen dünneren Quarzfaden (bis zu 0,004 mm) anwendet; die Ablenkung kann bis zu 17 mm bei 0,001 Volt gebracht werden.

Fig. 128.

Verschiedenartige Änderungen haben am Quadrantenelektrometer Angot, Branly, Mascart, G. Wiedemann (sein Apparat ist in Fig. 10 auf S. 37 abgebildet), Righi, Hallwachs, Curie, Guglielmo, Edelmann, Becquerel u. a. angebracht.

Eine besondere Abänderung hat man in dem Elektrometer mit zylindrischen Quadranten, zwischen denen sich eine an ihren Enden mit zylindrisch gebogenen Platten versehene Nadel dreht. In Fig. 128 sind diese Quadranten A, B, C, D und die Nadel E schematisch dargestellt.

Die genaue Theorie des Quadrantenelektrometers ist sehr kompliziert. Entwickelt haben dieselbe Maxwell, Hallwachs, Hopkinson, Hartwich, Ayrton, Perry und Sumpner, Chauveau, Ohrlich (1903), Walker (1903) u. a. Wir wollen uns darauf beschränken, die allgemein übliche Formel herzuleiten, doch ist diese Ableitung keineswegs streng. Es mögen AB und CD die zwei Quadrantenpaare bezeichnen, V_1 und V_2 deren Potentiale; wir nehmen an, es sei $V_1 > V_2$ und es habe sich die Nadel, deren Potential V ist, um den Winkel α nach der Seite desjenigen Quadrantenpaares hingedreht, dessen Potential V_2 ist. In diesem Falle ist das tordierende Moment M der elektrischen

Kräfte gleich $M = C\varphi$ bei unifilarer und $M = C \sin\varphi$ bei bifilarer Aufhängung. Bei kleinen Winkeln kann man den Sinus durch den Winkel selbst ersetzen, weshalb wir allgemein

$$M = C\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

setzen. Die Ladung verteilt sich an der Nadeloberfläche derart, daß ihr größerer Teil auf die über den Quadranten CD befindliche Oberfläche übergeht. Es seien S_1 und S_2 Teile der Nadeloberfläche, welche sich über den Quadranten A und B befinden. Es ist dann offenbar für alle Stellungen der Nadel

$$S_1 + S_2 = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16,\text{a})$$

Vernachlässigt man die Randstreifen, so kann man annehmen, daß Nadel und Quadranten zusammengenommen zwei ebene Kondensatoren bilden, deren Oberflächen S_1 und S_2 sind; sie befinden sich auf den Potentialdifferenzen $V - V_1$ und $V - V_2$. Mit Q_1 und Q_2 bezeichnen wir die Kapazitäten dieser Kondensatoren. Auf Grund der Formel (65, b), S. 129, ist die Energie W des ganzen Systems gleich

$$W = \tfrac{1}{2} Q_1 (V - V_1)^2 + \tfrac{1}{2} Q_2 (V - V_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (16,\text{b})$$

Nach Formel (61) auf S. 125, in welcher $K = 1$ ist, haben wir

$$Q_1 = \frac{S_1}{4\pi d}, \qquad Q_2 = \frac{S_2}{4\pi d},$$

wo d die Entfernung der Nadel von den Quadranten ist.

In Wirklichkeit müssen die Ausdrücke komplizierter sein, besonders wenn die Quadranten die Nadel umgeben, jedoch kommen wir immerhin der Wahrheit nahe, wenn wir annehmen, daß Q_1 und Q_2 proportional S_1 und S_2 sind. Somit setzen wir

$$Q_1 = a S_1, \qquad Q_2 = a S_2,$$

wo a eine Konstante ist Setzt man dies in (16, b) ein, so erhält man

$$W = \frac{a S_1}{2} (V - V_1)^2 + \frac{a S_2}{2} (V - V_2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Für das tordierende Moment M haben wir die Formel (81, b), S. 154,

$$M = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Dreht sich die Nadel um den unendlich kleinen Winkel $d\alpha$, so ändert sich die Energie W um den Betrag

$$d W = \frac{a}{2} (V - V_1)^2 d S_1 + \frac{a}{2} (V - V_2)^2 d S_2.$$

Nun gibt aber (16, a) das Resultat $d S_1 + d S_2 = 0$; nimmt man ferner an, daß der Rand der Nadel dem die Quadranten begrenzenden

Kreise parallel ist (vgl. Fig. 128, S. 321), so kann man dS_1 und dS_2 proportional $d\alpha$ setzen, d. h. $dS_2 = cd\alpha$ und $dS_1 = -cd\alpha$ schreiben.

Auf diese Weise erhält man für M den Ausdruck

$$M = -\frac{ac}{2}\{(V-V_1)^2-(V-V_2)^2\}$$

oder

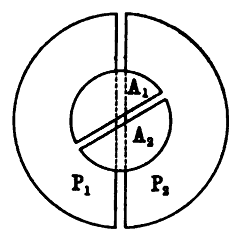
$$M = ac(V_1-V_2)\left(V-\frac{V_1+V_2}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (16) und bezeichnet $ac:C$ mit h, so ist

$$\alpha = h(V_1-V_2)\left(V-\frac{V_1+V_2}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Hier kann α auch durch jede andere Größe, welche die Nadelablenkung mißt und mit hinreichender Genauigkeit dem Winkel α proportional ist, ersetzt werden, beispielsweise durch die Zahl s der Teilstriche der Skala, falls man sich der subjektiven oder objektiven Methode der Winkelmessung mit Hilfe einer Skala bedient. Selbstverständlich wird hierbei der Zahlenwert des Faktors h ein anderer.

Fig. 129.



An Formel (20) hat man verschiedene Korrekturen angebracht. So hat Hallwachs unter anderem die Potentialdifferenzen berücksichtigt, welche auftreten müssen, wenn die Quadranten und die Nadel aus verschiedenen Stoffen bestehen, wenn diese oder jene Teile des Apparates geerdet sind usw. Den Fall einer bifilaren Aufhängung hat Hartwich untersucht und gezeigt, daß in diesem Falle die Formel (20) durch einen komplizierteren Ausdruck ersetzt werden muß. Gouy hat gezeigt, daß Formel (20) auch für den Fall ihre Gültigkeit verliert und durch eine andere ersetzt werden muß, daß V_1 und V_2 groß im Vergleiche zu V sind.

Blondlot und Curie haben, gestützt auf die Arbeit von Gouy, ein Elektrometer konstruiert, das in Fig. 129 schematisch dargestellt ist. Die Nadel A_1 und A_2 besteht hier aus zwei voneinander isolierten Teilen; von den zwei Paar eiserner magnetisierter Platten P_1 und P_2 befindet sich das eine unterhalb, das andere oberhalb der Nadel $A_1 A_2$. Die Magnetisierung hat, wie wir sehen werden, den Zweck, die Schwingungen der Nadel schnell zu dämpfen. Sind V_1, V_2, V_3 und V_4 die Potentiale der Körper A_1, A_2, P_1 und P_2, so erhält man für den Ablenkungswinkel α der Nadel folgenden Ausdruck

$$\alpha = K(V_1-V_2)(V_3-V_4) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

wo K eine Konstante bedeutet. Verbindet man A_1 mit P_1 und A_2 mit P_2, so ist

$$\alpha = K(V_1 - V_2)^2 \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

Gehen wir nunmehr zu den Methoden für die Anwendung des Quadrantenelektrometers zur Messung oder genauer gesagt, zur Vergleichung verschiedener Potentiale oder Potentialdifferenzen über. Diese Methoden sind insbesondere von Hallwachs eingehend studiert worden. Man hat drei derartige Methoden voneinander zu unterscheiden. Bemerkt sei, daß sich Formel (20) in zwei besonderen Fällen vereinfacht. Ist $V_1 = - V_2$, so ist

$$\alpha = 2 h V V_1 \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

Ist V sehr groß im Vergleiche zu V_1 und V_2, so kann man

$$\alpha = h(V_1 - V_2) V \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

setzen.

1. Mit Hilfe einer Batterie (S. 312), deren Mitte zur Erde abgeleitet ist, macht man $V_1 = - V_2$. Den zu untersuchenden Körper, beispielsweise den einen Pol eines Elements (oder einer Batterie), dessen anderer Pol geerdet ist, verbindet man mit der Nadel. Dann gibt Formel (23) den Ausdruck

$$V = k\alpha \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

wo der Zahlenwert des Koeffizienten k bestimmt wird, wenn man α mißt, während V bekannt, z. B. gleich der elektromotorischen Kraft eines wohlbekannten Elementes ist.

2. Man erhält die Nadel auf konstantem, möglichst hohem Potentiale V, wozu man sich der Methode von W. Thomson (Elektrometer von der Form einer Leidener Flasche) bedient oder die Nadel mit dem Pol einer aus mehreren 100 Gläschen bestehenden Batterie verbindet. Die Quadranten verbindet man mit den Punkten, deren Potentialdifferenz $(V_1 - V_2)$ man zu messen wünscht. Formel (24) gibt

$$V_1 - V_2 = k\alpha \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

3. Man verbindet ein Quadrantenpaar mit der Nadel; dann ist $V = V_1$ und Formel (20) gibt

$$\alpha = \tfrac{1}{2} h (V_1 - V_2)^2 \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

Die gesuchte Differenz $V_1 - V_2$ wird durch einen Ausdruck von der Form

$$V_1 - V_2 = k\sqrt{\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (28)$$

gegeben. Erdet man das andere Quadrantenpaar, so ist $V_2 = 0$ und das gesuchte Potential wird durch eine Formel von folgender Gestalt geliefert:

$$V = k\sqrt{\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (29)$$

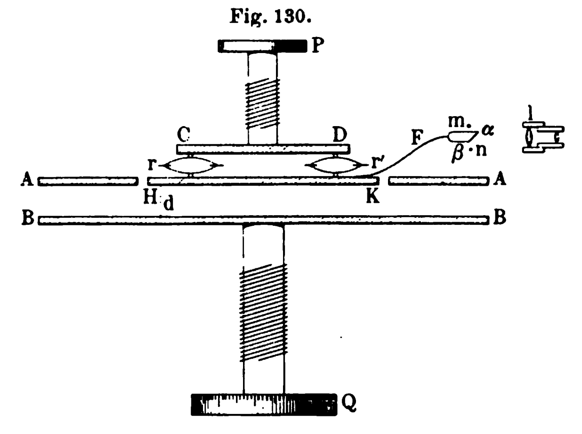
Diese letztere Methode hat augenscheinlich große Vorzüge.

V. W. Thomsonsches (Lord Kelvin) absolutes Elektrometer. Dieser Apparat erlaubt die Potentiale in absoluten el.-st. Einheiten zu messen. Er beruht auf der Messung der gegenseitigen Anziehung f zweier einander paralleler ebener Platten, welche sich auf den Potentialen V und V_1 befinden. Für die Größe dieser Anziehung hatten wir die Formel (57) auf S. 117 gefunden, die für $K = 1$ (Luft) folgende Form annimmt

$$f = \frac{(V - V_1)^2 S}{8 \pi d^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

wo d der Plattenabstand, S derjenige Teil der Plattenoberfläche ist, auf welchen die Kraft f einwirkt. Formel (30) gilt für unendlich große Platten, denn sie war unter der Voraussetzung einer gleichmäßigen Elektrisierung dieser Platten hergeleitet worden. Sie ist auch auf einen kleinen, zentralen Teil der Platte anwendbar, da, wie wir wissen,

Fig. 130.



auf einem solchen Teile die Elektrizität fast völlig gleichmäßig verteilt ist. Auf S. 117 war bereits die Rede von einer möglichen praktischen Anwendung der Formel (30); aus einer von zwei parallelen, in horizontaler Stellung befindlichen Platten wird ein Loch herausgeschnitten, welches durch eine an einer Feder oder sonstwie aufgehängte Scheibe fast vollständig ausgefüllt wird. Auf diese Platte nun ist die Formel (30) anwendbar. Der sie umgebende Plattenteil wird, wie bereits erwähnt, Schutzring genannt.

In Fig. 130 sind die Hauptbestandteile des absoluten Elektrometers im Schema dargestellt. AA und BB sind zwei einander parallele Scheiben; BB kann mit Hilfe der Schraube Q gehoben oder gesenkt werden. HK ist eine bewegliche Scheibe, deren Dimensionen im Vergleiche zu BB stark vergrößert dargestellt sind. Ihr Flächeninhalt ist S; sie hängt durch Federn an der Platte CD, die mit Hilfe der Schraube P gesenkt oder gehoben werden kann. Um zu be-

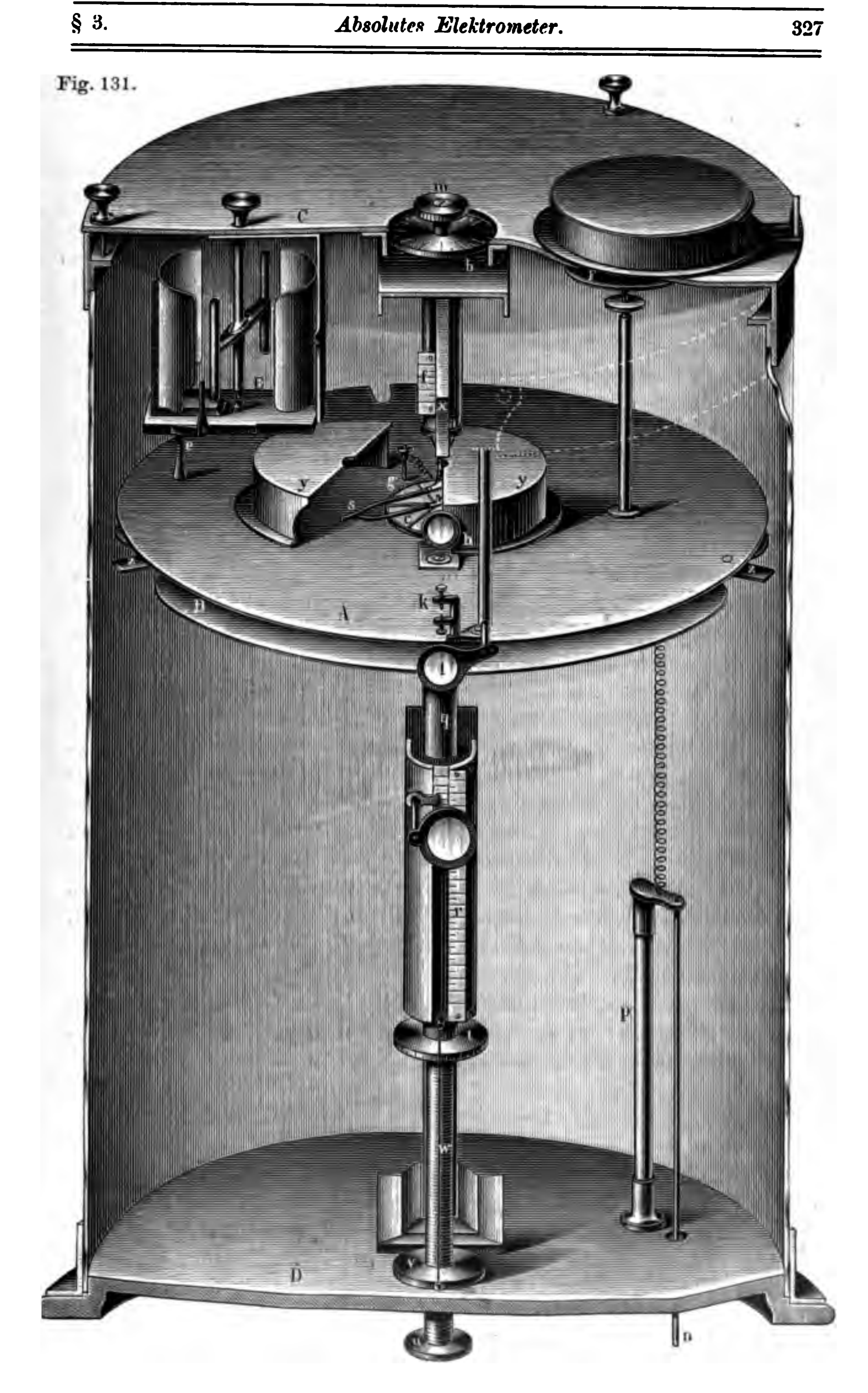
stimmen, ob die Scheibe HK genau in der Ebene des Schutzringes AA liegt, ist an ihr ein kleines Gäbelchen mit horizontalem Drahtstückchen $\alpha\beta$ befestigt, das genau in der Mitte zwischen den beiden Punkten m und n sich befinden muß; die Lage des Drähtchens wird mittels der Lupe l beobachtet. Man legt auf die Scheibe HK ein kleines Gewichtsstück p; die Scheibe senkt sich hierbei. Nun bestimmt man den Winkel φ, um welchen man die Schraube P drehen muß, um HK wieder bis in die Ebene des Schutzringes zu heben und wiederholt dieselbe Manipulation für eine ganze Reihe verschiedener Werte von p. Auf diese Weise erhält man eine empirische Abhängigkeit zwischen p und φ in Form einer Tabelle oder, bei graphischer Darstellung, in Form einer Kurve. Nehmen wir an, es befinden sich $AHKA$ und BB auf den Potentialen V und V_1; dann werden HK und BB einander anziehen, HK wird sich senken und man muß P um einen gewissen Winkel drehen, um HK in die frühere Stellung zurückzubringen. Kennt man φ, so kann man unter Benutzung der Tabelle oder der erwähnten Kurve das entsprechende Gewicht p finden, das dann der gesuchten Anziehungskraft zwischen HK und BB gleich ist. Dann gibt Formel (30)

$$V - V_1 = d\sqrt{\frac{8\pi f}{S}} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (31)$$

Drückt man f in Dynen aus, d in Centimetern und S in Quadratcentimetern, so erhält man die Differenz $V - V_1$ in el.-st. C. G. S.-Einheiten.

Der Thomsonsche Apparat, der in Fig. 131 (a. f. S.) abgebildet ist, hat eine derartige Einrichtung, daß man das System AHK auf einem gewissen konstanten Potentiale V erhalten kann. Zu diesem Zwecke hat der ganze Apparat die Form einer Leidener Flasche, ähnlich wie das vorhin beschriebene Quadrantenelektrometer (S. 318). Der Glaszylinder (Fig. 131) ist von innen und außen bis zu der Höhe der Scheiben A und B mit Stanniol beklebt, was aus der Figur nicht ersichtlich ist. Die Scheibe B kann man durch Drehung an der unteren Schraube WU heben und senken; die Größe dieser Verschiebung wird an der mit einem Nonius verbundenen Skala r abgelesen; zur Ablesung dient eine Lupe. Die Scheibe B ist durch einen Draht mit einem isolierten Metallstab n verbunden, der durch ein Glasstäbchen p gestützt wird. Im Innern des Schutzringes A befindet sich eine Aluminiumplatte, deren Oberflächeninhalt mit S bezeichnet sein möge. Sie hängt an drei Federn, die an einem vertikalen Stabe befestigt sind; letzteren kann man durch Drehung einer Schraube m heben oder senken; diese Schraube ist mit Teilstrichen b zur Messung des oben erwähnten Winkels φ versehen. Die Scheibe ist mit dem Schutzringe A durch einen sehr dünnen spiralig gewundenen Draht verbunden. An der Scheibe

Fig. 131.



selbst ist ein horizontaler Faden befestigt ($\alpha\beta$ in Fig. 130): die Linse h entwirft ein Bild dieses Fadens an der Stelle, wo sich die einander zugekehrten Spitzen k befinden. Man blickt nun durch die Lupe l und dreht die Schraube m so, daß man hierbei das Fadenbild genau zwischen die Spitzen k bringt; es befindet sich dann die Aluminiumplatte in der Ebene des Schutzringes. Die Scheibe A ist mit der inneren Belegung verbunden, auf deren Potential V sich also auch die bewegliche Scheibe befindet. Zur Änderung des Potentials im einen oder anderen Sinne dient der „replenisher" CC; auf ein und demselben Werte wird es durch eine Vorrichtung erhalten, die wir bereits bei Beschreibung des Quadrantenelektrometers kennen gelernt haben. Bemerkt sei noch, daß ein Metallstäbchen die horizontale Scheibe F trägt, die ein kleines Plättchen anzieht; die Lage des letzteren, oder genauer gesagt, des mit ihm verbundenen Fadens wird durch eine rechts oberhalb des Apparatdeckels befindliche Lupe beobachtet.

Dreht man den Schraubenkopf des „replenisher" nach der einen oder anderen Seite, so vergrößert oder verkleinert man die Ladung, also auch das Potential V im Innern des Apparates. Beobachtet man gleichzeitig durch die Lupe den erwähnten Faden und bringt ihn in die gehörige Lage, so erteilt man hierdurch dem Potential V einen bestimmten konstanten Wert.

Man kann dies Elektrometer in verschiedener Weise dazu benutzen, den absoluten Wert des Potentials irgend eines Körpers oder der Potentialdifferenz zweier Punkte oder zweier Körper zu finden. Beachten wir, daß S in Formel (31) bekannt ist, f nach der oben angegebenen Methode erhalten wird. Die Größe d, den Abstand der Scheiben A und B voneinander zu finden, ist aber recht schwer und man muß daher die Messung derart anstellen, daß die gesuchte Größe durch die Differenz $d_1 - d_2$ zweier Werte von d gegeben wird, d. h. durch den Betrag, um welchen sich die Scheibe B hebt oder senkt, während man die Messungen vornimmt; diesen Betrag kann man sehr genau an der Skala r ablesen.

Nehmen wir an, es sei das Potential V_1 irgend einer Elektrizitätsquelle zu messen. Man verbindet dann diese Quelle mit der Scheibe B (mittels des Stäbchens n) und mißt die Kraft f. Es ist dann

$$V - V_1 = d_1 \sqrt{\frac{8\pi f}{S}} \quad \ldots\ldots \quad (31, a)$$

Hierauf verbindet man B mit der Erde, verschiebt, ohne die Schraube m zu berühren, d. h. unter Beibehaltung des früheren φ und also auch f, die Scheibe B um so viel, daß die bewegliche Scheibe abermals in die Ebene des Schutzringes zu liegen kommt. Man hat dann in (31, a) anstatt V_1 den Wert Null einzusetzen und anstatt d_1 einen gewissen anderen Wert d_2:

$$V = d_2 \sqrt{\frac{8\pi f}{S}}.$$

Substituiert man diesen Ausdruck in (31, a), so erhält man

$$V_1 = (d_2 - d_1) \sqrt{\frac{8\pi f}{S}} \quad \dots\dots\dots \quad (32)$$

Um die Potentialdifferenz zweier Punkte zu erhalten, verbindet man zuerst den einen und dann den anderen mit dem Stäbchen n und sucht zwei derartige Lagen der Scheibe B auf, d. h. solche Werte d_1 und d_2, denen ein und dieselbe Stellung der Schraube m entspricht, also auch der gleiche Wert der Kraft f. In diesem Falle gelten die Gleichung (31, a) und die Gleichung

$$V - V_2 = d_2 \sqrt{\frac{8\pi f}{S}},$$

dieselben ergeben

$$V_1 - V_2 = (d_2 - d_1) \sqrt{\frac{8\pi f}{S}} \quad \dots\dots \quad (32, a)$$

Maxwell hat gezeigt, daß die Gleichungen (32) und (32, a) genauer werden, wenn man in ihnen für S das arithmetische Mittel aus dem Flächeninhalt der beweglichen Scheibe und dem Flächeninhalte der Öffnung einsetzt, in welcher sich diese Scheibe befindet.

Abänderungen des beschriebenen Elektrometers stellen zwei weitere Apparate dar, die W. Thomson als „transportables Elektrometer" und als „Long-range-Elektrometer" bezeichnet hat.

VI. Das Kapillarelektrometer von Lippmann ist bereits auf S. 204 beschrieben worden.

VII. Die Lanesche Maßflasche. Dieser Apparat kann zur angenäherten Bestimmung des Verhältnisses der Elektrizitätsmengen E dienen, welche bei einer Reihe nacheinander ausgeführter Versuche aus einer Elektrizitätsquelle P, z. B. dem Konduktor einer Elektrisiermaschine zu irgend einem zu ladenden Körper Q, beispielsweise einer Leidener Flasche, übergehen. Die Maßflasche wird in den Weg der Elektrizitätsströmung, also zwischen P und Q, gestellt. Sie setzt in den Stand, die hindurchströmende Elektrizitätsmenge in angenähert gleiche Teile η zu teilen und zu bestimmen, wie viele derartige Teile von P nach Q übergegangen sind. Die Lanesche Flasche ist in Fig. 132 abgebildet. Sie besteht aus einer kleinen Leidener Flasche, deren äußere Belegung durch einen Draht mit der Kugel c verbunden ist. Die Hülse, innerhalb welcher sich das die Kugel c tragende Stäbchen verschieben läßt, ist mit einer Millimeterteilung versehen, an welcher man die Entfernung der Kugeln c und d voneinander ablesen kann. Um die Elektrizitäts-

menge E, welche von P nach Q übergegangen ist, zu messen, verbindet man die Quelle P mit der Kugel d, die Kugel c aber mit Q, wobei die Maßflasche isoliert, beispielsweise auf eine Glasplatte gestellt sein muß. Aus der Elektrizitätsquelle P strömt Elektrizität nach d über und ladet die Flasche; die gleiche Elektrizitätsmenge geht von der äußeren Belegung nach Q über. Hat sich in der Flasche eine gewisse Elektrizitätsmenge η angesammelt, so entladet sie sich, wobei zwischen d und c ein Funke auftritt; ist abermals die Elektrizitätsmenge η von P nach d und von c nach Q übergegangen, so tritt ein zweiter Funke auf usw. Die Anzahl der zwischen d und c auftretenden Funken gibt an, wie viele Elektrizitätsmengen η nach Q übergegangen sind und kann daher als Maß für die gesamte Elektrizitätsmenge E dienen. Durch Annäherung von c an d kann man die als Maßeinheit dienende Elektrizitätsmenge η vermindern. Zu beachten ist, daß sich in der Flasche ein Ladungsrest bildet und man daher die ersten Funken nicht mitzählen darf. Spielt die Erde selbst die Rolle des Körpers Q, so braucht die Maßflasche nicht geerdet zu werden.

Fig. 132.



VIII. Verschiedene Apparate und Methoden zur Messung der Größen η und V. Im Kapitel über die Entladung der Elektrizität werden wir sehen, daß die Länge δ des Funkens unter anderem von der Potentialdifferenz V der Körper abhängt, zwischen denen die Entladung vor sich geht. Bestimmt man ein für allemal für Elektroden von bestimmter Form und Größe die Funkenlänge δ innerhalb der Luft und die zugehörige Potentialdifferenz V, so kann man dann umgekehrt, indem man δ mißt, den zugehörigen Wert von V bestimmen. Um eine Vorstellung von den hierbei vorkommenden Zahlenwerten zu geben, wollen wir erwähnen, daß man in Luft eine Funkenlänge von $\delta = 1$ mm zwischen Kugeln von 2,5 mm Radius erhält bei einer Potentialdifferenz V von ungefähr 4700 Volt; für $\delta = 5$ mm ist V etwa gleich 15000 Volt und für $\delta = 10$ mm ist V nahezu gleich 20000 Volt. Die Funkenstrecke δ wächst schneller als die Potentialdifferenz V.

Von den Elektrometern, welche in diesem Paragraphen keine Beschreibung gefunden haben, seien noch einige erwähnt.

Lippmann hat ein absolutes Kugelelektrometer konstruiert, welches darauf beruht, daß zwei voneinander isolierte Kugelhälften, welche sich auf dem Potential V befinden, einander mit einer Kraft $F = \frac{1}{8} V^2$ abstoßen.

Harris hat bereits im Jahre 1834 ein Gewichtselektrometer konstruiert, in welchem die Anziehung zweier Scheiben gemessen wurde; dieser Apparat ist ein Vorläufer des absoluten Elektrometers von W. Thomson.

Riess hat 1855 ein Sinus-Elektrometer konstruiert, das einigermaßen an das oben beschriebene Elektrometer von Kohlrausch erinnert. Den beweglichen Teil bildet hier eine Magnetnadel; die elektrische Abstoßung wird durch die Richtkraft des Erdmagnetismus kompensiert. Einen ähnlichen Apparat hat Kohlrausch (1853) konstruiert.

Bichat und Blondlot haben (1886) ein absolutes Elektrometer konstruiert, das sehr gute Resultate lieferte. Es beruht auf der Wechselwirkung zweier Zylinder, von denen der eine zum Teil in den anderen hineinragt.

Wilson (1903) hat ein sehr empfindliches Goldblattelektrometer konstruiert, wo die Bewegungen des Goldblattes mit Hilfe eines mit mikrometrischer Skala versehenen Mikroskops beobachtet werden; 1 Volt gibt eine Ablenkung von 200 Skalenteilen.

In neuerer Zeit ist eine Reihe von Apparaten entstanden, die man als elektrostatische Voltmeter bezeichnet und die zur Messung von Wechselströmen, wie sie in der Technik vorkommen, sowie von Strömen hoher Frequenz dienen.

Von ersteren wollen wir den Apparat von Hartmann und Braun nennen; von letzteren das Voltmeter von Ebert und Hoffmann.

§ 4. Messung von Kapazitäten. Die Kapazität q eines Leiters ist mit seiner Ladung η und seinem Potential V durch die Gleichung

$$q = \frac{\eta}{V} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33)$$

verknüpft. In el.-st. C.G.S.-Einheiten ist die Kapazität einer Kugel in Luft numerisch gleich ihrem Radius; die Kapazität eines ebenen Kondensators ist gleich, vgl. (56, a), S. 116,

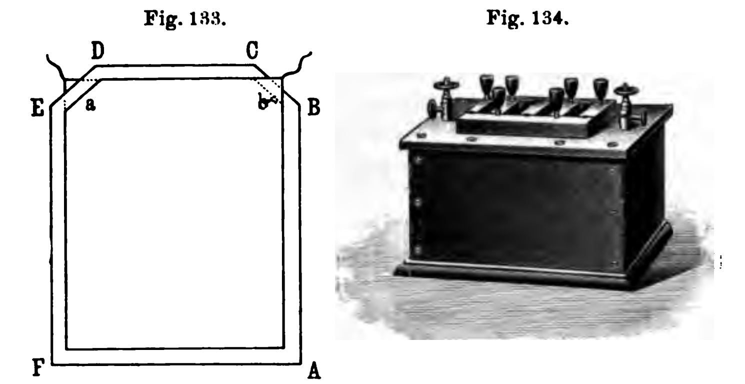
$$q = \frac{SK}{4\pi d} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (33, a)$$

Ein Mikrofarad ist gleich 900000 el.-st. C.G.S.-Einheiten der Kapazität. Hieraus folgt, daß ein Mikrofarad gleich ist der Kapazität einer in Luft befindlichen Kugel, deren Radius gleich 9 km ist. Die Kapazität eines ebenen Luftkondensators ($K = 1$), dessen runde Platten den Abstand $d = 1$ mm haben, ist gleich einem Mikrofarad, wenn der Radius seiner Platten 6 m beträgt.

In der Praxis werden Etalons der Kapazität gebraucht; dieselben sind in besondere Kästen eingeschlossen und könnten daher Kapazitätskästen oder Kapazitätsmagazine genannt werden. Man

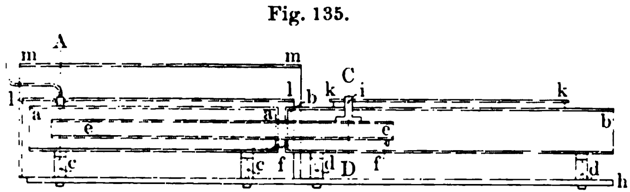
stellt die Kapazitätsetalons aus viereckigen Stanniolblättern her, zwischen die man dünne Glimmerblättchen *ABCDEF* (Fig. 133) legt. Von den Stanniolblättern sind abwechselnd die linken (*a*) und rechten (siehe die punktierte Linie *b*) Ecken abgeschnitten. Dies erlaubt eine bequeme Verbindung erstens aller paarzahligen Blätter, andererseits aller unpaarzahligen. Die Gesamtoberfläche jeder von diesen beiden Gruppen bildet eine der beiden, sehr nahe beieinander befindlichen Kondensatoroberflächen. In einem relativ kleinen Kästchen befindet sich ein auf diese Weise hergestelltes Mikrofarad. Boity hat Kapazitätsetalons von sehr kleinen Dimensionen hergestellt, indem er versilberte Glimmerplatten anwandte. In billigeren Kapazitäten ersetzt man den Glimmer durch paraffiniertes Papier. Ein Kapazitätskasten oder Magazin enthält Etalons von verschiedener Kapazität, die derart gewählt sind, wie die Gewichtsstücke für eine Wage, also beispielsweise 0,1 — 0,2 — 0,2 — 0,5 usw. Mikro-

Fig. 133. Fig. 134.



farads. Eine von den zusammengesetzten Platten jedes der Etalons wird gewöhnlich mit einem gemeinsamen Metallstreifen, der sich auf dem Kastendeckel befindet, verbunden; die anderen zusammengesetzten Platten werden mit einzelnen Streifen verbunden, zwischen welche Metallstöpsel eingesetzt werden können. Auf diese Weise kann man die

Fig. 135.



im Kasten enthaltenen Kapazitäten in verschiedener Weise kombinieren. Fig. 134 zeigt einen Kasten, welcher fünf Kapazitätenetalons enthält.

Die Kapazitäten, welche ein solches „Magazin“ gibt, können offenbar nur sprungweise geändert werden, etwa um 0,01 Mikrofarad.

W. Thomson hat einen Kondensator konstruiert, Fig. 135 (Sliding cylindrical condenser), der eine kontinuierliche Änderung der Kapazität ermöglicht. Seine Hauptbestandteile sind zwei hohle, sehr nahe beieinander befindliche Zylinder *aa* und *bb*, von denen der eine gewissermaßen die Verlängerung des anderen bildet. In ihrem Inneren verschiebt sich ein dritter Zylinder *ee* in der Richtung der gemeinsamen Achse. Die Zylinder *ll* und *mm* schützen den linken Teil gegen Außenwirkungen. Veränderlich ist die Kapazität des zylindrischen Kondensators (S. 121), der von den Zylindern *bb* und *ee* gebildet ist. Die Größe der Verschiebung wird an einer Skala *kk* abgelesen. Nernst hat ebenfalls einen Kondensator mit kontinuierlich veränderlicher Kapazität konstruiert; derselbe bildet einen Teil des von ihm zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten von Flüssigkeiten (s. u.) konstruierten Apparates.

Man kann die Methoden der Kapazitätsmessung in Gruppen einteilen. Erstens gibt es Methoden zur unmittelbaren Messung einer gegebenen Kapazität in absoluten Einheiten. Ferner kann man zwei Kapazitäten miteinander vergleichen. Ist der absolute Wert einer von ihnen bekannt, so läßt sich hierbei auch die zweite ihrem absoluten Werte nach finden. Man muß im Auge behalten, daß man in einer ganzen Reihe von Fällen die Kapazität eines einzelnen Leiters oder die Kapazität eines Kondensators nach den auf S. 116 u. 124 entwickelten Formeln berechnen kann, wenn seine Dimensionen bekannt sind.

Es existiert eine sehr große Zahl von Methoden zur Bestimmung oder Vergleichung von Kapazitäten. Bei der Beschreibung dieser Methoden müssen wir, wenn wir alles hierher gehörige an dieser Stelle behandeln wollen, von Erscheinungen sprechen und Apparate erwähnen, die noch nicht von uns betrachtet worden sind. Übrigens sind sie fast alle aus der elementaren Physik bekannt. Wir wollen die Methoden zur Vergleichung zweier Kapazitäten und die Methoden zur Bestimmung des absoluten Wertes einer gegebenen Kapazität gesondert betrachten.

I. Methoden zur Vergleichung zweier Kapazitäten. Der erste, welcher die Kapazitäten verschiedener Körper untereinander verglichen hatte, war Cavendish (1773). Aber seine Arbeiten über diese Frage sind, wie bereits erwähnt, bei seinen Lebzeiten nicht publiziert worden und wurden erst im Jahre 1879 durch Maxwell ediert. Wir wollen auf eine Betrachtung der geistvollen Methoden von Cavendish nicht eingehen, vielmehr zu den neueren Methoden übergehen.

1. Betrachten wir vor allen Dingen die Methode, welche auf der Anwendung eines Elektrometers beruht: die Angaben des letzteren können als Maß des Potentials dienen, bis zu welchem es selbst, also auch jeder mit ihm verbundene Leiter, geladen ist. Nehmen wir an,

es könne die Kapazität des Elektrometers selbst gegenüber den Kapazitäten q_1 und q_2 der Körper A und B vernachlässigt werden; das Verhältnis $q_1 : q_2$ wird gesucht. Man verbindet den Körper A mit dem Elektrometer und elektrisiert ihn, bis das Elektrometer das Potential V_1 anzeigt. Die Ladung η des Körpers A ist gleich $\eta = q_1 V_1$. Man verbindet nun mit A noch den Körper B, wobei ihr Potential V_2 wird. Es ist dann $\eta = (q_1 + q_2) V_2$. Diese beiden Ausdrücke für η geben die Relation $q_1 V_1 = (q_1 + q_2) V_2$ und hieraus folgt

$$q_2 = \frac{V_1 - V_2}{V_2} q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

2. Darf die Kapazität q_e des Elektrometers C nicht vernachlässigt werden, so hat man zuerst das Verhältnis $q_e : q_1$ zu finden. Man verbindet A mit C und bringt beide auf das Potential V. Auf A befindet sich die Elektrizitätsmenge $\eta = q_1 V$; man entladet C und verbindet es darauf abermals mit A, wobei es jetzt das Potential V_1 anzeigt. Es ist dann $\eta = (q_1 + q_e) V_1$; aus der Gleichung $q_1 V = (q_1 + q_e) V_1$ ergibt sich

$$q_e = \frac{V - V_1}{V_1} q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34, a)$$

Man fügt jetzt den Körper B hinzu und erhält das Potential V_2, es ist also $\eta = (q_1 + q_2 + q_e) V_2$. Aus der Gleichung $(q_1 + q_e) V_1 = (q_1 + q_2 + q_e) V_2$ erhält man

$$q_2 = \frac{V_1 - V_2}{V_2} (q_1 + q_e).$$

Substituiert man hierein (34, a), so erhält man

$$q_2 = \frac{V(V_1 - V_2)}{V_1 V_2} q_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34, b)$$

Eine ähnliche Methode hat Angot zur Kapazitätsbestimmung verschiedener Körper, sowie zur Prüfung verschiedener theoretischer Formeln angewandt, beispielsweise der Formeln für die Kapazität einander berührender Kugeln.

3. Um die Kapazität q eines Kondensators D (Fig. 136 a. f. S.) zu bestimmen, verbindet man hintereinander die vier Kondensatoren A, B, C, D; die Kapazitäten q_1, q_2 und q_3 der ersten drei von ihnen sind bekannt und außerdem kann eine von diesen Kapazitäten, beispielsweise q_3, nach Belieben geändert werden. Die Punkte a und b verbindet man mit den Polen einer Batterie P, die mit einem Unterbrecher K versehen ist; die Punkte c und d verbindet man mit dem Elektrometer E. Hierauf wählt man die Kapazität q_3 derart, daß das Elektrometer E beim Schließen von K keine Elektrisierung anzeigt. In diesem Falle befinden sich c und d auf demselben Potential, das wir mit V

bezeichnen wollen, während mit V_1 und V_2 die Potentiale an den Polen der Batterie bezeichnet sein mögen. Die Ladungen der Kondensatoren A und B, sowie von C und D müssen offenbar untereinander gleich sein. Daher erhält man folgende beide Gleichungen:

$$q_3(V_2 - V) = q_2(V_1 - V) \quad \text{und} \quad q(V_2 - V) = q_1(V_1 - V).$$

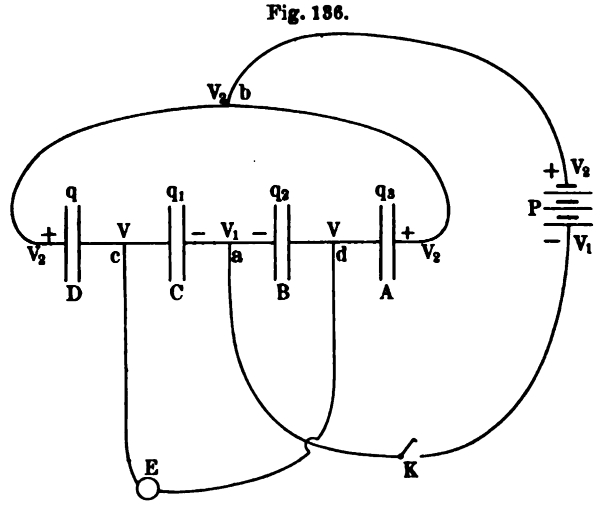
Hieraus folgt $q : q_3 = q_1 : q_2$, also

$$q = \frac{q_1 q_3}{q_2} \quad \text{. . . . .} \quad (35)$$

Die Kapazitäten der vier Kondensatoren bilden eine geometrische Progression.

4. Entladet man einen Kondensator durch die Wickelung eines Galvanometers, so erhält die Magnetnadel einen momentanen Stoß

Fig. 136.

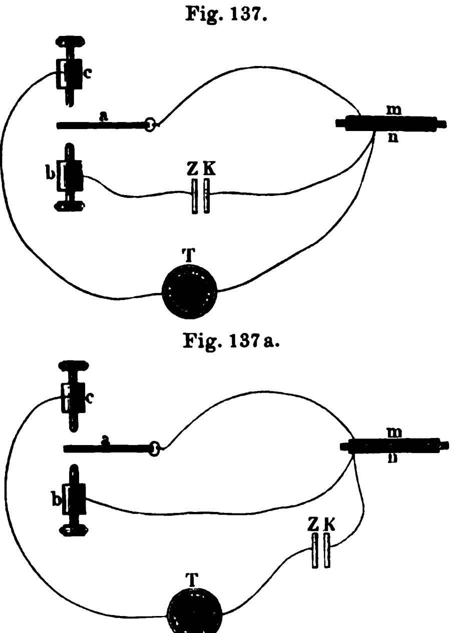


und wird um einen gewissen Winkel φ abgelenkt, aus welchem man die Elektrizitätsmenge η, welche durchs Galvanometer geströmt war, also die Ladung des Kondensators, berechnen kann. Als Maß für η dient die anfängliche Winkelgeschwindigkeit V_0, welche die Nadel infolge des erwähnten Stoßes erlangt. Wie wir später sehen werden, sind die Bewegungsgesetze der Magnetnadel vollkommen analog den Bewegungsgesetzen eines Pendels, die wir in Band I kennen gelernt haben. Als Maß für die Anfangsgeschwindigkeit V_0 dient auch hier die Größe $\sin \frac{1}{2}\varphi$, so daß man $V_0 = C \sin \frac{1}{2}\varphi$ setzen kann, wobei C ein Proportionalitätsfaktor ist, der, wie wir sehen werden, unter anderem auch von der Konstruktion des Galvanometers (mit oder ohne Dämpfung) abhängt. Da η proportional V_0 ist, so kann man $\eta = A \sin \frac{\varphi}{2}$ setzen, wo A ein anderer Proportionalitätsfaktor ist.

Man schaltet die zu vergleichenden Kondensatoren parallel und bringt sie auf ein gewisses Potential V; ihre Ladungen sind dann $\eta_1 = q_1 V$ und $\eta_2 = q_2 V$. Hierauf trennt man die Kondensatoren und entladet zuerst den einen und darauf den anderen durch das Galvanometer; die Ablenkungswinkel mögen hierbei φ_1 und φ_2 sein. Es ist nun $\eta_1 = A \sin \frac{\varphi_1}{2}$ und $\eta_2 = A \sin \frac{\varphi_2}{2}$, folglich

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\sin \frac{\varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_2}{2}} \quad \text{. . . . .} \quad (36)$$

De Metz hat nach dieser Methode gefunden, daß die Kapazität des menschlichen Körpers ungefähr gleich 0,0001 Mikrofarad ist.



5. Methode von Siemens. Wenn man einen Kondensator in schneller Aufeinanderfolge ladet und entladet, und in den Ladungs- oder Entladungsweg ein Galvanometer einschaltet, so erfährt die Nadel eine konstante Ablenkung φ, aus welcher man nach einer von der Bauart des Galvanometers abhängigen Methode ein Maß α für die Stromstärke, d. h. also die Elektrizitätsmenge η finden kann, die in der Sekunde durch das Galvanometer fließt. So dient beispielsweise für die Tangentenbussole $tg\, \varphi$ als derartiges Maß. In Fig. 137 und 137a ist die entsprechende Anordnung der Apparate dargestellt; ZK ist die Batterie, die zum Laden des Kondensators mn dient; T ist das Galvanometer, b und c sind zwei Kontaktschrauben, zwischen denen die Lamelle a schnell hin und her schwingt. In Fig. 137 haben wir Ladung, wenn a die Schraube b berührt, und Entladung durch das Galvanometer T bei Berührung von a mit c. In Fig. 137a erfolgt die Ladung durch T hindurch bei Berührung von a und c und Entladung bei Berührung von a und b. Bedeutet q die Kapazität des Kondensators mn, N die pro Sekunde erfolgende Zahl von Ladungen oder Entladungen, V die elektromotorische

Kraft der Batterie, so ist $\eta = NqV$. Sonach ist $NqV = C\alpha$, wo C ein Proportionalitätsfaktor ist. Für einen anderen Kondensator erhält man allgemein $N_1 q_1 V_1 = C\alpha_1$; somit ist

$$\frac{q}{q_1} = \frac{N_1 V_1 \alpha}{N V \alpha_1} \quad \text{. . . . .} \quad (37)$$

Ist $V = V_1$, so hat man

$$\frac{q}{q_1} = \frac{N_1 \alpha}{N \alpha_1} \quad \text{. . . . .} \quad (37,a)$$

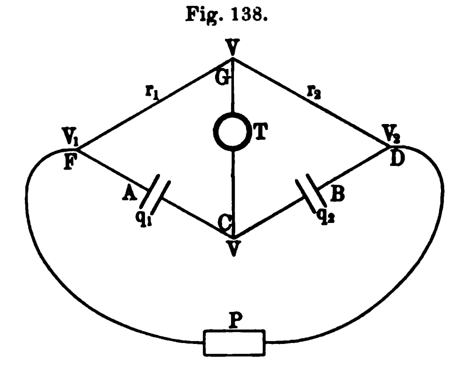
Ist T ein Tangentengalvanometer, so hat man allgemein

$$\frac{q}{q_1} = \frac{N_1 V_1 \operatorname{tg} \varphi}{N V \operatorname{tg} \varphi_1} \quad \text{. . . . . . .} \quad (37,b)$$

Fleming und Clinton (1903) haben diese Methode vervollkommnet.

6. Weiter unten werden wir die Wheatstonesche Brücke kennen lernen, ein Schema derselben stellt die Fig. 138 dar. Hier bedeutet P eine Induktionsrolle, A und B zwei Kondensatoren, deren Kapazitäten q_1 und q_2 sind; r_1 und r_2 bedeuten die Widerstände der Leitungszweige FG und GD; T ist ein Telephon. Durch entsprechende Änderung von r_1 und r_2 erreicht man es, daß die Stromstärke auf der Brücke GC gleich Null wird, daher im Telephon kein Ton auftritt. In diesem Falle befinden sich die Punkte G und C auf dem gleichen Potential V. Mit V_1 und V_2 seien die Potentiale der Punkte F und D bezeichnet. Durch die Zweige FG und GD geht ein und derselbe Strom, man hat daher nach dem Ohmschen Gesetze

Fig. 138.



$$\frac{V_1 - V}{r_1} = \frac{V - V_2}{r_2}.$$

Durch GC strömt keine Elektrizität, es sind daher die Ladungen der Kondensatoren einander gleich und man hat

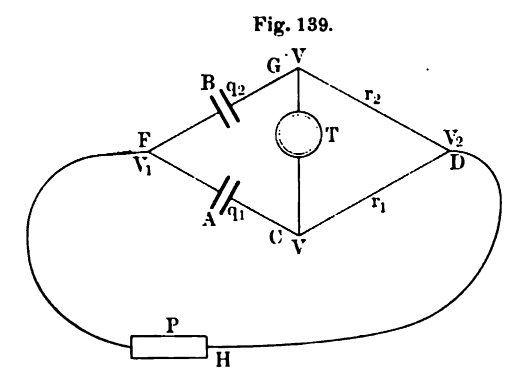
$$q_1 (V_1 - V) = q_2 (V - V_2).$$

Dividiert man diese Gleichung durch die vorhergehende, so erhält man $r_1 q_1 = r_2 q_2$, also

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad \text{. . . . .} \quad (38)$$

7. Man kann auch die Kondensatoren in die Leitungszweige FC und FG einschalten, die Widerstände aber in die Zweige DC und DG (Fig. 139). Hier ist P eine Induktionsrolle oder eine Batterie, die geschlossen und geöffnet werden kann; während der Öffnung werden F und H geerdet. Ist GC stromfrei, so haben A und B in jedem Augenblicke während der Ladung und Entladung gleiche Potentiale. Hieraus folgt, daß zu ihnen

Fig. 139.

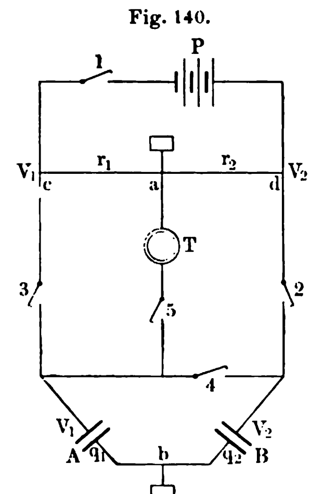


während der Dauer dt die Ladungen $d\eta_1 = q_1 d(V - V_1)$ und $d\eta_2 = q_2 d(V - V_1)$ hinzuströmen. Andererseits ist $d\eta_1 = \frac{V_2 - V}{r_1} dt$ und $d\eta_2 = \frac{V_2 - V}{r_2} dt$. Die beiden ersten Gleichungen geben $d\eta_1 : d\eta_2 = q_1 : q_2$, die letzteren $d\eta_1 : d\eta_2 = r_2 : r_1$. Hieraus folgt

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38, a)$$

8. W. Thomson hat folgende Methode angegeben, die insbesondere in dem Falle anwendbar ist, daß einer der Kondensatoren A oder B (Fig. 140) ein Telegraphenkabel ist. Es seien P eine Batterie, T ein Galvanometer, r_1 und r_2 zwei Widerstände: die Punkte a und b sind geerdet; 1, 2, 3, 4 und 5 sind Kontaktschlüssel. Man schließt zuerst 1, 2 und 3; dann laden sich A und B und gleichzeitig geht ein Strom durch cd. Es mögen die Potentiale von c und d mit V_1 und V_2 bezeichnet sein; da das Potential in a gleich Null ist, so haben wir

Fig. 140.



$$\frac{V_1 - 0}{r_1} = \frac{0 - V_2}{r_2}$$

oder

$$\frac{r_1}{r_2} = -\frac{V_1}{V_2} \quad \ldots \quad (39)$$

Die Ladungen η_1 und η_2 der Kondensatoren A und B sind

$$\eta_1 = V_1 q_1, \qquad \eta_2 = -V_2 q_2.$$

Man öffnet jetzt 1, 2 und 3 und schließt 4, wobei sich die ungleichnamigen Ladungen η_1 und η_2 teilweise aufheben. Man öffnet 4 und schließt 5, wobei der Ladungsrest auf A und B durch T und a zur Erde abfließt. Man hat nun r_1 und r_2 derart zu wählen, daß jener Rest verschwindet, d. h. daß bei Schließung von 5 das Galvanometer T in Ruhe bleibt. In diesem Falle ist $\eta_1 = \eta_2$, d. h.

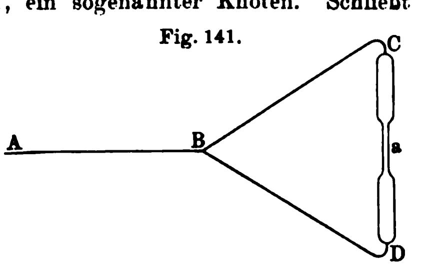
$$\frac{q_1}{q_2} = -\frac{V_2}{V_1}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (39), so erhält man

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39, \mathrm{a})$$

9. Borgmann hat eine Methode zur Vergleichung sehr kleiner Kapazitäten angegeben. Es sei AB ein von einem Induktorpol ausgehender Draht; BC und BD zwei gleiche, sehr große Widerstände, CD eine Geisslerröhre. Während der Induktor in Tätigkeit ist, erscheint in a ein dunkler Streifen, ein sogenannter Knoten. Schließt man an C und D irgend welche Leiter an, deren Kapazitäten q_1 und q_2 einander nicht gleich sind, so verschiebt sich der Knoten zur Seite; er behält seine Lage bei, falls $q_1 = q_2$ ist. Besitzt man nun einen Körper, dessen Kapazität q_1 beliebig geändert werden kann, wobei sie stets bekannt bleibt, so kann man nach obigem die Kapazität q_2 eines anderen Körpers messen. Diese Methode ermöglicht die Messung von sehr kleinen Kapazitäten, die beispielsweise nur wenige el.-st. C. G. S.-Einheiten betragen können. Afanasjew und Lopuchin haben nach dieser Methode die Kapazität einer leuchtenden Geisslerröhre und den Einfluß des Verdünnungsgrades der Röhre, des Magnetfeldes und anderer Umstände auf diese Kapazität gemessen. Das Maximum der Kapazität entspricht einem Gasdruck von ungefähr 1 mm.

Fig. 141.



10. Andere Methoden zur Vergleichung von Kapazitäten haben Schiller, Gaugain, Cohn und Arons, J. J. Thomson u. a. in Vorschlag gebracht.

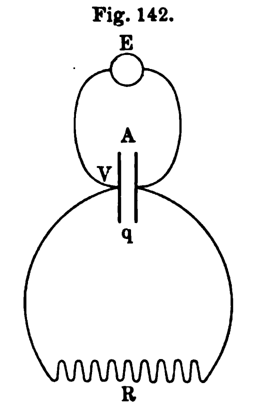
II. Methoden zur absoluten Kapazitätsmessung.

1. Hat man einen besonderen Körper oder Kondensator, dessen Kapazität q berechnet werden kann, so findet man die absolute Größe einer jeden anderen Kapazität, wenn man sie mit q nach einer der vorhergehend erörterten Methoden vergleicht. Als q kann man z. B. die Kapazität einer Kugel oder die Kapazität eines Kugelkondensators wählen.

2. Die im vorhergehenden mit 3 und 4 bezeichneten Methoden können zur Bestimmung von q dienen, wenn das Potential V, sowie die Proportionalitätsfaktoren A und C für das gegebene Galvanometer bekannt sind.

3. Man bringt den Kondensator A (Fig. 142) auf ein gewisses Potential V_0, das man mit dem Elektrometer E mißt; hierauf entladet man ihn durch einen sehr großen Widerstand R hindurch. Nach Ablauf von t Sekunden öffnet man die Entladungskette und mißt das neue Potential V_1. Sei V das veränderliche Potential des Kondensators, $\eta = qV$ seine Ladung. Während der Zeitdauer dt vermindert sich die Ladung um $d\eta = q\,dV$. Die Stärke des Entladungsstromes ist gleich $\frac{V-0}{R} = \frac{V}{R}$, es ist daher $d\eta = \frac{V}{R}\,dt$. Die Gleichung $q\,dV = \frac{V}{R}\,dt$ gibt

Fig. 142.



$$\frac{dV}{V} = \frac{dt}{qR}.$$

Integriert man nach V von V_0 bis V_1 und nach t von 0 bis t, so erhält man

$$q = \frac{t}{R\,lg\,\frac{V_0}{V_1}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (40)$$

4. Man ladet den Kondensator (q) mit Hilfe einer Batterie, welche das Potential V gibt und sendet die Ladung $\eta = qV$ durch ein Galvanometer, das die Ablenkung α gibt. Es ist in diesem Falle $\eta = qV = A \sin\frac{\alpha}{2}$, wo man A für ein gegebenes Galvanometer als bekannt ansehen kann. Hierauf schließt man dieselbe Batterie mittels eines großen Widerstandes R, wobei man dasselbe Galvanometer in die Kette einschaltet. Die Stromstärke ist gleich $\frac{V}{R}$; ist β die Galvanometerablenkung, so kann man $\frac{V}{R} = B\beta$ setzen, wo B ebenfalls bekannt ist. Man hat

$$V = \frac{A}{q} \sin\frac{\alpha}{2} = BR\beta$$

und hieraus ist

$$q = \frac{A \sin\frac{\alpha}{2}}{BR\beta} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (41)$$

Methoden zur Bestimmung der Koeffizienten A und B werden im Kapitel von der Messung momentaner und beständiger Ströme erörtert werden.

Wien, Maxwell, Waghorn, Klemenčič, Rosa und Grover (1905), Bulgakow und Smirnow (1906) u. a. haben ebenfalls Methoden zur absoluten Messung der Kapazität angegeben. Unter diesen Methoden ist die Maxwellsche hervorzuheben; sie wurde von vielen Forschern benutzt und in letzter Zeit wird sie besonders von der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg angewandt. Diesselhorst (1906) hat diese Methode einer eingehenden Untersuchung unterworfen.

§ 5. Messung der Dielektrizitätskonstanten von festen Körpern. Wir haben im Vorstehenden eine Reihe von Definitionen für die Dielektrizitätskonstante K, die wir auch als Induktionsvermögen und als die elektrische Permeabilität (Durchdringbarkeit) der Dielektrika bezeichnet haben, gegeben. Von diesen Formulierungen wollen wir uns die folgenden ins Gedächtnis zurückrufen. Es sei q_0 die Kapazität eines Kondensators innerhalb eines Mediums, für welches $K = 1$ ist (Luft oder Vakuum); q sei die Kapazität desselben Kondensators, falls der gesamte Zwischenraum zwischen seinen Belegungen von einem Dielektrikum erfüllt ist; in diesem Falle ist, vgl. (54) auf S. 112,

$$K = \frac{q}{q_0} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (42)$$

In einem Medium, für welches $K = 1$ ist, sei $f_0(\eta)$ die Kraft der Wechselwirkung zweier Leiter, welche die bestimmten, unveränderlichen Ladungen η_1 und η_2 haben; $f_K(\eta)$ sei dieselbe Kraft im Dielektrikum. In diesem Falle ist, vgl. (11), S. 290

$$K = \frac{f_0(\eta)}{f_K(\eta)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (43)$$

Bezeichnet man endlich die Kräfte der Wechselwirkung zweier Leiter, die auf bestimmte, unveränderliche Potentiale V_1 und V_2 gebracht sind, mit $f_0(V)$, wenn $K = 1$ ist und mit $f_K(V)$ für das Dielektrikum, so ist, vgl. (12), S. 291

$$K = \frac{f_K(V)}{f_0(V)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

Außerdem haben wir bereits wiederholt die Formel

$$K = n^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

angeführt, in welcher n den Brechungsquotienten des Dielektrikums für Strahlen bedeutet, deren Wellenlänge unendlich groß ist.

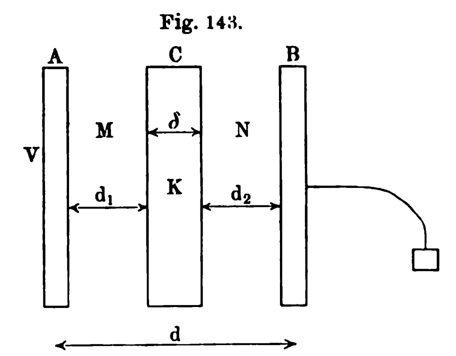
Es existiert eine sehr große Zahl von verschiedenen Methoden zur Bestimmung von K. Die Mehrzahl derselben (jedoch nicht alle) stützt sich auf die soeben angeführten Formeln. Einige Methoden sind in gleicher Weise auf feste und flüssige, andere nur auf flüssige Dielektrika anwendbar. Wir wollen zunächst die Methoden zur Bestimmung von K für feste, isotrope Dielektrika betrachten.

Nähere Details kann man in dem vortrefflichen Werke von Kossonogow, „Über die Dielektrika" (russ.), Kiew 1901, finden.

1. Vor 1873 ausgeführte Bestimmungen von *K*. Die ersten Messungen des Induktionsvermögens sind von Cavendish um das Jahr 1773 für Glas, Kolophonium, Wachs und Schellack ausgeführt worden; publiziert wurden sie erst 1879 von Maxwell. Dieser bei Lebzeiten von Cavendish nicht veröffentlichten Arbeiten haben wir bereits wiederholt Erwähnung getan.

Die klassische Arbeit Faradays über die Eigenschaften der Dielektrika erschien im Jahre 1838; sie ist in der 11. Serie seiner „Experimental researches", § 1189—1294, enthalten. Seine Untersuchungsmethode mit Hilfe zweier Kugelkondensatoren ist auf S. 113 mitgeteilt worden. Hierauf haben Harris (1842), Matteucci (1849) und Belli (1858) die Größe *K* bestimmt. Ferner erschienen im Jahre 1857 die Untersuchungen von W. Siemens, die nach der auf S. 335 betrachteten Methode der Vergleichung von Kondensatorkapazitäten ausgeführt waren. Der Zwischenraum zwischen den Platten eines ebenen Kondensators *m n* (Fig. 137 und 137a auf S. 336) wurde mit Luft, flüssigem oder festem Schwefel und anderen Dielektrika gefüllt. Das Verhältnis der Kapazitäten ergab die Größe *K* nach der Formel (42).

Fig. 143.



Alle diese Arbeiten leiden an dem Fehler, daß das Zwischendielektrikum die Metallflächen des Kondensators berührt, wodurch, wie wir bereits gesehen haben, sich Restladungen bilden; die scheinbare Kapazität hängt infolgedessen von der Dauer der Elektrisierung ab. Der gleiche Fehler tritt auch auf bei den Methoden von Rossetti, sowie von Gibson und Barclay (1873), welche die Kapazität eines zylindrischen, zuerst mit Luft und hernach mit Paraffin gefüllten Kondensators maßen; zur Messung diente ihnen der auf S. 332 beschriebene veränderliche Kondensator von W. Thomson. Felici (1871) hat mittels der Drehwage die Induktion gemessen, die auf einer Metallplatte *A* durch eine elektrisierte Kugel *B* hervorgerufen wurde, wenn sich zwischen *A* und *B* ein Dielektrikum von Würfelform befand.

2. Erste Methode von Boltzmann. Boltzmann (1872 bis 1874) hat wohl zuerst zwei wesentliche Verbesserungen in die Methoden zur Bestimmung von *K* eingeführt. Erstens hat er mit der größten Sorgfalt die Kapazität des von ihm benutzten Quadrantenelektro-

meters berücksichtigt; zweitens hat er zwischen die Kondensatorplatten das Dielektrikum in Gestalt einer Schicht eingeführt, deren Dicke δ kleiner als der Abstand d der metallischen Kondensatorplatten war, so daß also das Dielektrikum sich mit jenen Platten nicht berührte. Die Kapazität q eines solchen Kondensators läßt sich leicht bestimmen. Denken wir uns, es seien A und B (Fig. 143 a. v. S.) die Kondensatorplatten, C die Schicht des Dielektrikums, d_1 und d_2 die Dicken der Luftschichten, so daß $d = d_1 + d_2 + \delta$ ist. Nimmt man an, daß die Dimensionen der Platten A, B und C sehr groß im Vergleiche zum Abstande d sind, so kann man voraussetzen, daß in nicht allzu geringer Nähe von den Plattenrändern die Induktionsröhren $B = KF$ (S. 57), wo F die Feldintensität bedeutet, gerade, zu den Oberflächen senkrechte Röhren von konstantem Querschnitte sind. Hieraus ist ersichtlich, daß die Feldintensität innerhalb des Dielektrikums gleich $F:K$ ist, falls sie in den Räumen M und N durch F dargestellt wird. Hieraus folgt, daß die Arbeit für den Transport der Einheit der Elektrizitätsmenge von A nach B oder, was dasselbe ist, die Potentialdifferenz V der Platten A und B gleich ist

$$V = Fd_1 + \frac{F}{K}\delta + Fd_2 = F(d_1 + d_2) + \frac{F}{K}\delta = F(d - \delta) + \frac{F}{K}\delta = F\left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right).$$

Es sei η die Ladung auf der Oberfläche S des Kondensators, k die Dichte der Ladung. In diesem Falle ist $\eta = kS$; es ist aber $F = 4\pi k$, also $\eta = \frac{FS}{4\pi}$; hieraus ist $F = \frac{4\pi\eta}{S}$. Für V erhält man

$$V = \frac{4\pi\eta}{S}\left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (45, a)$$

Endlich erhält man für die gesuchte Kapazität

$$q = \frac{\eta}{V} = \frac{S}{4\pi\left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (46)$$

Ist $K = 1$, so erhält man die uns schon längst bekannte Formel für den ebenen, nur Luft enthaltenden Kondensator

$$q_0 = \frac{S}{4\pi d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (46, a)$$

Wie wir sehen, ersetzt eine Schicht des Dielektrikums von der Dicke δ gewissermaßen eine Luftschicht von der Dicke $\frac{\delta}{K}$. Die Einführung einer solchen Schicht ist gleichbedeutend mit einer Annähe-

rung der Platten um den Betrag

$$d' = d - \left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right) = \delta\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad . \quad . \quad (46,b)$$

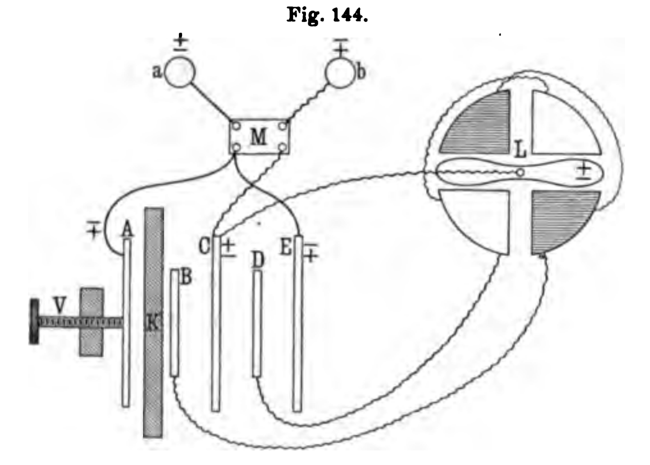
Boltzmann verfuhr folgendermaßen. Er lud mittels einer Batterie aus Daniellelementen einen ebenen Kondensator, bei welchem die eine der Platten parallel mit sich selbst verschoben werden konnte, und maß mit Hilfe des Quadrantenelektrometers (S. 332) die Kapazitäten q und q_0. Eine Bestimmung von K nach den Formeln (46) und (46, a) ist jedoch ungeeignet, da eine genaue Messung der Größe d schwierig ist. Daher verschob er die eine von den Platten des Kondensators bis zu dem neuen Abstande d_1 und maß die Kapazitäten

$$q' = \frac{S}{4\pi\left(d_1 - \delta + \frac{\delta}{K}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46,c)$$

$$q_0' = \frac{S}{4\pi d_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46,d)$$

Aus den vier Formeln (46), (46, b), (46, c) und (46, d) läßt sich für K leicht ein Ausdruck ableiten, in welchem die sehr genau meß-

Fig. 144.



bare Differenz $d_1 - d$ vorkommt. Bezeichnet man mit λ_1, λ_2, λ_3 und λ_4 die reziproken Werte von q_0, q_0', q und q', so erhält man für K zwei Ausdrücke

$$K = \frac{\delta}{\frac{\lambda_4 - \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}(d_1 - d) + \delta} = \frac{\delta}{\frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(d_1 - d) + \delta} \quad . \quad . \quad (46,e)$$

Viel später als die Boltzmannschen Arbeiten erschienen die Untersuchungen von Gordon (1879) und Hopkinson (1881), welchen

eine der soeben beschriebenen ähnliche Methode zugrunde liegt. Das Besondere der Gordonschen Methode besteht darin, daß er den Kondensator mit Hilfe eines Induktoriums sehr kurz dauernden und wechselnden Elektrisierungen unterwarf. Sein Apparat ist schematisch in Fig. 144 (a. v. S.) dargestellt. Fünf Metallplatten A, B, C, D und E sind einander parallel gestellt. Die erste von ihnen kann selbst parallel verschoben und die Größe d' dieser Verschiebung sehr genau gemessen werden. Der eine Induktorpol a ist mit A und E verbunden, der andere Pol b mit C und mit der Nadel des Quadrantenelektrometers L, dessen beide Quadrantenpaare mit B und D verbunden sind. Bei vollkommener Symmetrie des Apparates sind die Kapazitäten der beiden Kondensatoren AB und DE einander gleich und verbleibt die Elektrometernadel in Ruhe. Sobald man aber zwischen A und B das Dielektrikum K, dessen Dicke δ ist, einschaltet, vergrößert sich die Kapazität des Kondensators und wird die Nadel von L abgelenkt. Verschiebt man nun A in der Richtung nach B um den Betrag, vgl. (46, b)

$$d' = \delta\left(1 - \frac{1}{K}\right),$$

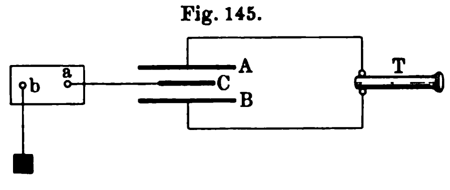
der genau gemessen werden kann, so stellt man dadurch wiederum Gleichgewicht her. Die letzte Formel gibt

$$K = \frac{\delta}{\delta - d'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

Verschiedenartige Abänderungen der hier betrachteten Methoden sind in Anwendung gebracht worden von Hopkinson, Wüllner, Elsas, Stankiewicz, Winkelmann, Donle, Schtschegljajew, Blondlot (1891), Lecher (1891), Hasenöhrl, Negreano, Palaz, Werner u. a.

Alle Genannten haben K in der Art bestimmt, daß sie die Abhängigkeit der Kapazität eines Kondensators von der in ihm enthaltenen Schicht des Dielektrikums bestimmten. Hopkinson hat auf Unzulänglichkeiten der Gordonschen Methode aufmerksam gemacht; er hat seine endgültigen Messungen nach einer Methode vorgenommen, die sich mehr der Methode von Gibson und Barclay (S. 341) nähert.

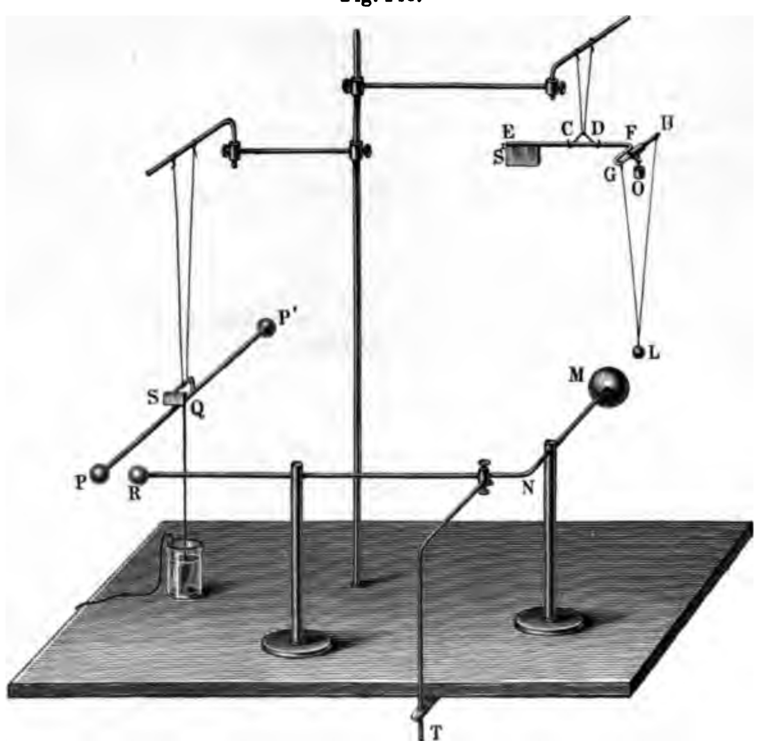
Fig. 145.



Winkelmann nahm statt der fünf Platten nur deren drei, A, B und C (Fig. 145). Die mittlere Platte C ist mit dem einen Pole a einer Induktorrolle verbunden, deren anderer Pol b geerdet ist. Die Platten A und B sind mit einem Telephon T verbunden, in dem bei völliger Symmetrie des Apparates kein Ton auftritt. Führt man zwischen A

und C eine dielektrische Platte von der Dicke δ ein, so wird hierdurch die Symmetrie gestört und im Telephon tritt ein Ton auf, der wiederum verschwindet, wenn man die Platte B um die Entfernung d' von C wegbewegt. Das gesuchte K wird nach der Formel (47) bestimmt. Donle und Lecher haben anstatt der einen Platte C deren zwei verwendet; Donle hat das Telephon durch ein Elektrodynamometer, Lecher durch ein Elektrometer ersetzt. Schtschegljajew, sowie Hasenöhrl haben sich ebenfalls der Methode von Winkelmann


Fig. 146.



bedient. Diese Methode hält aber, wie Cohn (1892) und A. Sokolow gezeigt haben, einer strengen Kritik nicht Stand und kann keine zuverlässigen Resultate liefern. Dasselbe gilt auch von den Methoden von Palaz, Elsas, Werner und den Methoden einiger anderer Autoren, die der Winkelmannschen Methode analog sind. Eine eingehende kritische Untersuchung über diese Arbeiten findet man in dem oben erwähnten Buche von Kossonogow (S. 199—217).

3. Zweite Methode von Boltzmann (1874). Auf S. 153 hatten wir die Frage nach der Kraft f erörtert, die auf eine in ein homogenes

Elektrizitätsfeld gebrachte dielektrische Kugel einwirkt und hatten hierbei die Formel (80) hergeleitet

$$f = \frac{K-1}{K+2} f_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Hier bedeutet f_0 diejenige Kraft, die auf die Kugel einwirken würde, wenn sie aus leitender Substanz bestände. Boltzmann maß das Verhältnis $f : f_0$ und berechnete daraus den Wert von K. In der Nähe einer elektrisierten Metallkugel M (Fig. 146 a. v. S.) befand sich ein Kügelchen L aus dem zu untersuchenden Dielektrikum; dasselbe war an dem einen Ende der Drehwage EF angebracht. Das Spiegelchen S' diente zur Messung der Drehung von EF, also auch der Größe der Anziehung f zwischen M und L; O ist ein Gegengewicht. Das Kügelchen L wurde durch ein anderes ersetzt, das mit Stanniol überzogen war und die gleiche Größe wie L hatte, wodurch man f_0 messen, also K finden konnte. Die Anziehung zwischen den Kugeln R und P diente zum Messen der Ladung von M. Diese Ladung konnte sehr kurzdauernd gemacht und im Verlaufe einiger Zeit konstant erhalten werden. Die gleiche Methode haben zuerst Romich und Nowak, sowie später Romich und Faidija angewandt. Auf einer Messung der ponderomotorischen Kräfte, die auf Dielektrika wirken, beruhen auch die Methoden von Trouton und Lilly, Rosa u. a.

4. Die Methode von Lefèvre beruht auf einer Bestimmung der Wechselwirkung zwischen elektrisierten Leitern, zwischen denen sich eine dielektrische Schicht befindet. Es sei d der Abstand der ebenen Kondensatorplatten, δ die Dicke der zwischen ihnen befindlichen dielektrischen Schicht (s. Fig. 143 a. S. 342). Formel (45, a), S. 343 gibt uns

$$V = 4\pi k\left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right),$$

wo $k = \eta : S$ die Dichte der Ladung bedeutet. Die Kraft P, welche auf die Oberflächeneinheit der Platte wirkt, wird durch die Formel (25, a), S. 53, ausgedrückt

$$P = 2\pi k^2,$$

da diese Oberfläche mit der Luft in Berührung steht. Setzt man hierin k ein, so ist

$$P = \frac{V^2}{8\pi\left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48, a)$$

Ist kein Dielektrikum vorhanden ($K = 1$), so erhält man

$$P_0 = \frac{V^2}{8\pi d^2}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{P}{P_0} = \frac{d^2}{\left(d - \delta + \frac{\delta}{K}\right)^2} \quad \ldots \ldots \quad (49)$$

Lefèvre maß die gegenseitige Anziehung von zwei horizontalen Kreisscheiben zunächst bei Abwesenheit des Dielektrikums und darauf, nachdem eine dielektrische Scheibe (K, δ) zwischen beide eingeführt war. Auf diese Weise fand er $P : P_0$ und hierauf nach Formel (49) den Wert für K.

5. Methode von Schiller. Im Jahre 1874 erschien eine Untersuchung von Schiller, in welcher die Größe K zum ersten Male bei Ladungen bestimmt worden war, deren Dauer weniger als $^1/_{10000}$ Sekunde betrug. Er bediente sich der elektrischen Schwingungen, die in der sekundären Wickelung einer Induktionsrolle auftreten, wenn der Strom in der primären Kette unterbrochen wird. Schwingungen dieser Art sind schon in Bd. II erwähnt worden; wir werden auf sie weiter unten zurückkommen. Vorläufig wollen wir es als Tatsache gelten lassen, daß auf dem einen Ende der sekundären Kette eine Reihe von abwechselnden positiven und negativen Elektrisierungen auftritt, wenn das andere Ende geerdet ist. Die Schwingungsdauer T hängt unter anderem von der Kapazität q der sekundären Kette ab und unter gewissen Bedingungen kann man die Annahme machen, daß T^2 proportional q ist. Es sei q_0 die Kapazität der sekundären Kette, wenn keine andere Kapazität an dieselbe angeschlossen ist, und T_0 die Schwingungsdauer. Verbindet man dann das Ende der sekundären Kette mit einer der Platten eines ebenen Luftkondensators von der Kapazität q_1, so möge die Schwingungsdauer gleich T_1 werden. Führt man ein Dielektrikum ein, so wird die Kapazität $q_2 = Kq_1$ und die Schwingungsdauer nimmt einen gewissen Wert T_2 an. Nun kann man $q_0 = CT_0^2$, $q_0 + q_1 = CT_1^2$, $q_0 + q_2 = CT_2^2$ setzen, wo C ein Proportionalitätsfaktor ist. Hieraus erhält man

$$K = \frac{q_2}{q_1} = \frac{T_2^2 - T_0^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad \ldots \ldots \quad (50)$$

Die scharfsinnige Methode, nach welcher die Schwingungsdauer T bestimmt wurde, wollen wir hier nicht betrachten. Schiller hat K auch nach einer Methode bestimmt, die derjenigen von Siemens (S. 336) analog ist, wobei die Dauer der Elektrisierungen ungefähr 0,02 Sekunden betrug. Von dem interessanten Resultate, das sich hierbei ergab, soll etwas später die Rede sein.

6. Bestimmung von K mittels elektrischer Schwingungen. Seit dem Jahre 1889 begannen die von Hertz entdeckten Strahlen, die wir schon in Bd. II erwähnt haben und auf die wir in diesem Bande näher eingehen werden, bei der Bestimmung der Größe K eine

immer größere Rolle zu spielen. Gegenwärtig benutzt man sie zu diesem Zwecke fast ausschließlich. Wir wollen daran erinnern, daß der Entladungsfunke im allgemeinen von einer gleichsam als Zugabe erscheinenden, in ihm auftretenden, oszillierenden Entladung begleitet ist, deren Periode T unter anderem proportional $\sqrt{q}$ gesetzt werden kann, wo q die Kapazität der Körper A und B ist, zwischen denen der Funke überspringt. Diese oszillierende Entladung bildet die Quelle einer elektrischen Schwingung, welche sich an den Leitern, z. B. den Drähten entlang ausbreitet, die mit den Körpern A und B verbunden sind. Die Wellenlänge λ dieser Schwingungen ist proportional T, so daß man

$$\lambda = C\sqrt{q} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

setzen kann, wobei C ein Proportionalitätsfaktor ist. Auf der Anwendung der Formel (51) beruht eine Gruppe von Methoden zur Bestimmung der Kapazität q, also auch der Werte von K.

Eine andere Gruppe geht auf die Formel $K = n^2$ zurück, wo n der Brechungsquotient von Strahlen mit sehr großer Wellenlänge λ ist, genauer für Strahlen mit der Wellenlänge $\lambda = \infty$. Nehmen wir an, daß für die in der Praxis angewandten Strahlen, für welche λ beispielsweise gleich einigen Centimetern ist (für den gelben Strahl ist $\lambda = 0{,}0006$ mm), die Formel $K = n^2$ in Geltung bleibt, d. h. daß man die Dispersion der elektrischen Strahlen zwischen diesem λ und $\lambda = \infty$ vernachlässigen kann und daß das Medium zufälliger Weise gerade in dem Bereiche dieses λ keine anomale Dispersion besitzt. Da n indirekt proportional der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Strahlen ist und diese Geschwindigkeit proportional der Wellenlänge λ, so ist offenbar K indirekt proportional λ^2 und man kann

$$K = \frac{C}{\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51,\text{a})$$

setzen. Sehr wichtig ist die Bemerkung, daß für einige bestimmte Formen der Leiter, zwischen denen eine oszillierende Entladung erfolgt, die Schwingungsdauer T auf Grund von Formeln, auf die später (bei der Selbstinduktion) hingewiesen werden soll, im voraus berechnet werden kann. Es sei V_0 die Geschwindigkeit der elektrischen Strahlen in Luft; diese Größe ist bekannt und zwar ist sie gleich $3 \,.\, 10^{10}$ cm pro Sekunde; die Geschwindigkeit V im Dielektrikum ist gleich $\lambda : T$. Ferner ist $n = V_0 : V$, also $K = n^2 = V_0^2 : V^2$, d. h.

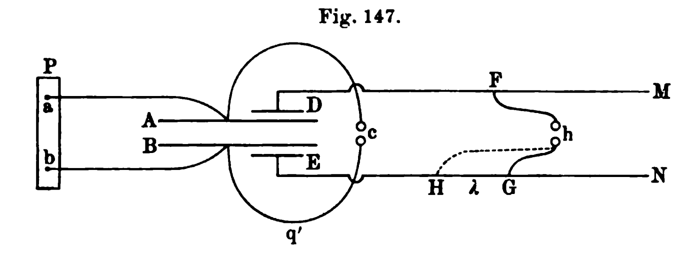
$$K = \frac{V_0^2 T^2}{\lambda^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51,\text{b})$$

Hat man λ gemessen, so kann man nach dieser Formel K finden.

Im Jahre 1889 hat J. J. Thomson als Erster die Größe K mit Hilfe der Hertzschen Schwingungen bestimmt. Ein Luftkondensator

AB (Fig. 147) wurde mit den Polen a und b einer Induktionsrolle P und den kleinen Kugeln c, zwischen denen der Funke erschien, verbunden. Hierbei traten im Systeme ABc elektrische Schwingungen auf. In der Nähe von A und B befanden sich die Platten D und E, von denen lange Drähte DM und EN ausgingen. Die Schwingungen in A und B riefen ebensolche Schwingungen in D und E hervor, die sich längs den Drähten M und N ausbreiteten. Um die Wellenlänge zu messen, verband J. J. Thomson eine der kleinen Kugeln h mit einem beliebigen Punkte F des Drahtes M und suchte, indem er den von der anderen Kugel h ausgehenden Draht an N entlang gleiten ließ, zwei solche Lagen hG und hH auf, für welche die Entladung in h verschwand. In diesem Falle waren die Phasen der Schwingungen in den Punkten F und G einander gleich. Hieraus folgt, daß $GH = \lambda$ ist. Auf diese Weise wurde die Wellenlänge λ bestimmt. Die Kapa-

Fig. 147.



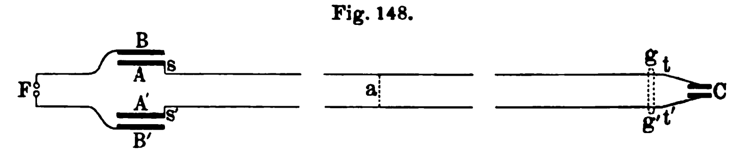
zität q des Luftkondensators AB wurde aus seinen Dimensionen berechnet. Die Kapazität $q + q'$ des ganzen Systems ABc wurde unmittelbar bestimmt; auf diese Weise war die Kapazität q' des Drahtsystems bekannt, welches den Kondensator mit den Kugeln c verband. Ist λ die Wellenlänge für den Fall, daß sich zwischen A und B Luft, λ_1 falls sich zwischen A und B das entsprechende Dielektrikum befindet, so ist im ersten Falle die Kapazität des Systems ABc gleich $q + q'$, im zweiten Falle gleich $Kq + q'$. Formel (51) gibt

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{q + q'}{Kq_1 + q'}},$$

woraus der Wert von K gefunden wurde. Die Schwingungsdauer betrug ungefähr $25 . 10^{-6}$ Sekunden. J. J. Thomson hat Schwefel, Glas und Ebonit untersucht. Er fand, daß sich bei schnellen Schwingungen, also auch sehr kurz dauernden Ladungen, für K kleinere Werte ergeben, als bei langsameren Schwingungen. Für Glas war $K = 2{,}7$. Etwas später hat Lecher die Hertzschen Schwingungen zur Bestimmung der Größe K benutzt. Der Entladungsfunke einer Holtzschen Influenzmaschine tritt bei F auf (Fig. 148 a. f. S.), die Schwingungen erfolgen im Systeme BFB'. Ebensolche Schwingungen

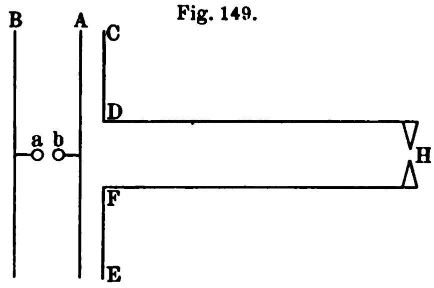
werden in den Platten A und A' induziert und breiten sich in den Drähten st und $s't'$ aus, die mit dem Kondensator C verbunden sind. Legt man quer über die Drähte eine zugeschmolzene Röhre gg, welche verdünnten Stickstoff enthält (Lechersche Röhre), so leuchtet dieselbe. Das Leuchten hört auf, wenn man die Drähte st und $s't'$ durch einen Draht a, eine sogenannte Brücke, miteinander verbindet. Es lassen sich jedoch solche besonderen Lagen der Brücke a auffinden, in denen die Lechersche Röhre wiederum euchtend wird. In diesem Falle besteht zwischen den Systemen $Asas'A'$ und $Ctat'C$ Kon-

Fig. 148.



sonanz derart, daß eine Schwingung im ersten Systeme eine Schwingung im zweiten wachruft. Die entsprechende Lage der Brücke a hängt von der Kapazität C ab. Lecher brachte ein Dielektrikum nach C, suchte die neue Lage der Brücke auf und verschob darauf, nachdem er das Dielektrikum entfernt hatte, die Platten des Kondensators C um einen solchen Betrag, daß die Röhre gg bei derselben Lage der Brücke leuchtete. Im letzteren Falle war die Kapazität des Kondensators die frühere und ließ sich K demgemäß nach der Formel (47), S. 345, berechnen. Lecher fand, daß man bei Abnahme der Schwingungsdauer für K größere Werte erhält, ein Resultat, welches demjenigen von J. J. Thomson gerade entgegengesetzt ist. Für Glas erhielt Lecher den Wert $K = 7{,}3$.

Fig. 149.



Eine dritte Arbeit stammt von Blondlot. Zwischen den kleinen Kugeln a und b (Fig. 149) tritt der Entladungsfunke auf; B, A, CD und FE sind Metallplatten, DH und FH zwei Drähte; mit H sind zwei einander sehr nahe befindliche Kohlenspitzen bezeichnet. Die Schwingungen in den Leitern $AbaB$ riefen zwei Systeme von gleichen Schwingungen in CDH und EFH hervor. Herrschte völlige Symmetrie, so traten keine Funken bei H auf. Nachdem er zwischen A und CD das untersuchte Dielektrikum (Glas) gebracht hatte, suchte Blondlot eine Schwefelplatte von solcher Dicke heraus, daß der Funke bei H abermals erlosch, sobald die Platte zwischen A und FE eingeführt war. In diesem Falle sind die Kapazitäten der Kondensatoren ACD und AFE einander gleich. Nahm Blondlot

für Schwefel $K = 2,6$ an, so erhielt er für Glas den Wert $K = 2,8$, in Übereinstimmung mit dem von J. J. Thomson gefundenen Werte. In der Folgezeit hat insbesondere Drude die Methode der elektrischen Wellen vervollkommnet.

Macht man die Annahme, daß auf die gewählten Dielektrika und die elektrischen Strahlen, mit denen man gearbeitet hat, die Formel $K = n^2$ anwendbar ist, so kann man sagen, daß alle Forscher, welche die Brechungsquotienten n der elektrischen Strahlen bestimmten, gleichzeitig auch das Induktionsvermögen des entsprechenden Dielektrikums bestimmt haben. Indem wir uns auf feste Dielektrika beschränken, erwähnen wir, daß Hertz für Harz den Wert $n = 1,69$ gefunden hat, indem er sich eines aus dieser Substanz hergestellten Prismas bediente; ferner fand Zehnder (1894) für Asphalt den Wert $n = 1,93$. Lebedew benutzte Wellen, deren Länge 6 mm betrug und erhielt mit Hilfe eines Ebonitprismas den Wert $n = 1,6$. Für feste Dielektrika ist der Wert von n noch von Mack, Lampa, Righi, Wiedeburg, Grätz und Fomm, Gutton, Ferry u. a. bestimmt worden.

Gutton (1900) fand für Eis den Wert $n = 1,76$, also $K = n^2 = 3,1$.

Ferry bestimmte K für feste Körper, indem er eine solche Mischung zweier Flüssigkeiten herstellte, daß sich die Kapazität eines Kondensators, der diese Mischung enthielt, nicht änderte, wenn der gegebene Körper in die Mischung gebracht wurde; für die Mischung wurde K selbständig bestimmt.

7. Das Induktionsvermögen von anisotropen Körpern haben Boltzmann (1874), Root, Romich und Nowak, Braun, Curie, Borel, Lebedew, Righi, Mack, Fellinger, W. Schmidt u. a. bestimmt. In anisotropen Körpern hat das Induktionsvermögen in verschiedenen Richtungen verschiedene Werte. Dies geht schon aus Versuchen von Knoblauch (1851) hervor, der die Beobachtung machte, daß ein der Quere nach gepreßter, vertikal aufgehängter Glaszylinder sich mit derjenigen Seite einem geriebenen Siegellackstücke zukehrt, welche nicht gepreßt war. In Kristallen entspricht die Verteilung der Werte von K der Verteilung der Werte für den Brechungsquotienten nach den verschiedenen Richtungen.

Boltzmann (1874) war der Erste, welcher K für rhombische Schwefelkristalle nach der Methode 3 (S. 346) bestimmt hat. Für die drei Hauptrichtungen fand er

$K =$	4,773	3,970	3,811
$n^2 =$	4,596	3,886	3,591

Die obigen Werte für den Brechungsquotienten sind nach der Cauchyschen Formel für $\lambda = \infty$ berechnet; wir haben in Bd. II gesehen, daß diese Formel unbrauchbar ist.

Root hat die Dauer der Torsionsschwingungen von Platten und Kügelchen gemessen, die in verschiedener Lage in ein elektrisches Feld gebracht waren, das bis zu 6000 mal in der Sekunde seine Richtung wechselte. Curie hat von einachsigen Kristallen Beryll, Kalkspat, Turmalin, Quarz und von zweiachsigen Kristallen Topas und Gips untersucht. Durch besondere Vorkehrungen hat er hierbei die Leitfähigkeit von der Polarisation getrennt. Lebedew hat die Brechungsquotienten n_1 und n_2 für elektrische Strahlen ($\lambda = 6$ mm) in zwei Prismen bestimmt, die aus Schwefelkristallen herausgeschnitten waren, wobei die brechende Kante in einem der Prismen der großen, im anderen der kleinen dielektrischen Achse parallel war. Er erhielt $n_1 = 2{,}25$ und $n_2 = 2{,}00$. Righi und Mack haben Holz untersucht, wobei es sich erwies, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektrischen Strahlen in der Richtung der Faser eine andere war, als senkrecht zur Faser.

Fellinger (1902) hat die Werte von K für mehrere einachsige und zweiachsige Kristalle bestimmt. Bemerkenswert war hierbei, daß für den zweiachsigen Baryt der größte Wert von K in der senkrecht zu den optischen Achsen verlaufenden Richtung erhalten wurde und nicht etwa, wie erwartet, in der Richtung einer der Halbierungslinien der Winkel zwischen den Achsen. Zugleich war der Unterschied ein sehr großer, längs den Winkelhalbierenden war $K = 6{,}9736$ und $K = 6{,}9956$, in der Richtung der Normalen jedoch $K = 10{,}0877$. Das gleiche Resultat erhielt auch W. Schmidt (1902) beim Baryt und Cölestin. Graetz (1904) erklärt diese Erscheinung durch anomale Dispersion für Strahlen von sehr großer Wellenlänge; auf eine analoge Erscheinung, nämlich den Ersatz einer Achsenebene durch eine andere zu ihr senkrechte und zwar im Gebiete der sichtbaren Strahlen, war bereits in Bd. II hingewiesen worden.

§ 6. Messung der Dielektrizitätskonstanten von flüssigen und gasförmigen Körpern.

1. Einige der im vorhergehenden Paragraphen genannten Methoden sind auch auf flüssige Körper anwendbar. Wir wollen hier einige Beispiele erwähnen; Silow (1876) und G. Weber haben die Methode von Siemens (S. 335) angewandt.

Die Methode von Gordon (S. 344) hat Negreano benutzt; die Platten (Fig. 144) befanden sich in horizontaler Lage.

Hopkinson, Winkelmann, Donle, Schtschegljajew, Lefèvre, von deren Arbeiten weiter oben die Rede war, haben die Werte von K nicht nur für feste, sondern auch für flüssige Nichtleiter bestimmt. Linde hat K für verflüssigte Gase nach der Methode von Schiller (S. 347) ermittelt.

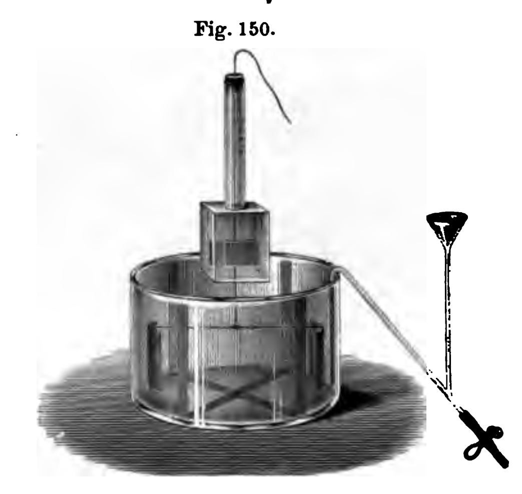
2. Methode von Silow. Die Grundlage dieser Methode bildet die Formel (44), der man folgende einfachere Form geben kann

$$K = \frac{f}{f_0} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (52)$$

Hier ist f die Kraft der Wechselwirkung zweier Leiter, die auf eine gegebene Potentialdifferenz V gebracht und vom Dielektrikum umgeben sind; f_0 ist dieselbe Kraft in Luft.

Silow (1875) hat K unter Anwendung von Formel (52) bestimmt. Er stellte sich ein ganz einfaches Elektrometer her, das aus einem Glasgehäuse (Fig. 150) bestand, auf dessen Innenwandung vier Stanniolblätter geklebt waren; dieselben waren kreuzweise mit eben solchen voneinander isolierten, auf den Boden des Glasgefäßes geklebten Streifen verbunden. Der bewegliche Teil des Apparates bestand aus einem an einem Faden hängenden horizontalen Platindrahte, an dessen Enden sich umgebogene Platinplättchen befanden. Das eine Streifenpaar wurde geerdet, das andere mit einem Pole einer großen Batterie (Zn, Cu, Wasser, vgl. S. 312) verbunden, deren anderer Pol zur Erde abgeleitet war. Die Pole konnten miteinander vertauscht werden; vorausgesetzt wurde, daß bei allen Versuchen das Potential eines Streifenpaares den gleichen Wert V hatte. Gemessen wurden die Ablenkungswinkel φ und φ_0 des beweglichen Teiles, einmal während das Gefäß Luft, das andere Mal, während es die zu untersuchende Flüssigkeit enthielt. Mit Hilfe von φ und φ_0 ließ sich das Verhältnis $f : f_0$, also auch der Wert von K finden.

Fig. 150.



Modifikationen obiger Methode haben Tomaszewski, Cohn und Arons, Tereschin, Perot, Heerwagen, Rosa, Landolt und Jahn, Francke, Smale u. a. angewandt.

Cohn und Arons (1888) ersetzten die konstante Batterie durch eine Induktionsspule und maßen mit Hilfe eines besonderen Quadrantenelektrometers die Potentiale, die für jeden neuen Versuch geändert werden konnten. Nach dieser Methode haben die genannten Forscher zuerst die Existenz sehr großer Werte für die Dielektrizitäts-

konstante nachgewiesen, sie fanden nämlich für Wasser $K = 76$, für Äthylalkohol 26,5 und für Amylalkohol 15.

Tereschin (1889) hat ebenfalls zwei Elektrometer benutzt, wobei er jedoch nur eine Flüssigkeit, nämlich Äthylalkohol, mit der Luft verglich. Zu diesem Zwecke wurden zuvor beide Elektrometer mit ein und derselben Flüssigkeit gefüllt, wodurch ihre Angaben miteinander vergleichbar wurden. Hierauf wurde das erste mit Äthylalkohol gefüllt, während das zweite Luft enthielt; diese Beobachtungen gaben für Äthylalkohol den Wert $K_0 = 27{,}0$. Endlich wurde das zweite Elektrometer mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und das Verhältnis $K : K_0$ bestimmt. Für Wasser erhielt Tereschin auf diese Weise den Wert $K = 83{,}8$.

Perot (1891) hat zuerst eine Differentialmethode in Anwendung gebracht, indem er zwei Quadrantenelektrometer übereinander brachte, wobei beide Nadeln derart miteinander fest verbunden waren, daß ihre Bewegung von der Differenz der Wirkungen abhing, denen sie einzeln unterworfen wurden. Die oberen Quadranten blieben immer in Luft, die unteren befanden sich in der zu untersuchenden Flüssigkeit. Heerwagen (1892) hat diese Methode wesentlich vervollkommnet. Er fand für Wasser $K = 81{,}1$.

3. Methode von Quincke. Quincke hat K nach zwei Methoden gemessen, von denen die erstere nur eine Modifikation der Methode von Silow darstellt.

Quincke maß zunächst die gegenseitige Anziehung der Platten eines ebenen horizontalen Kondensators, der in die zu untersuchende Flüssigkeit eingebettet war. Die untere Platte war unbeweglich, die obere hing am Wagebalken einer Wage und stützte sich auf die Schrauben, die an der unteren Platte vorbeiführten. Die letztere wurde mit dem Elektrometer und einer Leidener Flasche verbunden, die obere Platte wurde geerdet und an der Wage ins Gleichgewicht gebracht. Die Leidener Flasche wurde kräftig geladen und auf die Wagschale das Gewicht p gebracht. Hierauf wurde die Flasche ganz allmählich entladen und die Angabe des Elektrometers in dem Augenblick notiert, wo die obere Platte losgerissen wurde. Auf diese Weise wurde das Potential V der unteren Platte und die ihm entsprechende Anziehung p der Platten bestimmt. Nach der Formel (57) auf S. 117 ist

$$p = \frac{KSV^2}{8\pi d^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

wo S die Flächeneinheit der Oberfläche der oberen Platte ist. Hieraus läßt sich K berechnen. Ein anderer Wert, den wir mit K_1 bezeichnen, wurde auf folgende Weise erhalten: durch eine Öffnung in der oberen Platte wurde eine große Luftblase in den Raum zwischen den Platten gebracht. Der Druck dieser Luft wurde mit Hilfe eines besonderen

Manometers gemessen. Wurde die untere Platte auf das Potential V gebracht, so nahm der Luftdruck zu und das Manometer stieg um einen gewissen Betrag h. Eine von Kirchhoff gegebene Herleitung zeigt, daß in diesem Falle

$$h\delta = \frac{(K_1 - 1)\, V^2}{8\pi d^2} \quad \ldots\ldots \quad (53, a)$$

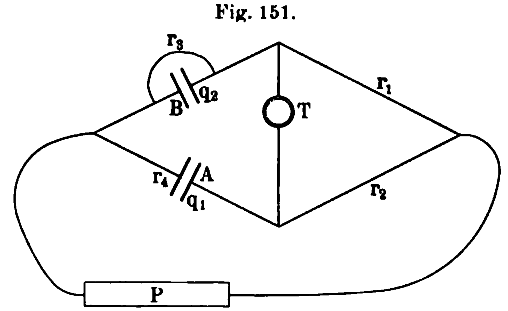
ist, wo δ das spezifische Gewicht der Manometerflüssigkeit bedeutet. Eine Vergleichung der Formeln (53) und (53, a) gibt

$$K_1 = 1 + \frac{h\delta K S}{p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Nach dieser Formel hat Quincke den Wert für K_1 berechnet, der von K nur wenig differierte.

4. Methode von Nernst. Diese Methode hat gegenwärtig, besonders in Deutschland, vielfache Anwendung gefunden. Sie ist eine Modifikation der auf S. 337 beschriebenen Methode 7 der Vergleichung

Fig. 151.



von Kapazitäten. Wie wir sahen, schweigt ein Telephon, wenn $q_1 : q_2 = r_2 : r_1$ ist (vgl. Fig. 139, S. 337). Es sei $r_1 = r_2$, in diesem Falle ist $q_1 = q_2$. Indes hört ein Telephon nicht auf zu tönen, wenn die zu untersuchende, beispielsweise den Kondensator A erfüllende Flüssigkeit auch nur die geringste Leitfähigkeit besitzt. Schaltet man jedoch parallel zum Meßkondensator B den Widerstand r_3, so schweigt das Telephon, falls $r_1 = r_2$ ist und ferner die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{l} r_4 = r_3 \\ q_2 = q_1 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

bestehen, in denen r_4 den Widerstand des Kondensators A bedeutet. Durch Änderung von r_3 und q_2 bringt man es dahin, daß das Telephon schweigt. Dann ermöglicht die Gleichung $q_1 = q_2$ ein Vergleichen der Werte von K für verschiedene, den Kondensator ausfüllende Flüssigkeiten. Nernst hat seine Methode bis in die kleinsten Details ausgearbeitet, weshalb wir von einer eingehenden Beschreibung derselben an dieser Stelle absehen. Eine ausführliche Beschreibung dieser Methode

kann man in der 5. Aufl. von E. Wiedemann und H. Eberts Physikalisches Praktikum, S. 487, finden.

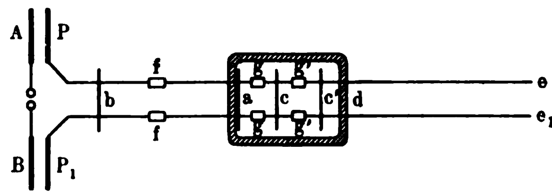
Linde, Silberstein, Abegg, Starke, Philip u. a. haben obige Methode angewandt; Philip hat sie noch weiter vervollkommnet. Röntgen hat ebenfalls eine der Nernstschen ähnliche Methode benutzt.

5. Methode von Borgmann. Auf S. 338 haben wir eine Methode von Borgmann zur Messung von Kapazitäten kennen gelernt. Derselben Methode kann man sich offenbar auch zur Messung der Werte von K bedienen. Frl. M. Petrow (1904) hat auf diese Weise K für verschiedene Flüssigkeiten gemessen, darunter auch für flüssige Luft ($K = 1{,}33$).

6. Andere Methoden, die wir nicht betrachten werden, sind von Perot (1891), Bouty (1892), Cohn und Arons (1886), Cohn (1889), Veley (1906) u. a. in Anwendung gebracht worden.

7. Bestimmung von K mit Hilfe von elektrischen Strahlen. Die Formeln (51), (51, a) und (51, b), S. 348, haben uns gezeigt, wie

Fig. 152.



man mit Hilfe von elektrischen Strahlen K bestimmen kann. Einige der Methoden, die bereits betrachtet worden sind (für feste Substanzen), sind auch für Flüssigkeiten angewandt worden. So hat z. B. Lecher (S. 349) den Wert von K für Petroleum bestimmt.

Die Wellenlänge λ von elektrischen Strahlen, welche sich innerhalb der zu untersuchenden Flüssigkeit ausbreiten oder indirekt die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieser Strahlen haben J. J. Thomson, Waitz, Arons und Rubens, Cohn, Udny Yule, Thwing, Coolidge, Cole, Bose, Marx, Ferry, Kossonogow und insbesondere Drude bestimmt.

Wir wollen uns mit dem Hinweis auf eine der in Anwendung gebrachten Methoden, nämlich der Methode von Cohn (1892) begnügen. Zwischen den Platten A und B (Fig. 152) trat eine oszillierende Entladung auf. Die ihnen parallelen Platten PP_1 waren mit den Drähten Pe und P_1e_1 verbunden, welche durch das mit Wasser gefüllte Gefäß M hindurchgehen; an der Innenseite von M waren die erwähnten Drähte durch den Draht a überbrückt. Eine andere, verschiebbare Brücke b wurde in eine solche Lage gebracht, daß im Leitersysteme ba möglichst intensive elektrische Schwingungen erhalten wurden, die dann durch einen sehr empfindlichen Apparat (ein Bolometer, vgl. Bd. II), der mit

beweglichen Leidener Flaschen vom System Rubens verbunden war, wahrnehmbar gemacht wurden. In solchem Falle befinden sich die Systeme ba und PbP_1 in Konsonanz. Es wurden nun zwei solche Stellen c und c' einer dritten Brücke aufgesucht, bei denen in den Systemen ac und ac' die kräftigsten Schwingungen auftreten. gg und $g'g'$ waren in diesem Falle die Stellen der mit dem Bolometer verbundenen Leidener Flaschen. Die Systeme ac und ac' stehen im Einklange mit ba. Sieht man von gewissen Korrektionen ab, so kann man aus obigem den Schluß ziehen, daß sich die Wellenlänge in Luft zur Wellenlänge in Wasser wie ba zu cc' verhält. Für das gesuchte Verhältnis, das dem Brechungsquotienten n der elektrischen Strahlen im Wasser (bei 17°) gleich ist, wurde der Wert $n = 8{,}6$ gefunden.

Dieses Resultat zeigt, daß Wasser im Gebiete der elektrischen Strahlen eine gewaltig große anomale Dispersion besitzt. Für K erhält man nämlich $K = n^2 = 73{,}5$.

Ellinger (1892) hat eine unmittelbare Messung von n vorgenommen, indem er die Ablenkung der elektrischen Strahlen in einem mit Wasser gefüllten Holzprisma maß. Er fand für n ungefähr den Wert 9.

Cole (1896) hat die Reflexion der elektrischen Strahlen an einer Wasseroberfläche für den Fall, daß die Schwingungen senkrecht, sowie daß sie parallel der Einfallsebene waren, gemessen. Nach den Formeln von Fresnel (Bd. II) hat er $n = 8{,}85$ gefunden.

Indem wir hiermit die Bestimmungen von K für Flüssigkeiten abschließen, bemerken wir noch, daß für verflüssigte Gase von Linde (CO_2, N_2O, Cl_2, SO_2), Goodwin (NH_3), Hasenöhrl (N_2O, O_2), Dewar und Fleming (Luft und O_2), Frl. Petrow (Luft) u. a. Messungen von K angestellt worden sind.

8. Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten für Gase und Dämpfe. Die erste Bestimmung von K für ein Gas hat Boltzmann im Jahre 1874 ausgeführt. Zwei Metallplatten A und B (Fig. 153), die sorgfältig isoliert und vor Wärmewirkungen geschützt waren, wurden unter eine Metallglocke gebracht; Art und Druck des unter jener Glocke befindlichen Gases konnten variiert werden. Die Platte A wurde mit einer Batterie P aus 300 Daniellelementen verbunden, B konnte mit der Erde (T) oder mit einem Elektrometer E verbunden werden. Es sei K_1 die Dielektrizitätskonstante desjenigen Gases, welches sich zu Beginn des Versuches unter dem Rezipienten befindet. Man verbindet P mit A, so daß A ein gewisses Potential V erhält; B wird geerdet und mit dem Elektro-

Fig. 153.

meter E verbunden. Darauf unterbricht man die Verbindung von A mit P und wechselt entweder das Gas selbst oder seinen Druck. Es sei K_2 der neue Wert für K. Dann ist das Potential von A gleich $V\frac{K_1}{K_2}$; man verbindet abermals A mit P, wodurch das Potential von A den Wert $V\left(1-\frac{K_1}{K_2}\right)$ erhält. Diese Potentialzunahme bewirkt am Elektrometer E eine Ablenkung α, wobei

$$V\left(1-\frac{K_1}{K_2}\right)=C\alpha$$

ist, falls C den entsprechenden Proportionalitätsfaktor darstellt. Jetzt wird B geerdet, wiederum mit E verbunden und zu P noch ein Element hinzugefügt. Das Potential in A nimmt den Wert $\frac{V}{n}$ an, wobei $n = 300$ (d. h. gleich der Anzahl der Daniellelemente) ist, während am Elektrometer die Ablenkung β auftritt, so daß

$$\frac{V}{n}=C\beta$$

ist. Dividiert man jetzt die eine Gleichung durch die andere, so erhält man einen Ausdruck, aus dem sich das Verhältnis $K_1 : K_2$ ergibt.

Setzt man $K = 1 + bp$, wo p der Gasdruck, b ein konstanter Faktor ist und bestimmt das Verhältnis

$$\frac{K_1}{K_2}=\frac{1+bp_1}{1+bp_2} \quad \text{. . . . .} \quad (56)$$

für die beiden Drucke p_1 und p_2, so erhält man b, also auch den Wert von K für den Druck $p = 760$ mm. Auf diese Weise hat Boltzmann folgende Werte erhalten (bezogen auf 0° und 760 mm Druck)

	Luft	CO_2	H_2	CO
$K =$	1,000590	1,000946	1,000264	1,000690

NO	C_2H_4	CH_4
1,000994	1,001312	1,000944

Diese Werte genügen sehr gut der Formel $K = n^2$.

Ayrton und Perry (1877) und Klemenčič (1885) haben die Kapazitäten zweier Kondensatoren miteinander verglichen und auf diese Weise das Verhältnis $K_1 : K_2$ bestimmt.

Lebedew (1891) hat K für die Dämpfe von verschiedenen organischen Flüssigkeiten dadurch bestimmt, daß er die Kapazitäten zweier zylindrischer Kondensatoren miteinander verglich, von denen der eine ungeändert blieb, während der andere zuerst mit Luft und darauf mit den Dämpfen der zu untersuchenden Flüssigkeiten gefüllt

wurde. Er fand beispielsweise für Benzoldampf (100°) den Wert $K = 1{,}0027$, für Äthylalkohol (100°) $K = 1{,}0065$ usw.

Im Jahre 1901 ist eine umfangreiche Arbeit von Bädecker erschienen, der die Nernstsche Methode (S. 355) auf Gase angewandt hat. Er hat als erster die Abhängigkeit der Werte für K von der Temperatur bestimmt und überhaupt Werte von K für NH_3, N_2O_4, HCl und Wasserdampf gefunden. Die benutzten Kondensatoren bestanden aus Nickel, für die Untersuchungen von N_2O_4 aus Platin.

Occhialini (1905) hat K für Luft bei Drucken zwischen 20 und 180 Atm. bestimmt; die entsprechenden Werte von K waren 1,0101 und 1,0845.

§ 7. Einige Messungsresultate der Dielektrizitätskonstanten.

1. Wir haben fast gar keine numerischen Werte für K angeführt und verweisen in bezug hierauf den Leser auf die vorhandenen Tabellen. Es sei bloß bemerkt, daß die von verschiedenen Beobachtern für solche festen Körper wie Glas, Ebonit und ähnliche gefundenen Werte im allgemeinen schlecht miteinander übereinstimmen. Dies wird leicht dadurch erklärbar, daß die chemische Zusammensetzung und die physikalische Beschaffenheit der Substanz einen großen Einfluß auf den Wert von K ausüben müssen. Einen sehr großen Wert haben Dewar und Fleming für eine zehnprozentige feste Lösung von NaHO in Wasser von $-117{,}4^0$ gefunden, nämlich $K = 272$. Es ist sehr wahrscheinlich, daß K auch für Metalle einen bestimmten physikalischen Sinn und einen endlichen Zahlenwert hat; auf diese Frage hat E. Cohn (1903) hingewiesen.

2. Die Maxwellsche Formel $K = n^2$ wird nur zufällig angenähert erfüllt, wenn man für n den Brechungsquotienten der sichtbaren Strahlen wählt oder wenn man n nach der Cauchyschen Formel für $\lambda = \infty$ berechnet. Was die elektrischen Strahlen anlangt, so war von ihnen auf S. 347 die Rede und haben wir gesehen, daß die Messung von n für diese Strahlen gegenwärtig die gewöhnliche Methode zur Bestimmung von K bildet.

3. Die Zeitdauer, während welcher sich das Dielektrikum im elektrischen Felde befindet, hat einen außerordentlich großen Einfluß auf das für K erhaltene Messungsergebnis. Wir hatten hierauf bereits bei Erwähnung der Versuche von J. J. Thomson und Lecher hingewiesen. Wir wollen noch die Messungsresultate von Schiller und Ferry anführen: mit τ bezeichnen wir die Elektrisierungsdauer. Schiller (1874) hat für K folgende Werte gefunden:

Substanz	$\tau = 6 \cdot 10^{-5}$ sec	$\tau = 0{,}02$ sec
Ebonit	2,21	2,76
Reiner Kautschuk	2,12	2,34
Vulkanisierter Kautschuk	2,69	2,94
Durchsichtiges Paraffin	1,68	1,92
Weißes Paraffin	1,85	2,47
Halbweißes Glas	3,31	4,12
Spiegelglas	5,83	6,34

E. S. Ferry (1897) gibt folgende Werte an:

Substanz	$\tau = 3 \cdot 10^{-8}$ sec	$\tau = 0{,}002$ sec
Rizinusöl	4,49	4,65
Olivenöl	3,02	3,13
Baumwollsamenöl	3,00	3,09
Petroleum	1,99	2,05
Ebonit	2,32	2,55
Quarz ⊥ zur Achse	4,04	4,46
Quarz ‖ zur Achse	4,27	4,38

Für kleinere Werte von τ erhält man im allgemeinen auch kleinere Werte von K. Dewar und Fleming finden bei großen Werten von τ für Eis (0°) den Wert $K = 78$, bei sehr kleinem τ (elektrische Schwingungen) dagegen etwa $K = 2$.

4. Den Einfluß der Temperatur t auf die Werte für K haben zahlreiche Untersuchungen zum Gegenstande. Wir wollen die festen, flüssigen und gasförmigen Körper gesondert betrachten.

Feste Körper hat Cassie (1889, 1891) untersucht. Er fand, daß K innerhalb des Temperaturintervalls zwischen 15 und 16° mit steigender Temperatur für Glimmer, Ebonit, Glas und Paraffin zunimmt. Die auf 1° bezogene Zunahme α hat folgende Werte:

	Glimmer	Ebonit	Glas I	Glas II	Paraffin
$\alpha =$	0,0003	0,0004	0,0012	0,0020	0,0023

Pellat und Sacerdote (1899) fanden, daß sich für Paraffin K bei der Erwärmung vermindert, für Ebonit dagegen vergrößert. Dewar und Fleming haben K für Eis, sowie für viele Lösungen, verflüssigte Gase und organische Substanzen bei sehr niedrigen Temperaturen untersucht. Für Eis finden sie (1897):

t^0	K	t^0	K	t^0	K
— 206,0	2,43	— 128,0	5,95	— 72,4	41,8
— 175,0	2,43	— 114,0	9,60	— 49,0	57,2
— 164,0	2,59	— 106,2	13,09	— 27,2	59,2
— 144,7	3,94	— 89,4	27,06	— 21,0	61,3

Behn und Kiebitz (1904) haben die Drudesche Methode angewandt und bei — 190° für Eis Werte zwischen 1,76 und 1,88 für K gefunden. Für Glyzerin wächst K von 3,2 bis 60 bei einer Temperaturzunahme von — 200° bis — 40°.

Flüssige Körper sind von vielen Forschern untersucht worden. Negreano, Palaz und Cassie fanden, daß sich K für Benzol, Toluol, Xylol, Glyzerin, CS_2 u. a. mit Zunahme der Temperatur vermindert. Das gleiche Resultat erhielt Linde für verflüssigtes CO_2, NO und Cl_2.

Heerwagen (1893) hat sehr sorgfältige Untersuchungen für Wasser ausgeführt und gefunden, daß K zwischen 4,7° und 20,75° nach folgender Formel

$$K = 87{,}032 - 0{,}362\,t$$

bestimmt werden kann; danach ist $K = 85{,}49$ für $t = 4{,}7°$ und $K = 79{,}52$ für $t = 20{,}75°$.

Francke findet $K = 90{,}68$ bei 2,6° und $K = 80{,}12$ bei 20,1°. Cohn hat ebenfalls Wasser untersucht; seine Zahlenwerte stimmen mit Formel (35, d), S. 77, was von den Werten Heerwagens und Franckes nicht gesagt werden kann. Die neuesten Untersuchungen von Ratz (1896) gaben bis 40° Werte, welche mit der Formel von Clausius-Massotti, vgl. (35,d), S. 77, sehr gut übereinstimmen. Endlich hat Vonwiller (1904) gefunden, daß die Werte von K für Wasser regelmäßig abnehmen, während die Temperatur von 0° bis 28° wächst; bei 4° zeigt der Wert von K keinerlei Anomalie.

Andere Flüssigkeiten sind von Hasenöhrl (1896), Abegg, Tangl (1903), Eversheim u. a. untersucht worden. Der erste der Genannten findet, daß die Flüssigkeiten im allgemeinen der Formel (35, d), S. 77, genügen. Abegg (1897) findet, daß man für Flüssigkeiten

$$K = Ce^{-\frac{\tau}{190}}$$

setzen kann, wo C eine Konstante, τ die absolute Temperatur, e die Basis der natürlichen Logarithmen ist. Tangl (1903) fand, daß sich die Formel von Clausius-Massotti nur für Xylol zwischen 0 und 130° bestätigt findet. Für Benzol, Toluol, Chloroform, Äther und CS_2 zeigen sich Abweichungen. Für Äther nimmt K bei Annäherung an die kritische Temperatur schnell ab. Eversheim (1903) hat verflüssigtes NH_3, SO_4 und Äthyläther untersucht; er fand, daß K sich beim Durchgang durch den kritischen Zustand kontinuierlich ändert.

Die Abhängigkeit der Werte von K für Gase von der Temperatur hat zuerst Bädecker (1901) untersucht. Er fand, daß K mit zunehmender Temperatur für SO_2, NH_3, HCl, NO_2 und für Dämpfe von H_2O, CS_2, Methylalkohol und Äthylalkohol abnimmt.

5. Röntgen und Ratz haben den Einfluß des Druckes untersucht. Ersterer findet, daß sich für Wasser und Alkohol K bis zu

Drucken von 500 Atm. nicht ändert; Ratz findet, daß sich für Wasser K ein wenig vergrößert, aber viel weniger, als es der Formel (35, d), S. 77, entsprechen würde.

Corbino hat bemerkt, daß sich K für Glas vermindert, wenn man letzteres senkrecht zu den Kraftlinien streckt. Dessau kommt zu dem entgegengesetzten Resultat.

6. Für Flüssigkeitsgemische haben Silberstein, Philip und Lineberger die Werte von K bestimmt. Sie finden, daß K im allgemeinen größer ist, als eine Rechnung nach der einfachen Mischungsregel ergibt. Boccara und Pandolfi haben für reines Paraffin $K = 2{,}35$ gefunden, für ein Gemenge aus gleichen Teilen Paraffin und Eisenfeilicht $K = 14$. Ehrenhaft (1902) hat Mischungen von Hexan und Aceton untersucht; er fand, daß K und die Dichte δ der Mischung beinahe in gleicher Weise von den Werten abweichen (zu klein ausfallen), die nach der Mischungsregel berechnet sind, so daß K eine lineare Funktion von δ darstellt.

7. Eine Vergleichung der Werte von K für eine gegebene Substanz im flüssigen und gasförmigen Zustande zeigt, daß die Formel (35 d), S. 77, in einigen Fällen vollkommen bestätigt wird, beispielsweise für CO_2, CS_2, Äther und Benzol. Für andere Substanzen erweist sich die genannte Formel nicht als richtig.

8. Wiederholt ist darauf hingewiesen worden, daß K auch von anderen physikalischen Größen abhängt. Die Versuche jedoch, K mit der latenten Verdampfungswärme, dem Siedepunkte, dem Ausdehnungskoeffizienten (Obach), der Dichte (Tereschin) in Zusammenhang zu bringen, haben bis jetzt zu keinen klaren Ergebnissen geführt.

9. Über den Zusammenhang zwischen K und den chemischen Eigenschaften der Stoffe ist nur wenig bekannt. Hier ist zunächst die von Nernst gefundene Regel zu erwähnen: je größer die dissoziierende Fähigkeit einer Flüssigkeit ist, d. h. ihre Fähigkeit, die in ihr aufgelösten Substanzen in Ionen zu spalten, um so größer ist ihre Dielektrizitätskonstante. Gase ($K = 1$), Benzol (2,3), Äther (4,1), Alkohol (25), Ameisensäure (62), Wasser (80) stellen eine Reihe von Stoffen mit zunehmender Dissoziationsfähigkeit dar. Euler (1898) bestätigt diese Angabe von Nernst. Tereschin schließt aus seinen Messungen 1., daß in homologen Reihen von Fettsubstanzen K abnimmt, in Reihen von aromatischen Stoffen dagegen zunimmt (Beobachtungen von Tomaszewski), wenn das Molekulargewicht wächst, und 2., daß in metameren Verbindungen überhaupt verschiedene Werte für K gefunden werden.

Thwing hat gezeigt, daß für viele Stoffe K nach folgender Formel berechnet werden kann:

$$K = \frac{D}{M} (a_1 K_1 + a_2 K_2 + \cdots)$$

wo D die Dichte, M das Molekulargewicht der Verbindung, K_1, K_2... für die Atome oder die Moleküle bildenden Gruppen charakteristische Zahlen, a_1, a_2... die Anzahl dieser Atome oder Gruppen sind. Hierbei ist $K(H) = 2{,}6$; für andere Atome allgemein $K_x = 2{,}6 \times A_x$, wo A_x das Atomgewicht ist, z. B. $K(O) = 2{,}6 \times 16$; ferner ist $K(HO) = 1356$, $K(CO) = 1520$, $K(COH) = 970$, $K(NO_2) = 3090$, $K(CH_2) = 41{,}6$, $K(CH_3) = 46{,}8$; für Schwefel $K(S) = 2{,}6 \cdot 16$ (nicht aber $2{,}6 \times 32$).

Wie Drude nachgewiesen hat, weichen jedoch die Thwingschen Resultate zum Teil sehr stark von denen anderer Beobachter ab.

Lang findet, daß für Gase die Beziehung $\frac{K-1}{s} = 0{,}000\,123$ besteht, wo s die Summe der Atombindungen jener Atome ist, aus denen die Gasmolekel besteht, z. B. für Wasserstoff $s = 1 + 1 = 2$, für Kohlensäure $s = 4 + 2 + 2 = 8$ usw. Obige Formel wird aber in vielen Fällen nicht bestätigt.

10. Die Formel von Clausius-Massotti (35,d), S. 77, ist von vielen untersucht worden, so z. B. von Beaulard, Lebedew, Millikan, Hlavati u. a. Hierbei hat Hlavati Quecksilbersalbe untersucht; die Übereinstimmung mit der Formel war im allgemeinen befriedigend.

Eine sehr vollständige Bibliographie der Arbeiten über Dielektrizitätskonstanten hat Mathews (1905) zusammengestellt.

Literatur.

Zu § 3.

Koláček: W. A. **28**, 525, 1886.
Hankel: Abh. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 1850, S. 71; Ibid. **5**, 392; **9**, 5, 22, 206; Pogg. Ann. **84**, 28, 1850; **103**, 209, 1858.
Branly: Compt. rend. **75**, 431, 1872.
Dellmann: Pogg. Ann. **55**, 301, 1842; **58**, 49, 1843; **86**, 524, 1852; **106**, 329, 1859.
R. Kohlrausch: Pogg. Ann. **72**, 353, 1847; **74**, 499, 1848.
W. Thomson (Lord Kelvin): Rep. Brit. Assoc. **2**, 22, 1855; 1867, p. 489 (abs. Elektrom.); Phil. Mag. (4) **20**, 253, 1860; Rep. of Papers, p. 257, 260—312, London 1872.
Nernst u. Dolezalek: Zeitschr. f. Elektrochem. **3**, 1, 1896.
Dolezalek: Instr. **17**, 65, 1897; **21**, 345, 1901; **26**, 339, 1906; Elektrotechn. Zeitschr. **18**, 507, 1897.
Angot: Ann. de l'École Norm. (2) **3**, 253, 1874.
Branly: Ann. de l'École Norm. (2) **2**, 209, 1873.
G. Wiedemann: Elektrizität **1**, 171, 1893.
Righi: Rendic. di Bologna (3) **7**, II, 193, 1876.
Hallwachs: W. A. **29**, 1, 300, 1886.
Curie: Lum. Électr. **22**, 57, 148, 1886; Compt. rend. **107**, 864, 1888.
Guglielmo: Rendic. Acc. dei Lincei **6**, 228, 1890.
Edelmann: Carls Repert. **15**, 461, 1879.
Blondlot: Journ. de phys. (2) **5**, 325, 1886.
Maxwell: Electric. and Magn. **1**, 273, 1873.
Hopkinson: Phil. Mag. (5) **19**, 291, 1885; Proc. phys. soc. **7**, 7, 1885.

Hartwig: W. A. **35**, 772, 1889.
Walker: Phil. Mag. (6) **6**, 238, 1903.
Gouy: Journ. de phys. (2) **7**, 97, 1888.
Ayrton, Perry and Sumpner: Phil. Trans. **182**, I, 519, 1891.
Chauveau: Journ. de phys. (3) **9**, 524, 1900.
Ohrlich: Instr. **23**, 97, 1903.
Blondlot et Curie: Journ. de phys. (2) **8**, 80, 1889.
Lane: Phil. Trans. **12**, 475, 1767.
Lippmann: Journ. de phys. (2) **5**, 323, 1886.
Harris: Phil. Trans. **2**, 215, 1834.
Riess: Pogg. Ann. **96**, 513, 1855.
R. Kohlrausch: Pogg. Ann. **88**, 497, 1853.
Bichat et Blondlot: Compt. rend. **102**, 753, 1886; **103**, 245, 1886.
Wilson: Proc. Cambr. Phil. Soc. **122**, 135, 1903; Instr. **23**, 314, 1903.
Ebert u. Hofmann: Instr. 1898, p. 1.

Zu § 4.

Cavendish: The Electrical Researches of Henry Cavendish, edited by Cl. Maxwell 1879, § 282.
Angot: Ann. de l'École Norm. (2) **3**, 253, 1874.
W. Thomson: Reprint of papers 1870, p. 287.
W. Siemens: Pogg. Ann. **102**, 66, 1857.
Fleming u. Clinton: Phil. Mag. (6) **5**, 493, 1903.
De Metz: Zeitschr. f. Elektrotherapie **4**, Nr. 2—3, 1902.
Borgmann: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **32**, 229, 1900; Phys. Zeitschr. **2**, 651, 1901.
Schiller: Pogg. Ann. **152**, 535, 1874.
Gaugain: Ann. de chim. et phys. (3) **64**, 174, 1862.
Cohn u. Arons: W. A. **28**, 454, 1886.
J. J. Thomson: Proc. R. Soc. London **46**, 292, 1889.
Wien: W. A. **44**, 689, 1891.
Waghorn: Phil. Mag. (5) **27**, 69, 1889.
Klemenčič: Wien. Ber. **89**, 298, 1884.
Rosa and Grover: Bureau of Standarts, Bullet. No. 2, Washington 1905.
Diesselhorst: Ann. d. Phys. (4) **19**, 382, 1906.
Bulgakow u. Smirnow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **38**, 46, 1906.

Zu § 5.

Harris: Phil. Trans. **132**, I, 165, 1842.
Matteucci: Ann. de chim. et phys. (3) **27**, 133, 1849; **57**, 423, 1859: Compt. rend. **48**, 700, 1859.
Belli: Corso elem. di fisica esper. **3**, 239, 1858.
Faraday: Exper. Research. Serie **11**, **12**.
W. Siemens: Pogg. Ann. **102**, 66, 91, 1857.
Rossetti: N. Cim. (2) **10**, 171, 1873.
Gibson and Barclay: Phil. Trans. **161**, 573, 1871; Phil. Mag. (4) **41**, 543, 1873.
Felici: N. Cim. (2) **5**, 73, 1871; **6**, 73, 1871.
Boltzmann: Wien. Ber. **66**, 1, 1872; **67**, 1, 1873; **68**, 81, 1873: **70**, 307, 342, 1874; Pogg. Ann. **151**, 482, 531, 1873; **153**, 525, 1874; **155**, 403, 1875; Arch. d. Sc. phys. (2) **55**, 448, 1876.
Gordon: Phil. Trans. **168**, I, 417, 1878; **170**, 425, 1879; Phys. treatise on El. and Magn. **1**, 109. London 1880.
Hopkinson: Phil. Trans. **169**, 17, 1878; **172**, 1, II, 355, 1881; Proc. R. Soc. **43**, 156, 1887.

Wüllner: W. A. 1, 247, 361, 1877.
Elsas: W. A. 42, 165, 1891; 44, 654, 1891.
Stankiewicz: W. A. 52, 700, 1894.
Winkelmann: W. A. 38, 161, 1889; 40, 732, 1890.
Donle: W. A. 40, 307, 1890.
Schtschegljajew: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 23, 170, 1891.
Blondlot: Compt. rend. 112, 1058, 1891; 119, 595, 1894; Journ. de phys. (2) 10, 549, 1891.
Lecher: W. A. 41, 850, 1890; 42, 142, 1891; Wien. Ber. 99, 480, 1890.
Hasenöhrl: Wien. Ber. 105, 460, 1896.
Negreano: Compt. rend. 114, 345, 1892; Journ. de phys. (2) 6, 257, 1887.
Palaz: Rech. éxper. sur la capac. induct. spéc. 1896; Arch. des sc. phys. (3) 17, 287, 414, 1887.
Werner: W. A. 47, 613, 1892.
Cohn: W. A. 46, 135, 1892.
Sokolow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 25, 179, 1892.
Kossonogow: Zur Frage der Dielektrika. (Russ.) Kiew 1901.
Romich u. Nowak: Wien. Ber. 70, 380, 1874.
Boltzmann, Romich u. Fajdiga: Wien. Ber. 70, 367, 1874.
Trouton and Lilly: Phil. Mag. (5) 33, 529, 1892.
Rosa: Phil. Mag. (5) 31, 188, 1891; 34, 344, 1892.
Lefèvre: Compt. rend. 113, 688, 1891; 114, 834, 1892.
Schiller: Pogg. Ann. 152, 535, 1874.
J. J. Thomson: Proc. R. Soc. 46, 292, 1889: Phil. Mag. (5) 30, 129, 1890.
Hertz: W. A. 34, 551, 1888.
Zehnder: W. A. 47, 77, 1892; 52, 34, 1894; 53, 162, 505, 1894.
Lebedew: W. A. 56, 1, 1895.
Mack: W. A. 54, 342, 1895; 56, 717, 1895.
Lampa: Wien. Ber. 105, 587, 1896; W. A. 61, 79, 1897.
Righi: L'Ottica d. oscil. elettr., p. 1—27.
Fellinger: Ann. d. Phys. (4) 7, 333, 1902.
Wiedeburg: W. A. 59, 497, 1896.
Graetz u. Fomm: W. A. 45, 626, 1895; 53, 85, 1894.
Gutton: Compt. rend. 130, 894, 1119, 1900.
Ferry: Phil. Mag. (5) 44, 404, 1897.
Knoblauch: Pogg. Ann. 83, 289, 1851.
Root: Pogg. Ann. 158, 31, 1876.
Braun: W. A. 31, 855, 1887.
Curie: Compt. rend. 103, 928, 1886; Lum. électr. 28, 580; 29, 13, 63, 127, 221, 255, 318, 1888; Ann. de chim. et phys. (6) 17, 385, 1889; 18, 203, 1889.
Borel: Compt. rend. 116, 1509, 1893.
Drude: W. A. 55, 633, 1895; 58, 1, 1896; 59, 17, 1896; 61, 466, 1897; 65, 481, 1898; Zeitschr. f. phys. Chem. 23, 267, 1897.
W. Schmidt: Ann. d. Phys. (4) 9, 933, 1902.
Grätz: Boltzmann-Jubelband, S. 477, 1904.

Zu § 6.

Flüssigkeiten:

Silow: Pogg. Ann. 156, 389, 1875; 158, 306, 1876.
Negreano: Compt. rend. 104, 428, 1887; Journ. de phys. (2) 6, 257.
Tomaszewski: W. A. 33, 33, 1888.
Cohn u. Arons: W. A. 33, 13, 1888.
Tereschin: W. A. 36, 792, 1889.

Heerwagen: W. A. **48**, 35, 1893; **49**, 272, 1893; Diss. Dorpat 1892.
Rosa: Phil. Mag. (5) **31**, 188, 1891.
Landolt u. Jahn: Zeitschr. f. phys. Chem. **10**, 289.
Francke: W. A. **50**, 163, 1893.
Smale: Phil. Mag. (5) **31**, 188, 1891.
Quincke: W. A. **19**, 728, 1883; **28**, 530, 1886; **32**, 529, 1887; **34**, 401, 1888; Berl. Ber. 1888, S. 4; Proc. R. Soc. **41**, 458, 1887.
Nernst: Zeitschr. f. phys. Chem. **14**, 622, 1894.
J. J. Thomson: Phil. Mag. (5) **30**, 129, 1890.
Linde: W. A. **56**, 546, 1895.
Silberstein: W. A. **56**, 660, 1895.
Abegg: W. A. **60**, 55, 1897; **62**, 249, 1897.
Abegg u. Seitz: Zeitschr. f. phys. Chem. **29**, 242, 1899.
Starke: W. A. **60**, 629, 1894.
Philip: Zeitschr. f. phys. Chem. **24**, 18, 1897.
Pérot: Compt. rend. **113**, 415, 1891; **115**, 38, 165, 1892; **119**, 601, 1894; Journ. de phys. (2) **10**, 149, 1891.
Bouty: Ann. de chim. et phys. (6) **27**, 62, 1892; Compt. rend. **115**, 554, 804, 1892.
Cohn: W. A. **38**, 42, 1889; **45**, 370, 1892; Berl. Ber. 1891, S. 1037.
Frl. Petrow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **36**, 93, 1904.
Veley: Phil. Mag. (6) **11**, 73, 1906.
Waitz: W. A. **41**, 436, 1890; **44**, 527, 1891.
Arons u. Rubens: W. A. **42**, 581, 1891; **44**, 206, 1891.
Udny Youle: W. A. **50**, 742, 1893.
Thwing: Zeitschr. f. phys. Chem. **14**, 286, 1894.
Coolidge: W. A. **69**, 125, 1899.
Cole: W. A. **57**, 290, 1896.
Rose: Proc. R. Soc. **59**, 160, 1896.
Marx: W. A. **66**, 411, 597, 1898.
Ferry: Phil. Mag. (5) **44**, 404, 1897.
Goodwin: Phys. Rev. **8**, No. 4.
Hasenöhrl: Communic. du Labor. de Phys. de Leyde No. 51, p. 29, 1899.
Dewar and Fleming: Proc. R. Soc. **60**, 358, 1896; **61**, 2, 358, 1897.

Gase:

Boltzmann: Wien. Ber. **69**, 795, 1874; Pogg. Ann. **155**, 403, 1875.
Ayrton and Perry: Asiatic. Soc. of Japan. 1877, 18. April.
Klemenčič: Wien. Ber. **91**, 712, 1885.
Lebedew: W. A. **44**, 288, 1891.
Bädecker: Zeitschr. f. phys. Chem. **36**, 305, 1901.
Bouty: Rapport, prés. au congr. internat. de phys. **2**, 341, Paris 1890.
Occhialini: Rendic. R. Acc. dei Lincei **14**, 613, 1905; N. Cim. (5) **10**, Oct. 1995.

Zu § 7.

Einen Teil der Literaturangaben siehe bei § 5 und § 6.

Dewar and Fleming: Proc. R. Soc. **60**, 358, 1896; **61**, 2, 299, 316, 358, 368, 380, 1897; **62**, 250, 1898.
Cohn: Phys. Zeitschr. **4**, 619, 1903.
Cassie: Proc. R. Soc. **48**, 357, 1889; **49**, 343, 1891.
Pellat et Sacerdote: Journ. de phys. (3) **8**, 17, 1899.
Behn u. Kiebitz: Boltzmann-Jubelband, S. 610, 1904.
Palaz: Arch. sc. phys. (3) **17**, 287, 414, 1887.
Francke: W. A. **50**, 163, 1893.
Mathews: Journ. phys. Chem. **9**, 641, 1905.

Abegg u. Seitz: Zeitschr. f. phys. Chem. **29**, 242, 1899.
Vonwiller: Phil. Mag. (6) **7**, 655, 1904.
Ratz: Zeitschr. f. phys. Chem. **19**, 94, 1896.
Tangl: Ann. d. Phys. (4) **10**, 748, 1903.
Eversheim: Phys. Zeitschr. **4**, 503, 1903.
Röntgen: W. A. **52**, 593, 1894.
Corbino: N. Cim. (4) **4**, 240, 1896; Riv. Scient. Indust. **29**, 1897.
Dessau: Rendic. R. Acc. dei Lincei (5) **3**, I, 488, 1894.
Lineberger: Zeitschr. f. phys. Chem. **20**, 131, 1896.
Boccara e Pondolfi: N. Cim. (4) **9**, 254, 1899.
Ehrenhaft: Wien. Ber. **111**, 1549, 1902.
Obach: Phil. Mag. (5) **32**, 113, 1891.
Euler: Öfversigt of Kongl. Vetensk. Förh. **55**, 689, 1898.
Lang: W. A. **56**, 535, 1895.
Hlavati: Wien. Ber. **110**, 454, 1901.
Beaulard: Compt. rend. **129**, 149, 1899.
Lebedew: W. A. **44**, 288, 1891.
Millikan: W. A. **60**, 376, 1897.

Fünftes Kapitel.

Elektrizität der Atmosphäre (der Erde).

§ 1. Einleitung. An der Erdoberfläche zeigen sich verschiedenartige elektrische Erscheinungen, deren Studium Gegenstand der sogenannten Lehre von der Luftelektrizität ist, richtiger sollte man sie die Lehre von der Erdelektrizität nennen, analog der Benennung eines anderen Teiles unserer Wissenschaft, nämlich der Lehre vom Erdmagnetismus.

Die Lehre von der Erdelektrizität wird gewöhnlich mit der Meteorologie vereinigt, nicht aber mit der Physik, weshalb auch in vielen Lehrbüchern der Physik und sogar in speziellen Lehrbüchern der Elektrizität die Lehre von der Erdelektrizität gänzlich fehlt, während doch der Lehre vom Erdmagnetismus in allen diesen Büchern ein besonderer Raum gewidmet ist. Der Grund hierfür liegt in dem zufälligen und rein äußerlichen Umstande, daß man bei der Beschäftigung mit der Physik auf Erscheinungen des Erdmagnetismus stößt, dessen Wirkungen sich an vielen physikalischen Apparaten äußern und deshalb bei vielen physikalischen Untersuchungen experimentellen Charakters in Betracht gezogen werden müssen. Die Erscheinungen der Erdelektrizität treten dagegen bei derartigen Untersuchungen nur äußerst selten auf und mit ihnen kommt man bei physikalischen Arbeiten fast gar nicht in Berührung. Allein dieser äußere Umstand sollte keine große Rolle spielen. Die Erscheinungen der Erdelektrizität an sich beanspruchen kein geringeres Interesse als diejenigen des Erdmagnetismus. Ohne auf speziellere Fragen eingehen zu wollen, halten wir es dennoch für geboten, diesen Erscheinungen das vorliegende kurze Kapitel zu widmen.

Die natürlichen elektrischen Erscheinungen, die sich an der Erdoberfläche abspielen, können in vier Gruppen eingeteilt werden:

1. Erscheinungen, die bei klarem Himmel auftreten.
2. Erscheinungen bei bedecktem Himmel; hierher gehören die Gewittererscheinungen.
3. Verschiedene ungewöhnliche Erscheinungen, wie z. B. das St. Elmsfeuer, das Leuchten von gewissen Körpern in der Dunkelheit und ähnliches.
4. Polarlichter.

Schon gleich zu Anfang wollen wir darauf hinweisen, daß die Lehre von der Erdelektrizität, ungeachtet der überaus umfangreichen Literatur, die sich mit ihr beschäftigt, doch erst ganz vor kurzem aus dem ersten Entwickelungsstadium herausgetreten ist. Über die Gesetze, denen die hierher gehörigen Erscheinungen gehorchen, ist nur wenig bekannt. Die relativ einfachsten Fragen, wie z. B. die Frage nach der täglichen Periode, sind noch strittig. Was die Erklärung dieser Erscheinungen anbelangt, die Angaben über Art und Lage der wirksamen elektrischen Massen, die Bestimmung ihres Ursprungs, die Angabe der Bedingungen, unter denen diese oder jene Erscheinung auftritt, sowie die Erklärung des inneren Mechanismus ihres Entstehens, so erhält man eine klare Vorstellung davon, wie diese Dinge noch vor kurzem lagen, wenn wir die ersten Zeilen aus einer Abhandlung von Chauveau (1899) wörtlich wiedergeben: „Die Zahl der Theorien, die sich auf die Luftelektrizität beziehen, ist eine sehr große. Im Jahre 1887 hat Suchsland deren fünfundzwanzig aufgezählt; vier von ihnen sind allein im Jahre 1884 entstanden. Beschränkt man sich auf Theorien, welche von Repräsentanten der strengen Wissenschaft, unter ihnen auch von namhaften Forschern, in Vorschlag gebracht worden sind, so kann man gegenwärtig mehr als dreißig derselben angeben. Was die mehr oder weniger eigentümlichen Hirngespinste anlangt, welche durch Beobachtungen der Gewitter hervorgerufen worden sind, die jedoch der Ehre gewürdigt worden sind, im Drucke veröffentlicht zu werden, so zählen diese nach Hunderten.“ Fügt man noch einige bemerkenswerte Theorien hinzu, die in der letzten Zeit vorgeschlagen worden sind, so kommt man auf die Zahl fünfunddreißig.

Also fünfunddreißig ernst zu nehmende Theorien! Das bedeutet offenbar soviel wie ein Fehlen jeder einigermaßen fest begründeten, allgemein gültigen Theorie. Zum Glück hat sich die Sachlage in der letzten Zeit geändert: es ist eine neue Lehre aufgekommen, die sich schnell entwickelt hat und die eine zuverlässige Grundlage für die endgültige Erklärung der verschiedenartigen Erscheinungen der Erdelektrizität zu werden verspricht.

Von den vier oben erwähnten Arten von Erscheinungen beanspruchen ein besonderes Interesse die Erscheinungen der ersten Art, nämlich die bei wolkenlosem Himmel auftretenden, die dank ihrer Einfachheit sozusagen als die normalen Erscheinungen anzusehen sind.

§ 2. Methoden zur Untersuchung des elektrischen Feldes der Erdatmosphäre. In der die Erde umgebenden Lufthülle wirken beständig elektrische Kräfte. Mit anderen Worten gesagt, das elektrische Potential V hat in verschiedenen Punkten der Atmosphäre ungleiche Werte oder aber der Raum, welcher von den unserer Beobachtung zugänglichen Schichten der Atmosphäre eingenommen ist, stellt ein elektrisches Feld dar. Das Studium dieses Feldes rückt vor allem die Frage in den Vordergrund, welches die Lage der Niveauflächen des Potentials V ist, senkrecht zu denen die elektrischen Kräfte F wirken. Als zweite tritt die Frage auf, welches die Größe dieser elektrischen Kräfte, insbesondere in verschiedenen Punkten ein und derselben Vertikalen ist. Diese letztere Frage erscheint besonders wichtig, da die Antwort auf sie den Streit zwischen zwei Gruppen von Hypothesen entscheidet, die in der prinzipiellen Frage auseinandergehen: Ist die Gesamtmenge der Elektrizität auf der Erdkugel gleich Null oder nicht? Wir wollen gleich bemerken, daß an einem vollkommen ebenen Orte und bei heiterem Wetter die Niveauflächen im allgemeinen Flächen (Kugelflächen) darstellen, welche dem Horizonte parallel sind. Die Kräfte F sind abwärts gerichtet, d. h. das Potential V nimmt in der Richtung nach oben zu. Ist n die Richtung der Normalen zur Niveaufläche, so ist

$$-F = \frac{\partial V}{\partial n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

In der Praxis mißt man die Potentialdifferenz ΔV zweier Punkte, welche sich in der Richtung von n im Abstande Δn voneinander befinden. Das Verhältnis $\Delta V : \Delta n$ wollen wir mit G bezeichnen und den elektrischen Gradienten im gegebenen Punkte nennen; ΔV wollen wir in Volts, Δn in Metern ausdrücken, so daß

$$G = \frac{\Delta V \text{ Volt}}{\Delta n \text{ Meter}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

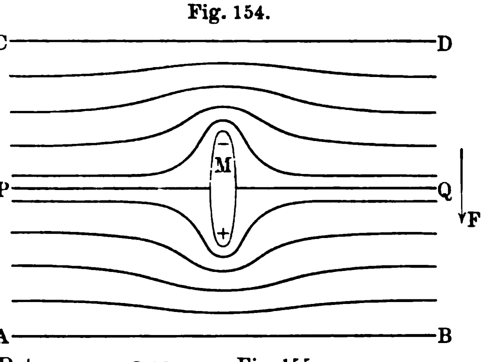
ist. Der elektrische Gradient wird durch die in Volts ausgedrückte Potentialdifferenz zweier Punkte gemessen, die auf derselben Normalen an die Niveaufläche des Potentials in 1 m Entfernung voneinander liegen.

Zu den angegebenen beiden Fragen nach der Richtung und Größe der wirksamen elektrischen Kraft hat man noch die sehr wichtige

dritte Frage nach dem Ionisationsgrad der Luft hinzuzufügen; letzterer wird durch die Geschwindigkeit gemessen, mit welcher die positive und negative Elektrizität zerstreut wird. Diese Frage werden wir eingehender im letzten Paragraphen behandeln, an dieser Stelle wollen wir nur den Apparat beschreiben, welcher zur Messung der Zerstreuungsgeschwindigkeit dient.

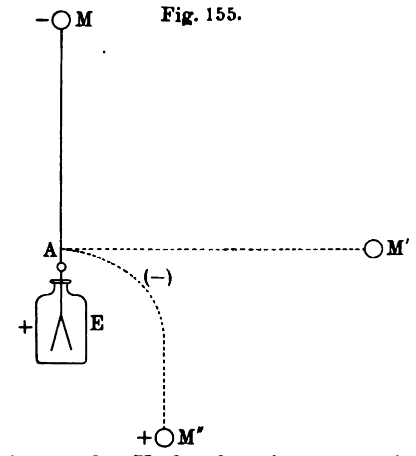
Wir wollen von allen historischen Hinweisen auf Arbeiten, welche gegenwärtig keinen großen Wert mehr besitzen, absehen, und gleich dazu übergehen, die Methoden zu betrachten, nach denen man das elektrische Feld der Erdatmosphäre untersucht.

Fig. 154.



Nehmen wir an, die Niveauflächen des Potentials V seien horizontale Ebenen AB, CD usw. (Fig. 154). In dieses Feld bringen wir den Leiter M; derselbe wird elektrisiert und nimmt ein Potential an, das einer gewissen Niveaufläche PQ entspricht, zu der auch die Oberfläche des Körpers M selbst gehört. Die benachbarten Niveauflächen werden sich ungefähr derart anordnen, wie es unsere Figur zeigt. Auf M wird unten positive, oben negative Elektrizität erscheinen. — Verbindet man auf freier Fläche bei heiterem Himmel ein Elektroskop E (Fig. 155) mittels eines Drahtes AM mit einer Kugel M, welche höher als das Elektroskop gelegen ist, so zeigt letzteres fast immer das Vorhandensein von positiver Elektrizität an. Führt man den Draht horizontal (AM'), so wird das Elektroskop gar nicht elektrisiert. Liegt endlich die Kugel M'' tiefer als das Elektroskop (AM''), so zeigt letzteres die Anwesenheit von negativer Elektrizität an.

Fig. 155.

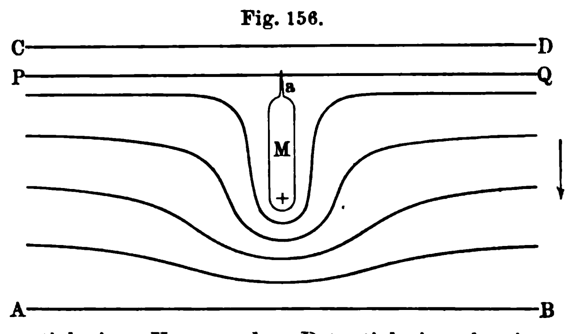


Die Angaben des Elektroskops nehmen an Größe beträchtlich zu, wenn man die Kugel M durch einen Körper ersetzt, der auf seiner Oberfläche keine elektrischen Ladungen auftreten läßt, der also stets das Potential desjenigen Punktes im Raume annimmt, in

welchem er sich befindet. Als ein solcher Körper könnte eine Spitze dienen. Führt man in das elektrische Feld *AB*, *CD* (Fig. 156) den Körper *M* ein, der mit einer Spitze *a* versehen ist, so nimmt dieser Körper ein Potential an, welches der durch diese Spitze hindurchführenden Niveaufläche *PQ* entspricht; auf ihm tritt eine positive Ladung vorzugsweise auf seinem unteren Teile auf. Die übrigen Niveauflächen ordnen sich etwa in der Art an, wie es die Fig. 156 zeigt.

Außer der Spitzenwirkung, welche durchaus keine vollständige ist, hat man bis vor kurzem noch drei andere Methoden angewandt,

Fig. 156.



um das Potential eines Körpers dem Potential eines bestimmten Raumpunktes gleich zu machen. Alle vier älteren Methoden sind symbolisch in Figur 157 dargestellt.

Fig. 157.

1. Spitze *A*.

2. Glimmender Schwamm *B*; die Ladung wird durch den Rauch fortgeführt.

3. Flamme *C*; die Anwendung einer Flamme ist zuerst von Bennet (1786) in Vorschlag gebracht worden.

4. Wasserkollektor *D*, erfunden von W. Thomson (Lord Kelvin). Dieser Apparat besteht aus einem sorgfältig isolierten Metallgefäße mit Wasser, welches frei aus der Öffnung *b* der seitlich angebrachten Röhre *ab* herausströmt. Das ausströmende Wasser führt die elektrische Ladung mit sich fort, weshalb das Gefäß *D* schnell das Potential desjenigen Raumpunktes annimmt, in welchem sich die Öffnung *b* befindet.

Vorausgesetzt wird, daß das Elektroskop vor Anstellung der Beobachtung geerdet war: hieraus folgt, daß es die Differenz zwischen dem Potential der Erde und dem Potential desjenigen Punktes angibt. an welchem sich die Spitze, der Zunder, die Flamme oder aber die Aus-

flußöffnung *b* befinden. Die Lage des Elektroskops spielt hierbei keine Rolle. Pellat findet, daß von den vier oben erwähnten Methoden die Methode der Flamme die beste ist. Lutz (1906) hat einen neuen Flammenkollektor konstruiert.

D. Smirnow (1904) hat den Wasserkollektor dadurch vervollkommnet, daß er ihm die Einrichtung eines Zerstäubers (Pulverisators) gab; hierdurch wird die Wirksamkeit des Apparates in hohem Maße beschleunigt.

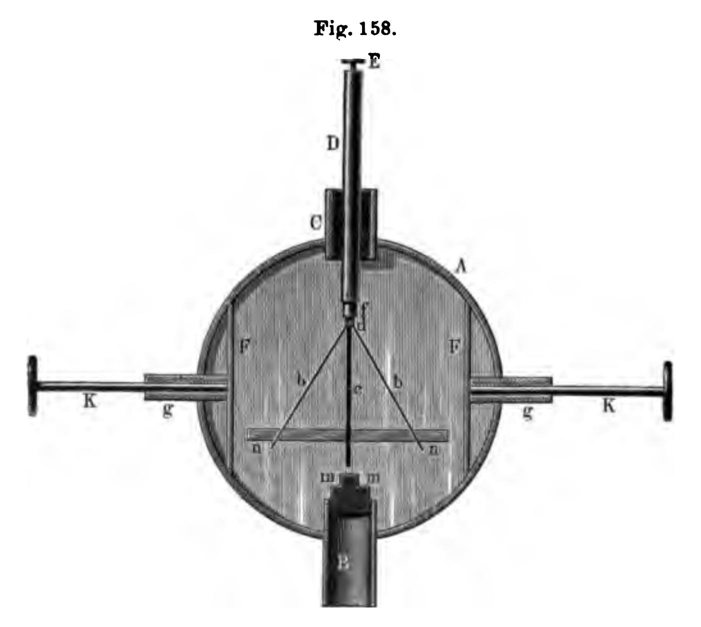
W. Thomson hat den Wasserkollektor mit dem Quadrantelektrometer (S. 318) verbunden. Der isolierte Kollektor wird auf die Fensterbrüstung oder auf ein Brett gestellt, welches aus dem Fenster herausgeschoben ist. Die Ausflußröhre des Wassers ist zum Herausschieben (ähnlich wie ein Handfernrohr oder ein Angelstock zum Ausziehen) und kann verlängert oder verkürzt werden. Die Quadranten des Elektrometers werden auf konstanter Potentialdifferenz erhalten und zwar mit Hilfe einer Batterie aus kleinen Elementen (Zn, Cu, Wasser), deren Mitte geerdet wird. Man kann auch den einen Batteriepol mit einem Quadrantenpaare verbinden, den anderen Pol und das andere Quadrantenpaar erden. Der Kollektor wird mit der Elektrometernadel verbunden, welche vor Beginn der Beobachtungen, d. h. bevor das Ausströmen des Wassers beginnt, für einen Augenblick geerdet sein muß. Man kann die Batterie mit der Nadel, den Kollektor mit einem Quadrantenpaare verbinden. Die Nadelablenkung dient als Maß für die Potentialdifferenz V der Erde und des Raumpunktes, an welchem sich die Röhrenöffnung befindet. Mascart hat auf Grund desselben Prinzips einen Elektrograph konstruiert, welcher alle Potentialänderungen registriert. Zu diesem Zweck wird ein von einer kleinen Lampe ausgesandter Lichtstrahl von einem mit der Elektrometernadel verbundenen Spiegelchen reflektiert und trifft auf einen lichtempfindlichen Papierstreifen, welcher die Oberfläche eines horizontalen, langsam um seine Achse rotierenden Zylinders bedeckt. Nach Entwickelung und Fixierung erhält man auf dem Papiere eine Linie, welche die Änderungen der Größe V als Funktionen der Zeit darstellt.

Zu den betrachteten vier Methoden ist vor kurzem noch eine fünfte hinzugekommen. Henning (1902) hat gezeigt, daß als Kollektor eine radioaktive Substanz dienen kann, die bekanntlich und wie wir weiter unten ausführlich zeigen werden, eine schnelle Elektrizitätszerstreuung bewirkt. Das radioaktive Salz wurde in eine Vertiefung der Oberseite eines kleinen vertikal gestellten Metallzylinders gebracht, der mit einem Elektroskop verbunden war. Henning fand, daß diese Methode im allgemeinen recht brauchbar sei; spätere Untersuchungen von Linke (1903) haben jedoch zu der Überzeugung geführt, daß sie keine zuverlässigen Resultate gibt und daß ihr die Methode des Wasserkollektors vorzuziehen ist.

Zu Beobachtungen vom Luftballon aus hat **Ebert** eine frisch amalgamierte Zinkplatte benutzt, welche bei vollkommen reiner Luft eine aktinoelektrische Wirkung, d. h. eine Elektrizitätszerstreuung, sogar bei diffusem Tageslicht, zeigt.

Exner hat einen sehr bequemen transportablen Apparat konstruiert, der aus einem Kollektor und einem Elektroskop besteht, welches als Elektrometer dienen kann. Der Kollektor besteht aus einer kleinen Metallaterne mit einem Licht, in dessen Flamme das Ende eines mittels Kupferdrahtes mit dem Elektrometer verbundenen Platindrahtes eingeführt ist. Das Elektrometer (Fig. 158) besteht aus einem Metallzylinder, dessen vordere und hintere Grundfläche durch Glasplatten

Fig. 158.



gebildet werden. Das in C isolierte Kupferstäbchen D ist mit einer Klemmschraube E zur Aufnahme des vom Kollektor kommenden Drahtes versehen. An das untere Ende von D ist ein Kupferstreifen c (von 9 mm Breite) angelötet und sind die Aluminiumblättchen bb befestigt, welche sich, wenn sie nicht elektrisiert sind, an c anlegen. Durch die seitlichen Röhrchen g führen die Stäbchen K hindurch; an diesen sind zwei Platten F befestigt, welche bis an c herangeschoben werden können. In letzterem Falle kann man den Apparat zum Transport in jede beliebige Lage bringen, ohne eine Beschädigung der Aluminiumblättchen befürchten zu müssen. Auf der vorderen Glasfläche ist eine Millimeterskala nn aufgeklebt: die kurze Röhre B dient dazu, den Apparat am oberen Ende eines Stabes, der unmittelbar in die Erde

gesteckt werden kann, zu befestigen. Der Kollektor wird auf einem herausziehbaren Stabe befestigt, so daß man seine Höhe variieren kann. Zur Kalibrierung des Elektrometers dient eine Batterie aus 200 Elementen (Pt-Zn-Wasser); die elektromotorische Kraft eines jener Elemente beträgt 1,06 Volt. Man nimmt nun 25, 50, 75 usw. Elemente, verbindet den einen Pol mit der Erde, den anderen mit E und notiert sich die Anzahl der Millimeter an der Skala nn, um welche die Blättchen bb divergieren. Zur Bestimmung des Vorzeichens der Ladung dient ein geriebener Ebonitstab oder besser noch eine (Zambonische) Trockensäule.

Dellmann bringt eine kleine leitende Kugel vom Radius R an einen Punkt des Raumes, an welchem das Potential V herrscht und verbindet sie auf einen Augenblick mit der Erde. Auf der Kugel tritt dann eine Ladung η auf, welche durch die Gleichung

$$V + \frac{\eta}{R} = 0$$

bestimmt ist, da das Potential der Kugel gleich Null ist, ihre Kapazität aber gleich R. Man bringt hierauf die Kugel an das Elektrometer, dessen Kapazität gleich q ist und erhält darauf aus der Angabe des Elektrometers das Potential V', so daß

$$V' = \frac{\eta}{R + q}$$

ist. Die beiden letzten Gleichungen ergeben für das gesuchte Potential den Ausdruck

$$V = -\frac{R + q}{R} V' \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Weber verbindet eine Spitze, die sich an dem in Frage kommenden Punkte M befindet, unter Dazwischenschaltung eines empfindlichen Galvanometers mit der Erde. Die Potentialänderung des Punktes M ruft Ströme hervor, welche am Galvanometer beobachtet werden.

Elster und Geitel haben einen Apparat konstruiert, welcher zur Messung der Zerstreuungsgeschwindigkeit der Elektrizität dient. Er stellt ein modifiziertes Exnersches Elektroskop (Fig. 159) dar. Die mittlere Platte AA' endigt unten in einem Ebonitzylinder, mit dessen Hilfe das Elektroskop auf den Stab J eines Dreifußes gebracht wird; nach oben endigt die Platte AA' in eine kleine Kugel mit kegelförmiger Vertiefung c. Das Deckelchen D wird bei Anstellung der Versuche abgehoben und hierauf in c das untere Ende eines Stabes eingesetzt, der mit dem hohlen geschwärzten Zylinder G ein ganzes bildet. Nachdem man diesen Zylinder mit Hilfe einer Trockensäule geladen, beobachtet man die Geschwindigkeit, mit welcher die Elektroskopblättchen zusammenfallen. Nehmen wir beispielsweise an,

das Potential falle innerhalb des Zeitintervalls t von V_0 bis auf V Volt. Man nimmt dann den Zylinder G heraus und setzt den mit isolierender Handhabe versehenen Stab K ein, ladet das Elektroskop, nimmt K heraus und beobachtet abermals die Zerstreuungsgeschwindigkeit für das Elektroskop allein (ohne den Zylinder G). Das Potential möge während der Zeit t' von V_0' auf V' Volt sinken. Der Ebonitstab L wird nun in die Öffnung M des Zylinders G hineingeschraubt, der seinerseits in c eingeführt wird, nachdem das Elektroskop von neuem elektrisiert ist. Das Verhältnis der Anzahl Volts, welche vom Elektroskop vor und nach Einführung des Zylinders G angegeben wird, gibt das Verhältnis n der Kapazitäten des Elektroskops mit und ohne den Zylinder. Die Größe

Fig. 159.

$$E = \frac{1}{t}\, lg\, \frac{V_0}{V} - \frac{n}{t'}\, lg\, \frac{V_0'}{V'}$$

dient als Maß für die Zerstreuung der Elektrizität von gegebenem Vorzeichen unter den Versuchsbedingungen.

Es gibt eine ganze Reihe von selbstregistrierenden Elektrometern zur Aufzeichnung des elektrischen Zustandes der Atmosphäre. Einen derartigen Apparat hat z. B. Benndorf (1906) konstruiert.

§ 3. Einige Resultate der Untersuchungen über das elektrische Feld der Erdatmosphäre. Ungeachtet der großen Zahl der ausgeführten Beobachtungen hat man bis jetzt ein nur sehr geringes, durchaus zuverlässiges und wissenschaftlich unanfechtbares Material erlangt. Wir wollen hier die wichtigsten Resultate zusammenstellen.

Bei wolkenfreiem Himmel und windstillem Wetter zeigt das Elektroskop fast immer eine positive Ladung an; das Potential wächst in der Richtung von unten nach oben, der elektrische Gradient ist positiv. Denza hat im Laufe von 12 Jahren sechsmal täglich Beobachtungen angestellt und bei wolkenfreiem Himmel kein einziges Mal einen Zeichenwechsel beobachtet; in Kew ist unter 15170 Beobachtungen nur 655 mal eine negative Ladung erhalten worden.

Bei wolkenlosem Himmel hängt die Größe des Gradienten von dem Orte und der Jahreszeit ab; sie schwankt etwa zwischen 50 und 800 Volt pro Meter; der mittlere Gradient beträgt in der Nähe der Erdoberfläche ungefähr 300 Volt. Gradienten von mehr als 1000 Volt werden unter normalen Verhältnissen nur selten beobachtet.

Der Gradient in einem gegebenen Punkte ändert sich fast ununterbrochen. Hierbei zeigen sich tägliche und jährliche Perioden und außerdem unregelmäßige Änderungen, die den Charakter von Störungen haben. In bezug auf die tägliche Periode haben viele Beobachter gefunden, daß der Gradient im Verlaufe von 24 Stunden zwei Minima und zwei Maxima zeigt. Einige Beobachter haben darauf aufmerksam gemacht, daß das eine Minimum im Sommer um 3^h, im Winter um 1^h nachmittags, das andere gegen 2^h nachts eintritt und daß die Maxima im Sommer um 8^h morgens und um 9^h abends, im Winter um 10^h morgens und um 6^h abends eintreten. Aber diese aus einer großen Anzahl von Beobachtungen abgeleiteten Zeiten stimmen mit den von anderen Beobachtern gefundenen nicht überein. Chauveau (1899) findet, daß in mittleren Breiten im Sommer wirklich zwei Minima vorhanden sind, um Mittag und um 3^h nachts, sowie zwei Maxima, um 8^h morgens und um 8^h abends. Im Winter verschwindet das Tagesminimum fast vollständig, so daß nur eine einfache Schwankung übrigbleibt: ein Maximum um 6^h morgens und ein Minimum um 3^h nachts. Erhebt man sich im Sommer über die Erdoberfläche, so wird ebenfalls das Tagesminimum weniger merklich.

Auf dem Gipfel des Eiffelturms ist die sommerliche Schwankung sehr ähnlich der winterlichen an der Erdoberfläche: man beobachtet dort nämlich nur ein Maximum und ein Minimum. Eine einigermaßen allgemeinere Lösung ist für die Frage nach der täglichen Periode des elektrischen Gradienten offenbar nicht vorhanden. Hann und Neumayer haben auf die Möglichkeit einer Koinzidenz dieser Periode mit der täglichen Periode des Luftdruckes hingewiesen.

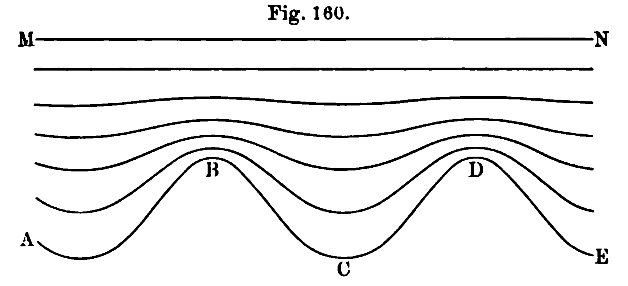
Die jährliche Periode spricht sich darin aus, daß der Gradient in den Wintermonaten beträchtlich größer ist als im Sommer. In Europa ist das Wintermaximum ungefähr 13 mal, in Nordamerika fünfmal größer als das Sommermaximum.

Im höchsten Grade wichtig ist, wie wir später sehen werden, der Umstand, daß auf dem Gipfel hoher Berge die tägliche und jährliche Periode fast verschwinden. Dies haben die Beobachtungen auf dem Sonnblick (3000 m) in Österreich und dem Dodabetta in Südindien gezeigt. Hiermit stimmt auch die eben erwähnte vereinfachte Form der Gradientenschwankung auf dem Eiffelturme überein.

Nicht weniger wichtig ist auch die folgende Tatsache. Vergleicht man die gleichzeitigen Gradientenänderungen an verschiedenen Orten, so findet man, daß diese Änderungen einander nicht parallel gehen, wenn der horizontale Abstand der Punkte 100 m übersteigt. Dies deutet klar auf den örtlichen Charakter der Ursachen hin, welche diese Änderungen hervorrufen.

Die Frage nach der Richtung des Gradienten oder, was dasselbe ist, nach der Lage der Niveauflächen des Potentials, erledigt sich recht einfach: die Oberfläche der Erde und aller mit ihr verbundenen Gegenstände stellt eine der Niveauflächen dar. Die hierauf folgenden Oberflächen haben Übergangsformen von dieser ersten zu Flächen, die, wenn sie von ihr genügend weit entfernt sind, horizontale Ebenen oder, genauer gesagt, Kugeloberflächen darstellen. Somit ist an der Oberfläche von Bergen, Gebäuden, Bäumen usw. die elektrische Kraft senkrecht zu dieser Oberfläche. An der Wand eines Gebäudes, an dem Stamme eines Baumes usw. sind die Niveauflächen vertikal, also die elektrische Kraft selbst horizontal; am Abhange der Berge ist sie gegen den Horizont geneigt. Hieraus folgt die Abhängigkeit der Größe des Gradienten von der Form der Erdoberfläche und der auf ihr befindlichen Gegenstände. Es stelle *ABCDE* (Fig. 160) einen Vertikalschnitt der Erdoberfläche dar; *B* und *D* seine

Fig. 160.



Berggipfel, *C* eine Talmulde, *ABCDE* sowie die Ebene *MN* sind Niveauflächen; zwischen ihnen liegen, wie die Figur zeigt, die übrigen Niveauflächen. In *B* und *D* sind die Flächen einander nahe, in *C* stehen sie weiter voneinander ab. Es ist klar, daß der Gradient, also auch die Kraft in *B* und *D* größer, in *C* kleiner ist, als über einer Ebene. Es muß also unter sonst gleichen Verhältnissen der Gradient auf den Gipfeln der Berge relativ groß, in Tälern dagegen relativ klein sein. In einem kleinen, von hohen Gebäuden umschlossenen Hofe muß der Gradient sehr klein sein.

Die Beobachtungen bestätigen das, was wir hier über die Größe und Richtung des Gradienten gesagt haben. Erman (1803) war der erste, welcher die Beobachtung machte, daß die elektrische Kraft rings um einen einzeln stehenden Baum horizontal ist.

Wir haben noch eine sehr wichtige Frage zu berühren. Ihre Lösung würde den Streit zwischen den beiden Hauptgruppen der Theorien entscheiden, würde auf die fundamentale, von uns bereits erwähnte Frage, ob die gesamte Elektrizitätsmenge auf der Erde gleich Null ist oder nicht, eine Antwort geben. Wir werden in § 5 sehen, welche Bedeutung hierfür die Frage nach der Abhängigkeit des elektrischen Gra-

dienten von der Höhe über der ebenen Erdoberfläche bei windstillem Wetter und wolkenfreiem Himmel hat. Beobachtungen dieser Art können nur vom Luftballon aus angestellt werden. Exner (1886) hat zuerst aus solchen Beobachtungen den Schluß gezogen, daß der Gradient mit zunehmender Höhe wächst, und ein gleiches Resultat hat auch Tuma (1892) erhalten. Indessen führt eine ganze Reihe von neueren Beobachtungen zum direkt entgegengesetzten Resultat. Hierher gehören die Beobachtungen, die von Börnstein, Baschin, André u. a. in den Jahren 1893 und 1894 ausgeführt worden sind. Endlich fand Le Cadet (1897) folgende Werte für den Gradienten G in einer Höhe von h Metern:

h = 1429	2370	3150	4015	Meter
G = 36,5	22,1	19,7	13,4	Volts

Börnstein (1897) hat darauf hingewiesen, daß der Luftballon, der zuerst in Berührung mit der Erde war, durch seine Ladung die Angaben der zur Messung des Gradienten dienenden Apparate beeinflussen kann. Stellt man alles zusammen, was bis jetzt über die vorliegende Frage bekannt geworden ist, so muß man es für wahrscheinlicher halten, daß unter den oben angegebenen Verhältnissen der Gradient mit der Höhe abnimmt.

Wir hatten bisher stilles Wetter und wolkenfreien Himmel vorausgesetzt. Befinden sich am Himmel auch nur ganz kleine Wölkchen, also um so mehr bei Regen, Schnee, Nebel usw., so ändert sich das Bild vollkommen. Besonders charakteristisch sind hier die fast ununterbrochenen gewaltigen Änderungen des Gradienten, nicht nur der Größe, sondern auch dem Zeichen nach. Diese Änderungen erfolgen in einigen Minuten, bisweilen innerhalb weniger Sekunden, fast sprungweise und können 1000 Volt und darüber betragen. Elster und Geitel haben, während sich am Himmel schwache Cirruswolken zeigten, schnelle Änderungen des Gradienten zwischen + 1800 und — 1200 Volt beobachtet. Die absoluten Werte des Gradienten pflegen hierbei ebenfalls unnormal hohe zu sein. Apparate, welche nicht weit voneinander aufgestellt sind, zeigen durchaus verschiedene absolute Werte und Änderungen des Gradienten an.

Regentropfen und Schneeflocken zeigen sich im allgemeinen elektrisiert, wobei das Vorzeichen ein verschiedenes sein kann; es überwiegt jedoch das negative Vorzeichen.

Lenard hat gezeigt, daß die Luft negativ elektrisiert wird, wenn ein Wassertropfen auf eine feuchte Oberfläche niederfällt. Diese Erscheinung muß beim Regenfall mitspielen.

Die Anwesenheit von Staub oder Rauch in der Atmosphäre hat einen großen Einfluß auf ihren elektrischen Zustand. Mit dieser Frage hat sich beispielsweise Hesehus beschäftigt.

§ 4. Erscheinungen der elektrischen Entladung in der Atmosphäre. Eine eingehende Betrachtung der hierher gehörigen Erscheinungen kann in diesem Buche keinen Raum finden; wir wollen uns mit einem kurzen Hinweis auf einige Tatsachen begnügen, die für die Physik ein mehr oder weniger unmittelbares Interesse haben. Die Erscheinungen der elektrischen Entladungen in der Atmosphäre sind die folgenden:

1. Das St. Elmsfeuer, das in Form von Flammen auf Masten von Schiffen erscheint und ihm ähnliche Erscheinungen, welche man sehr oft auf hohen Bergen beobachtet. Sie erinnern an jene pinselförmigen Lichterscheinungen, die beim Ausströmen von Elektrizität aus Leitern auftreten, welche auf sehr hohe Potentiale geladen sind.

2. Blitze, die man in einer besonderen Art von „Gewitterwolken" beobachtet, welche letztere gegenwärtig als cumulonimbus bezeichnet werden. Zu den Blitzen zählt man auch eine der rätselhaftesten Erscheinungen, die man auf Erden beobachtet, den sogenannten Kugelblitz. Derselbe hat die Form einer feuerigen Kugel, die sich relativ sehr langsam bewegt, bisweilen geräuschlos verschwindet, bisweilen aber, begleitet von einem Donnerschlag, sich entladet. Planté hat eine Erscheinung erhalten, welche einigermaßen an den Kugelblitz erinnert, indem er die negative Elektrode einer kräftigen Batterie in Wasser oder in eine Salzlösung tauchte und mit dem positiven Pol die Wasseroberfläche berührte. Als dieser Pol ein wenig gehoben war, trennte sich von ihm ein leuchtendes Kügelchen ab, das auf der Wasseroberfläche dahinglitt. Allein man darf dieser zufälligen Ähnlichkeit zweier Erscheinungen keine Bedeutung beimessen und darf keine Erklärungen für den Kugelblitz auf den Plantéschen Versuch stützen. Eine viel größere Bedeutung hat folgende von Righi entdeckte Erscheinung. Schaltet man in den Entladungskreis einer Leidener Flasche von großer Kapazität einen sehr großen Widerstand in Form einer langen Wassersäule ein, so erscheint die Entladung, insbesondere in etwas verdünnter Luft, zwischen den beiden Elektroden (Kugeln) in Form eines leuchtenden, sich recht langsam dahinbewegenden Kügelchens.

Hesehus ist der Ansicht, daß der Kugelblitz aus Stickstoff besteht, der unter der Einwirkung sehr starker oszillierender Entladungen verbrennt. Er tauchte den einen Pol eines Transformators, der einen Wechselstrom von 10000 Volt gab, in Wasser und verband den anderen Pol mit einer horizontalen Kupferplatte, die sich 2 bis 4 cm oberhalb des Wassers befand. Hierbei beobachtete er auf der Platte eine Entladung, die unter anderem die Form eines leuchtenden Sphäroids hatte, das durch den leisesten Luftzug nach der einen oder anderen Seite wanderte. Wenn man dies Sphäroid mit einer Glasglocke überdeckte, so traten braune Dämpfe, die Oxydationsprodukte des Stickstoffs, auf. Sauter (1890, 1892) hat eine Übersicht über die verschiedenen

Erklärungsversuche des Kugelblitzes gegeben und mehr als 200 Beobachtungen dieser Erscheinung zusammengestellt.

Riecke hat den Versuch gemacht, die Elektrizitätsmenge zu bestimmen, die sich in einem Blitz entladet; er findet, daß sie 50 bis 100 Coulombs beträgt.

Pockels hat die maximale Stromstärke im Blitz aus der Größe der übrig bleibenden Magnetisierung bestimmt, die in einem Stabe aus Basalt, der in der Nähe eines Blitzableiters aufgestellt war, hervorgerufen war. In verschiedenen Fällen fand er, daß die Stromstärke 8600, 11 000 und 20 000 Amp. betrug. Vom Spektrum des Blitzes und Nordlichtes war in Bd. II die Rede.

Weitere Einzelheiten, welche sich auf die Gewittererscheinungen, die Nordlichter, das St. Elmsfeuer usw. beziehen, können in diesem Buche nicht gegeben werden. Auch über die Einrichtung von Blitzableitern soll hier nichts gesagt werden; eingehende Hinweise hierauf findet man in den Werken von Melsens, Smirnow, Golow, Lindner, Benischke u. a.

A. S. Popow, der eigentliche Erfinder des Telegraphierens ohne Leitung (der Funkentelegraphie), hat als erster einen bemerkenswerten Apparat konstruiert, welcher elektrische Entladungen registriert, die in einem großen, ihn umgebenden Raume auftreten. Dieser Apparat (Gewitterregistrierapparat) besteht aus einer Batterie von Elementen, in deren Stromkreis sich eine Branlysche Frittröhre (Kohärer) und ein Elektromagnet befinden, dessen Anker mit einer Feder in Verbindung steht. Diese Feder berührt die mit einem liniierten Papierstreifen überzogene Oberfläche eines Zylinders; der Zylinder rotiert mittels Uhrwerk um seine Achse. Die Frittröhre läßt im allgemeinen keinen Strom hindurch, wird aber leitend, wenn auf sie elektrische Strahlen auftreffen, die durch irgend eine oszillierende Entladung hervorgerufen sind. Nun zeigt sich, daß die in der Atmosphäre auftretenden Entladungen elektrische Strahlen erzeugen, welche, wenn sie die Frittröhre treffen, dieselbe leitend machen, so daß der Strom geschlossen wird, der Elektromagnet auf den Anker zu wirken beginnt und die Feder ein Zeichen auf dem Papierstreifen markiert. Der erste derartige Apparat wurde im Juli 1895 im Forstkorps bei Petersburg aufgestellt und lieferte sehr interessante Resultate: er zeichnete nicht nur nahe und ferne Gewitter auf, sondern auch, wie es scheint, andere in der Atmosphäre auftretende elektrische Entladungen.

Auf den Zusammenhang zwischen Gewittern und Zyklonen, zwischen Polarlichtern, magnetischen Stürmen, Erdströmen, Sonnenflecken und dem Szintillieren der Sterne, können wir nicht eingehen.

§ 5. Gegenwärtiger Stand der Theorie der erdelektrischen Erscheinungen. Im § 1 haben wir eine Charakteristik des Standes

dieser Theorie gegeben. Auf eine Darlegung der „35 ernst zu nehmenden Theorien“ müssen wir natürlich verzichten. Wir beschränken uns auf eine Erörterung der Streitfrage betreffs der gesamten Elektrizitätsmenge der Erde und auf die Darlegung der neuesten Theorie, sowie einiger weniger Umstände, welche vielleicht mit der Zeit eine praktische Bedeutung für die Physik erlangen können.

Alle Theorien der Erdelektrizität können in zwei Gruppen eingeteilt werden.

I. Theorien, welche annehmen, daß die gesamte Elektrizitätsmenge E der Erde nicht gleich Null ist. Mit anderen Worten, es wird angenommen, daß die Erde eine besondere, ihr anhaftende Eigenladung besitzt, daß sie einen elektrisch geladenen Körper darstellt, der im Raume absolut isoliert ist. Die Ladung E konnte in dem Augenblick aufgetreten sein, wo sich der Ring, dem die Erde ihren Ursprung verdankt, von der Sonne abgelöst, oder wo sich die Erde aus diesem Ringe gebildet hat, etwa infolge der Reibung, welche diese Weltprozesse begleiten mußte. Ist die Ladung E in der Tat nicht gleich Null, so muß sie negativ sein, da die elektrische Kraft unter „normalen Verhältnissen“ nach unten gerichtet ist. Alle natürlichen elektrischen Erscheinungen auf der Erde müssen sich durch Verschiebungen der Ladung E und jene Induktionswirkungen erklären, welche sie in den Leitern hervorruft. Den sich neu bildenden positiven Ladungen müssen ihnen gleiche negative Ladungen entsprechen, die, abgesehen von dem konstanten Überschuß E, auftreten. Nehmen wir an, daß ein Teil der negativen Ladung E auf irgendeine Weise in die Atmosphäre übergeht. In diesem Falle hat man in der Nähe der Erdoberfläche eine negative Ladung von unten und eine ebensolche von oben. Je höher sich ein Punkt über der Erde befindet, um so größer ist die Ladung unterhalb desselben und um so kleiner ist die Ladung, die oberhalb desselben nachbleibt. Hieraus folgt offenbar, daß der Gradient sich in dem Maße vergrößern muß, als man sich über den Erdboden erhebt, bis er seinen Maximalwert erreicht und oberhalb der Luftschichten, bis zu denen die Ladung reichte, abzunehmen beginnt.

II. Theorien, welche annehmen, daß die Ladung E der Erdkugel gleich Null ist. Nehmen wir an, daß die Erde keine Eigenladung besitzt, so daß theoretisch ein Augenblick eintreten kann, in welchem auf der ganzen Erde keinerlei natürliche elektrische Ladungen vorhanden sind. Durch irgendwelche Umstände entstehen Elektrisierungen, wobei gleiche Mengen positiver und negativer Elektrizität auftreten. Da unter normalen Verhältnissen, d. h. bei unbewölktem Himmel, die elektrische Kraft abwärts gerichtet ist, so hat man auch hier anzunehmen, daß die Erdkugel eine negative Ladung

besitzt. Irgendwo muß sich die ihr entsprechende, ihr gleiche positive Ladung vorfinden. Hier sind nun zwei Voraussetzungen möglich:

1. Die positive, der ursprünglichen negativen Ladung der Erdkugel entsprechende Ladung befindet sich in den höheren Schichten der Atmosphäre. In diesem Falle würde die Atmosphäre der Zwischenschicht eines geladenen Kondensators ähneln und würde der Gradient nur in geringem Maße von der Höhe abhängen. Eine solche Verteilung wird von W. Thomson (Lord Kelvin) angenommen.

2. Die positive Ladung ist in der atmosphärischen Luft verteilt und zwar vorzugsweise in den niedrigen Schichten derselben. Durch irgendeinen Umstand veranlaßt, treten Elektrisierungen auf, wobei (—) auf die Erdoberfläche übergeht, (+) in der Atmosphäre verbleibt. Derselbe Umstand oder andere Ursachen rufen lokale Störungen hervor, d. h. starke und schnelle Änderungen in der Verteilung der Ladungen in der Luft und auf der Erde, sowie das Auftreten von neuen und das Verschwinden bereits vorhandener Ladungen. Die Ursachen dieser Störungen müssen im Zusammenhange mit der Wolkenbildung stehen. Der Gradient muß sich in dem Maße verringern, als man sich über die Erdoberfläche erhebt und sich relativ schnell dem Werte Null nähern, da in den Punkten, welche höher als beide Ladungen liegen, die elektrische Kraft sehr klein sein muß. Die tägliche und jährliche Periode, sowie die unregelmäßigen Änderungen, müssen sich in dem Maße verringern, als man sich von der Erdoberfläche entfernt, d. h. von den niedrigen Schichten der Atmosphäre, in denen Änderungen und Verschiebungen der Ladungen vor sich gehen.

Vergleicht man das, was hier von den beiden Gruppen von Theorien gesagt worden ist, so sieht man, welche Bedeutung vor allem die Frage nach der Änderung des Gradienten mit der Höhe hat, sowie die Frage nach dem Gange der täglichen und jährlichen Perioden und insbesondere der unregelmäßigen Änderungen in verschiedenen Höhen. Die Lösung der Hauptfrage nach der Elektrizitätsmenge E kann auch für die Physik nicht ohne Interesse sein.

Gehen wir nunmehr zur Betrachtung einiger Theorien über, insbesondere der in neuester Zeit in Vorschlag gebrachten.

I. Theorien, welche annehmen, daß E nicht gleich Null ist. Erman (1803) hat zuerst den Gedanken ausgesprochen, daß die Erde ihre eigene negative Ladung hat und daß die Erscheinungen, welche man an Elektroskopen beobachtet, die mit einer Spitze oder einer Flamme verbunden sind, durch Induktion seitens der Erdladung erfolgen. Diesen Gedanken haben Peltier, Pellat und insbesondere Exner weiter entwickelt. Nimmt man an, daß bei heiterem Wetter die elektrische Kraft an der Erdoberfläche nur durch die Ladung E hervorgerufen wird, so kann man die Größe dieser Ladung berechnen, wenn man sich der Formel

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi k$$

bedient, in welcher k die Oberflächendichte der Ladung bedeutet. Wir setzen $\partial V : \partial n$ gleich dem Gradienten G und letzteren gleich 275 Volt pro Meter. Alle Größen drücken wir in el.-st. C. G. S.-Einheiten aus. 1 Volt ist gleich $\frac{1}{300}$ el.-st. C. G. S.-Einheit, also ist

$$\frac{\partial V}{\partial n} = G = \frac{275 \text{ Volt}}{1 \text{ m}} = \frac{2{,}75 \text{ Volt}}{1 \text{ cm}} = \frac{2{,}75}{300} \text{ C.G.S.-Einh. d. Gradienten.}$$

Hieraus folgt für die Dichte:

$$k = -\frac{2{,}75}{4\pi \cdot 300} = -0{,}00082 \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten} \quad . \quad (4)$$

Diese Dichte ist äußerst gering.

Die Ladung ist $E = 4\pi R^2 k$, wo R der Erdradius in Centimetern ist. Setzt man $2\pi R = 4 \cdot 10^9$ cm, so ist

$$E = -4 \cdot 10^{15} \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder gleich $1{,}3 \cdot 10^6$ Coulombs, da 1 Coulomb $= 3 \cdot 10^9$ el.-st. C. G. S.-Einheiten der Elektrizitätsmenge ist. Für E erhält man also etwas mehr als 1 Million Coulombs negativer Elektrizität.

Das Potential V der Erdkugel ist gleich $E : R$ oder $4\pi Rk$, hieraus folgt

$$V = -6{,}4 \cdot 10^6 \text{ el.-st. C. G. S.-Einheiten} = -19 \cdot 10^8 \text{ Volts} \quad . \quad (6)$$

Die Oberflächenspannung ist $P = 2\pi k^2$, also

$$P = 4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Dynen}}{1 \text{ qcm}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Mit einer so geringen Kraft würde demnach 1 qcm der beweglich gedachten Oberflächenschicht der Erde aus ihr herausgestoßen werden.

Nachdem wir die Existenz einer Ladung E angenommen haben, bleibt noch zu erklären, aus welchem Grunde ein Teil dieser Ladung in die Luft übergeht. Exner sieht als Ursache für einen solchen Übergang die Verdunstung des Wassers der Ozeane, Meere, Seen, Flüsse usw. an. Der Dampf nimmt hiernach auf mechanischem Wege einen Teil der Ladung E, welche sich an der Wasseroberfläche befindet, mit sich fort. Auf diese Weise stellen die in der Luft enthaltenen Dämpfe die Träger der negativen Ladungen dar. Je mehr Dampf in der Luft enthalten ist, um so kleiner muß der Gradient G sein. Exner findet, daß der Gradient G und die absolute Feuchtigkeit p durch die Formel

$$G = \frac{A}{1 + ap} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

miteinander verknüpft ist, wenn A und a konstante Koeffizienten sind.

Die Theorie von Exner hat eine große Zahl von Untersuchungen über die Frage veranlaßt, ob die Dämpfe einer elektrisierten Flüssigkeit einen Teil der Ladung mit sich fortführen oder nicht? Peltier (bereits vor Exner, 1842), Black (1883), Lecher (1888), Schwalbe (1900), Henderson (1900) und Beggerow (1902) sind zu einem negativen Resultat gelangt; sie finden, daß die Dämpfe des Wassers und anderer Flüssigkeiten (z. B. des Äthers) die Ladung der Flüssigkeit nicht mit sich fortführen. Pellat (1899) gelangt zum entgegengesetzten Resultat für sehr schwache Elektrisierungen, ähnlich der, welche wir für die Erdoberfläche durch Rechnung gefunden haben. Die Frage bleibt also offen.

Arrhenius (1888) hat eine Theorie entwickelt, die auf der Voraussetzung basiert, daß die negative Ladung der Erde in der Luft unter Einfluß der ultravioletten, im Sonnenlichte enthaltenen Strahlen zerstreut wird; diese Theorie erklärt in befriedigender Weise die obenerwähnte jährliche Periode. Später haben Ekholm und Arrhenius zu beweisen gesucht, daß Erde und Mond negativ elektrisiert sind und daß ein Zusammenhang zwischen der Größe des Gradienten und dem Wert der Zenitdistanz des Mondes vorhanden ist.

Gegen die hier betrachteten Theorien (E nicht gleich Null) haben sich Liebenow, Elster und Geitel, Chree u. a. gewandt. Unter anderem ist darauf hingewiesen worden, daß die Ladung E auf die höheren Schichten der Atmosphäre übergehen müßte, da man die Luft nicht als einen absoluten Nichtleiter der Elektrizität ansehen kann.

Gegen diese Theorien sprechen auch die zwei vorher erwähnten Tatsachen: die Verminderung aller Änderungen des Gradienten an hochgelegenen Punkten der Erdoberfläche und die fast zweifellos vorhandene Abnahme des Gradienten selbst nach Maßgabe der Erhebung über die ebene Erdoberfläche.

II. Theorien, welche zur Voraussetzung haben, daß $E = 0$ ist. Hierher gehört vor allem die Theorie von Volta, welcher die Annahme machte, daß die Verdampfung des Wassers die erste Ursache für die Elektrisierung von Erde und Luft ist, daß bei der Verdampfung die Dämpfe positiv, das Wasser negativ elektrisiert werden. Diese Theorie ist auch von Palmieri energisch aufrecht erhalten worden. Es ist jedoch durch eine ganze Reihe von Arbeiten verschiedener Forscher unzweifelhaft nachgewiesen worden, daß die Verdampfung von Wasser keine Elektrizitätsquelle bildet: als solche kann, wie wir an anderer Stelle (S. 245) gesehen haben, die Reibung von feuchten Dämpfen dienen.

Sohncke (1885) und Luvini (1889) stützten sich auf die Tatsache, daß bei der Reibung von Eis und Wasser das Eis positiv elektrisiert wird, das Wasser dagegen negativ. Die oberen Schichten der Atmosphäre, welche Eiskristalle enthalten, gleiten an den unteren dahin, in denen sich das Wasser in Form von sehr kleinen Tröpfchen (Federwolken) befindet und hierbei erscheint die Reibung des Eises am Wasser als erste Ursache für die beobachteten Elektrisierungen.

Edlund glaubt, daß die Erde als rotierender Magnet in der Atmosphäre jene elektromotorischen Kräfte wachruft, mit denen wir uns in der Lehre von der unipolaren Induktion bekannt machen werden. Diese Theorie hat zahlreiche und zwar sehr gewichtige Entgegnungen hervorgerufen.

Liebenow (1900) sieht die Quelle der Erdelektrizität in thermoelektromotorischen Kräften, welche in der Atmosphäre zwischen den unteren warmen und höheren, kalten Schichten derselben wirken. Diese Temperaturdifferenz muß eine Bewegung der positiven Elektrizität in die Höhe, der negativen in die Tiefe hervorrufen. Liebenow betrachtet eingehend die elektrischen Kräfte, welche infolge der Temperaturdifferenzen um jeden sich bildenden oder niederfallenden Wassertropfen auftreten müssen. Brillouin (1900) findet, daß negativ elektrisiertes Eis unter der Einwirkung von ultravioletten Strahlen schnell seine Ladung verliert, was man nicht beobachtet, wenn man das Eis durch Wasser ersetzt. Die in den höheren Schichten der Atmosphäre befindlichen Eiskristalle werden unter Einwirkung des elektrischen Feldes der Erde elektrisiert; die negative Elektrizität wird durch die Sonnenstrahlen zerstreut, die positive aber bleibt auf dem Kristalle.

Es erübrigt noch, mit einigen Worten auf die neue Theorie oder, richtiger gesagt, auf die neue Gruppe von Theorien einzugehen, welche nach dem Jahre 1899 entstanden ist und sich hauptsächlich auf die Tatsache der Ionisation der Luft stützt. Die Begründer dieser Theorien waren Elster und Geitel, sowie Ebert. Wir wollen zunächst auf eine Reihe von Tatsachen hinweisen.

Linss (1883) war der Erste, welcher systematische Untersuchungen über die Zerstreuung der beiden Elektrizitäten in der freien Luft angestellt hat. Er hat bereits eine ganze Reihe von interessanten Tatsachen gefunden; so hat er z. B. beobachtet, daß beide Elektrizitätsarten im allgemeinen nicht gleich schnell zerstreut werden und daß die Zerstreuungsgeschwindigkeit vom Zustande der Luft, von der Tageszeit, Jahreszeit und anderen Ursachen abhängt. Seine Untersuchungen haben jedoch nicht die gehörige Beachtung gefunden. Elster und Geitel haben sich 17 Jahre nachher von neuem mit dem Studium der Zerstreuungsgeschwindigkeit befaßt und gezeigt, von welcher außerordentlich großen Bedeutung die Beobachtung der Elektrizitätszerstreuung

für die Charakterisierung des elektrischen Zustandes der Atmosphäre sein muß.

Die Untersuchungen sowohl von Elster und Geitel, als auch von anderen Forschern haben gezeigt, daß die atmosphärische Luft immer eine gewisse Anzahl von freien Ionen, d. h. von Teilchen freier Elektrizität enthält. Offen bleibt die Frage, ob die Ionen bloß aus Elektrizitätsteilchen (Elektronen) bestehen, oder aus Gasatomen oder Gasmolekülen, die mit Elektronen verbunden sind (Gasionen). Dank der Anwesenheit der Ionen besitzt die Luft einen gewissen Grad von Leitfähigkeit, also auch die Fähigkeit, elektrische Entladungen zu zerstreuen; die Zerstreuungsgeschwindigkeit kann als Maß für ihre Ionisation dienen. Der Apparat, welcher zu diesen Messungen benutzt werden kann, ist in Fig. 159 (S. 375) abgebildet und beschrieben. Was die Eigenschaften der Ionen anlangt, so ist zu bemerken, daß die negativen Ionen eine größere Beweglichkeit besitzen als die positiven. Ferner haben Wilson u. a. gezeigt, daß die Ionen als Zentren dienen, um die herum sich Wasserdampf verdichtet, wobei die Fähigkeit der Dampfkondensation bei den negativen Ionen größer ist als bei den positiven. Belastete Ionen sind weniger beweglich als freie Ionen.

Ebert (1901) und später Gerdien (1905) haben „Elektronen-Aspirationsapparate" gebaut, welche dazu dienen, den Elektronengehalt der Luft an einem gegebenen Orte zu bestimmen.

Die Untersuchung der Elektrizitätszerstreuung hat zu folgenden Resultaten geführt:

1. Die Zerstreuung ist besonders stark bei heiterem Wetter, sie nimmt bei trübem Wetter ab und ist bei Nebel sehr gering.

2. An der Erdoberfläche wird die negative Elektrizität im allgemeinen schneller zerstreut als die positive. Hieraus folgt, daß in den tieferen Luftschichten ein Überschuß an positiven Ionen vorhanden ist.

3. Die Erde hat offenbar eine negative Ladung, deren Intensität besonders groß an den Berggipfeln ist (S. 377). Hier ist der Überschuß an positiven Ionen, also auch der Unterschied der Zerstreuungsgeschwindigkeiten ein Maximum.

4. Bei Erhebung über den Erdboden (im Luftballon) beobachtet man eine schnelle Zunahme der Ionisation; in einer Höhe von 3000 m ist die Zerstreuung 30 mal stärker als an der Erdoberfläche. Hier ist jedoch die Zerstreuungsgeschwindigkeit für beide Elektrizitäten die gleiche.

5. Im Sommer ist die Zerstreuung stärker als im Winter, wo die Erdoberfläche von Schnee und Eis bedeckt ist.

6. Es besteht unzweifelhaft ein Zusammenhang zwischen dem täglichen Gange der Luftelektrisierung und dem täglichen Gange des Luftdrucks.

7. Elster und Geitel haben die Entdeckung gemacht, daß die Luft von Höhlen, Kellergewölben, Brunnen usw. immer sehr stark ionisiert ist. Ferner hat sich gezeigt, daß die Bodenluft, d. h. Luft, die man auf die eine oder andere Weise dem Erdboden entzogen hat, besonders stark ionisiert ist.

8. Die Luft enthält unzweifelhaft Spuren von radioaktiven Substanzen oder deren Emanationen. Das Bodenwasser und die Bodenluft sind besonders stark radioaktiv. Luft, welche durch solches Wasser hindurchgegangen ist, ist ionisiert (J. J. Thomson).

Wir wollen uns auf diese Zusammenstellung von Tatsachen beschränken. Sie haben als Grundlage dafür gedient, eine ganze Reihe von neuen Theorien der Erdelektrizität aufzustellen. Diese Theorien müssen auf folgende drei Fragen Antwort geben:

I. Woher stammt die Ionisierung der Luft?

II. Wodurch entsteht der Unterschied der elektrischen Zustände der Erdkugel und der dieselbe umgebenden Lufthülle und wodurch wird er aufrecht erhalten?

III. Wie erklären sich die oben aufgezählten Beobachtungstatsachen? Elster und Geitel nahmen anfangs an, daß die Ionisation der Luft durch ultraviolette Sonnenstrahlen hervorgerufen wird; eine ähnliche Theorie hat später Rudolph aufgestellt. Die negative Elektrisierung der Erdkugel und den Überschuß an positiven Ionen in den unteren Schichten der Atmosphäre haben Elster und Geitel durch die größere Beweglichkeit der negativen Ionen erklärt, welche aus diesem Grunde schneller der Erdkugel ihre Ladungen abgeben. Es schien eine Zeitlang, als ob diese Theorie allen Anforderungen entspreche und auf alle oben erwähnten Fragen Antwort gebe. Aber die Versuche von Simpson (1903), welcher gezeigt hat, daß ein isoliertes Metall durch ionisierte Luft nicht elektrisiert wird, haben jene Theorie in Frage gestellt. Nun hat Ebert (1904) eine neue Theorie in Vorschlag gebracht, die von der Tatsache ausgeht, daß fast alle Bestandteile der Erdrinde eine gewisse, wenn auch sehr schwache Radioaktivität besitzen. Infolgedessen ist die Bodenluft stark ionisiert und besitzt selbst Radioaktivität, was sich insbesondere in Höhlen, Kellerräumen usw. zeigen muß. Die Bodenluft gibt, indem sie durch kapillare Spalten ins Freie tritt, an die Wandungen dieser Spalten vorzugsweise negative Ladungen ab; daß eine solche Abgabe stattfinden muß, zeigen die Resultate der Versuche von Zeleny, Villari, Simpson und Townsend. Bei ihrem Austritt ins Freie muß die Bodenluft einen Überschuß an positiven Ionen aufweisen. Hierdurch wird eine Reihe von Tatsachen erklärt: die negative Elektrisierung der Erdkugel und die

positive der unteren Luftschichten; die Verminderung der Ionisation im Winter, wo der Austritt der Bodenluft erschwert ist; der Einfluß des Luftdrucks, dessen Abnahme den Austritt der Bodenluft befördern muß usw. Ebert hat gezeigt, daß die Größe der Radioaktivität der Erdrinde vollkommen hinreicht, um auch in quantitativer Hinsicht die elektrischen Erscheinungen zu erklären, die man unter normalen Verhältnissen in der Atmosphäre beobachtet. Gegen die Theorie von Ebert haben sich Simpson (1905) und Gerdien (1905) gewandt.

Wir wollen uns auf diese wenigen Hinweise bezüglich der gegenwärtigen Theorien der Erdelektrizität beschränken. Im übrigen verweisen wir den Leser auf die Literaturübersicht und die in ihr enthaltenen Angaben der in den letzten Jahren erschienenen Arbeiten.

Auf die Theorien der Gewittererscheinungen, sowie der Polarlichter können wir nicht näher eingehen. Großes Interesse beanspruchen hier die neuesten Theorien, in denen eine Hauptrolle den Kathodenstrahlen zugeschrieben wird, die sich in den höheren Luftschichten unter Einwirkung der Sonnenstrahlen bilden oder gar unmittelbar von der Sonne ausgesandt werden sollen.

Was die Gewittererscheinungen anlangt, so wollen wir bloß darauf hinweisen, in welcher Weise jene ungeheuren Potentiale entstehen können, die zu den gigantischen Blitzentladungen führen. Nehmen wir an, daß n^3 sehr kleine Wassertröpfchen, deren Potential gleich v ist, in einen Tropfen zusammenfließen; es sei r der Radius, s die Oberfläche, e die Ladung, k die Dichte der Ladung eines Tropfens, so daß $k = e:s$, $v = e:r$ ist. Es sei ferner R der Radius, V das Potential, E die Ladung, K die elektrische Dichte und S die Oberfläche des gebildeten großen Tropfens; in diesem Falle ist $R = nr$, $S = n^2 s$, $E = n^3 e$, also

$$K = \frac{E}{S} = \frac{n^3 e}{n^2 s} = n\,\frac{e}{s} = nk,$$

$$V = \frac{E}{R} = \frac{n^3 e}{nr} = n^2\,\frac{e}{r} = n^2 v.$$

Handelt es sich um die Bildung eines Regentropfens bei Verdichtung eines Nebels, so kann n eine sehr große Zahl sein. Eine gegeringfügige Ladung der Nebeltröpfchen kann ungeheuer große Potentiale auf den Tropfen erzeugen, also auch Entladungen in Blitzform. Daß eine plötzliche reichliche Bildung von Regentropfen von Blitz begleitet sein kann, wird durch die bekannte Tatsache bestätigt, daß sich der Regen während eines Gewitters verstärkt, wenn einige Sekunden vorher ein Blitz in der Nähe des Zenits aufgetreten ist.

Literatur.

Zu § 1.

Chauveau: Journ. de Phys. (3) **8**, 599, 1899.
Suchsland: Gemeinschaftliche Ursachen der elektrischen Meteore und des Hagels. Halle 1886.

Zu § 2.

W. Thomson (Lord Kelvin): Reprint of Papers, 2. Aufl., p. 192, 218, 1884.
Bennet: Phil. Trans. 1787, p. 26.
Mascart: Compt. rend. **95**, 1882.
Lutz: Münch. Ber. 1906, S. 507.
D. Smirnow: Bull. der kaiserl. Akademie der Wissensch. zu St. Petersburg (russ.) **20**, 107, 1904.
Henning: Ann. d. Phys. (4) **7**, 893, 1902.
Linke: Phys. Zeitschr. **4**, 661, 1903.
Exner (Apparat). Wien. Ber. **93**, 222, 1886; **95**, 1084, 1887.
Dellmann: Pogg. Ann. **112**, 631, 1861.
Elster u. Geitel (Apparat). Phys. Zeitschr. **1**, 11, 1899; Terrestr. Magn. and Atmosph. Electr. **4**, 213, 1899; Ann. d. Phys. (4) **2**, 425, 1900.
Benndorf: Wien. Ber. **111**, 1, 1902; Phys. Zeitschr. **7**, 98, 1906.

Zu § 3.

Chauveau: Journ. de Phys. (3) **8**, 599, 1899.
Erman: Gilb. Ann. **15**, 385, 1803.
Exner: Repert. der Phys. **22**, 463, 1886.
Tuma: Wien. Ber. **101**, 1556, 1892.
Börnstein: W. A. **62**, 680, 1897; Verhandlungen der physik. Gesellsch. **13**, 35, 1894.
Baschin: Zeitschr. f. Luftschiffahrt, März-April 1894.
André: Compt. rend. **117**, 729, 1893.
Le Cadet: Compt. rend. **125**, 494, 1897; **136**, 886, 1903: Étude du champ. électr. de l'atmosphère. Paris 1898.
Less: Zeitschr. f. Luftschiffahrt. Juli 1894.
Lenard: W. A. **46**, 616, 1892.
Hesehus: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **34**, 557, 1902.

Zu § 4.

Planté: Récherches sur l'électricité, Paris 1883, p. 141; Compt. rend. **80**, 1133, 1875; **85**, 619, 1877; **87**, 325, 1878; La Lumière électr. 1884, p. 286.
Righi: Atti R. Accad. di Bologna, 26. April 1891; Rendic. Acc. dei Lincei **6**, 85, 1890.
Hesehus: Nachr. d. technol. Inst. (russ.) St. Petersburg 1898, 1899, 1900; Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **32**, 127, 1900. Phys. Zeitschr. **2**, 578, 1901.
Sauter: Progr. Realgymn. Ulm 1890, 1892.
Riecke: Gött. Nachr. 1895, S. 419.
Pockels: Phys. Zeitschr. **2**, 306, 1900/01; **3**, 22, 1901/02.
Melsens: Des paratonerres à pointes etc. Bruxelles 1877; Paratonerres, Bruxelles 1882.
Smirnow: Blitzableiter (russ.). St. Petersburg 1878.

Lindner: Der Blitzschutz. Leipzig 1901.
Benischke: Schutzvorrichtungen der Starkstromtechnik gegen atmosph. Entladungen. Braunschweig 1902.
A. S. Popow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **28**, 1, 1896.
Golow: Theorie und Praxis der Blitzableiter (russ.). St. Petersburg 1896.
Pedaew: Luftelektrizität (russ.). Charkow 1895.

Zu § 5.

W. Thomson (Lord Kelvin): Reprint of Papers, 2. Aufl., p. 192, 218, 1884.
Erman: Gilberts Ann. **15**, 385, 1803.
Peltier: Ann. de chim. et phys. (2) **62**, 1836; (3) **4**, 385, 1842.
Pellat: Journ. de Phys. (3) **8**, 253, 1899.
F. Exner: Rapports prés. au Congrès internat. de physique **3**, 415, Paris 1900; Exners Repert. **22**, 420, 1886; **25**, 743, 1889; Wien. Ber. **93**, 222, 1886; **95**, 1084, 1887; **96**, 419, 1887; **97**, 277, 1888; **98**, 1004, 1889; **99**, 601, 1890; **110**, 371, 1901; Meteorologische Zeitschr. **35**, 529, 1900.
Black: Journ. de Phys. (2) **2**, 476, 1883.
Lecher: Wien. Ber. **97**, 103, 1888.
Schwabe: W. A. **58**, 500, 1896; Ann. d. Phys. (4) **1**, 294, 1900.
Henderson: Phil. Mag. (5) **50**, 489, 1900.
Arrhenius: Meteorol. Zeitschr. **5**, 297, 1888.
Beggerow: Ann. d. Phys. (4) **7**, 494, 1902.
Ekholm u. Arrhenius: Bihang till. K. Svenska Vet. Handl. **19**, Nr. 8, 1893.
Liebenow: Die atmosphärische Elektrizität. Halle 1900.
Chree: Proc. R. Soc. **60**, 96, 1897.
Brillouin: Journ. de Phys. (3) **9**, 91, 1900.
Linss: Meteorol. Zeitschr. **4**, 352, 1887; Elektrotechn. Zeitschr. I, **11**, 506, 1890.
Wilson: Nature **68**, 104, 1903; Proc. Cambr. Phil. Soc. **12**, 171, 1903.
Rudolph: Meteorol. Zeitschr. **39**, 213, 1904; Luftelektrizität und Sonnenstrahlung. Leipzig 1903.
Chauveau: Recherches sur l'électricité atmosphérique, 2 mém. Paris 1902.
J. J. Thomson: Phil. Mag. (6) **4**, 352, 1902; Proc. Chambr. Phil. Soc. **12**, 172, 1903.
Geitel: Anwendung der Lehre von den Gasionen auf die Erscheinungen d. atmosph. Elektrizität. Braunschweig 1901.
Elster u. Geitel: Phys. Zeitschr. **1**, 11, 245, 1900; **2**, 113, 560, 590, 1901; **3**, 76, 194, 305, 574, 1902; **4**, 96, 97, 137, 138, 522, 1903; **5**, 11, 321, 1904; Jahresber. Gymn. Wolfenbüttel 1891, 1897; Wien. Ber. **98**, 909, 1889; **99**, 421, 1890; **101**, 703, 1485, 1892; **102**, 1295, 1903; **104**, 37, 1895; **111**, 946, 1902; Terr. Magn. and Electr. **4**, 15, 213, 1899; W. A. **25**, 116, 1885; **38**, 40, 497, 1888; **41**, 166, 1890; **47**, 496, 1892.
Czermak: Phys. Zeitschr. **3**, 185, 1902; **4**, 271, 1903.
Ebert: Phys. Zeitschr. **2**, 662, 1901; **3**, 338, 1902; **4**, 93, 162, 1903; **5**, 135, 499, 1904; **6**, 825, 828, 1905; Münch. Ber. **30**, 511, 1900; **31**, 35, 1901; Wien. Ber. **30**, 511, 1901; Gerlands Beiträge zur Geophysik **5**, 361, 1902; **6**, 66, 1903; Gött. Nachr. 1900, S. 219; Monthly Weather Rev. **31**, 229, 1903; Naturw. Rundsch. **18**, 417, 1903; Meteorol. Zeitschr. **36**, 289, 1901; **38**, 107, 1903; **39**, 201, 1904; Arch. d. Sc. phys. et natur. (4) **12**, 97,

1901; Jahrb. d. Radioaktiv. u. Elektrotonik **3**, 61, 1906; Illustrierte aeronautische Mitteilungen 1901, Heft 1; 1902, Heft 4.
Zeleny: Phil. Mag. (5) **46**, 120, 213, 1898.
Villari: Rendic. Acc. dei Lincei (5) **10**, 61, 1900; Phil. Mag. (6) **1**, 535, 1901.
Simpson: Phil. Mag. (6) **6**, 589, 1903; Phil. Trans. **205**, 61, 1905; Phys. Zeitschr. **5**, 325, 734, 1904.
Townsend: Proc. R. Soc. **45**, 192, 1899; **47**, 122, 1900; Phil. Trans. **193**, 129, 1900; **195**, 259, 1900.
Sokolow: Ionisation und Radioaktivität der atmosphärischen Luft (russ.), Pjatigorsk 1904.
Gerdien: Phys. Zeitschr. **4**, 632, 660, 1903; **6**, 433, 465, 647, 800, 1905; Gött. Nachr. 1905, S. 240, 258; Verh. d. d. phys. Ges. **7**, 368, 1905.
Gockel: Phys. Zeitschr. **4**, 267, 604, 871, 1903; **5**, 257, 591, 1904; Meteorol. Zeitschr. 1906, S. 339.
Riecke: Gött. Nachr. 1903, S. 1, 32, 39.
Schmauss: Ann. d. Phys. (4) **9**, 224, 1902.
Mache: Wien. Ber. **114**, 1377, 1905.
Königsberger: Phys. Zeitschr. **8**, 33, 1907.

Nachtrag.

Wir haben S. 230 die Ostwaldsche normale Elektrode beschrieben und ihre elektromotorische Kraft als gleich 0,560 Volt angegeben. In einer inzwischen erschienenen Arbeit hat Palmaer (Zeitschr. f. phys. Chem. **59**, 129, 1907) den Wert genauer bestimmt und als gleich 0,5732 Volt gefunden. In derselben Arbeit befindet sich ein vollständiges Literaturverzeichnis über elektrokapillare Erscheinungen und Tropfelektroden für die Zeit von 1875 bis 1906.

Zweiter Teil.

Konstantes Magnetfeld.

Erstes Kapitel.

Eigenschaften des konstanten Magnetfeldes.

§ 1. **Grundlegende Tatsachen.** Im ersten Teile haben wir uns mit dem konstanten elektrischen Felde bekannt gemacht, mit seinen Eigenschaften und Entstehungsbedingungen; als besonders charakteristische Eigenschaft eines solchen Feldes erscheint das Vorhandensein einer besonderen Kraft in jedem Feldpunkte, die wir als elektrische Kraft bezeichnet haben. Diese Kraft wirkt bloß auf elektrisierte Körper, wobei es gleichgültig ist, ob die Ladung wirklich vorhanden oder eine fiktive ist. Die erstere ist auf Leitern, sowie auch auf Nichtleitern, die beispielsweise durch Reiben elektrisiert sind, tatsächlich vorhanden; die fiktive Ladung denkt man sich auf der Oberfläche von Dielektrika verteilt, die sich im elektrischen Felde befinden und in ihm der „dielektrischen Polarisation" ausgesetzt sind. Andererseits existiert das Feld selbst nur dort, wo Ladungen wirklicher Elektrizität vorhanden sind, oder richtiger gesagt, wir sind anderen Fällen, in denen ein Feld auftritt, noch nicht begegnet.

Es ist nun auch möglich, in einem gegebenen Punkte des Raumes Kräfte anderer Art wachzurufen, die man magnetische Kräfte nennt; einen solchen Raum nennt man ein Magnetfeld, und zwar ein konstantes, wenn sich die in ihm wirkenden Kräfte nicht zeitlich ändern. Man könnte ein derartiges Feld ein magnetostatisches nennen; wir werden es in diesem Teile des vorliegenden Bandes einfach als Magnetfeld bezeichnen. Ein Magnetfeld heißt homogen, wenn die Kräfte in allen seinen Punkten der Größe oder der Richtung nach gleich sind; eine dieser beiden Bedingungen ist die notwendige Folge der anderen.

Zum Nachweis eines Magnetfeldes kann eine Magnetnadel dienen, deren Einrichtung und Grundeigenschaften wir als allbekannt voraus-

setzen dürfen. Sie besitzt zwei Pole, einen Nordpol und einen Südpol. Bringt man eine Magnetnadel in ein homogenes Magnetfeld, so wirken auf ihre beiden Pole Kräfte ein, die gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtung haben; das gleiche beobachtet man, wenn man an ein und denselben Punkt eines nicht homogenen Feldes zuerst den einen und darauf den anderen Pol ein und derselben Magnetnadel bringt. Die Richtung derjenigen Kraft, welche auf den Nordpol des Magneten wirkt, nimmt man als die Richtung der im Magnetfelde wirkenden Kraft an.

Bevor wir die Bedingungen für das Zustandekommen eines Magnetfeldes und seine Eigenschaften eingehender betrachten, wollen wir einen kurzen Hinweis auf die grundlegenden Tatsachen, die übrigens schon aus der Elementarphysik allgemein bekannt sein dürften, vorausschicken.

Es gibt zwei Hauptquellen für das Magnetfeld: Magnete und elektrische Ströme. Die Magnete sind entweder permanente Magnete, die vorwiegend aus Stahl angefertigt werden, oder temporäre Magnete, z. B. Stücke aus weichem Eisen, die in ein Magnetfeld gebracht sind. Da die temporären Magnete nur beim Vorhandensein eines Magnetfeldes entstehen können, so ist klar, daß man diese Magnete streng genommen nicht zu den Quellen, oder doch wenigstens nicht zu den Urquellen des Magnetfeldes zählen darf. Die temporären Magnete, die sich im Magnetfelde eines elektrischen Stromes bilden, heißen Elektromagnete.

I. Permanente Stahlmagnete können nur in einem bereits vorhandenen Magnetfelde hergestellt werden. Aber beim Verschwinden der Quelle dieses Feldes verschwindet das Feld selbst nicht vollständig. Ein Teil desselben bleibt gleichsam an den fertigen Stahlmagneten gebunden, wird zusammen mit diesem transloziert, so daß ein solcher Magnet bereits als eine selbständige Quelle eines Magnetfeldes angesehen werden kann. Die Magnete können Eisen, Stahl, Nickel, Kobalt und einige andere Stoffe „anziehen“; diese Stoffe haften an der Oberfläche der Magneten. In jedem Magneten unterscheidet man einen nördlichen und südlichen Teil, deren Oberflächen voneinander durch eine Indifferenzzone getrennt sind, längs welcher und in deren Nähe die Anziehung gleich Null oder unmerkbar klein ist. In jedem der beiden Teile ist ein Punkt vorhanden, der Pol genannt wird; die Pole werden entsprechend als Nord- und Südpol bezeichnet.

Für Punkte, welche weit vom Magneten entfernt sind, kann man die Annahme machen, daß auf sie nur zwei, von den Polen ausgehende Kräfte wirken. Befindet sich umgekehrt ein Magnet im homogenen Magnetfelde, so wirkt auf ihn, wie wir sehen werden, ein Kräftepaar, wobei die Pole als Angriffspunkte dienen. Bei den gewöhnlichen stab-

förmigen Magneten, sowie bei den Magnetnadeln, befinden sich die Pole in der Nähe der Enden des Magnets. Die Gerade, welche die beiden Pole verbindet, heißt die Magnetachse.

Eine der besonders charakteristischen Eigenschaften der Magnete, sowohl der permanenten als auch der temporären, besteht darin, daß, falls man einen Magneten zerbricht oder zerkleinert, ein jeder Teil desselben alle Eigenschaften eines Magneten aufweist: man findet an ihm einen nördlichen und einen südlichen Teil, zwei Pole usw.

Nähert man einen Magneten einem anderen, leicht beweglichen, so findet man, daß ungleichnamige Pole einander anziehen, gleichnamige einander abstoßen. Wie man diese Ausdrücke zu verstehen hat, ist schon früher erläutert worden.

Ein leicht beweglicher Magnet, der in ein bereits existierendes Magnetfeld anderer Magnete oder elektrischer Ströme gebracht wird, sucht eine Lage anzunehmen, bei welcher seine Achse die Richtung der wirkenden Magnetkräfte hat. Diese Definition ist nicht ganz genau; wir können uns aber vorläufig an sie halten, insbesondere, wenn wir es mit einem kleinen Magneten zu tun haben. Ganz genau ist sie für den Fall eines homogenen Feldes.

Der Raum, welcher die Erdkugel umgibt, ist ein Magnetfeld; die Gesamtheit der in diesem Felde auftretenden magnetischen Erscheinungen bildet den Gegenstand der Lehre vom Erdmagnetismus. Die Richtung der Magnetkraft in einem gegebenen Punkte dieses Feldes, oder, wie man zu sagen pflegt, die Richtung des Erdmagnetismus, bildet mit der Horizontalebene einen Winkel, den man die magnetische Inklination nennt. Die Achse eines vollkommen frei beweglichen Magneten stellt sich in die Richtung dieser Kraft ein. Fast in allen Punkten der nördlichen Hemisphäre ist die Inklination eine „nördliche", d. h. daß die nördliche Hälfte eines vollkommen frei beweglichen Magneten in der Richtung nach unten zeigt. Die Vertikalebene, welche durch diese Richtung hindurchgeht, heißt magnetischer Meridian. Der Winkel zwischen dem magnetischen und geographischen Meridian heißt die magnetische Deklination; für St. Petersburg ist dieser Winkel gegenwärtig (1907) ungefähr gleich 1° nach Osten. Eine sehr wichtige Rolle spielt die horizontale Komponente der erdmagnetischen Kraft, die offenbar gleich der im gegebenen Punkte wirkenden magnetischen Kraft, multipliziert mit dem Kosinus des Inklinationswinkels ist. Die Achse eines um eine vertikale Achse frei drehbaren Magnets (Magnetnadel) stellt sich im magnetischen Meridian ein, d. h. in der Richtung der horizontalen Komponente des Erdmagnetismus. Die Achse eines solchen Magneten bildet mit dem geographischen Meridian einen Winkel, welcher gleich der magnetischen Deklination ist. Dort, wo die Deklination gering ist, kann

man sagen, die Nadel weise mit dem einen Ende, dem Nordende, nach Norden, mit dem Südende nach Süden.

II. Der elektrische Strom ist eine Erscheinung, deren Grundcharakter gegenwärtig als allbekannt gelten kann. Er kann auf viele verschiedene Arten erhalten werden, die wir eingehend betrachten werden. In der Praxis wird er in den meisten Fällen in metallischen Leitern erhalten, welche die Form von Drähten haben. Der Raum, welcher den elektrischen Strom, d. h. die Leiter, in denen er „dahinfließt", umgibt, ist ein Magnetfeld. Bleiben alle Eigenschaften des Stromes im Verlauf einer gewissen Zeit unverändert, so bleiben auch die Eigenschaften dieses Magnetfeldes dieselben; der Raum, welcher einen konstanten elektrischen Strom umgibt, ist ein konstantes Magnetfeld. Ein konstanter Strom muß geschlossen sein, d. h. sämtliche Leiter, längs denen er strömt, müssen eine geschlossene Kette bilden.

Der elektrische Strom, oder genauer gesagt, ein vom elektrischen Strom durchflossener Leiter, unterliegt, wenn er in ein bereits vorhandenes Magnetfeld irgendwelcher Magnete oder anderer elektrischer Ströme gebracht wird, der Wirkung besonderer Kräfte, von denen man annehmen kann, daß sie am Leiter selbst angreifen, da sie diesen nach der einen oder anderen Seite zu bewegen suchen; wir haben derartige Kräfte als ponderomotorische Kräfte bezeichnet. Fügt man hierzu noch den Umstand, daß in dem Raume, welcher Ströme umgibt, Kräfte vorhanden sind, welche auf Magnete wirken, so wird es klar, daß wir es mit dem Begriff von Wechselwirkungen, erstlich zwischen Strom und Magnet und ferner zwischen Strom und Strom zu tun haben werden. Der Ausdruck „Wechselwirkung" weist, wie immer, bloß auf die Tatsache hin, daß jeder der beiden Körper (ein stromdurchflossener Leiter und Magnet oder zwei stromführende Leiter) bei Anwesenheit des anderen bestimmten ponderomotorischen Kräften unterliegt. Welcher Art die Richtungen dieser Kräfte in den verschiedenen Fällen sind, werden wir weiter unten sehen.

Kann man bloß einen Teil eines Magnetfeldes der Untersuchung unterziehen, und sind in diesem Teile weder Magnete noch elektrische Ströme vorhanden, so läßt sich die Frage, ob das Feld infolge der Anwesenheit von Magneten oder der Anwesenheit von elektrischen Strömen in anderen, unserer Beobachtung nicht zugänglichen Teilen des Feldes entstanden ist, nicht entscheiden. Die Eigenschaften der Magnetfelder eines Magneten und Stromes sind völlig identisch. Das Gesagte hört jedoch auf richtig zu sein, wenn man diejenigen Teile des Feldes untersucht, die sich in unmittelbarer Nähe der Quellen, d. h. der Magnete oder stromdurchflossenen Leiter befinden. Hier unterscheiden sich die beiden Quellen wesentlich voneinander, z. B. durch die Art der Verteilung der wirkenden Kräfte; es ist auch ein Unterschied in anderer Hinsicht vorhanden, hiervon soll aber erst später die Rede sein.

Wenn ein und dasselbe Magnetfeld durch die Anwesenheit von Magneten wie von Strömen hervorgerufen werden kann, so folgt hieraus, daß Magnete und Ströme einander äquivalent sind, d. h. daß Magnete durch Ströme und umgekehrt Ströme durch Magnete ersetzt werden können, ohne daß dadurch das Magnetfeld in allen Punkten eines gegebenen Teiles des Raumes, der indes weder Magnete noch Ströme enthält, geändert wird. Existiert eine Äquivalenz, so muß sich dieselbe durch zwei bestimmte geometrische und quantitative Regeln ausdrücken lassen, welche Lage und Eigenschaften der Magnete bestimmen, die den gegebenen Strömen äquivalent oder der Ströme, welche den gegebenen Magneten äquivalent sind. Zwei solche Regeln existieren in der Tat. Die erste Regel weist darauf hin, auf welche Weise ein Magnet im einfachsten Falle durch ein Solenoid, im allgemeinen Falle aber durch ein komplizierteres System von Strömen, entsprechend der von Ampère aufgestellten Theorie, ersetzt werden kann. Die zweite Regel aber setzt fest, in welcher Weise ein Strom durch eine magnetische Doppelschicht ersetzt werden kann. An dieser Stelle wäre es verfrüht, auf weitere Einzelheiten einzugehen. Wir werden uns mit den angedeuteten Regeln in der Folge eingehend bekannt machen.

§ 2. Vergleichung der Eigenschaften des konstanten Magnetfeldes mit denen des konstanten elektrischen Feldes. Wir wenden uns nunmehr der wichtigen Frage zu, ob eine Analogie zwischen den Eigenschaften des Magnetfeldes und den von uns eingehend betrachteten Eigenschaften des elektrischen Feldes besteht, und worin die besonders scharf ausgesprochenen unterscheidenden Merkmale dieser beiden Felder bestehen, abgesehen natürlich von dem Hauptkennzeichen, daß in dem einen von ihnen elektrische, im anderen magnetische Kräfte wirken, d. h., daß in dem einen elektrisierte Körper, im anderen Magnete und stromdurchflossene Leiter ponderomotorischen Kräften ausgesetzt sind. In praktischer Hinsicht ist diese Frage für uns deshalb von Bedeutung, weil uns die Möglichkeit gegeben ist, falls in beiden Feldern analoge Eigenschaften existieren, an dieser Stelle von einigen Herleitungen Gebrauch zu machen, die bereits in der Lehre vom elektrischen Felde gegeben wurden. Bei Beantwortung dieser Frage sind wir jedoch nicht im stande, sie bereits an dieser Stelle allseitig und erschöpfend zu lösen. Wir wollen nun diejenigen Eigenschaften des Magnetfeldes, die den Eigenschaften des elektrischen Feldes analog sind, und jene Eigenschaften, durch welche sich ersteres wesentlich von letzterem unterscheidet, voneinander gesondert betrachten.

A. Eigenschaften des Magnetfeldes, welche den Eigenschaften des elektrischen Feldes analog sind.

I. Die Wirkung von Magneten, also auch von Strömen in einem gegebenen Punkte kann durch die Wirkung zweier Stoffe, welche

analog den beiden Elektrizitäten sind, ersetzt werden. Wir werden diese Stoffe als freien Nord- und Südmagnetismus oder einfach als Magnetismen bezeichnen; wir werden auch von „magnetischen Massen" oder, wie wir zur Unterscheidung von ponderablen Massen lieber sagen wollen, „magnetischen Mengen" sprechen, welche diese oder jene Verteilung haben. Gleichnamige magnetische Mengen stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an.

II. Die Kraft f der Wechselwirkung von Magnetmengen, die sich in einem homogenen Medium befinden, wird durch die Coulombsche Formel

$$f = \frac{C m m'}{\mu r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

gegeben, in der C ein Proportionalitätsfaktor ist, m und m' die die Wechselwirkung ausübenden Magnetmengen, r ihr gegenseitiger Abstand. Ferner bedeutet μ eine Größe, die von dem Medium abhängig ist, in welchem sich m und m' befinden; sie heißt die magnetische Permeabilität der Substanz, welche dieses Medium erfüllt und ist der Dielektrizitätskonstante k, die wir auch als elektrische Permeabilität (S. 77) bezeichneten, vollkommen analog. Für das Vakuum, d. h. für den freien Äther, ist $\mu = 1$. Die Identität der Formel (1) mit jener Coulombschen Formel (S. 40), welche sich auf elektrische Massen bezieht, zeigt uns, daß für das Magnetfeld analoge Formeln gelten müssen, wie für das Elektrizitätsfeld, wenigstens soweit sie sich auf die geometrischen und analytischen Eigenschaften des Feldes beziehen, wie die Eigenschaften der Kraftlinien usw. Wir sind daher im stande, ohne die Herleitungen zu wiederholen, bereits fertige Resultate und Formeln zu benutzen, indem wir in letzteren die elektrischen Mengen η durch magnetische m, die Größe k durch die Größe μ und die Kraftlinien des elektrischen Feldes durch magnetische Kraftlinien des Magnetfeldes ersetzen.

III. Die magnetischen Körper, d. h. jene Körper, welche, in ein Magnetfeld gebracht, die Eigenschaften von Magneten erlangen, sind in vielem völlig analog den Dielektrika, mit deren Eigenschaften wir uns im ersten Teile bekannt gemacht haben. Was wir für die Dielektrika gefunden haben, wird auch auf magnetische Körper angewandt werden können.

B. Eigenschaften des Magnetfeldes, die sich von denen des elektrischen Feldes unterscheiden.

I. Es gibt keine Leiter des Magnetismus analog den Elektrizitätsleitern; infolgedessen fallen in der Lehre vom Magnetismus alle die Formeln und Ableitungen fort, welche sich in der Elektrizitätslehre auf Leiter bezogen (Verteilung der Ladung, Potential eines Leiters,

Kondensators usw.). Offenbar besitzen alle Körper magnetische Eigenschaften, d. h. es besitzen in bezug auf den Magnetismus alle Körper solche Eigenschaften, wie sie die Dielektrika in bezug auf die Elektrizität besitzen. Aber diese Eigenschaften sprechen sich scharf aus nur bei einer sehr kleinen Anzahl von Stoffen wie Eisen, Stahl, Nickel, Kobalt und einigen Erzen und Legierungen. Die magnetischen Eigenschaften der übrigen Stoffe sind dagegen sehr wenig ausgesprochen, d. h. ihre magnetische Permeabilität μ unterscheidet sich nur sehr wenig vom Werte $\mu = 1$, der für das Vakuum, d. h. für den freien Äther gilt.

Ein Magnet hat Ähnlichkeit mit einem polarisierten Dielektrikum: wir können uns einen Magneten aus sehr kleinen polarisierten Teilchen zusammengesetzt denken, d. h. aus Teilchen, von denen jedes zwei Pole besitzt, in welchen quantitativ gleiche, jedoch ungleichnamige magnetische Massen konzentriert sind. Wir werden diese Teilchen Molekularmagnete nennen. Indem man die Annahme macht, daß die Molekularmagnete im Magneten mit den Nordpolen vorzugsweise nach der einen Seite hin, mit den Südpolen nach der entgegengesetzten Seite hin orientiert sind, erklärt man zugleich, weshalb bei Zerstückelung eines Magneten alle seine Teile vollkommene Magnete darstellen, d. h. alle die Eigenschaften zeigen, die der Magnet vor seiner Zerstückelung erkennen ließ.

In der Tat: nimmt man an, daß alle Eigenschaften eines Magneten sich aus der Tatsache ergeben, daß er ein Konglomerat von mehr oder weniger regelmäßig orientierten Molekurlarmagneten darstellt, so ist klar, daß auch jeder von ihm stammende Teil alle Eigenschaften eines Magneten aufweisen muß, da er aus eben solch einem Konglomerate von Molekularmagneten, wie der ungeteilte Magnet selbst, besteht.

II. Es gibt zwei Arten von magnetischen Körpern: paramagnetische, für welche $\mu > 1$ ist und diamagnetische, für die $\mu < 1$ ist; die Diamagnete besitzen eine geringere magnetische Permeabilität als der freie Äther. Für alle Dielektrika ist $k > 1$, so daß sie alle den Paramagneten analog sind. Wir hatten die Formel $k = 1 + 4\pi\gamma$ (S. 75) hergeleitet, in der γ die elektrische Suszeptibilität bedeutete. Eine dieser analoge Formel lautet $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$, wo $\varkappa$ die magnetische Suszeptibilität heißt. Aus dem vorhergehenden folgt, daß die elektrische Suszeptibilität stets (für alle Dielektrika) eine positive Größe ist, während die magnetische Suszeptibilität sowohl positiv (für Paramagnete) als auch negativ (für Diamagnete) sein kann.

Wie wir gesehen haben, suchen die elektrischen Linien der Induktion durch diejenigen Stoffe zu gehen, welche die größte Dielektrizitätskonstante, d. h. elektrische Permeabilität k besitzen. Führt man in ein elektrisches Feld ein Dielektrikum ein, so ändert sich die

Richtung der Induktionslinien; sie verdichten sich gleichsam innerhalb des Dielektrikums. Führt man in ein homogenes Magnetfeld, in welchem die Induktionslinien einander parallele Geraden sind, eine paramagnetische Kugel ein, so nehmen diese Linien einen Verlauf, wie es die Fig. 71 auf S. 152 zeigt. Für eine diamagnetische Kugel wird eine Verteilung erhalten, wie sie Fig. 70 auf S. 152 zeigt. Für Dielektrika, welche sich im Vakuum befinden, ist ein Fall analog dem in dieser letzten Figur dargestellten nicht möglich; er wird aber sofort erhalten, wenn man in das dielektrische Medium ein kugelförmiges Dielektrikum einführt, dessen Permeabilität k kleiner ist als die Permeabilität des Mediums. Das Gesagte läßt sich auch in anderer Weise ausdrücken: das Vakuum, d. h. der freie Äther, besitzt die kleinste elektrische, nicht aber die kleinste magnetische Permeabilität. Die kleinste magnetische Permeabilität besitzt das Wismut; für dasselbe hat die Suszeptibilität $\varkappa$ den größten negativen Wert.

III. Es gibt keinen wirklichen Magnetismus, d. h. keinen solchen, der etwa den Elektrizitätsladungen analog wäre, wie man sie auf Leitern und Nichtleitern auf eine von den zahlreichen Arten, die im ersten Teile dieses Bandes betrachtet wurden, hervorrufen kann. Freier Magnetismus, den wir im vorigen erwähnt, ist der auf S. 73 betrachteten fingierten Elektrisierung von polarisierten Dielektrika analog. Wirkliche Elektrizität bildet den Anfang oder das Ende der Kraftlinien, die von ihr nach allen Seiten hin ausgehen. Magnetische Kraftlinien haben weder einen Anfang noch ein Ende; sie sind in sich geschlossene Linien. Dort, wo sie beim Übergange aus einem magnetischen Medium ins andere eine Brechung erleiden, kann man die Inhomogenität der Medien durch eine Schicht von freiem Magnetismus an der Trennungsfläche ersetzen. Der nördliche Teil des Magneten ist der Teil, aus dessen Oberfläche die Kraftlinien heraustreten, während sie in den Magneten durch die Oberfläche des südlichen Teiles zurückgelangen. Hierbei wird vorausgesetzt, daß der Magnet von einem Medium umgeben ist, dessen magnetische Permeabilität μ_1 kleiner ist als die magnetische Permeabilität μ_2 der Substanz des Magneten. Ist jedoch $\mu_2 < \mu_1$, so befindet sich der Nordmagnetismus dort, wo die Kraftlinien in die Magnetoberfläche eintreten, der Südmagnetismus dort, wo sie aus der Oberfläche des in Betracht gezogenen Körpers heraustreten.

Bringt man in ein Magnetfeld ein Stück Eisen, so durchdringen die Kraftlinien dasselbe; hierauf beruht auch die „Magnetisierung“ des Eisens und das Auftreten eines nördlichen und südlichen Teiles in demselben. Nirgends im Eisen finden sich Enden der Kraftlinien, daher findet sich auch an keiner Stelle desselben wirklicher Magnetismus. Nimmt man anstatt des Eisens Stahl, so bleibt nach Verschwinden der Quelle des Magnetfeldes ein Teil der magnetischen Kraftlinien, die den Stahl durchdrungen hatten, gewissermaßen an ihn gebunden. Sie

liegen teils innerhalb, teils außerhalb des betreffenden Stückes Stahl und bilden geschlossene Linien. Somit unterscheidet sich der permanente Magnetismus, der im Stahl zurückbleibt, im wesentlichen durch nichts vom temporären Magnetismus, der im weichen Eisen auftritt, wenn dasselbe in ein Magnetfeld gebracht wird. Hieraus wird klar, daß auch die permanenten Magnete keinen wirklichen Magnetismus besitzen.

IV. Die Kraftlinien des Magnetfeldes haben aus zwei Gründen einen etwas anderen Charakter, als die Kraftlinien des elektrischen Feldes. Diese Ursachen sind: das Nichtvorhandensein von wirklichem Magnetismus, sowie einige besondere, rein geometrische Eigenschaften der magnetischen Kraftlinien des Feldes elektrischer Ströme. Hieraus ergeben sich folgende allgemeine Eigenschaften der magnetischen Kraftlinien:

1. Die magnetischen Kraftlinien sind immer in sich geschlossen; sie gehen durch die magnetisierten Körper hindurch.

2. Die magnetischen Kraftlinien des elektrischen Stromes, der irgendwelche Leiter durchströmt, durchdringen diese Leiter nicht, sondern umgeben sie bloß. Auf diese Weise erhält man geschlossene Kraftlinien, welche ganz und gar im äußeren Medium liegen. Ein langer geradliniger Draht, durch welchen ein elektrischer Strom fließt, ist von magnetischen Kraftlinien umgeben, welche die Form von Kreisen haben, deren Ebenen senkrecht zur Drahtlänge sind und deren Mittelpunkte auf der Achse des Drahtes liegen. Eine eben solche Form haben die Kraftlinien nahe der Oberfläche des Drahtes auch in dem Falle, daß der Draht nicht geradlinig ist.

3. Die Gesamtheit solcher den elektrischen Strom umgebenden Kraftlinien hat Ähnlichkeit mit einem Wirbel, dessen Achse die Richtung des Stromes hat. Wir werden sehen, daß es in jedem Magnetfelde solche Raumteile gibt, welche von Wirbeln magnetischer Kraftlinien erfüllt sind; wir werden sie Wirbelräume nennen. Theoretisch muß man zugeben, daß unter bestimmten Bedingungen auch ein elektrostatisches Feld erhalten werden kann, das Wirbelräume enthält. Jedenfalls enthält aber das Feld, das wir im vorhergehenden Teile dieses Bandes betrachtet haben und das an das Vorhandensein von elektrischen Ladungen und polarisierter Dielektrika gebunden ist, keinerlei Wirbelräume.

§ 3. Formeln, die für jedes Magnetfeld gelten. Die im vorhergehenden Paragraphen dargelegte Analogie zwischen den Eigenschaften des Magnetfeldes und des elektrischen Feldes setzt uns in den Stand, bereits fertige Herleitungen des ersten Teiles zu benutzen und eine große Zahl von Formeln und Lehrsätzen anzugeben, die sich auf das Magnetfeld beziehen. Im Hinblick aber auf die eben-

falls erwähnten Unterschiede in den Eigenschaften beider Felder findet man, daß erstens gewisse früher hergeleitete Formeln und Sätze auf das Magnetfeld keine Anwendung finden (Leiter, Kondensatoren) und daß zweitens für das Magnetfeld gewisse Formeln gefunden werden können, die für das elektrische Feld keine Bedeutung haben. Außerdem gibt es besondere Formeln für das Feld eines Magneten und für dasjenige eines Stromes. Im vorliegenden Paragraphen sollen nur diejenigen Formeln und Lehrsätze betrachtet werden, die für jedes Magnetfeld gelten.

Die äußere Wirkung eines Magneten kann dargestellt werden als Wirkung von fingierten magnetischen Massen, die zum Teil auf der Oberfläche, zum Teil im Innern des Magneten sich befinden, oder, entsprechend der sog. Lehre vom äquivalenten Massentransport, bloß an der Magnetoberfläche. Die äußere Wirkung von Strömen läßt sich, wie wir sehen werden, ebenfalls durch die Wirkung von magnetischen Mengen, die in besonderer Weise verteilt sind, ersetzen. Zwei Mengen Magnetismus m und m_1 wirken aufeinander mit einer Kraft f, die wir als positiv ansehen werden, wenn m und m' einander abstoßen. Wir hatten bereits die Formel

$$f = \frac{C m m'}{\mu r^2} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

erwähnt; hier bedeutet C einen Proportionalitätsfaktor, μ die magnetische Permeabilität des homogenen Mediums, in dem sich m und m' befinden, endlich r den Abstand zwischen m und m'. Die nördlichen magnetischen Mengen werden wir als positive ansehen und auch als solche bezeichnen, die südlichen dagegen als negative. Für das Vakuum, vielleicht auch für einige Stoffe ist $\mu = 1$. Hat man es mit stark magnetischen Körpern zu tun, so kann man die Annahme machen, es sei auch für die Luft $\mu = 1$. Setzt man $C = 1$, so erhält man

$$f = \frac{m m'}{\mu r^2} \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

Im Vakuum ist

$$f = \frac{m m'}{r^2} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

Indem wir in Formel (1) den Faktor $C = 1$ setzen, führen wir hierdurch eine Einheit der magnetischen Menge ein; man nennt dieselbe die elektromagnetische (el.-mg.) Einheit. Ist $m = m_1 = 1$ und $r = 1$, so ist $f = 1$. Die el.-mg. Einheit der magnetischen Menge wirkt im Vakuum auf eine ihr gleiche, von ihr im Abstande der Längeneinheit befindliche mit einer Kraft ein, die gleich der Einheit ist. Die el.-mg. C. G. S.-Einheit der magnetischen Menge wirkt im Vakuum auf eine ihr gleiche, von ihr um 1 cm entfernte Einheit mit der

Kraft von einer Dyne. Alle Einheiten, denen wir später in diesem Teile begegnen werden, sind elektromagnetische, weshalb wir in den meisten Fällen die Bezeichnung „el.-mg." fortlassen werden, wenn von Einheiten die Rede ist. Formel (2) gibt nach Analogie von (13, a) auf S. 42 als Dimension der magnetischen Menge

$$[m] = [\mu]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Sieht man μ als unbenannte Zahl an, so ist

$$[m] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \quad \ldots \ldots \quad (4, a)$$

Befinden sich die magnetischen Mengen an der Oberfläche s, so werden wir von ihrer Oberflächendichte reden, die bei gleichmäßiger Mengenverteilung gleich $k = m : s$ ist; bei ungleichmäßiger Mengenverteilung haben wir in einem gegebenen Punkte

$$dm = k ds \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Nehmen wir an, es wirke in einem gegebenen Punkte eines Magnetfeldes auf die Menge m die Kraft f; dann wird die Größe

$$H = \frac{f}{m} \quad \ldots \ldots \quad (5, a)$$

die Intensität des Magnetfeldes in diesem Punkte genannt. Anstatt von Intensität spricht man bisweilen von der „Kraft" des Magnetfeldes, was nicht ganz richtig ist. Die Komponenten der nach den Koordinatenachsen genommenen Intensität H pflegt man mit α, β und γ zu bezeichnen.

Ist ds ein Flächenelement, H_n die normale Komponente der Kraft (Intensität) H, so sind der Kraftfluß Φ und der Induktionsfluß Ψ durch die Fläche s durch folgende Formeln gegeben:

$$\Phi = \iint H_n ds \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

$$\Psi = \iint \mu H_n ds \quad \ldots \ldots \quad (6, a)$$

Im homogenen Medium ist

$$\Psi = \mu \Phi \quad \ldots \ldots \quad (6, b)$$

vgl. (16), (16, a) und (16, b), S. 44. Jeder dieser Flüsse ist gleich der algebraischen Summe der Flüsse, die von den einzelnen Teilchen des „freien", aber, wie wir sahen, stets fingierten Magnetismus herstammen. Denken wir uns, es befinde sich in einem gewissen Punkte A die magnetische Menge m. Befindet sich dann Punkt A im Innern einer geschlossenen Fläche s, so ist für ein homogenes Medium

$$\Phi = \frac{4\pi m}{\mu} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

$$\Psi = 4\pi m \quad \ldots \ldots \quad (7, a)$$

vgl. (18) und (18, a), S. 45. Befindet sich Punkt A auf der Fläche s selbst, so ist im homogenen Medium

$$\Phi = \frac{2\pi m}{\mu} \quad \text{. . . . .} \quad (7, b)$$

$$\Psi = 2\pi m \quad \text{. . . . .} \quad (7, c)$$

vgl. (18, b), S. 45. Liegt Punkt A außerhalb der Fläche s, so ist im homogenen Medium

$$\Phi = \Psi = 0 \quad \text{. . . . .} \quad (7, d)$$

vgl. (18, c), S. 46. Die Formeln (7), (7, a), (7, b), (7, c) und (7, d) bleiben richtig, wenn m ganz beliebige magnetische Mengen darstellt, die bloß innerhalb, bloß auf oder bloß außerhalb der Fläche s liegen. Im allgemeinen Falle, wenn innerhalb, auf und außerhalb der Fläche s sich die entsprechenden Mengen m_i, $\overline{m}$ und m_e befinden, gelten für ein homogenes Medium die Ausdrücke:

$$\Phi = \iint H_n\, ds = \frac{4\pi m_i}{\mu} + \frac{2\pi \overline{m}}{\mu} \quad \text{. . . .} \quad (8, a)$$

$$\Psi = \iint \mu H_n\, ds = 4\pi m_i + 2\pi \overline{m} \quad \text{. . . .} \quad (8, b)$$

vgl. (19), S. 47. Der Induktionsfluß ist unabhängig von der Art des umgebenden Mediums. Wir nehmen an, daß er überhaupt nicht von den Eigenschaften des umgebenden Mediums abhängt, d. h. daß der Induktionsfluß auch für ein nicht homogenes Medium durch Formel (8, b), vgl. (19, b), S. 47, gegeben wird.

Ist ϱ die Volumdichte des Magnetismus, so ist in jedem Feldpunkte

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial z} = 4\pi\varrho \quad \text{. . . .} \quad (9)$$

wo α, β, γ die Komponenten der Intensität H sind, vgl. (20), S. 49. Im homogenen Medium ist

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = \frac{4\pi\varrho}{\mu} \quad \text{. . . . . . .} \quad (9, a)$$

Im Vakuum und angenähert auch in Luft ist

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 4\pi\varrho \quad \text{. . . . . .} \quad (9, b)$$

In jedem Raumpunkte, in welchem $\varrho = 0$ ist, hat man

$$\frac{\partial(\mu\alpha)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu\beta)}{\partial y} + \frac{\partial(\mu\gamma)}{\partial z} = 0 \quad \text{. . . .} \quad (9, c)$$

Im homogenen Medium ist für $\varrho = 0$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0 \quad \text{. . . . . . .} \quad (9, d)$$

Es sei eine gegebene Fläche s mit Magnetismus bedeckt, dessen Oberflächendichte im gegebenen Punkte gleich k sei; die Richtung der äußeren Normalen bezeichnen wir mit n. Seien ferner $H_{1,n}$ und $H_{2,n}$ die normalen Komponenten der Kraft an der Fläche selbst zu ihren beiden Seiten, H_n dieselbe Komponente für einen Punkt der Fläche selbst. Nimmt man dann ferner an, die Permeabilität μ sei zu beiden Seiten von s die gleiche, so erhält man

$$H_{1,n} - H_{2,n} = \frac{4\pi}{\mu} k \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

Im Vakuum ist

$$H_{1,n} - H_{2,n} = 4\pi k \quad \ldots \ldots \quad (10, a)$$

Ferner ist

$$H_{1,n} - H_n = H_n - H_{2,n} = \frac{2\pi}{\mu} k \quad \ldots \ldots \quad (10, b)$$

Im Vakuum ist

$$H_{1,n} - H_n = H_n - H_{2,n} = 2\pi k \quad \ldots \ldots \quad (10, c)$$

vgl. (22), (22, a), (23, c) und (23, d), S. 50 und 51.

Durch einen kleinen Teil einer beliebigen Fläche kann man die Seitenfläche einer Kraftröhre hindurchlegen. Es sei hierbei σ der Flächeninhalt eines senkrechten Schnittes der Röhre, μ die magnetische Permeabilität des Mediums an der Stelle, an welcher sich das Element $d\sigma$ dieses Schnittes befindet. In diesem Falle wird die Größe

$$\psi = \iint \mu H d\sigma \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

als magnetischer Induktionsfluß im Querschnitt σ der Röhre bezeichnet, vgl. (26, a), S. 54. Es läßt sich leicht beweisen, daß der Induktionsfluß an der ganzen Induktionsröhre entlang unverändert bleibt, so daß man für zwei beliebige Schnitte σ_1 und σ_2 der Röhre den Ausdruck

$$\iint \mu_1 H_1 d\sigma_1 = \iint \mu_2 H_2 d\sigma_2 \quad \ldots \ldots \quad (11, a)$$

erhält, vgl. (26, c), S. 54. Wenn es wirklichen Magnetismus, analog dem, was wir freie Elektrizität nannten, gäbe, und sich zwischen den Schnitten σ_1 und σ_2 die Menge m solchen Magnetismus befände, so wäre der Unterschied $\psi_2 - \psi_1$ der Induktionsflüsse in diesen Schnitten gleich

$$\psi_2 - \psi_1 = \iint \mu_2 H_2 d\sigma_2 - \iint \mu_1 H_1 d\sigma_1 = 4\pi m \quad \ldots \quad (11, b)$$

vgl. (26, e), S. 55. Faktisch gibt es aber keinen wirklichen Magnetismus, es ist daher der Induktionsfluß in allen Querschnitten der geschlossenen Röhre der gleiche.

Wenden wir uns jetzt den Eigenschaften einer Röhre der magnetischen Kräfte im homogenen Medium zu. Zunächst begegnen wir hier der Formel

$$H_1 : H_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

vgl. (28), S. 56. Die Feldintensität ist umgekehrt proportional dem Flächeninhalt des Querschnittes der Kraftröhre. Wir führen den Begriff der Kraftlinienzahl ein, analog dem auf S. 56 eingeführten Begriff. Es sei diese Zahl hier mit N' bezeichnet. Wie wir gesehen haben, bezieht sich diese Zahl auf die zu den Kraftlinien senkrechte Flächeneinheit. Es läßt sich leicht beweisen, daß im homogenen Medium für zwei beliebige Kraftröhrenschnitte

$$N'_1 : N'_2 = H_1 : H_2 \quad \ldots \ldots \quad (12, a)$$

ist, vgl. (28, b), S. 56. Zieht man im homogenen Medium durch jedes Element s einer beliebigen Fläche S, welche überall senkrecht zu den Kraftlinien ist, sH' Kraftlinien, wo H' die Feldintensität auf dem Flächenelemente s bedeutet, so gilt für alle Punkte des Mediums die Gleichung

$$N' = H \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12, b)$$

vgl. (28, d), S. 57. Anstatt der Kraftlinien könnte man sH' Kraftröhren ziehen, deren Querschnittssumme gleich s wäre. Die Anzahl der Kraftlinien oder der Kraftröhren, welche, wie oben gezeigt, im homogenen Medium von einer beliebigen, überall zu diesen Kraftlinien oder Kraftröhren senkrechten Fläche S aus gezogen sind, ist in allen Punkten dieses Mediums gleich der Feldintensität.

Der gesamte Kraftfluß Φ, welcher eine beliebige Fläche S durchsetzt, ist gleich der gesamten Kraftlinienzahl, welche diese Fläche durchsetzt. Bezeichnet man diese Zahl mit N, so ist

$$\Phi = \int H_n \, ds = N \quad \ldots \ldots \quad (12, c)$$

Die Größe

$$B = \mu H \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

heißt die magnetische Induktion oder einfach die Induktion im gegebenen Punkte des magnetischen Mediums; sie ist gleich dem magnetischen Induktionsfluß, reduziert auf die zu den Kraftlinien senkrechte Flächeneinheit. Für eine sehr dünne Induktionsröhre kann man Formel (11, a) in der Form $\mu_1 H_1 \sigma_1 = \mu_2 H_2 \sigma_2$ oder $B_1 \sigma_1 = B_2 \sigma_2$ schreiben, woraus

$$B_1 : B_2 = \sigma_2 : \sigma_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13, a)$$

folgt, vgl. (29, a), S. 57. Diese Formel behält ihre Geltung, wie verschieden man auch die Röhrenquerschnitte, die in verschiedenen Medien gelegen sind, wählen mag, während dagegen Formel (12) sich nur auf ein homogenes Medium bezieht. Wir ziehen nun durch jedes Element s einer beliebigen Fläche S, die überall senkrecht zu den Induktionsröhren ist, sB' Induktionsröhren, wobei B' den Wert der Induktion für das Flächenelement s darstellt. Es ist dann in allen Teilen des Magnetfeldes die Gleichung

$$N' = B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

erfüllt, in welcher N' die Induktionsröhrenzahl, reduziert auf die zu den Röhren senkrechte Flächeneinheit bedeutet. Der Induktionsfluß ψ in jeder der auf diese Weise konstruierten Induktionsröhren ist gleich Eins, denn es ist $\psi = \mu H \sigma = B \sigma = N \sigma$, wo σ den Querschnitt einer Röhre, N die Anzahl der Röhren, die den Querschnitt σ durchsetzen, bedeutet, so daß offenbar $N\sigma = 1$ ist, woraus sich dann $\psi = 1$ ergibt. Wir werden derartige Röhren als Einheitsröhren der Induktion bezeichnen. In jeder derartigen Röhre ist

$$H = \frac{1}{\mu \sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$B = H\mu = \frac{1}{\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15, a)$$

Von der Menge m von (fingiertem) Magnetismus geht die Anzahl

$$\nu = 4\pi m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

aus, von der Einheit des Magnetismus die Anzahl

$$\nu_1 = 4\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16, a)$$

Einheitsröhren der Induktion, vgl. (29, e) und (29, f), S. 59.

Wir nehmen an, es sei längs der Einheitsröhre der Induktion eine gewisse Spannung p vorhanden, die gleich

$$p = \frac{H}{8\pi} = \frac{1}{8\pi\mu\sigma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

ist, vgl. (32, f), S. 62. Die Spannung P pro Flächeneinheit senkrecht zu den Induktionsröhren ist gleich

$$P = \frac{p}{\sigma} = \frac{H}{8\pi\sigma} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{BH}{8\pi} = \frac{1}{8\pi\mu\sigma^2} \quad . \quad (17, a)$$

denn in der Einheitsröhre ist der Fluß gleich $\mu H \sigma = B \sigma = 1$. Für das Gleichgewicht der Spannungsröhren ist es erforderlich, daß ihre Seitenflächen einen Druck erleiden, welcher, wie Maxwell gezeigt hat, ebenfalls gleich P (pro Flächeneinheit) ist.

Beim Übergange aus einem Medium (μ_1) in das andere (μ_2) erleiden die Induktionsröhren eine Brechung. Sind α_1 und α_2 die Winkel zwischen der Röhrenachse und der Normalen zur Trennungsfläche beider Medien, so ist

$$\frac{tg\,\alpha_1}{tg\,\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

vgl. (31, b), S. 60. — Die normale Komponente der Induktion erfährt hierbei keine Änderung, vgl. (31), S. 59.

Befindet sich in einem Medium, dessen Permeabilität μ_1 ist, ein Körper mit der Permeabilität μ_2, so gilt für jede Induktionsröhre die

Relation $\psi = \mu_1 H_1 \sigma_1 = \mu_2 H_2 \sigma_2$ oder $\psi = B_1 \sigma_1 = B_2 \sigma_2$. Die Anwesenheit des Körpers (μ_2) kann man durch entsprechende Verteilung einer Schicht von fingiertem Magnetismus auf der Oberfläche dieses Körpers ersetzen, wobei im äußeren Medium keine Änderung des Magnetfeldes erfolgt. Die Dichte k dieser Schicht wird durch die Formeln

$$k\sigma = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_2}\psi = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi\mu_2}\mu_1 H_1 \sigma_1 = -\frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi} H_2 \sigma_2 \quad (19)$$

bestimmt. Hier bedeutet σ ein Flächenelement des Körpers. Befindet sich der Körper im unmagnetischen Medium ($\mu_1 = 1$), so setzen wir $\mu_2 = \mu$; es ist dann

$$k\sigma = -\frac{\mu - 1}{4\pi\mu}\psi = -\frac{\mu - 1}{4\pi\mu} H_1 \sigma_1 = -\frac{\mu - 1}{4\pi} H_2 \sigma_2 \quad . \quad (19, \text{a})$$

Ferner ist $\sigma_2 : \sigma = \cos\alpha$, wo α den Winkel bedeutet, welcher von den Kraftlinien im Innern des magnetischen Körpers mit der Normalen an seiner Oberfläche gebildet ist. Auf diese Weise erhält man

$$k = -\frac{\mu - 1}{4\pi} H_2 \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19, \text{b})$$

Die experimentelle Bestimmung der Dichte k begegnet großen Schwierigkeiten, da sie von der Feldintensität H_1 abhängt, die selbst zum Teil durch eine Schicht von fingiertem Magnetismus hervorgerufen ist, also von k abhängt. Als ein Beispiel der Lösung von hierher gehörigen Aufgaben kann die von uns betrachtete Aufgabe vom elektrischen Zustande einer dielektrischen Kugel dienen, die in ein homogenes elektrisches Feld gebracht ist. Eine analoge Aufgabe für das Magnetfeld werden wir in der Folge betrachten.

Es ruft also ein Körper, für welchen μ größer ist als für das umgebende Medium, in diesem Medium ebensolche Kräfte hervor, wie sie eine Schicht von freiem Magnetismus, der die Körperoberfläche bedeckt, hervorrufen würde. Diese fingierte Schicht scheint in Wirklichkeit vorhanden zu sein und unmittelbar in allen Punkten des äußeren Mediums zu wirken. Besonders intensiv ist diese Wirkung unmittelbar an der Körperoberfläche; hier machen sich die Anziehungen oder Abstoßungen besonders bemerkbar. Bei Herleitung der Formel (19) hatten wir die Annahme gemacht, daß die Induktionslinien vom ersten Medium (μ_1) ins zweite (μ_2) übergehen, d. h. in den in Betracht gezogenen Körper eintreten; natürlich ist derjenige Teil der Körperoberfläche, durch welchen die Induktionslinien oder Induktionsröhren in den Körper eintreten, mit negativem, d. h. Südmagnetismus bedeckt ($k < 0$), derjenige Teil aber, durch den sie aus dem Körper heraustreten, mit positivem, d. h. Nordmagnetismus, wenn $\mu_2 > \mu_1$ ist. Ist dagegen $\mu_2 < \mu_1$, so hat man an

den Eintrittsstellen der Induktionsröhren Nordmagnetismus, an den Austrittsstellen Südmagnetismus.

Machen wir jetzt die Annahme, es sei im umgebenden Medium $\mu_1 = 1$; die Intensität des Magnetfeldes im Innern des gegebenen Körpers bezeichnen wir mit H. Wir denken uns innerhalb des Körpers ein sehr kleines rechtwinkeliges Parallelepiped von der Grundfläche s, der Länge l und dem Volumen $v = ls$ abgesondert. Sondert man es in der Tat von dem Körper ab, während man die durch dasselbe hindurchgehenden Induktionsröhren, die den Winkel α mit der Senkrechten zur Grundfläche s bilden, ungeändert läßt, so weisen die fingierten Schichten des Magnetismus auf diesen Grundflächen eine Dichte auf, deren absoluter Wert gleich

$$k_1' = \frac{\mu - 1}{4\pi} H \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

ist, vgl. (19, b). Wird die Länge l in der Richtung der Kraftlinien ($\alpha = 0$) genommen, so ist die Dichte gleich

$$k' = \frac{\mu - 1}{4\pi} H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20, a)$$

woraus sich

$$k_1' = k' \cos\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20, b)$$

ergibt. Die magnetische Menge m auf jeder der Grundflächen ist (für $\alpha = 0$) gleich

$$m = k's \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Das Produkt

$$M = ml \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

heißt das magnetische Moment des in Gedanken abgesonderten Teiles unseres Körpers. Das Verhältnis

$$J = \frac{M}{v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

d. h. das auf die Volumeinheit bezogene magnetische Moment, heißt der Grad oder die Intensität der Magnetisierung im Volumen v. Substituiert man $M = ml = k'sl$ und $v = sl$, so findet man

$$J = k' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23, a)$$

Der Magnetisierungsgrad wird durch die Dichte des fingierten Magnetismus auf einer zu den Induktionsröhren senkrechten Fläche gemessen. Bei ungleichmäßiger Magnetisierung wählen wir ein unendlich kleines Volumen Δv und schreiben ΔM anstatt M; in diesem Falle ist der Magnetisierungsgrad im gegebenen Punkte gleich

$$J = \lim \frac{\Delta M}{\Delta v} = \frac{dM}{dv} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23, b)$$

Der Magnetisierungsgrad hängt von der Feldintensität H ab; setzt man

$$J = \varkappa H \quad \ldots \ldots \ldots \quad (24)$$

so heißt $\varkappa$ die magnetische Suszeptibilität der Substanz. Die Formeln (23, a) und (20, a) geben

$$\frac{\mu - 1}{4\pi} H = \varkappa H,$$

woraus

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

folgt. Diese wichtige Formel gibt den Zusammenhang zwischen der magnetischen Permeabilität μ und der magnetischen Suszeptibilität $\varkappa$ an. Für das Vakuum ist $\mu = 1$, $\varkappa = 0$.

Denken wir uns im Innern eines in ein gleichförmiges Magnetfeld mit der Intensität H gebrachten Körpers einen Hohlraum, welcher von zwei parallelen, unendlich nahen, zu den Kraftlinien des Feldes senkrechten Ebenen begrenzt ist und nehmen wir an, die Feldintensität im Innern dieses Hohlraumes sei gleich H'. Die Ebenen sind dann mit Schichten von fingiertem Magnetismus bedeckt, dessen Dichte

$$k' = J = \varkappa H$$

ist. Wir haben in diesem Falle

$$\mu = \frac{H'}{H} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, a)$$

und, da $\mu H = B$ ist, vgl. (13), so folgt hieraus

$$B = H' \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25, b)$$

vgl. (34, a) und (34, b), S. 76 und 77. Die magnetische Permeabilität einer Substanz ist gleich dem Verhältnis der Feldintensität im Innern dieser Substanz (in einem innerhalb derselben vorhanden gedachten, unendlich schmalen Spalte) zur Intensität des äußeren Feldes, für welches $\mu = 1$ ist.

Die Induktion B ist numerisch gleich der Feldintensität im erwähnten unendlich engen Spalt innerhalb der magnetischen Substanz.

Indem wir mit den grundlegenden Sätzen aus der Lehre von den Kraftlinien und Induktionslinien im Magnetfelde abschließen, erinnern wir noch an die aus der Elementarphysik bekannten Methoden zur praktischen Untersuchung der Form der magnetischen Kraftlinien.

Eine der diesbezüglichen Methoden beruht darauf, daß die Achse einer kleinen, leicht beweglichen Magnetnadel, die in das Magnetfeld gebracht ist, sich in der Richtung der Kraftlinien einstellt. Merkt man sich daher die Lage der Achse einer solchen Nadel in verschiedenen

Teilen des Magnetfeldes, so kann man auf diese Weise die Verteilung der magnetischen Kraftlinien in diesem Felde vollständig kennen lernen.

Eine andere Methode besteht darin, daß man Eisenfeilicht auf eine horizontale glatte Papierfläche oder Glasplatte, welche in ein Magnetfeld gebracht ist, streut. Die Feilspäne werden magnetisiert, haften mit den ungleichnamigen Polen aneinander und gruppieren sich so, gleichsam Ketten bildend, längs den magnetischen Kraftlinien zu dem sogenannten magnetischen Spektrum. Es sind verschiedene Methoden zum Fixieren solcher Spektren von Meunier, Faraday, Gerland, Ebert, Lindeck, Mach, Kowalski u. a. in Vorschlag gebracht worden, doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen.

§ 4. Magnetisches Potential. In § 6 des ersten Kapitels dieses Bandes (S. 82) haben wir das elektrische Potential V im konstanten elektrischen Felde kennen gelernt, welches durch Ladungen von wirklicher Elektrizität auf Leitern oder Dielektrika hervorgerufen wird. Eine der wichtigsten Eigenschaften des elektrischen Potentials besteht darin, daß es unter den angegebenen Bedingungen eine eindeutige und stetige Funktion eines Punktes, d. h. der Koordinaten der Raumpunkte darstellt. Dem Begriffe der Diskontinuität (Unstetigkeit) des Potentials sind wir nur an einer Stelle begegnet, wo wir den Begriff der elektrischen Doppelschicht einführten (S. 97).

In der Lehre vom Magnetfelde ist von hervorragender Bedeutung eine ganz analoge Größe, das magnetische Potential, das wir ebenfalls mit V bezeichnen wollen. Hier ist jedoch die Analogie keine vollständige: wir werden sehr bald Fälle kennen lernen, wo das magnetische Potential keine eindeutige Punktfunktion darstellt, so daß man, ausgehend von einem gegebenen Punkte, bei Rückkehr zu demselben in ihm dem früheren oder aber einem neuen Wert des magnetischen Potentials begegnen kann, je nach der Lage des Weges, den wir durchlaufen haben.

Die Analogie zwischen dem magnetischen und elektrischen Potential ist jedoch eine vollständige, wenn wir uns vorläufig auf einen Spezialfall beschränken und bloß das Magnetfeld von Magneten und zwar im homogenen Medium ($\mu = Const$) betrachten. Wir setzen somit voraus, daß wir es nicht mit elektrischen Strömen, sondern nur mit beliebig im Raum (μ) verteilten permanenten Magneten, sowie mit paramagnetischen und diamagnetischen Körpern zu tun haben. Die Kräfte, welche im magnetischen Felde außerhalb dieser Magnete und Körper wirken, verändern sich nicht, wenn wir voraussetzen, daß diese Kräfte von magnetischen Mengen ausgehen, welche in bestimmter Weise auf den Oberflächen der Magnete und magnetischen Körper angeordnet sind. Die Oberflächendichte k dieser Massen wird durch Formel (19) gegeben, in der man $\mu_1 = \mu$ setzen muß. Um der Ver-

allgemeinerung willen setzen wir jedoch voraus, daß außer diesen Mengen auch noch magnetische Mengen vorhanden sind, welche eine Volumdichte ϱ besitzen. Ein Teilchen (eine Menge) des wirksamen Magnetismus bezeichnen wir mit m oder mit dm; ein Teilchen, welches an irgend einen Punkt des äußeren Feldes gebracht ist, mit m'.

Die potentielle Energie W zweier magnetischer Mengen m und m', deren Entfernung r beträgt, ist gleich

$$W = \frac{mm'}{\mu r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26)$$

vgl. (36, a), S. 83. Der allgemeine Ausdruck für das Potential V in einem beliebigen Punkte A des Magnetfeldes lautet

$$V = \frac{1}{\mu}\int\frac{dm}{r} = \frac{1}{\mu}\iint\frac{k\,ds}{r} + \frac{1}{\mu}\iiint\frac{\varrho\,dv}{r} \quad \ldots \quad (27)$$

wo ds und dv Elemente der Oberfläche und des Volumens sind, vgl. (37, b), S. 84.

Die Arbeit R von magnetischen Kräften, welche zum Transport der magnetischen Menge m' vom Punkte $A\,(V_1)$ zum Punkte $B\,(V_2)$ erforderlich ist oder aber die Arbeit äußerer Kräfte zum Transporte der Menge m' von B nach A, ist durch folgenden Ausdruck gegeben

$$R = m'(V_1 - V_2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

vgl. (38), S. 85. Setzt man $m' = 1$, $V_1 = V$ und macht die Annahme, daß B sich in der Unendlichkeit befindet, so erhält man $R = V$. Das magnetische Potential eines Punktes ist gleich der Arbeit, welche von magnetischen Kräften beim Transport der Einheit der magnetischen Menge ($m = 1$) aus diesem Punkte auf beliebigem Wege in die Unendlichkeit geleistet wird oder aber gleich der Arbeit äußerer Kräfte bei dem Transport von $m = 1$ aus der Unendlichkeit bis zu diesem Punkte. Das Potential V stellt im betrachteten Falle eine eindeutige, stetige Funktion der Koordinaten (z. B. x, y, z) eines Punktes dar. Die Oberflächen

$$V = \varphi(x, y, z) = Const \quad \ldots \ldots \quad (28,\text{a})$$

heißen die Niveauflächen des magnetischen Potentials. Die Feldintensität H ist gleich

$$H = -\frac{\partial V}{\partial n} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29)$$

vgl. (39, b), S. 87, wo n die Richtung der Normalen zur Niveaufläche ist; die gleiche Richtung hat auch die Größe H. Wir haben die Formeln

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial l} &= \frac{\partial V}{\partial n} \cos(n, l) \\
\frac{\partial V}{\partial n} &= \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2} \\
\frac{\partial V}{\partial l} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cos(l, x) + \frac{\partial V}{\partial y} \cos(l, y) + \frac{\partial V}{\partial z} \cos(l, z)
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (29, a)$$

vgl. (39, e, f, g), S. 88. Die Komponente H_l der Intensität in der Richtung l ist gleich

$$H_l = -\frac{\partial V}{\partial l} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (29, b)$$

Wir wollen die Komponenten der Intensität H nach den Koordinatenachsen mit α, β, γ bezeichnen, so daß $\alpha = H \cos(H, x)$ ist usw. und

$$H = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \quad \ldots \ldots \quad (29, c)$$

Es ist dann

$$\alpha = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad \ldots \quad (29, d)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{\partial \beta}{\partial x} \\
\frac{\partial \beta}{\partial z} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y} \\
\frac{\partial \gamma}{\partial x} &= \frac{\partial \alpha}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

vgl. (40, d) und (40, e), S. 89. Für die Kraft f, welche im gegebenen Punkte des Magnetfeldes auf die magnetische Menge m' einwirkt, haben wir die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}
f &= -m' \frac{\partial V}{\partial n} \\
f_l &= -m' \frac{\partial V}{\partial l}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30, a)$$

und im besonderen Falle

$$f_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad f_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad f_z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Die magnetischen Kraftlinien sind (im betrachteten Sonderfalle) die orthogonalen Trajektorien der Niveauflächen des Potentials (vgl. S. 89). Formel (8, a) gibt

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = -\frac{4 \pi m_i}{\mu} - \frac{2 \pi \overline{m}}{\mu} \quad \ldots \ldots \quad (31)$$

wo sich das Integral über eine beliebige geschlossene Fläche s erstreckt, n die Richtung der Normalen zum Elemente ds dieser Ober-

fläche bedeutet, m_i die Summe der innerhalb, $\bar{m}$ die Summe der auf der Fläche s gelegenen Massen, V das Potential sowohl der Mengen m_i und $\bar{m}$, als auch der willkürlichen Mengen m_e, welche außerhalb der Fläche s liegen. Innerhalb der magnetischen Volummengen (falls solche in Betracht kommen) hat man, vgl. (9) und (29, d)

$$\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial V}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial V}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial V}{\partial z}\right)}{\partial z}=-4\pi\varrho \quad . \quad . \quad (32)$$

wo ϱ die Volumdichte ist. Außerhalb solcher Mengen ist $\varrho = 0$. Im homogenen Felde ($\mu = Const$) und außerhalb der magnetischen Volummengen gilt die Relation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Hat man Oberflächenmengen von der Dichte k auf der Fläche s, zu deren beiden Seiten die Permeabilität gleich μ_1 und μ_2, das Potential aber V_1 und V_2 ist, so ist

$$\mu_1\frac{\partial V_1}{\partial n}-\mu_2\frac{\partial V_2}{\partial n}=-4\pi k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

wo n die Richtung der Normalen nach der Seite von μ_1 ist, vgl. (42), S. 91. Im homogenen Medium ist

$$\frac{\partial V_1}{\partial n}-\frac{\partial V_2}{\partial n}=-\frac{4\pi k}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34, a)$$

Die Dimension der Einheit des magnetischen Potentials, vgl. (4), S. 403 und (27) ist gleich

$$[V]=\frac{[m]}{[\mu]L}=\frac{[\mu]^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}T^{-1}}{[\mu]L}=[\mu]^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1} \quad . \quad (35)$$

wo $[\mu]$ die Dimension der magnetischen Permeabilität ist. Sieht man μ als unbenannte Zahl an, so ist

$$[V]=M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35, a)$$

Die Größe $1:\mu$ werden wir den magnetischen Widerstand des Mediums nennen; die Engländer nennen sie „reluctance“. Wie wir gesehen haben (S. 407), ist der magnetische Induktionsfluß ψ in allen Teilen ein und derselben Induktionsröhre eine konstante Größe, so daß für eine sehr dünne Röhre

$$\psi=\mu H\sigma=Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

ist, wo σ den Flächeninhalt des Röhrenquerschnittes bedeutet. Ist dl die Länge eines unendlich kleinen Röhrenabschnittes, so nennen wir

$\frac{dl}{\mu \sigma}$ den magnetischen Widerstand dieses Abschnittes und bezeichnen mit

$$r = \int \frac{dl}{\mu \sigma} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (37)$$

den magnetischen Widerstand eines beliebigen endlichen Röhrenabschnittes. Formel (36) gibt

$$\psi \frac{dl}{\mu \sigma} = H dl.$$

Integriert man an der Röhre entlang zwischen zwei beliebigen Querschnitten derselben und beachtet, daß ψ eine Konstante ist, so erhält man

$$\psi = \int \frac{dl}{\mu \sigma} = \int H dl$$

oder, vgl. (37)

$$\psi = \frac{\int H dl}{\int \frac{dl}{\mu \sigma}} = \frac{\int H dl}{r} \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Die Größe $\int H dl$ werden wir als die im betrachteten Röhrenabschnitt wirkende magnetomotorische Kraft bezeichnen. Formel (38) zeigt uns, daß der magnetische Induktionsfluß ψ in jeder Induktionsröhre proportional ist der auf einen beliebigen Abschnitt dieser Röhre wirkenden magnetomotorischen Kraft und indirekt proportional dem Widerstande dieses Abschnittes. Die Analogie zwischen diesem Gesetze und dem Ohmschen Gesetze, das wir später genauer betrachten werden, wird noch vollkommener, wenn man die Größe ψ als Stärke des magnetischen Stromes in der betrachteten Röhre bezeichnet. Beschränkt man sich auf einen Röhrenteil, in welchem das magnetische Potential eine eindeutige Funktion ist, so kann man Formel (38) folgende Gestalt geben:

$$\psi = \frac{\int H dl}{r} = - \frac{\int \frac{\partial V}{\partial l} dl}{r} = \frac{V_1 - V_2}{r} \quad \ldots \quad (38, a)$$

Die magnetische Doppelschicht ist vollkommen analog der elektrischen Doppelschicht (S. 97); zwei einander parallele Oberflächen S_1 und S_2 (Fig. 161), deren gegenseitiger Abstand gleich δ ist, sind mit Nord- und Südmagnetismus bedeckt; die Oberflächendichten bezeichnen wir mit $+k$ und $-k$.

Die Größe

$$w = k\delta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

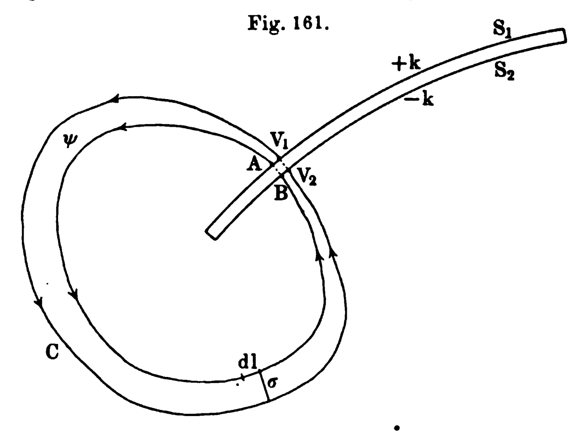
nennen wir die Kraft der Doppelschicht; offenbar ist bei konstantem k

die Kraft der Doppelschicht gleich dem magnetischen Moment eines Teils der Schicht, dessen Oberfläche gleich Eins ist. Es seien V_1 und V_2 die Potentiale in zwei Punkten A und B, welche auf ein und derselben Normalen zu den Oberflächen S_1 und S_2 liegen. In diesem Falle ist

$$V_1 - V_2 = \frac{4\pi\omega}{\mu_0} \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

wo μ_0 die magnetische Permeabilität des Mediums bedeutet, welches die Doppelschicht umgibt, vgl. (47, c), S. 98. Diese Formel zeigt uns, daß das magnetische Potential beim Durchgange durch die magnetische

Fig. 161.



Doppelschicht einen Sprung erleidet und daß die Größe $V_1 - V_2$ des Potentialsprunges in allen Punkten der Schicht die gleiche ist.

Alle Kraftlinien, also auch alle Induktionsröhren, treten aus der Fläche S_1 aus und treten in die Doppelschicht durch die Fläche S_2 ein. Es sei nun ACB eine der Induktionsröhren. Formel (38, a) gibt dann für die Stärke ψ des magnetischen Stromes in dieser Röhre den Ausdruck

$$\psi = \frac{4\pi\omega}{\mu_0 r} = \frac{4\pi\omega}{\mu_0 \int \frac{dl}{\mu\sigma}} \quad \ldots \ldots \quad (40, a)$$

Die magnetomotorische Kraft ist für alle Röhren die gleiche; sie ist gleich $4\pi\omega$, wo ω die Kraft der magnetischen Doppelschicht bedeutet. Formel (40, a) zeigt uns ferner, daß alle Röhren, welche den gleichen magnetischen Induktionsfluß (oder Stärke des magnetischen Stroms) besitzen, beispielsweise alle Einheitsröhren der Induktion, den gleichen magnetischen Gesamtwiderstand r besitzen. Es sei

$$r_0 = \int \frac{dl}{\sigma}$$

der Widerstand einer Röhre im unmagnetischen Medium ($\mu = 1$) und werde vorausgesetzt, daß sich die Doppelschicht im homogenen Medium ($\mu = \mu_0 = Const$) befindet, in welchem sich auch alle unsere Röhren befinden. Für diesen Fall gibt Formel (40, a)

$$\psi = \frac{4\pi\omega}{r_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Diese Formel zeigt uns, daß der magnetische Induktionsfluß einer gegebenen magnetischen Doppelschicht von den magnetischen Eigenschaften des umgebenden homogenen Mediums unabhängig ist. Man hat hierbei im Auge zu behalten, daß es sich um eine gegebene Schicht handelt, für welche k, also auch ω, eine unabhängig vom umgebenden Medium gegebene Größe ist.

Für die potentielle Energie W von beliebigen magnetischen Massen im homogenen Medium, dessen Permeabilität gleich μ ist, haben wir den Ausdruck, vgl. (26),

$$W = \frac{1}{2\mu}\sum\sum\frac{m m'}{r} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Hier erstrecken sich beide Summierungen auf sämtliche Teilchen, so daß jedes Paar derselben m und m' zweimal vorkommt. Wir wollen Formel (42) folgende Gestalt geben:

$$W = \frac{1}{2}\sum m \sum\frac{m'}{\mu r}.$$

Es ist aber die Summe $\sum\frac{m'}{\mu r}$ gleich dem Werte des Potentials V in dem Punkte, in welchem sich das Teilchen m befindet, man kann also schreiben:

$$W = \frac{1}{2}\sum m V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42, a)$$

und hier erstreckt sich die Summierung wiederum auf alle Teilchen des Magnetismus.

In Formel (42, a) ist die Größe V das Potential der magnetischen Massen m selbst. Viel wichtiger ist der Fall, wo sich die magnetischen Mengen in einem bereits vorhandenen Magnetfelde befinden, dessen Potential mit V' bezeichnet sein möge. Es ist klar, daß in diesem Falle die potentielle Energie W, welche nur der Wirkung des Außenfeldes (nicht aber den inneren Kräften zwischen den Teilchen m) entspricht, gleich

$$W = \Sigma m V' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (42, b)$$

ist.

§ 5. **Theorem von Stokes.** Bei der Untersuchung verschiedener theoretischer Fragen leistet uns eine Formel gute Dienste,

die den Zusammenhang zwischen einem gewissen Integral über eine gegebene Fläche und einem Integral angibt, welches längs der Umgrenzungslinie dieser Fläche genommen ist. Nehmen wir an, es seien φ, ψ und θ beliebige endliche, stetige und eindeutige Funktionen eines Punktes im Raume. Ferner sei S (Fig. 162) irgendeine von der Kurve s begrenzte Fläche; dS und ds seien Elemente der Fläche und Kurve; n die zu dem Flächenelement dS gehörige Normale. Die Umgrenzungslinie s kann man in zwei Richtungen durchlaufen. Als positive Richtung wollen wir diejenige ansehen, die einem Beobachter, welcher auf derjenigen Seite von S steht, auf welcher die Normale n von seinen Füßen zu seinem Kopfe verläuft, der Uhrzeigerrichtung entgegengesetzt erscheint, also die Richtung, welche in unserer Figur durch Pfeile markiert ist. Natürlich würde die positive Richtung längs der Umgrenzungslinie die entgegengesetzte, wenn man der Normalen n die entgegengesetzte Richtung geben würde. Wir führen die Koordinaten x, y, z ein und bezeichnen mit dx, dy, dz die Komponenten des Kurvenelementes ds. Die Koordinatenachsen ordnen wir nicht in gewöhnlicher Weise an, sondern derart, daß die positive y-Achse in die positive z-Achse bei positiver Drehung (gegen den Uhrzeiger) um die positive x-Achse übergeht; ebensolche Drehungen um y und z lassen z in x, x in y übergehen. In Fig. 163 ist eine derartige Anordnung der Koordinatenachsen gewählt. Die Formel von Stokes lautet:

Fig. 162.

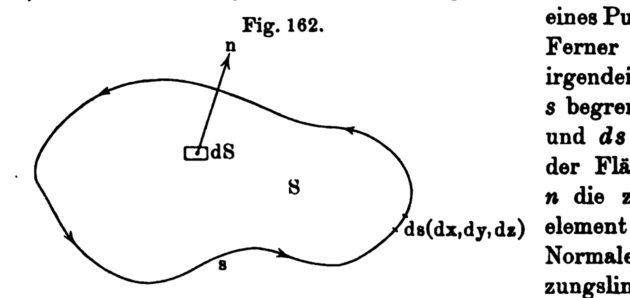
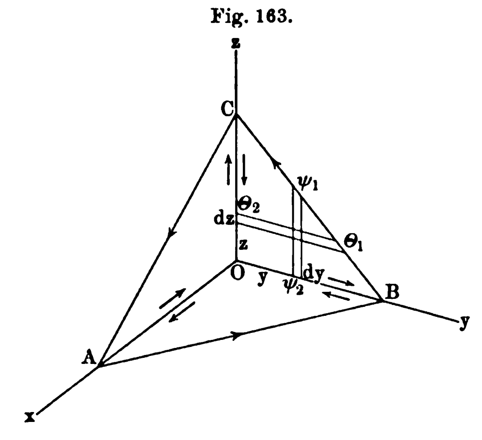


Fig. 163.



$$\left.\begin{aligned}\int_{(s)}\left\{\varphi\,dx+\psi\,dy+\theta\,dz\right\} = \iint\left\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\cos(n,x)\right.\\ \left.+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\cos(n,y)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\cos(n,z)\right\}dS\end{aligned}\right\} \quad . \qquad (43)$$

Das linke, längs der Umgrenzungslinie s genommene Integral kann man offenbar auch in folgender Form schreiben:

$$\int\left\{\varphi\frac{\partial x}{\partial s}+\psi\frac{\partial y}{\partial s}+\theta\frac{\partial z}{\partial s}\right\}ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43,\text{a})$$

Es gibt mehrere Beweise für das Stokessche Theorem. Wir wollen hier den von Drude geführten Beweis geben. Zunächst betrachten wir statt der Fläche S das unendlich kleine Dreieck ABC (Fig. 163). Da φ, ψ und θ und ihre Derivierten in jedem Raumpunkte bestimmte Werte haben und da die Größen x, y und z nicht sichtbar in den unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen der Formel (43) vorkommen, so ändern sich offenbar die Werte beider Integrale nicht, wenn wir die Lage der Koordinatenachsen ändern. Wir wollen demgemäß die letzteren derart ziehen, daß sie durch die Ecken A, B, C unseres Dreiecks hindurchgehen. Wie man leicht einsieht, ist das Integral längs dem Dreiecksumfang $ABCA$ gleich der Summe der drei Integrale längs den Umgrenzungen $OBCO$, $OCAO$ und $OABO$, da hierbei, wie die Pfeile zeigen, die Wege OA, OB uud OC zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden. Auf dem Umfange $OBCO$ ist $dx = 0$, auf $OCAO$ ist $dy = 0$, auf $OABO$ ist $dz = 0$. Daher ist

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{ABCA}(\varphi\,dx+\psi\,dy+\theta\,dz) &= \int\limits_{OBCO}(\psi\,dy+\theta\,dz)\\ +\int\limits_{OCAO}(\theta\,dz+\varphi\,dx) &+ \int\limits_{OABO}(\varphi\,dx+\psi\,dy)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (43,\text{b})$$

Betrachten wir das Integral

$$\omega_1 = \iint\frac{\partial\theta}{\partial y}\,dy\,dz,$$

welches sich über die Elemente der Dreiecksfläche OBC erstreckt. Integriert man zunächst nach y, d. h. während z als konstant angesehen wird, so ist

$$\omega_1 = \int dz\int\frac{\partial\theta}{\partial y}\,dy = \int(\theta_1-\theta_2)\,dz,$$

wo θ_1 und θ_2 sich auf die Seiten BC und OC beziehen. Zieht man jedoch in Betracht, daß die lineare Integration in der Richtung von BCO vorgenommen wird, so muß man dz als negativ ansehen, wenn man von C nach O übergeht. Da auf OB im allgemeinen $dz = 0$ ist, so ist offenbar

$$\omega_1 = \iint\frac{\partial\theta}{\partial y}\,dy\,dz = \int\limits_{OBCO}\theta\,dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43,\text{c})$$

In ähnlicher Weise findet man für das Integral

$$\omega_2 = \iint\frac{\partial\psi}{\partial z}\,dy\,dz,$$

welches sich über die Fläche desselben Dreiecks OBC erstreckt, den Ausdruck

$$\omega_2 = \int dy \int \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = \int (\psi_1 - \psi_2)\, dy,$$

wo ψ_1 sich auf BC, ψ_2 auf OB bezieht. Geht man aber in der Richtung $OBCO$, so hat man auf BC die Größe dy als negativ anzusehen. Da auf CO jedoch $dy = 0$ ist, so ist offenbar

$$\omega_2 = \iint \frac{\partial \psi}{\partial z} dy\, dz = - \int_{OBCO} \psi\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43,\text{d})$$

Die Formeln (43, c) und (43, d) geben uns

$$\int_{OBCO} (\psi\, dy + \theta\, dz) = \iint_{OBC} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dy\, dz.$$

Zwei ähnliche Formeln findet man für die Dreiecke $OCAO$ und $OABO$. Addiert man die drei Formeln, so erhält man, vgl. (43, b)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{ABCA} (\varphi\, dx + \psi\, dy + \theta\, dz) = \iint_{OBC} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dy\, dz \\ \displaystyle + \iint_{OCA} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) dz\, dx + \iint_{OAB} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) dx\, dy \end{array}\right\} . \quad (43,\text{e})$$

Setzen wir jetzt voraus, das Tetraeder $OABC$ sei unendlich klein. In diesem Falle kann man die Differenzen $\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}$ usw. als konstante Größen ansehen, so daß man beispielsweise schreiben kann:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\iint_{OBC} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) dy\, dz = \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \iint_{OBC} dy\, dz \\ \displaystyle = \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \times \text{Flächeninhalt } OBC \end{array}\right\} . \quad (43,\text{f})$$

Bezeichnen wir mit n die Richtung der Normalen zum Dreiecke ABC: da die Integration in der Richtung $ABCA$ ausgeführt worden ist, so muß n offenbar die Richtung von O zum Beobachter hin haben. Es sei dS der Flächeninhalt des Dreiecks ABC; in diesem Falle ist der Flächeninhalt von OBC gleich $dS \cos(n, x)$. Führt man diese Größe in (43, f) ein und formt in ähnlicher Weise die beiden anderen Integrale in (43, e) um, so erhält man für das Integral längs dem Umfange des unendlich kleinen Dreiecks ABC den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{ABCA}(\varphi\,dx+\psi\,dy+\theta\,dz)=\Big\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\cos(n,x)\\+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\cos(n,y)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\cos(n,z)\Big\}\,dS\end{aligned}\right\} \quad . \quad (44)$$

Wenden wir uns nunmehr dem allgemeinen Falle zu, wo eine beliebige Fläche S von einer Kurve s umgrenzt ist. Teilen wir die ganze Fläche in eine unendlich große Anzahl von unendlich kleinen Dreiecken; schreiben wir für jedes derselben die Gleichung (44) und addieren wir alle diese Gleichungen. Wie man leicht einsieht, werden hierbei sämtliche Seiten der Dreiecke je zweimal vorkommen, da jede von ihnen zu zwei benachbarten Dreiecken gehört. Da aber hierbei die Integration in entgegengesetzten Richtungen erfolgt, so werden sich paarweise alle linearen Integrale aufheben, mit Ausnahme derer, welche sich auf die Elemente ds der Umgrenzung selbst beziehen. Auf diese Weise erhält man

$$\begin{aligned}\int\limits_{(s)}(\varphi\,dx+\psi\,dy+\theta\,dz)=\iint\Big\{\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\cos(n,x)\\+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)\cos(n,y)+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\cos(n,z)\Big\}\,dS.\end{aligned}$$

Dieses aber ist die Stokessche Gleichung (43).

§ 6. Arbeit magnetischer Kräfte. Bewegt sich im Magnetfelde ein Magnetpol, in dem wir uns die magnetische Menge m' konzentriert denken, so verrichten die magnetischen Kräfte im allgemeinen eine gewisse Arbeit, die wir mit R bezeichnen wollen. Setzen wir $m' = 1$, so können wir in diesem Falle sagen, es bewege sich ein Einheitspol.

Setzen wir zunächst voraus, daß wir es mit einem Magnetfelde von Magneten zu tun haben und ziehen wir bloß den Raum in Betracht, welcher außerhalb dieser Magnete liegt. In diesem Falle stellt das Potential V eine eindeutige, stetige Punktfunktion dar, welche durch die allgemeine Formel (27), S. 412, ausgedrückt wird. Die Arbeit R für $m' = 1$ wird durch Formel

$$R = V_1 - V_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

vgl. (28), S. 412, gegeben und ist nicht von der Kurve abhängig, an der entlang der Einheitspol von einem gewissen Punkte A (mit dem Potential V_1) zu einem anderen Punkte B (mit dem Potential V_2) gelangt ist. Für jede geschlossene Kurve ist

$$R = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

Die Ausdrücke (45) und (46) beziehen sich auf den Fall, wo die Bewegung auf Kurven erfolgt, welche in ihrem gesamten Verlaufe außerhalb des von den Magneten eingenommenen Raumes liegen.

Wir wollen noch einen anderen Ausdruck für R ableiten. Nehmen wir an, ein Magnetpol bewege sich von A nach B auf einer gewissen Kurve s, deren Element ds in der Richtung der Koordinatenachsen die Komponenten dx, dy, dz besitzt. Es sei H_s die Komponente der magnetischen Kraft H in der Richtung der Tangente zur Kurve s. Es ist offenbar

$$R = \int_A^B H_s ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

wo die Integrationsgrenzen (vom Punkt A zum Punkt B) symbolisch angedeutet sind. Wie früher bezeichnen wir die Komponenten der Kraft H längs den Koordinatenachsen mit α, β, γ. Dann ist

$$H_s = \alpha \cos(s, x) + \beta \cos(s, y) + \gamma \cos(s, z),$$

folglich

$$R = \int_A^B \{\alpha \cos(s,x) + \beta \cos(s,y) + \gamma \cos(s,z)\}\, ds.$$

Es ist aber $ds \cos(s,x) = dx$, $ds \cos(s,y) = dy$, $ds \cos(s,z) = dz$, also

$$R = \int_A^B \{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz\} \quad \ldots \ldots \quad (48)$$

Substituiert man in (47) den Ausdruck

$$H_s = -\frac{\partial V}{\partial s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

vgl. (29, b), so erhält man Formel (45).

Wenden wir uns jetzt dem Falle zu, wo die Kurve s eine geschlossene ist. Auf Grund des Theorems von Stokes können wir der Formel (48) folgende Gestalt geben:

$$\left.\begin{aligned} R = \int_s \left\{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz\right\} = \iint \Big\{ \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) \cos(n,x) \\ + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) \cos(n,y) + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \cos(n,z) \Big\}\, dS \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (50)$$

wo das Doppelintegral sich über sämtliche Elemente einer beliebigen Fläche S erstreckt, welche durch die Kurve s hindurchgelegt ist. Welches auch immer die Lage der Kurve s (außerhalb der Magnete) sein mag, man kann stets die Fläche S derart ziehen, daß sie sich ebenfalls ganz außerhalb der gegebenen Magnete befindet. In diesem Raume aber haben die Kräfte zweifellos ein Potential, daher genügen

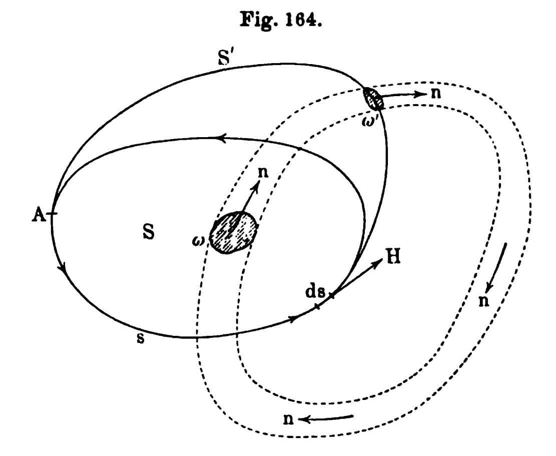
die Komponenten α, β, γ den Bedingungen (30), welche das Doppelintegral des letzten Ausdrucks (50) in Null verwandeln. Auf diese Weise bestätigt es sich, daß $R = 0$ ist, vgl. (46).

Gehen wir zu dem Falle über, wo wir geschlossene Kraftlinien haben, die in ihrem Gesamtverlaufe im homogenen Medium liegen. Es sei s (Fig. 164) eine dieser Kraftlinien; ihre Richtung ist durch Pfeile angedeutet. Da die Kraft H in allen Punkten dieser Linie die Richtung des Elementes ds hat, so ist klar, daß die Arbeit R bei der Bewegung des Einheitspoles beispielsweise von A längs der Linie s zurück nach A, d. h. die Größe

$$R = \int H\,ds = \int (\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz)$$

eine von Null verschiedene positive oder negative Größe ist, je nach der Bewegungsrichtung des Poles. Legen wir durch s als Umgrenzung

Fig. 164.



irgend eine Fläche S und wenden wir auf sie die Formel (50) an. Da R nicht gleich Null ist, so ist klar, daß die Bedingungen (30) nicht für alle Elemente dS der Fläche S erfüllt sein können. Nehmen wir an, es sei ω derjenige auf s gelegene Bezirk, in welchem die Bedingungen (30) nicht erfüllt sind. Da diese Bedingungen eine unmittelbare Folge der Anwesenheit eines Potentials V der magnetischen Kräfte sind, so ist klar, daß im Gebiete ω die magnetischen Kräfte kein Potential besitzen. Durch die Kraftlinie s kann man eine unendlich große Anzahl von verschiedenen Flächen S hindurchlegen; auf jeder dieser Flächen muß ein Bezirk vorhanden sein, für welchen die Bedingungen (30) nicht erfüllt sind, d. h. die Differenzen $\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}$, $\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}$ von Null verschieden sind. So erhält man beispielsweise auf der Fläche S' den Bezirk ω' usw. Es ist

leicht einzusehen, daß der geometrische Ort aller dieser Gebiete einen ringförmigen geschlossenen Raum einnehmen muß. In allen Punkten dieses Raumes haben die magnetischen Kräfte kein Potential. Es ist dies ein solcher Wirbelraum, wie derselbe oben erwähnt worden war. Somit müssen Wirbelräume und geschlossene Kraftlinien ineinandergreifen wie die benachbarten Ringe einer Kette. Da die Bedingungen (30) in sämtlichen Punkten der Flächen S, S' usw. erfüllt sind, mit Ausnahme derer, welche innerhalb des Wirbelraumes liegen, so kann offenbar das Doppelintegral in Formel (50) durch ein Integral ersetzt werden, das sich nur auf die Elemente ds des Abschnitts ω der Fläche S erstreckt. Bezeichnen wir mit σ den folgenden Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}\sigma = \iint\limits_{\omega}\Big\{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)\cos(n,x)+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)\cos(n,y)\\ +\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)\cos(n,z)\Big\}\,ds\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (51)$$

Man sieht, daß die von den magnetischen Kräften R geleistete Arbeit, wenn der magnetische Einheitspol um die geschlossene Kraftlinie s herum läuft, durch die Formel

$$R = \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

bestimmt wird. Aus dieser Gleichung ergibt sich eine Reihe von überaus wichtigen Folgerungen. Wenn man an Stelle der Fläche S eine beliebige andere Fläche S' annehmen würde, welche zu ihrer Umgrenzung dieselbe Kurve s hat, so würde man anstatt (51) ein ähnliches Integral σ längs einem ganz willkürlichen anderen Schnitte ω' desselben Wirbelraumes erhalten. Dann würde aber $R = \sigma'$ sein, woraus $\sigma' = \sigma$ folgt.

Das Doppelintegral σ von der Form (51) hat den gleichen Wert für sämtliche Schnitte des gegebenen Wirbelraumes mit beliebigen Flächen. Es kann als Charakteristikum des gegebenen Wirbelraumes dienen.

Nehmen wir an, wir hätten einen Wirbelraum. Offenbar müssen dann alle Kraftlinien diesen Raum umfassen und ist für sämtliche Kraftlinien die Arbeit R die gleiche und zwar gleich σ. Leicht kann man sich auch davon überzeugen, daß alles im vorhergehenden Gesagte ungeändert bleibt, wenn die Flächen S, S' usw. den Wirbelraum mehrmals schneiden; die Anzahl solcher Schnitte wird offenbar stets eine ungerade sein.

Da die Arbeit R immer durch Formel (48) ausgedrückt wird, so haben wir für jede geschlossene Kurve, welche den Wirbelraum umgibt (und nicht nur für die Kraftlinien), den gleichen Wert der Arbeit $R = \pm\sigma$.

Wie wir gesehen haben, besitzen die magnetischen Kräfte H (α, β, γ) außerhalb des Wirbelraumes zweifellos ein gewisses Potential V. Die von ihnen geleistete Arbeit R, vgl. (47), ist gleich

$$R = \int_A^B H_s ds = -\int_A^B \frac{dV}{ds} ds = -\int_A^B dV \quad . \quad . \quad . \quad (52,\text{a})$$

Für eine geschlossene Kurve, welche den Wirbelraum nicht umschließt, ist immer $R = 0$. Wenn man aber, ausgehend von irgend einem Punkte A des Magnetfeldes, an einer Kurve entlang geht, welche den Wirbelraum umgrenzt und zu demselben Punkte zurückkehrt, so ist, wie gesagt, die Arbeit gleich

$$R = -\int dV = \pm\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Die letzte Formel zeigt uns, daß das magnetische Potential eine mehrdeutige Funktion ist, wenn im Magnetfelde ein Wirbelraum vorhanden ist. Ist V_0 irgend ein Wert des Potentials, so werden die übrigen durch folgende Relation bestimmt:

$$V = V_0 - p\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

wo p eine beliebige ganze, positive oder negative Zahl ist. Wählt man für das Potential des Punktes A einen bestimmten Wert V_0 und kehrt, nachdem man die geschlossene Kurve umwandert hat, zu A zurück, so findet man in A den früheren Wert V_0 vor, falls die Kurve den Wirbelraum nicht umschlossen hat. Man findet dagegen einen anderen Wert $V = V_0 - p\sigma$, wenn die Kurve den Wirbelraum p mal umlaufen hat.

Untersuchen wir, wovon das Vorzeichen von p abhängt. Im Ausdrucke für σ kommt die Richtung n der Normalen zu den Flächen S, S' usw. vor und wir sahen, daß diese Richtung vollkommen durch die Richtung der Kraftlinien bestimmt wird. Somit gibt es in jedem Wirbelraume eine bestimmte Richtung n (vgl. Fig. 164), die wir als positive oder als Stromrichtung bezeichnen und die in sehr einfachem Zusammenhange mit der positiven Richtung der Kraftlinien steht. Die Richtung der Kraftlinien, sowie die Richtung des Stromes im Wirbelraume werden auseinander nach ein und derselben Regel abgeleitet: wenn man an der Kraftlinie s (Fig. 164) entlang geht und durch den Wirbelraum hindurchgeht, so erscheint die Richtung des Stromes der Richtung der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt; wenn man längs dem Wirbelraume in der Stromrichtung weiter geht und durch eine Kraftlinie hindurchgeht, so erscheint die Richtung der Kraftlinie der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt. Eine andere Formulierung für das Verhältnis der positiven Richtung der Kraftlinien, sowie jeder anderen geschlossenen Linie, welche den Strom umgibt, zur positiven Richtung innerhalb des

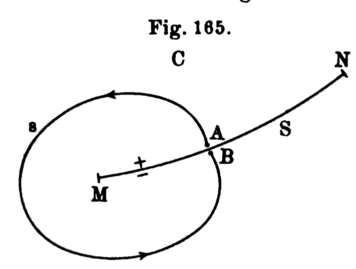
ringförmigen Wirbelraumes, d. h. zur Richtung des Stromes selbst, erhält man, wenn man die sogenannte Schraubenregel oder Bohrerregel anwendet. Wie bekannt, hat man beim Hineinbohren eines Bohrers oder einer Schraube den Griff des Bohrers in der Uhrzeigerrichtung zu drehen, wobei dann der Bohrer oder die Schraube eine fortschreitende Bewegung in der Richtung von uns fort erhält.

Dreht man den Kopf einer Schraube in der Stromrichtung, so bewegt sich die Schraube in der Richtung der Kraftlinie, welche durch die Umgrenzung des Stromes hindurchgeht; dreht man den Schraubenkopf in der Richtung der Kraftlinie, so bewegt sich die Schraube in der Richtung des Stromes, welche durch die Umgrenzung der Kraftlinie hindurchgeht. Von der Richtigkeit dieser Regel kann man sich leicht durch Betrachtung der Fig. 164 überzeugen.

Nun ist es klar, daß in Formel (54) die Zahl p positiv ist, wenn ein beliebiger geschlossener Weg den Wirbelraum p mal in positiver Richtung (in der Kraftlinienrichtung) umgibt; p ist negativ, wenn das Umlaufen in entgegengesetzter Richtung stattfindet.

Wir hatten gesondert zwei Fälle des Magnetfeldes betrachtet; das äußere Feld der Magnete mit seinen ungeschlossenen Kraftlinien und den homogenen Raum, in welchem geschlossene Kraftlinien vorhanden sind. Im ersteren Falle können wir das Potential V als eindeutig ansehen; im zweiten Falle müssen Wirbelräume existieren und das Potential V ist eine mehrdeutige Funktion. Der Unterschied zwischen diesen beiden Fällen verschwindet jedoch, wenn man nicht nur den äußeren, sondern auch den Innenraum der Magnete in Betracht zieht, d. h. wenn man sich den geschlossenen Kraftlinien zuwendet. Es ist klar, daß auch diese Linien Wirbelräume umschließen müssen und daß das Potential V im allgemeinen nicht mehr als eindeutige Funktion angesehen werden kann.

Fig. 165.



Wie wir gesehen haben, erleidet das Potential einer unendlich dünnen magnetischen Doppelschicht einen Sprung, der gleich

$$V_1 - V_2 = \frac{4\pi\omega}{\mu_0} \quad \text{. . . . .} \quad (55)$$

ist, vgl. (40), S. 416. Betrachtet man bloß die Werte für das Potential V im Raume und läßt das Vorhandensein der Doppelschicht MN (Fig. 165), welche gewissermaßen mit der Oberfläche S zusammenfließt, außer acht, so kann man annehmen, daß die Punkte A und B, welche zu beiden Seiten der Schicht liegen, miteinander zusammenfallen. In diesem Falle

ist das Potential der Doppelschicht eine mehrdeutige Punktfunktion, wobei man jetzt, analog der Formel (54), den Ausdruck

$$V = V_0 - p \frac{4\pi\omega}{\mu_0} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

hat. Wenn die geschlossene Linie s von irgendeinem Punkte C ausgeht, in welchem einer der Werte des Potentials gleich V_0 ist und die Umgrenzung der Doppelschicht nicht durchsetzt, so trifft man bei Rückkehr nach C daselbst den früheren Wert V_0 an. Wenn jedoch die Linie s diese Umgrenzung p mal umschlingt, so findet man in C einen Wert V, wie er durch Formel (56) bestimmt wird. Hierbei ist p positiv, wenn s die vorhanden gedachte Schicht in der Richtung von ihrer südlichen (—) zu ihrer nördlichen (+) Oberfläche hin durchsetzt.

Man bemerkt hier eine Analogie zwischen dem Potentiale einer magnetischen Doppelschicht und dem Potentiale im Raume, in welchem sich ein ringförmiger Wirbelraum befindet, der an der Begrenzung der Doppelschicht liegt. Der Größe $\frac{4\pi\omega}{\mu_0}$ im ersten Falle entspricht σ im zweiten Falle. Hier ist, vgl. (39), $\omega = k\delta$ die Kraft der Schicht; σ ist durch Formel (51) gegeben. Die Richtung des „Stromes" im Wirbelraume (S. 425) ist, wenn man auf die Begrenzung der Schicht von der Nordseite dieser Schicht aus sieht, der Bewegungsrichtung des Uhrzeigers entgegengesetzt. Wie wir in der Folge sehen werden, geht diese Analogie noch viel weiter.

Literatur.

Zu § 3.

Meunier: Cosmos 1867; La Nature **12**, 350, 1884.
Mach: Zeitschr. f. phys. Unterricht **3**, 160, 1890.
Gerland: Zeitschr. f. Elektrotechnik **3**, 694.
Ebert: Magnetische Kraftfelder, 2. Aufl., Leipzig 1905, S. 8.
Lindeck: Instr. **9**, 352, 1889.

Zweites Kapitel.

Quellen des Magnetfeldes. Magnete.

§ 1. Temporäre und permanente Magnete. Im vorhergehenden Kapitel haben wir die allgemeinen Eigenschaften des Magnetfeldes unabhängig davon betrachtet, durch welche Quellen, Magnete oder

Ströme das Feld hervorgerufen war. Jetzt gehen wir zu einer näheren Betrachtung dieser Quellen über, und zwar zunächst der Magnete. Wie wir bereits sahen, gibt es temporäre und permanente Magnete. Vielleicht wäre es präziser, wenn man sagte, daß es einen temporären und einen permanenten Magnetismus gibt. Als selbständige Quellen des Magnetfeldes können streng genommen nur permanente Magnete dienen; jedoch auch temporäre Magnete, deren Magnetismus durch ein bereits vorhandenes Magnetfeld hervorgerufen ist, verändern dieses Feld in so hohem Grade, daß sie in ungezwungener Weise den Quellen des Magnetfeldes zugezählt werden können. Außerdem erscheint der remanente Magnetismus fast immer gerade als Überbleibsel des Magnetismus, welcher durch das Magnetfeld hervorgerufen ist, und kann man aus diesem Grunde das Studium der permanenten und temporären Magnete nicht vollständig voneinander trennen.

Zur Erklärung des mechanischen Vorganges beim Magnetisieren, dem magnetische Substanzen, beispielsweise Eisen, im Magnetfelde unterworfen werden, sind verschiedene Hypothesen in Vorschlag gebracht worden. Hierher gehört die gegenwärtig aufgegebene Hypothese zweier besonderen magnetischen Agenzien oder „Flüssigkeiten". Man nahm an, daß in den kleinsten Teilchen der Körper eine neutrale, d. h. keinerlei äußere Wirkung hervorrufende Mischung beider Flüssigkeiten vorhanden sei. Durch die Einwirkung des Magnetfeldes wird diese Mischung in jedem Teilchen zerlegt, wobei sich dann die „nördliche" Flüssigkeit an der einen Seite des Teilchens anordnet, die „südliche" an der anderen Seite. Auf diese Weise wird jedes Teilchen zum Molekularmagneten. Je größer die Feldintensität ist, um so stärker wird das Teilchen magnetisiert. Ein Übergang der Flüssigkeit von einem Teilchen zum anderen findet nicht statt. Verschwindet das Außenfeld, so vereinigen sich die Flüssigkeiten von neuem. Ist diese Vereinigung keine vollständige, so hat man den Fall des remanenten Magnetismus vor sich.

Eine andere Hypothese, die großes Interesse hat, ist unter dem Namen der Theorie der drehbaren Molekularmagnete bekannt. Sie macht die Annahme, daß z. B. im Eisen die Moleküle schon an sich die Eigenschaften der Magnete besitzen, d. h. Molekularmagnete bilden. Im nicht magnetisierten Eisen sind die Achsen dieser Magnete gleichförmig regellos orientiert. Das kleinste Eisenstückchen enthält eine überaus große Anzahl von Molekularmagneten, deren gemeinsame Wirkung im Außenraume gleich Null ist, da die Nord- und Südpole der verschiedenen Molekularmagnete in gleicher Zahl nach allen Richtungen hin verteilt sind. Befindet sich jedoch das Eisen im Magnetfelde, so beginnen die Molekularmagnete sich zu drehen, indem auf ihre Nordpole eine Kraft in der einen Richtung, auf die Südpole in der entgegengesetzten Richtung einwirkt. Die Achse eines Molekularmagneten

sucht sich in die Richtung der Magnetkraft zu stellen, welche an dem Orte wirkt, an welchem sich dieser Magnet befindet. Der Drehung der Molekularmagnete wirken gewisse Kräfte entgegen, über deren Ursprung verschiedenartige Hypothesen aufgestellt werden können. Je größer die Intensität des Magnetfeldes ist, um so größer sind die Winkel, um welche sich die Molekularmagnete drehen. Auf diese Weise wird die gleichförmige Regellosigkeit in der Verteilung dieser Magnete gestört: in der Richtung der wirkenden magnetischen Kraft stellt sich die Mehrzahl der Nordpole, in der entgegengesetzten Richtung die Mehrzahl der Südpole ein. Jeder losgetrennt gedachte Teil des Eisens muß im Außenraume ebensolche Wirkungen hervorrufen wie ein Magnet, dessen Achse die Richtung der wirkenden magnetischen Kraft hat. Die Grenze der Magnetisierung wäre erreicht, wenn die Achsen sämtlicher Molekularmagnete die Richtungen der auf sie einwirkenden magnetischen Kräfte angenommen haben.

Verschwindet das Außenfeld, so kehren die Elementarmagnete in ihre ursprünglichen Lagen zurück und ordnen sich wie vorher gleichförmig regellos an. Der temporäre Magnetismus verschwindet. Wenn aber die Molekularmagnete nicht vollzählig oder nicht vollkommen in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren, so bleibt auch nach dem Verschwinden des Feldes ein gewisser remanenter Magnetismus zurück. Die Theorie der drehbaren Molekularmagnete betrachtet bloß den mechanischen Vorgang bei der Magnetisierung, ohne die Frage über das Wesen des Magnetismus zu berühren; ein Molekularmagnet bleibt hierbei ein ebenso rätselhaftes Ding, wie jeder endliche Magnet.

Auf ganz anderer Grundlage basiert die Vorstellung, nach welcher das Wesen der Magnetisierung einer Substanz auf dem Eindringen der magnetischen Induktionslinien oder Induktionsröhren in diese Substanz beruht. Die Induktionsröhren erscheinen hier als ein gegebenes, gleichsam ursprüngliches Element. Wir wissen nicht, worin die mechanischen Änderungen im Äther bestehen, welche dem Auftreten einer Induktionsröhre entsprechen, ja es ist uns nicht einmal bekannt, ob diese Änderung einem statischen oder dynamischen Vorgange entspricht. Wir können nur so viel sagen, daß längs den Induktionsröhren Spannungen vorhanden sind und daß sie mit ihren Seitenflächen Drucke ausüben, wobei Spannung und Druck durch die Formel (17, a), S. 407 bestimmt sind. Beim Durchgang durch irgend einen Körper befestigen sich die Induktionsröhren gleichsam an der Substanz des Körpers, so daß die in ihnen vorhandene Spannung den Körper in Bewegung versetzt, ponderomotorische Kräfte wachruft. Die Frage nach dem Wesen des Magnetismus wird auf diese Weise gleichsam in den Hintergrund gedrängt; die Frage nach dem inneren mechanischen Vorgange beim

Magnetisieren aber fällt vollständig fort. Das wesentliche bei der Sache besteht in dem Vorhandensein des Magnetfeldes; die Magnetisierung ist nichts anderes als das äußere Kennzeichen für diejenige Änderung in der Verteilung der Kraftlinien dieses Feldes, welche durch die Anwesenheit eines Körpers hervorgerufen wird, dessen magnetische Permeabilität von derjenigen des umgebenden Mediums verschieden ist. Die Dichte des fingierten (zum Vergleich beispielsweise mit den elektrischen Ladungen auf Leitern) freien Magnetismus auf der Körperoberfläche wird vollständig durch Formel (20), S. 409 definiert.

Wenden wir uns nunmehr wieder dem remanenten Magnetismus zu. Nehmen wir an, ein in das Magnetfeld gebrachter Körper, beispielsweise ein Stahlstab, habe den Magnetisierungsgrad J erlangt, welcher, wie wir sahen, in jedem Punkte des Körpers durch die Dichte der fingierten magnetischen Schicht an der Oberfläche des in Gedanken losgetrennten Teiles des Körpers bestimmt wird, wobei diese Oberfläche senkrecht zu den Kraftlinien sein muß; dieser Magnetisierungsgrad kann auch durch das Moment eines solchen losgetrennten Teiles, dividiert durch sein Volumen, gemessen werden, vgl. (23) und (23, a), S. 409. Verschwindet das Außenfeld, so bleibt eine gewisse Magnetisierung J_c übrig. Das mit der Zahl 100 multiplizierte Verhältnis $J_c : J$ stellt den in Prozenten ausgedrückten Betrag des relativen remanenten Magnetismus dar; man könnte diese Größe als die Retentionsfähigkeit (retentivity) bezeichnen. Sie hängt von der Zusammensetzung und der Bearbeitungsart des Stahls ab. Bringen wir den Stahl in ein Feld von entgegengesetztem Zeichen, d. h. in ein Feld, welches in einem frischen Stück Stahl eine Magnetisierung hervorrufen würde, die der bereits vorhandenen entgegengesetzt ist, und setzen wir voraus, daß die Intensität H dieses Feldes sich, von Null anfangend, allmählich vergrößert. Der remanente Magnetismus J_c beginnt zunächst abzunehmen und erreicht bei einer bestimmten Intensität H_c des Feldes den Wert Null. Nur für $H > H_c$ beginnen temporärer und remanenter Magnetismus von entgegengesetztem Zeichen aufzutreten. Die Intensität H_c (genauer $-H_c$) eines Feldes, welches den remanenten Magnetismus aufhebt, kann als entmagnetisierendes Feld bezeichnet werden. Um jedoch diese Größe nicht mit der entmagnetisierenden Kraft zu verwechseln, mit der wir noch später bekannt werden — sie wirkt im Innern von magnetisierten Körpern —, wollen wir H_c als Koerzitivintensität bezeichnen; diese Bezeichnung ist 1885 von J. Hopkinson in Vorschlag gebracht worden.

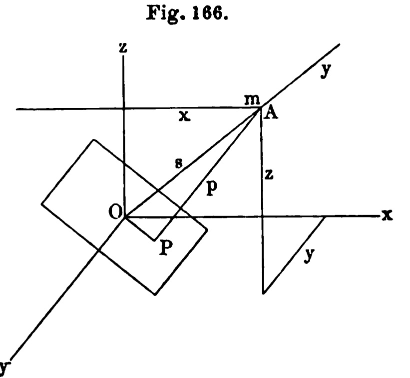
§ 2. Magnetisches Moment. Pole. Um den Begriff des magnetischen Moments eines Magneten in allgemeinster Form zu erläutern, brauchen wir uns nur auf eine einzige Eigenschaft des Magneten zu

stützen, nämlich auf die Eigenschaft, daß in ihm immer gleiche Mengen von positivem (Nord-) und negativem (Süd-) Magnetismus enthalten sind. Die Frage nach der Anordnung dieser beiden Magnetismen innerhalb, sowie auf der Oberfläche des Magneten spielt für diese Untersuchungen keine Rolle. Versieht man die verschiedenen Mengen des freien Magnetismus mit entsprechendem Vorzeichen, so erhält man die Grundgleichung

$$\Sigma m_i = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

in welcher m_i die Menge des an einem der Magnetpunkte A konzentrierten Magnetismus ist. Es sei P (Fig. 166) irgendeine Ebene, p die Länge der vom Punkte A auf P gefällten Senkrechten, welche als positiv angesehen wird, falls der Punkt A auf einer bestimmten Seite von P liegt. Ferner sei

Fig. 166.



$$M_p = \Sigma m_i p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo sich das Summenzeichen auf alle Teilchen des freien Magnetismus bezieht. Verschiebt man die Ebene P parallel mit sich selbst um die Entfernung q, so erhält man an Stelle von M_p den Ausdruck

$$M_{p+q} = \Sigma m_i (p + q) = \Sigma m_i p + \Sigma m_i q.$$

In der letzten Summe kommt jedoch q in allen Gliedern vor, es ist daher

$$M_{p+q} = \Sigma m_i p + q \Sigma m_i = \Sigma m_i p,$$

da $\Sigma m_i = 0$ ist. Vergleicht man diesen Ausdruck mit Formel (2), so sieht man, daß

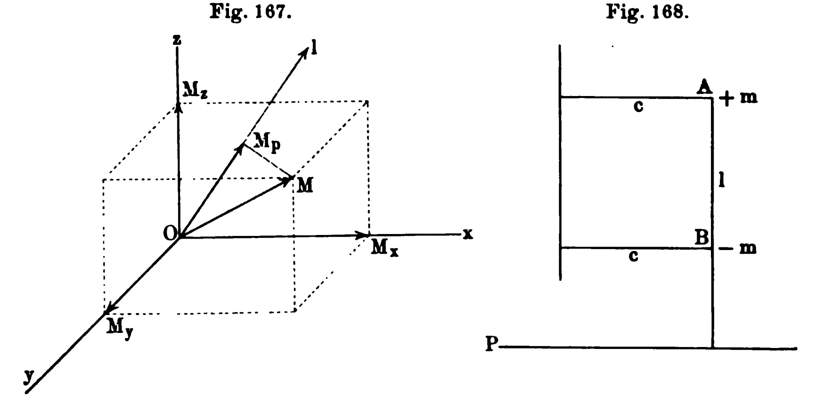
$$M_{p+q} = M_p$$

ist, d. h. daß sich unsere Summe durch die Parallelverschiebung der Ebene P nicht geändert hat. Hieraus folgt, daß die Größe M_p nur von der Richtung der Normalen p zur Ebene P abhängt, nicht aber von der besonderen Lage dieser Ebene im Raume. Die Größe M_p wollen wir vorläufig als das magnetische Moment des Magneten in der Richtung von p bezeichnen. Diese Größe ist ein Vektor, welcher die Richtung von p hat und zwar nach der Seite der willkürlichen, zu p senkrechten Ebene P hin, auf welcher wir der Annahme gemäß die Längen p positiv rechnen. Während der Vektor M_p eine bestimmte Richtung hat, besitzt er offenbar keinen bestimmten Anfang, d. h. keinen Angriffspunkt und kann daher in der Form eines Pfeiles dargestellt werden, der von einem beliebigen Punkte des Raumes aus gezogen ist. Es seien x, y, z die Koordinaten des Punktes A. Nimmt man als

Ebene P die Koordinatenebene zOy (Fig. 166), so ist $p = x$. In diesem Falle ist das Moment in der Richtung von x gleich $M_x = \Sigma m_i x$. In ähnlicher Weise findet man die Momente M_y und M_z. Man hat demnach drei magnetische Momente

$$M_x = \Sigma m_i x, \quad M_y = \Sigma m_i y, \quad M_z = \Sigma m_i z \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Suchen wir nunmehr den Zusammenhang zwischen diesen drei Momenten und dem Moment M_p, welches in beliebiger Richtung p ge-



nommen ist. Zu diesem Zwecke legen wir die Ebene P durch den Anfangspunkt der Koordinaten; es sei $OA = s$. Offenbar ist

$$M_p = \Sigma m_i p = \Sigma m_i s \cos(s, p).$$

Es ist aber $s \cos(s,p) = x \cos(x,p) + y \cos(y,p) + z \cos(z,p)$, daher ist

$$M_p = \Sigma m_i x \cos(x,p) + \Sigma m_i y \cos(y,p) + \Sigma m_i z \cos(z,p)$$
$$= \cos(x,p) \Sigma m_i x + \cos(y,p) \Sigma m_i y + \cos(z,p) \Sigma m_i z,$$

d. h.

$$M_p = M_x \cos(x,p) + M_y \cos(y,p) + M_z \cos(z,p) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Tragen wir auf den Koordinatenachsen (Fig. 167) die Vektoren M_x, M_y, M_z ab und konstruieren die Größe des Vektors

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da offenbar

$$M = M_x \cos(M,x) + M_y \cos(M,y) + M_z \cos(M,z) \quad . \quad (5, a)$$

ist, so ist klar, daß M das magnetische Moment in der Richtung von OM darstellt. Ferner ist

$$M_x = M \cos(M,x), \quad M_y = M \cos(M,y), \quad M_z = M \cos(M,z) \quad (5,b)$$

Es möge OM_p das magnetische Moment M_p in irgendeiner Richtung p sein. Substituiert man dann (5, b) in (4), so erhält man

$$M_p = M\{\cos(M,x)\cos(p,x) + \cos(M,y)\cos(p,y) + \cos(M,z)\cos(p,z)\},$$

also

$$M_p = M\cos(M,p) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Wir wollen M das magnetische Hauptmoment nennen; Formel (6) zeigt, daß das magnetische Moment in einer beliebigen Richtung gleich der Projektion des Hauptmoments M auf diese Richtung ist. Das magnetische Moment in einer zu M senkrechten Richtung ist folglich gleich Null.

Im besonderen Falle, wo der Magnet überhaupt nur zwei Mengen Magnetismus $+m$ und $-m$ in den Punkten A und B (Fig. 168) enthält, erhält man für das magnetische Moment in der Richtung von BA den Ausdruck

$$M = m(l+a) + (-m)a = ml \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wo $l = BA$ ist. In der zu BA senkrechten Richtung ist das Moment gleich $mc + (-m)c = 0$. Offenbar ist (7) das magnetische Hauptmoment für den in Betracht gezogenen Sonderfall und ist diese Größe identisch mit der durch Formel (22), S. 409 gegebenen. Spricht man im allgemeinen vom magnetischen Momente eines Magneten, so meint man stets das magnetische Hauptmoment, dessen Wert offenbar der größte von allen Werten M_p ist.

Fig. 169.

Wir wollen einen Magneten von beliebiger Form PQ (Fig. 169) in ein homogenes Magnetfeld von der Intensität H bringen; die Richtung der Kraftlinien sei durch den Pfeil H angegeben. Es sei ferner m_n ein Teilchen des Nordmagnetismus, m_s ein Teilchen des Südmagnetismus und

$$m = \Sigma m_n = \Sigma m_s \quad . \quad . \quad (8)$$

die Gesamtmenge des einen und des anderen Magnetismus. Auf jedes Teilchen m_n wirkt eine Kraft Hm_n in der Richtung der Kraftlinie ein, auf jedes Teilchen m_s aber eine Kraft Hm_s in der entgegengesetzten Richtung. Die Resultante der parallelen Kräfte Hm_n ist gleich $\Sigma Hm_n = H\Sigma m_n = mH$ und die gleiche Größe hat offenbar auch die Resultante aller Kräfte Hm_s. Die beiden Kräfte Hm sind einander parallel, jedoch von entgegengesetzter Richtung. Die Angriffspunkte A und B dieser beiden Resultanten Hm heißen die Pole des Magneten; A der Nordpol, B der Südpol. BA ist die Magnetachse; den Abstand der Pole voneinander bezeichnen wir mit l, den Winkel zwischen der

Achse BA und der Richtung der Kraftlinien mit φ. Auf den Magneten wirkt im homogenen Felde ein Kräftepaar, dessen Drehungsmoment $\mathfrak{M}$ gleich Hmp ist, wobei $p = BC \perp Hm$ ist. Es ist aber $p = l \sin \varphi$, also

$$\mathfrak{M} = Hml \sin \varphi \qquad (9)$$

Wir bezeichnen die Koordinaten des Punktes m_n mit x_n, y_n, z_n, des Punktes m_s mit x_s, y_s, z_s, des Punktes A mit ξ_n, η_n, ζ_n, des Punktes B mit ξ_s, η_s, ζ_s. Nach der Regel für die Zusammensetzung von parallelen Kräften erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \xi_n &= \frac{\Sigma m_n H x_n}{\Sigma m_n H} = \frac{\Sigma m_n x_n}{m}; \quad \eta_n = \frac{\Sigma m_n y_n}{m}; \quad \zeta_n = \frac{\Sigma m_n z_n}{m} \\ \xi_s &= \frac{\Sigma m_s x_s}{m}; \quad \eta_s = \frac{\Sigma m_s y_s}{m}; \quad \zeta_s = \frac{\Sigma m_s z_s}{m} \end{aligned}\right\} \cdot \qquad (10)$$

Es leuchtet ein, daß die Pole, falls die Magnetismen wägbar wären, die Schwerpunkte des für sich genommenen Nord- und Südmagnetismus sein würden. Für das magnetische Moment M_x des Magneten haben wir den Ausdruck, vgl. (3) und (10),

$$M_x = \Sigma m_i x_i = \Sigma m_n x_n - \Sigma m_s x_s = m \xi_n - m \xi_s$$
$$M_y = m \eta_n - m \eta_s; \quad M_z = m \zeta_n - m \zeta_s.$$

Diese Differenzen sind aber nichts anderes als die in der Richtung der Koordinatenachsen genommenen magnetischen Momente eines Magneten, welcher im Pole A bloß den Magnetismus $+m$ und im Pole B bloß den Magnetismus $-m$ besitzt.

Das magnetische Moment eines Magneten bleibt ungeändert, wenn man seinen gesamten Nordmagnetismus im Nordpol, seinen gesamten Südmagnetismus im Südpol konzentriert. Das magnetische Moment eines solchen Magneten ist aber gleich ml, vgl. (7), und hat die Richtung von BA. Hieraus folgt, daß das magnetische Moment (Hauptmoment) eines jeden Magneten die Richtung der Magnetachse hat und an Größe gleich dem Produkt aus der Menge m des gleichnamigen Magnetismus und der Entfernung der Pole voneinander ist, d. h.

$$M = ml \qquad (11)$$

Jetzt erhalten wir aus der Formel (9)

$$\mathfrak{M} = MH \sin \varphi \qquad (12)$$

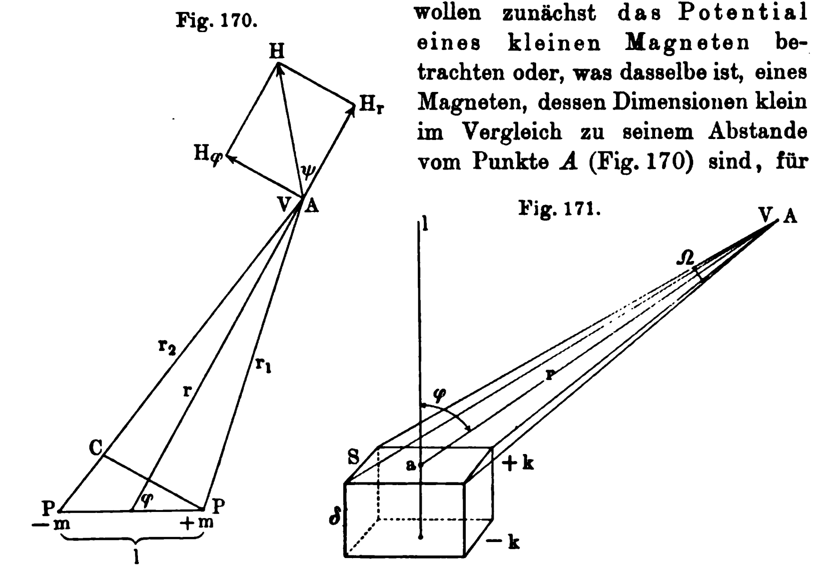
Ein Magnet, der in ein homogenes Kraftfeld gebracht ist, unterliegt der Wirkung eines Kräftepaares, dessen Drehungsmoment gleich dem Produkt aus dem magnetischen Moment des Magneten, der Feldintensität und dem Sinus

des Winkels zwischen der Magnetachse und der Richtung der Kraftlinien ist. Das Maximum des Drehungsmomentes

$$\mathfrak{M}_{max} = MH \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12, a)$$

erhält man für $\varphi = 90^0$, d. h. für den Fall, daß die Kraftlinien senkrecht zur Magnetachse sind. Für $\varphi = 0$ ist $\mathfrak{M} = 0$. Ist der Magnet leicht beweglich, so sucht er eine Lage anzunehmen, bei welcher seine Achse den Kraftlinien parallel ist.

§ 3. Potential und Energie eines Magneten. Im § 4 des vorhergehenden Kapitels haben wir einige Eigenschaften des magnetischen Potentials kennen gelernt, d. h. des Potentials der im Magnetfelde wirkenden Kräfte. Wir wenden uns jetzt dem besonderen Fall zu, wo das Magnetfeld durch Magnete hervorgerufen ist. Wir wollen zunächst das Potential eines kleinen Magneten betrachten oder, was dasselbe ist, eines Magneten, dessen Dimensionen klein im Vergleich zu seinem Abstande vom Punkte A (Fig. 170) sind, für welchen wir das Potential V zu bestimmen wünschen. Es seien P, P die Magnetpole, $PP = l$; die Lage des Punktes A wird durch die Polarkoordinaten r und φ bestimmt; die Entfernungen des Punktes A von den Polen bezeichnen wir mit r_1 und r_2. Das gesuchte V ist gleich



$$V = \frac{m}{\mu}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{m}{\mu}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

wo μ die magnetische Permeabilität des umgebenden Mediums ist.

Denkt man sich l sehr klein im Vergleich zu r, so kann man offenbar im Nenner $r_1 r_2 = r^2$, im Zähler $r_2 - r_1 = PC$ setzen, wo $PC \perp r_2$ ist; ferner kann man $PC = l \cos\varphi$ setzen. Auf diese Weise erhält

man $V = \frac{ml\cos\varphi}{\mu r^2}$; es ist aber ml gleich dem magnetischen Moment M des Magneten, daher

$$V = \frac{M\cos\varphi}{\mu r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Als Charakteristikum des gegebenen Magneten tritt hier sein magnetisches Moment auf. Die Komponente H_r der Intensität H in der Richtung von r ist gleich

$$H_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2M\cos\varphi}{\mu r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13,\text{a})$$

Die Komponente H_φ in der zu r senkrechten Richtung ist

$$H_\varphi = -\frac{\partial V}{r\,\partial\varphi} = \frac{M\sin\varphi}{\mu r^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13,\text{b})$$

Die Feldintensität H im Punkte A ist gleich

$$H = \sqrt{H_r^2 + H_\varphi^2} = \frac{M}{\mu r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi} \quad . \quad . \quad (13,\text{c})$$

Der Winkel ψ zwischen H und r wird bestimmt durch die Formel

$$tg\,\psi = \frac{H_\varphi}{H_r} = \frac{1}{2}\,tg\,\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13,\text{d})$$

Formen wir den Ausdruck (13) für den Fall um, daß der Magnet die Gestalt eines Prismas hat (Fig. 171 a. v. S.), dessen Höhe δ ist und dessen Grundflächen S mit Magnetismen bedeckt sind, deren Dichten $+k$ und $-k$ sind; l ist die Richtung der magnetischen Achse; wir nehmen an, daß sich auf der Seitenfläche kein freier Magnetismus befindet und daß δ sehr klein im Vergleich zum Abstande r ist, den wir gleich aA setzen. Es ist dann $M = Sk\delta$, $\varphi = \angle\, laA$. Wir beschreiben um A als Mittelpunkt eine Kugelfläche vom Radius r und bezeichnen mit Ω den Raumwinkel, unter welchem von A aus die Fläche S erscheint. Dieser Winkel schneidet aus der Kugelfläche einen gewissen Teil S' heraus, der, falls Ω sehr klein ist, gleich $S' = S\cos\varphi$ gesetzt werden kann; außerdem ist $S' = r^2\Omega$, so daß $S\cos\varphi = r^2\Omega$ ist. Substituiert man $M = Sk\delta$ und $\cos\varphi = r^2\Omega : S$ in (13), so erhält man

$$V = \frac{Sk\delta\, r^2\Omega}{\mu S r^2} = \frac{k\delta\Omega}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Das Potential des betrachteten sehr kleinen Magneten im gegebenen Punkte ist proportional dem Raumwinkel, unter welchem die Grundfläche des Magneten von diesem selben Punkte aus erscheint.

Gehen wir jetzt zur Bestimmung des Potentials eines Magneten über, der eine beliebige Form und endliche Dimensionen im Vergleiche zu seinem Abstande vom Punkte A hat, für welchen wir den Wert V des Potentials suchen. Zur Vereinfachung der Formeln nehmen wir an, daß $\mu = 1$ ist. Wir führen Koordinatenachsen ein und bezeichnen die Koordinaten des Punktes A mit ξ, η, ζ. Wir teilen das Volumen v des Magneten in Elemente $dv = dx\,dy\,dz$, deren Koordinaten x, y, z sind. Der im Volumen dv eingeschlossene Teil des Magneten kann als kleiner Magnet angesehen werden.

Ist J der Magnetisierungsgrad im Punkte x, y, z, so ist das Moment M dieses Magneten gleich $J dv = J\,dx\,dy\,dz$. Das Potential dV dieses Magneten im Punkte A ist, vgl. (13)

$$dV = \frac{J \cos(l, r)\, dx\, dy\, dz}{r^2},$$

wo

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

ist. Wir substituieren

$$\cos(l, r) = \cos(l, x)\cos(r, x) + \cos(l, y)\cos(r, y) + \cos(l, z)\cos(r, z).$$

Den Magnetisierungsgrad J kann man als einen Vektor ansehen, der die Richtung der Achse l hat. Bezeichnen wir mit A, B, C die Komponenten dieses Vektors nach den Koordinatenachsen, so daß $A = J\cos(l, x)$ ist usw. Substituiert man dann noch

$$\cos(r, x) = \frac{\xi - x}{r} \text{ usf.,}$$

so wird

$$dV = \left\{ A\frac{\xi - x}{r^3} + B\frac{\eta - y}{r^3} + C\frac{\zeta - z}{r^3} \right\} dx\, dy\, dz.$$

Man überzeugt sich leicht, daß $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\xi - x}{r^3}$ ist, so daß man schließlich folgenden Ausdruck erhält

$$dV = \left\{ A\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} dx\, dy\, dz \quad . \quad . \quad (15)$$

Durch diese Formel wird das Potential im Punkte ξ, η, ζ desjenigen Teiles des Magneten bestimmt, welcher das Volumen $dx\,dy\,dz$ hat und dessen Magnetisierungsgrad J gleich der geometrischen Summe der Vektoren A, B, C ist. Die letzteren sind Funktionen von x, y, z. Das Potential des ganzen Magneten ist gleich

$$V = \iiint \left\{ A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + B \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + C \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right\} dx\, dy\, dz \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Betrachten wir den ersten der drei Summanden dieses Integrals und bezeichnen wir ihn mit V_x.

$$V_x = \iiint A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx\, dy\, dz = \iint dy\, dz \int A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx \quad . \qquad (16,a)$$

Das letzte Integral nach x kann man teilweise integrieren

$$\int A \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dx = \left. \frac{A}{r} \right|_1^2 - \int \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial x} dx.$$

Wir sehen hierbei y und z als konstante Größen an, d. h. wir summieren alle Glieder des Integrals V_x, die den Elementen $dx\, dy\, dz$

Fig. 172.

einer unendlich dünnen Röhre (Fig. 172) mit dem Querschnitte $dz\, dy$ entsprechen. Diese Röhre schneidet aus der Oberfläche S des Magneten zwei Elemente dS_1 und dS_2 heraus. Es seien n_1 und n_2 die äußeren Normalen zu dieser Fläche: A_1, r_1 und A_2, r_2 seien die Werte der Größen A und r in dS_1 und dS_2. Dann ist

$$dS_2 \cos(n_2, x) = dz\, dy = -\, dS_1 \cos(n_1, x),$$

da der Winkel (n_1, x) ein stumpfer ist. Jetzt ist

$$V_x = \iint \frac{A_2}{r_2} \cos(n_2, x)\, dS_2 + \iint \frac{A_1}{r_1} \cos(n_1, x)\, dS_1$$
$$- \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy\, dz.$$

Das erste Integral erstreckt sich auf alle Elemente dS_2 der Austrittsstelle, das zweite auf alle Elemente dS_1 der Eintrittsstelle der Röhren, deren Querschnitte alle möglichen $dx\,dy$ sind. Es leuchtet ein, daß die Gesamtheit der Elemente dS_1 und dS_2 die ganze Oberfläche des Magneten ergibt und man daher einfacher schreiben kann

$$V_x = \iint \frac{\overline{A}}{r} \cos(n, x)\, dS - \iiint \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial x}\, dx\, dy\, dz.$$

Hier ist dS ein Element der Magnetoberfläche, n die dazu gehörige äußere Normale, $\overline{A}$ der Wert, den die Größe A an der Magnetoberfläche besitzt. Formt man in derselben Weise die beiden anderen Komponenten der Größe V (16) um, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} V = &\iint \frac{\overline{A} \cos(n, x) + \overline{B} \cos(n, y) + \overline{C} \cos(n, z)}{r}\, dS \\ &- \iiint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \end{aligned}\right\} \qquad (16, b)$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß man V als das Potential fingierter Massen ansehen kann, welche erstens auf der Fläche S des Magneten liegen und die Oberflächendichte

$$k = \overline{A} \cos(n, x) + \overline{B} \cos(n, y) + \overline{C} \cos(n, z) \quad . \; . \; . \quad (17)$$

haben, zweitens innerhalb des Magneten sich befinden und die Volumendichte

$$\varrho = -\left\{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

haben.

Läßt man, wie üblich, die Zeichen der mehrfachen Integrale fort, so ist schließlich

$$V = \int \frac{k\,dS}{r} + \int \frac{\varrho\,dv}{r} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Ist $\overline{J}$ der Wert für den Magnetisierungsgrad an der Oberfläche, so ist $\overline{A} = \overline{J} \cos(\overline{J}, x)$ usw., man kann daher statt (17) folgenden Ausdruck anschreiben

$$k = \overline{J} \cos(\overline{J}, n) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20)$$

Die Oberflächendichte ist gleich der Projektion des an der Oberfläche vorhandenen Magnetisierungsgrades auf die äußere Normale. Wir haben bereits erwähnt, daß wir fingierte Ober-

flächenmassen und magnetische Massen als **freien Magnetismus** bezeichnen wollen. Die Formeln (17) oder (20) und (18) zeigen uns, daß die Verteilung des freien Magnetismus davon abhängt, wie die Magnetisierung $J\,(A, B, C)$ verteilt ist. Mit einigen besonderen Fällen werden wir uns weiter unten bekannt machen. An dieser Stelle wollen wir den Fall der gleichmäßigen Magnetisierung betrachten, wo J, also auch die Größen A, B, C, in allen Punkten des Magneten die gleiche Größe und Richtung haben. Setzt man

$$J = Const \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

so ist

$$\varrho = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21,\mathrm{a})$$

$$V = J \int \frac{\cos(J, n)\, ds}{r} \quad \ldots \ldots \quad (21,\mathrm{b})$$

Da J das magnetische Moment der Volumeneinheit ist, so ist offenbar im Falle von gleichmäßiger Magnetisierung das Moment M des Magneten, dessen Volumen v ist, gleich

$$M = Jv \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21,\mathrm{c})$$

Für einen prismatischen Magneten, dessen geometrische Achse parallel J ist, hat man an dessen Seitenfläche $\cos(J, n) = 0$; folglich ist $k = 0$; an den Grundflächen ist $\cos(J, n) = \pm 1$, folglich $k = \pm J$. Freier Magnetismus ist nur an den Grundflächen vorhanden; seine Dichte ist dem absoluten Werte nach gleich dem Magnetisierungsgrade des Prismas. Es sei s der Flächeninhalt der Grundfläche und L die Länge des Magneten; dann ist die Menge des Magnetismus gleich $m = \pm Js$; die Pole befinden sich in den Schwerpunkten der Grundflächen; der Abstand der Pole voneinander ist gleich L. Das magnetische Moment ist $M = mL = JsL = Jv$, in Übereinstimmung mit (21, c).

Für eine gleichmäßig magnetisierte Kugel vom Radius r ist $k = J\cos(J, n) = J\cos\varphi$ (Fig. 173). Die Halbkugel NEN ist mit Nordmagnetismus bedeckt, die Halbkugel NDN mit Südmagnetismus; die Dichte ist proportional $\cos\varphi$; auf dem Äquator ist sie gleich Null. Die Gesamtmenge m des gleichnamigen Magnetismus ist

$$m = \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{\psi=0}^{2\pi} J\cos\varphi \,.\, r^2 \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi = \pi J r^2 \quad \ldots \quad (22)$$

Das Moment M ist gleich $M = Jv = \frac{4}{3}\pi r^3 J$; es ist aber $M = ml$, wo l den Abstand $P_1 P_2$ der Pole bedeutet, folglich ist

$$l = \frac{M}{m} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 J}{\pi J r^2} = \frac{4}{3} r \quad \ldots \quad (22,\mathrm{a})$$

Hieraus folgt $CP_1 = CP_2 = \frac{2}{3}r$. Das gleiche Resultat erhält man, wenn man die Lagen der Schwerpunkte der Massen $+m$ und $-m$ bestimmt. Im § 10, Kap. I des ersten Teiles dieses Bandes sind wir dem Falle begegnet, daß eine Kugel mit Elektrizität bedeckt ist, deren Dichte k proportional dem Cosinus der Breite ist. In diesem Falle hat man im Innern der Kugel ein homogenes Feld; die Feldintensität ψ und die Dichte k wurden durch die Formeln (72, b), S. 144 bestimmt und es war $\psi = -F$. Die Intensität des Magnetfeldes innerhalb der Kugel bezeichnen wir jetzt mit H_i; da sie die entgegengesetzte Richtung hat wie J (vgl. Fig. 173), so ist

$$k = J\cos\varphi = -\frac{3}{4\pi} H_i \cos\varphi,$$

hieraus aber folgt

$$H_i = -\tfrac{4}{3}\pi J \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22, b)$$

Wir wollen noch eine gleichmäßig magnetisierte, sehr dünne, unendlich große Platte betrachten, indem wir annehmen,

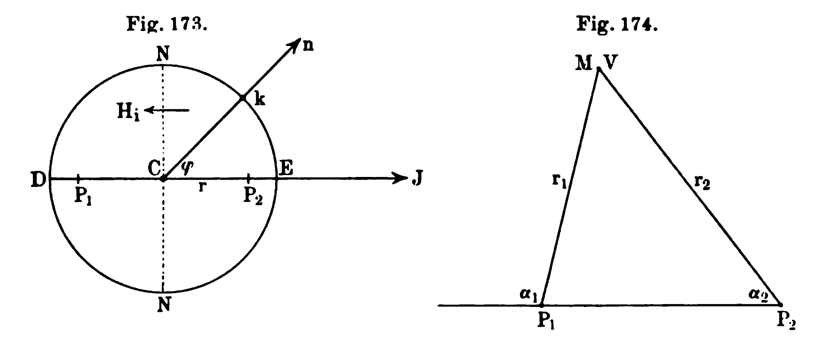


Fig. 173. Fig. 174.

daß die Magnetisierung J senkrecht zu den Plattenseiten ist. Wie im Falle eines Zylinders haben wir auf den Plattenseiten für die Dichte des freien Magnetismus den Wert $k = \pm J$. Jede der beiden Seiten ergibt für das Innere der Platte die Kraft $2\pi k = 2\pi J$, die von der Nordseite nach der Südseite hin gerichtet ist, also die entgegengesetzte Richtung wie J hat. Auf diese Weise erhält man innerhalb der Platte die Feldintensität

$$H_i = -4\pi J \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22, c)$$

Wir haben die Formeln zur Berechnung des Potentials V eines gegebenen Magneten bereits hergeleitet. Die Oberflächen, für welche $V = Const$ ist, sind Niveauflächen des Potentials; konstruiert man die orthogonalen Trajektorien zu diesen Oberflächen, so erhält man die Kraftlinien des Magnetfeldes des Magneten. Im einfachsten Falle, wo man zwei Pole P_1 und P_2 (Fig. 174) hat, welche gleiche Mengen von ungleichnamigem Magnetismus enthalten, ist das

Potential V im Punkte M gleich $\frac{m}{r_1} - \frac{m}{r_2}$; es ist daher die Gleichung der Niveauflächen des Potentials

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Die Gleichung für die Kraftlinien lautet

$$\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23,\text{a})$$

wo α_1 und α_2 die Winkel zwischen den Radienvektoren r_1, r_2 und der Magnetachse sind. Für den Fall von zwei gleichen gleichnamigen Polen erhält man für die Niveauflächen des Potentials

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23,\text{b})$$

und als Gleichung der Kraftlinien:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23,\text{c})$$

Zum Zeichnen dieser Linien für verschiedene besondere Fälle gibt es bestimmte Methoden; solche Methoden sind von Maxwell, Lindeck, Ebert u. a. angegeben worden.

Wir wenden uns nun zu der Frage nach der Energie eines Magneten, der in ein gegebenes Magnetfeld gebracht ist. Da sich die bisherigen Bezeichnungen V und H (α, β, γ) auf das Potential und die Feldintensität des Magneten selbst bezogen, wollen wir jetzt Potential und Intensität des gegebenen Magnetfeldes mit V' und H' (α', β', γ') bezeichnen.

Nehmen wir zunächst an, wir hätten es mit einem unendlich kleinen Magneten zu tun, welcher die magnetischen Mengen $+m$ und $-m$ enthält; die Entfernung der Pole voneinander bezeichnen wir mit dl, den Wert des Potentials V' an den Polen mit V_1' und V_2'. Formel (42, b), S. 417 gibt für die potentielle Energie dW des Magneten:

$$dW = m(V_1' - V_2') = m\,dl\,\frac{\partial V}{\partial l} = m\,H_l'\,dl \quad . \quad . \quad (23,\text{d})$$

wo H_l' die Komponente des Feldes in der Richtung l ist, die von $-m$ nach $+m$ hin gerechnet wird. Es sei J (A, B, C), wie auch früher, die Magnetisierung des in Betracht gezogenen kleinen Magneten, dv sein Volumen. Es ist dann $m\,dl = J\,dv$, da beide Ausdrücke das magnetische Moment des Magneten darstellen. Somit ist auch

$$dW = -J\,H_l'\,dv = -J\,H'\cos(H',l)\,dv.$$

Ferner ist $\cos(H',l) = \cos(H',x)\cos(l,x) + \cos(H',y)\cos(l,y) + \cos(H',z)\cos(l,z)$: $J\cos(l,x) = A$ usw.; $H'\cos(H',x) = \alpha'$ usw.; folglich

$$dW = -(A\alpha' + B\beta' + C\gamma')\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Für die potentielle Energie eines endlichen Magneten erhält man hieraus:

$$W = -\int (A\alpha' + B\beta' + C\gamma')\,dv \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Diese Formel kann man auch auf andere Weise ableiten, indem man den freien Magnetismus betrachtet, dessen beide Dichten k und ϱ durch die Formeln (17) und (18) gegeben sind. Auf Grund von Formel (42, b), S. 417 ist

$$W = \int V' \frac{k\,ds}{r} + \int V' \frac{\varrho\,dv}{r}.$$

Durch Umformung dieses Ausdruckes kann man die Formel (25) erhalten.

Im Falle eines homogenen Außenfeldes sind die Größen α', β', γ' konstant; substituiert man $\alpha' = H' \cos(H', x)$ usw., so ist

$$W = -H' \left\{ \cos(H', x) \int A\,dv + \cos(H', y) \int B\,dv + \cos(H', z) \int C\,dv \right\}.$$

Es sei M das magnetische Moment des Magneten; die Komponente $M \cos(M, x)$ ist offenbar gleich der Summe der Komponenten längs der x-Achse der Momente $J\,dv$ der unendlich kleinen Magnete, in welche der gegebene Magnet zerlegt war. Demnach ist

$$M \cos(M, x) = \int J \cos(J, x)\,dv = \int A\,dv.$$

Setzt man an Stelle der Integrale ihren Wert ein, so wird

$$W = -H' M \{ \cos(H', x) \cos(M, x) + \cos(H', y) \cos(M, y) + \cos(H', z) \cos(M, z) \}$$

oder

$$W = -H' M \cos(H', M) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

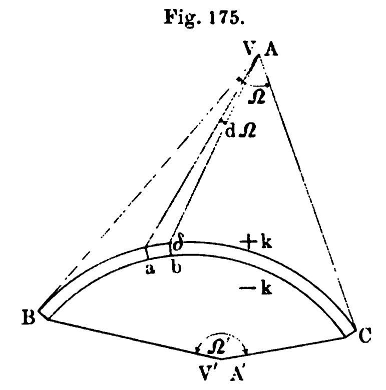
Das Minimum der potentiellen Energie, also stabiles Gleichgewicht des Magneten, tritt ein, wenn $\cos(H', M') = 1$ ist, d. h. wenn die Magnetachse den Kraftlinien parallel ist, was mit dem gegen Ende des § 2 (S. 434) gesagten übereinstimmt.

Wir wollen daran erinnern, daß alle Formeln dieses Paragraphen unter der Voraussetzung abgeleitet worden sind, daß die magnetische Permeabilität des Mediums $\mu = 1$ ist. Ist dagegen μ nicht gleich Eins, so muß in den Ausdrücken für V der Faktor μ dem Nenner hinzugefügt werden.

§ 4. Potential und Energie einer magnetischen Doppelschicht (eines magnetischen Blattes). Im § 4 des vorhergehenden Kapitels haben wir die Eigenschaften des Magnetfeldes betrachtet, die denjenigen des elektrischen Feldes analog sind, und hierbei die magnetische Doppelschicht kennen gelernt, die wir auch als magnetisches Blatt bezeichnen wollen. Das Produkt $\omega = k\delta$, wo δ die Blattdicke,

$\pm k$ die zu beiden Blattseiten gleiche Oberflächendichte bezeichnet, haben wir die Kraft des magnetischen Blattes genannt. Das Blatt heißt ein einfaches, wenn ω in allen Punkten desselben den gleichen Wert hat; es heißt zusammengesetzt, wenn ω in verschiedenen Punkten verschiedene Werte hat. In der Folge sollen, wenn von magnetischen Blättern die Rede ist, jedesmal einfache Blätter gemeint sein.

Fig. 175.



Suchen wir die Größe des Potentials V eines magnetischen Blattes BC (Fig. 175) in einem gegebenen Punkte A. Teilen wir das Blatt in sehr kleine Teile, wobei ab einer dieser Teile, dV sein Potential im Punkte A sein mag. Dieser Teil stellt gerade solch einen kleinen Magneten dar, wie der, dessen Potential durch Formel (14), S. 436 bestimmt wird, in der wir an Stelle des Raumwinkels Ω hier $d\Omega$ schreiben. Da $k\delta$ gleich der Kraft ω des magnetischen Blattes ist, so erhalten wir

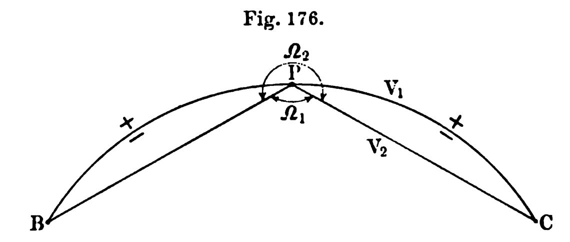
$$dV = \frac{\omega}{\mu} d\Omega.$$

Hieraus ergibt sich das Potential V des (einfachen) magnetischen Blattes im Punkte A:

$$V = \frac{\omega}{\mu} \Omega \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

wo $\omega = k\delta$ die Kraft des Blattes, Ω der Raumwinkel ist, unter welchem die Umgrenzung des Blattes vom Punkte A aus erscheint. Wenn von einem anderen Punkte A' aus die negative,

Fig. 176.



d. h. die Südseite des Blattes sichtbar ist und die Umgrenzung hierbei unter dem Raumwinkel Ω' erscheint, so ist das Potential V' im Punkte A' gleich

$$V' = -\frac{\omega}{\mu} \Omega' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27, a)$$

Sind vom gegebenen Punkte aus beide Blattseiten teilweise sichtbar, so enthält $V = \frac{1}{\mu}\int \omega\, d\Omega$ ungleichnamige Teile, die sich algebraisch summieren.

Nehmen wir an, es kommen die Punkte A und A' ein und demselben Punkte P (Fig. 176) des Blattes, das wir als unendlich dünn ansehen, unendlich nahe. Dann erhält man an der Blattoberfläche auf der positiven Seite derselben das Potential $V_1 = \frac{\omega}{\mu}\Omega_1$, auf der negativen Seite $V_2 = -\frac{\omega}{\mu}\Omega_2$, vgl. Fig. 176. Es ist aber $\Omega_1 + \Omega_2 = 4\pi$, daher $V_2 = -\frac{\omega}{\mu}(4\pi - \Omega_1) = \frac{\omega}{\mu}\Omega_1 - 4\pi\frac{\omega}{\mu} = V_1 - 4\pi\frac{\omega}{\mu}$; hieraus folgt

$$V_1 - V_2 = 4\pi\frac{\omega}{\mu} \quad \ldots\ldots \quad (27,\mathrm{b})$$

was mit Formel (40), S. 416 vollkommen übereinstimmt, da bei der Berechnung des Potentials vorausgesetzt wurde, daß die magnetische Permeabilität des Mediums gleich μ sei. Formel (27) zeigt, daß das Potential V eines magnetischen Blattes, also auch die Kräfte, welche in irgend einem Punkte A wirken, durchaus nicht von der Gestalt der Oberfläche dieses Blattes, sondern nur von seiner Umgrenzung abhängen. Wechselt man die Oberfläche, so darf man hierbei nicht durch den Punkt A hindurchgehen, da bei diesem Übergange sich das Potential plötzlich um den Betrag $4\pi\omega : \mu$ ändert und die Größe H ihre Richtung wechselt.

Für ein magnetisches Blatt, welches eine in sich geschlossene Oberfläche besitzt, hat man $\Omega = 0$, $\Omega' = 4\pi$, so daß

$$V = 0, \quad V' = -\frac{4\pi\omega}{\mu} = Const$$

ist: die Feldintensität ist offenbar gleich Null, sowohl außerhalb, als auch im Innern des geschlossenen Blattes.

Die Niveauflächen des Potentials sind die Oberflächen

$$\Omega = Const \quad \ldots\ldots \quad (27,\mathrm{c})$$

Die Feldintensität H, welche die Richtung der Normalen n zur Oberfläche (27, c) hat, ist gleich

$$H = -\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\omega}{\mu}\frac{\partial \Omega}{\partial n} \quad \ldots\ldots \quad (27,\mathrm{d})$$

Wenden wir uns jetzt der überaus wichtigen Frage nach der potentiellen Energie eines magnetischen Blattes zu, das in ein Magnetfeld gebracht ist, dessen Intensität wie früher mit H' bezeichnet

ist. Es sei dW die potentielle Energie eines sehr kleinen Teiles des Blattes und dS die Oberfläche dieses Teiles. Wir hatten bereits die Formel (23,d), S. 442

$$dW = -mH_l' \, dl,$$

in welcher m die magnetische Menge auf jedem Pole bedeutet; in unserem Falle ist $m = k\,dS$, wo k die Oberflächendichte des Magnetismus darstellt; ferner ist jetzt $dl = \delta$, d. h. gleich der Dicke der Schicht; ferner ist H_l' die Komponente der Feldintensität in der Richtung l, welche von $-m$ nach $+m$ gerechnet wird, d. h. von der negativen (Süd-) Seite des Blattes zur positiven (Nord-) Seite hin. Diese Richtung bezeichnen wir jetzt mit n; sie steht senkrecht zur Fläche S. Wir haben, da $k\delta = \omega$ ist,

$$dW = -k\delta \, H_n' \, dS = -\omega H_n' \, dS \quad . \quad . \quad . \quad (27,e)$$

Hieraus folgt

$$W = -\omega \int H_n' \, dS.$$

Die Richtung n ist aber senkrecht zu dS, es ist daher das letzte Integral nichts anderes als der Kraftfluß Φ' oder die Gesamtzahl N der Kraftlinien, vgl. (12,c), S. 406, welche die Umgrenzung des Blattes durchsetzt, vgl. (12,b), S. 406. Somit ist

$$W = -\omega \Phi' = -\omega N \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Die potentielle Energie eines magnetischen Blattes ist gleich dem mit negativem Vorzeichen versehenen Produkte aus der Kraft des Blattes und dem Kraftfluß Φ' oder der Gesamtzahl der Kraftlinien, welche die Umgrenzung des Blattes durchsetzen, und zwar in der Richtung von seiner negativen zu seiner positiven Seite hin. Das negative Vorzeichen deutet darauf hin, daß bei positivem Φ', wo die Kraftlinien faktisch die bezeichnete Richtung haben, beim Übergange des Blattes aus der von ihm eingenommenen Lage in die Unendlichkeit die magnetischen Kräfte eine negative Arbeit verrichten, die äußeren Kräfte aber, welche das Blatt verrücken, eine positive Arbeit.

Wenden wir uns dem überaus wichtigen Falle zu, wo das Außenfeld selbst durch die Anwesenheit eines anderen magnetischen Blattes hervorgerufen ist. Bezeichnen wir mit ω_1 die Kraft des ersten Blattes, mit ω_2 die Kraft des zweiten Blattes, welches das Magnetfeld hervorruft. Ferner sei $\Phi_{1,2} = N_{1,2}$ der Fluß oder die Gesamtzahl der Kraftlinien, welche die Umgrenzung des ersten Blattes durchsetzen und vom zweiten Blatte ausgehen. Die gesuchte potentielle Energie bezeichnen wir jetzt mit $W_{1,2}$. Formel (28) gibt

$$W_{1,2} = -\omega_1 \Phi_{1,2} = -\omega_1 N_{1,2} \quad . \quad . \quad . \quad (28,a)$$

Aber der gesamte Fluß der Kraftlinien, welche vom zweiten Blatte ausgehen, ist der Kraft ω_2 dieses Blattes proportional, wie dies

aus Formel (27, d) ersichtlich ist; es muß daher auch der Teil $\Phi_{1,2}$ dieses Flusses, der durch die Umgrenzung des ersten Blattes hindurchgeht, proportional ω_2 sein. Bezeichnen wir den Proportionalitätsfaktor mit $\frac{L_{1,2}}{\mu}$, d. h. setzen wir

$$\Phi_{1,2} = N_{1,2} = \frac{L_{1,2}}{\mu}\omega_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Der Faktor $L_{1,2}$ hängt offenbar nur von der Größe, Form und gegenseitigen Lage der Umgrenzungen beider magnetischer Blätter ab. Es ist dies eine Größe von rein geometrischem Charakter. Setzt man (29) in (28, a) ein, so wird

$$W_{1,2} = -\frac{\omega_1\omega_2}{\mu}L_{1,2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Bezeichnen wir jetzt mit $W_{2,1}$ die potentielle Energie des zweiten Blattes, welches sich in dem durch das erste Blatt hervorgerufenen Magnetfelde befindet. Mit $\Phi_{2,1} = N_{2,1}$ bezeichnen wir den Fluß oder die Gesamtzahl der Kraftlinien, welche vom ersten Blatte ausgeht und durch die Umgrenzung des zweiten Blattes hindurchgeht. Entsprechend der Formel (28, a) hat man jetzt

$$W_{2,1} = -\omega_2\Phi_{2,1} = -\omega_2 N_{2,1} \quad . \quad . \quad . \quad (30, a)$$

Die Größe $\Phi_{2,1} = N_{2,1}$ ist proportional ω_1; es sei

$$\Phi_{2,1} = N_{2,1} = \frac{L_{2,1}\omega_1}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30, b)$$

gesetzt, wo $L_{2,1}$ eine ebensolche rein geometrische Größe ist, wie auch $L_{1,2}$. Die Formeln (30, a) und (30, b) geben

$$W_{2,1} = -\frac{\omega_1\omega_2}{\mu}L_{2,1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30, c)$$

Aus den von uns abgeleiteten Formeln folgt eine Reihe von überaus wichtigen Schlüssen. $W_{1,2}$ ist diejenige Arbeit, welche man leisten muß, um das erste Blatt vom zweiten auf eine unendliche Entfernung zu bringen; $W_{2,1}$ ist die Arbeit eines ebensolchen Transportes des zweiten Blattes in bezug auf das erste. Offenbar sind diese Größen einander gleich, da sie die Arbeit repräsentieren, welche erforderlich ist, um beide Blätter auf unendlich große Entfernung voneinander zu bringen. Es ist also

$$W_{1,2} = W_{2,1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30, d)$$

Wir wollen diese Größe mit $W_{1,2}$ bezeichnen und sie die potentielle Energie zweier magnetischer Blätter nennen. Die Formeln (30) und (30, c) geben jetzt

$$L_{1,2} = L_{2,1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Die geometrischen, in den Formeln (30) und (30, c) vorkommenden Größen $L_{1,2}$ und $L_{2,1}$ sind einander gleich. Wir behalten die Bezeichnung $L_{1,2}$ bei und nennen diese Größe den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion der Umgrenzungen zweier magnetischer Blätter im Vakuum ($\mu = 1$). Eine Erklärung für diese Bezeichnung wird später gegeben werden.

Behält man die Bezeichnungen $W_{1,2}$ und $L_{1,2}$ bei, so behält man auch die Formel (30) bei. Die Formeln (29), (30, b) und (31) geben uns jetzt

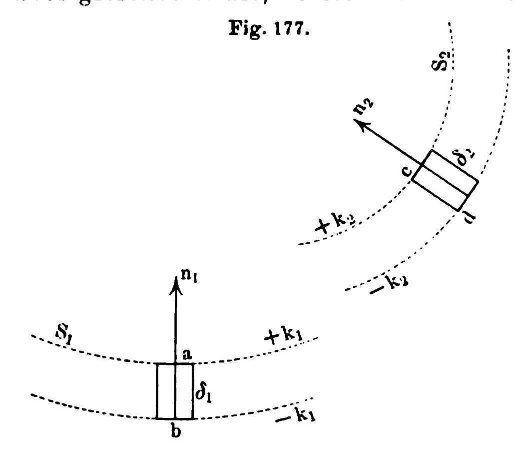
$$\frac{\Phi_{1,2}}{\Phi_{2,1}} = \frac{N_{1,2}}{N_{2,1}} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \quad \ldots \ldots \quad (32)$$

Im besonderen Falle, wo $\omega_1 = \omega_2$ ist, erhalten wir

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_{1,2} = \Phi_{2,1} \\ N_{1,2} = N_{2,1} \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Hat man zwei magnetische Blätter von beliebiger Form, aber gleicher Kraft, so ist der Fluß oder die Gesamtzahl der Kraftlinien, welche vom ersten Blatte ausgehen und durch die Umgrenzung des zweiten hindurchgehen, gleich dem Fluß oder der Gesamtzahl der Kraftlinien, welche vom zweiten Blatte ausgehen und durch die Umgrenzung des ersten hindurchgehen. Es fällt auch nicht schwer, die allgemeinere Formel (32) in Worten auszudrücken. Formel (30) gibt jetzt folgendes:

Fig. 177.



Die potentielle Energie zweier magnetischer Blätter ist gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen genommenen Produkte der Kräfte ω_1 und ω_2 dieser Blätter, multipliziert mit dem Koeffizienten der gegenseitigen Induktion $L_{1,2}$ ihrer Umgrenzungen.

Zur Berechnung der Größe $L_{1,2}$ gibt es verschiedene Formeln: wir wollen eine derselben herleiten. In Fig. 177 sind die magnetischen Blätter durch punktierte Linien dargestellt. Nehmen wir zwei unendlich kleine Teile ab und cd dieser Blätter; ihre Grundflächen seien dS_1 und dS_2; die an die positiven Seiten gezogenen Normalen bezeichnen

wir mit n_1 und n_2; den beiderseitigen Abstand von ab und cd bezeichnen wir mit r, wobei wir $r = ac$ setzen. Endlich bezeichnen wir noch die potentielle Energie dieser Teile mit $W_{1,2}$. Es sei V_a und V_b das Potential des Magneten cd in den Punkten a und b. Offenbar ist

$$\omega_{1,2} = k_1 \, dS_1 (V_a - V_b) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Es ist aber

$$V_a = \frac{k_2 \, dS_2}{\mu} \left\{ \frac{1}{ac} - \frac{1}{ad} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34, a)$$

Ferner ist $\frac{1}{ac} = \frac{1}{r}$; $\frac{1}{ad}$ erhält man aus $\frac{1}{ac}$, wenn man sich in der Richtung von n_1 um die Entfernung $dn_1 = -\delta_1$ weiterbewegt; daher ist

$$\frac{1}{ad} = \frac{1}{r} + \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1} dn_1 = \frac{1}{r} - \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1} \delta_1.$$

Also ist

$$V_a = \frac{1}{\mu} k_2 \delta_1 \, dS_2 \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34, b)$$

V_b wird aus V_a erhalten, wenn man in der Richtung von n_2 um die Strecke $dn_2 = -\delta_2$ weitergeht; folglich ist

$$V_b = V_a + \frac{\partial V_a}{\partial n_2} dn_2 = V_a - \frac{\partial V_a}{\partial n_2} \delta_2.$$

Hieraus folgt

$$V_a - V_b = \frac{\partial V_a}{\partial n_2} \delta_2 = \frac{1}{\mu} k_2 \delta_1 \delta_2 \, dS_2 \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1 \partial n_2}.$$

Substituiert man dies in (34) und setzt $k_1 \delta_1 = \omega_1$, $k_2 \delta_2 = \omega_2$, so erhält man

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\mu} \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1 \partial n_2} dS_1 \, dS_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34, c)$$

Für die gesamte potentielle Energie zweier Blätter erhält man

$$W_{1,2} = \frac{\omega_1 \omega_2}{\mu} \iint \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1 \partial n_2} dS_1 \, dS_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

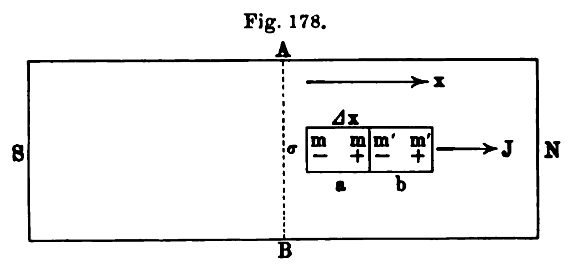
Vergleicht man diesen Ausdruck mit (30), so erhält man für den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion der Umgrenzungen beider Blätter im Vakuum

$$L_{1,2} = -\iint \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1 \partial n_2} dS_1 dS_2 \quad \ldots \ldots \quad (36)$$

In (35) und (36) erstreckt sich jede der Integrationen auf sämtliche Oberflächenelemente des betreffenden Blattes.

§ 5. **Freier Magnetismus.** Im Vorhergehenden haben wir zwei Größen kennen gelernt, welche den magnetischen Zustand eines Körpers charakterisieren: den Magnetisierungsgrad oder kurz die Magnetisierung J und den freien Magnetismus, Oberflächen- und Raummagnetismus. Die erste von diesen Größen, J, deren Komponenten wir mit A, B, C bezeichnet haben, bestimmt den wahren magnetischen Zustand einer Substanz in einem gegebenen Punkte. Sie ist gleich dem „Moment der Volumeinheit" in diesem Punkte, d. h. dem Moment

Fig. 178.



dM eines unendlich kleinen Teiles eines Magneten, den man von der Gesamtmasse des Körpers losgetrennt denkt, dividiert durch das Volumen dv dieses Teiles. Der freie, fingierte Magnetismus stellt eine vorhanden gedachte Substanz dar, deren Wirkung nach einem bestimmten Gesetze erfolgt und diejenigen Wirkungen ersetzt, welche im Raume, dank der Anwesenheit des magnetisierten Körpers, faktisch wahrgenommen werden. Für die Dichte k des freien Oberflächenmagnetismus hatten wir die Formeln (17) und (20) auf S. 439 gefunden

$$k = \overline{J}\cos(\overline{J}, n) = \overline{A}\cos(n, x) + \overline{B}\cos(n, y) + \overline{C}\cos(n, z) \quad . \quad (37)$$

wo $\overline{J}$ ($\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$) die Magnetisierung an der Oberfläche, n die äußere Normale an diese Fläche bedeuten. Für die Volumdichte ϱ des inneren freien Magnetismus gilt Formel (18), S. 439

$$\varrho = -\left\{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Wir wenden uns zunächst der Betrachtung des inneren freien Magnetismus zu. Formel (38) zeigt uns, daß $\varrho = 0$ ist für $J = Const$, daß das Auftreten von innerem freien Magnetismus eine

Folge der Inkonstanz von J, d. h. der Ungleichförmigkeit der wahren Magnetisierung ist. Diesen Zusammenhang zwischen ϱ und J kann man sich in elementarer Weise folgendermaßen klar machen. Wir wollen uns zwei nebeneinander liegende Teile a und b des Magneten SN (Fig. 178) vorstellen. Es sei σ der Flächeninhalt der Grundfläche, Δx die Länge des Teiles a; seine Magnetisierung sei J, wobei der Vektor J die Richtung x hat. Auf den Enden des Teiles a befinden sich die Magnetismen $\pm m$, die freie Magnetismen sein würden, wenn wir diesen Teil aus dem Magneten herausnehmen würden. Die Magnetisierung des Teiles b ist gleich $J + \Delta J$; auf seinen Enden befinden sich die Magnetismen $\pm m'$. Das magnetische Moment des Teiles a ist gleich $m\Delta x$; gleichzeitig ist es auch gleich $J.\sigma\Delta x$, so daß $m = \sigma J$ ist. In ähnlicher Weise ist $m' = \sigma(J + \Delta J)$. Nimmt man an, daß $(+m)$ und $(-m')$ in einer Ebene liegen, so erhält man für den freien Magnetismus in dieser Ebene

$$m - m' = -\sigma\Delta J = -\sigma\frac{\partial J}{\partial x}\Delta x.$$

Im Grenzfalle kann man annehmen, der freie Magnetismus, welcher dem Teile a angehört, sei auf dessen Volumen $\sigma\Delta x$ verteilt. Seine Volumdichte ϱ ist gleich

$$\varrho = \frac{m - m'}{\sigma\Delta x} = -\frac{\partial J}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Wir hatten vorausgesetzt, daß J die Richtung von x hat; wir überlassen es dem Leser, die allgemeinere Formel (38) abzuleiten, indem er das unendlich kleine Parallelepipedon in Betracht zieht, dessen Kanten Δx, Δy, Δz sind.

Bei den üblichen Magnetisierungsmethoden erhält man Nordmagnetismus (+) auf der ganzen Nordhälfte, Südmagnetismus (—) auf der ganzen Südhälfte. Formel (39) zeigt uns, daß hierfür erforderlich ist, daß der Maximalwert J_m der Indifferenzzone entspricht, d. h. daß die wahre Magnetisierung von der Mitte AB aus nach beiden Enden des Magneten hin abnimmt. Somit ist ein Magnet gewöhnlich am stärksten gerade an der Stelle magnetisiert, an welcher die Dichte des freien Magnetismus gleich Null ist.

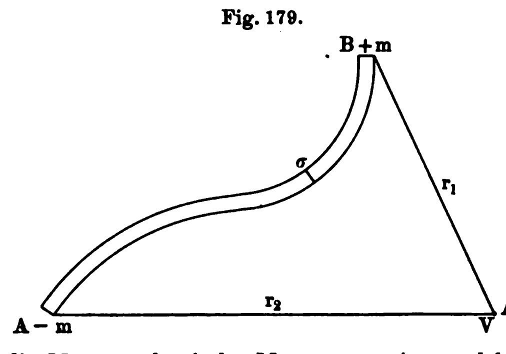
Wir müssen bemerken, daß die vorherige Überlegung, die auf Fig. 178 zurückgeht, nicht ganz genau ist. Wir hatten vorausgesetzt, daß die Magnetismusmenge $+m$ eines Elementes des Magneten und $-m'$ des benachbarten Elementes gleichsam in eine Menge $m - m'$ zusammenfließen. In Wirklichkeit findet ein solches Zusammenfließen möglicherweise auch nicht statt; die kleinsten magnetisierten Teilchen sind wahrscheinlich voneinander durch Zwischenräume getrennt.

Wir überlassen es dem Leser, nachzuweisen, daß die Gesamtmenge des freien Magnetismus eines Vorzeichens (des Oberflächen- und

inneren Magnetismus), der sich auf einer Magnethälfte befindet, numerisch gleich ist der maximalen Magnetisierung J_m, welche in der Indifferenzzone AB vorhanden ist.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung einiger besonderer Fälle der Magnetisierung über. Denken wir uns einen dünnen Magneten AB (Fig. 179), dessen Querschnitt σ überall der gleiche ist, der gleichmäßig magnetisiert ist, und zwar derart, daß der Vektor $J = Const$ überall die Richtung der geometrischen Achse des Magneten hat. Es leuchtet ein, daß auf der Seitenfläche $k = 0$ ist, denn in Formel (37) haben wir für diese Fläche

Fig. 179.



$$cos(\bar{J}, n) = 0;$$

ferner ist überall $\varrho = 0$, da A, B und C in (38) konstante Größen sind. Freier Magnetismus findet sich nur an den Enden A und B, welches die Magnetpole sind. Man nennt einen solchen fadenförmigen, gleichmäßig magnetisierten Magneten ein magnetisches Solenoid. Die Menge $\pm m$ des freien Magnetismus an den Polen ist gleich $\pm J\sigma$, da Formel (37) $k = \bar{J} = J$ gibt. Das Potential V im Punkte A hat, wenn im umgebenden Medium die magnetische Permeabilität $\mu = 1$ ist, den Wert:

$$V = J\sigma\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \dots \dots \quad (40)$$

Das Potential eines magnetischen Solenoids hängt gar nicht von der Form des Solenoids ab, sondern nur von der Lage seiner Enden. Ein geschlossenes magnetisches Solenoid gibt an allen Punkten des Raumes $V = 0$, also auch $H = 0$. Es enthält gar keinen freien Magnetismus und äußert keinerlei magnetische Außenwirkungen; nichtsdestoweniger kann es eine sehr bedeutende Magnetisierung besitzen. Ein solches ringförmiges Solenoid stellt eine geschlossene magnetische Kette dar.

Unter den verschiedenen Formen der Magnetisierung von Magneten von beliebiger Gestalt und Größe ist von besonderem Interesse die solenoidale und die geschichtete Magnetisierung.

Die Magnetisierung heißt solenoidal, wenn der ganze Magnet in magnetische Solenoide zerlegt werden kann. Für einen solchen Magneten ist überall

$$\varrho = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (41)$$

oder, vgl. (38),

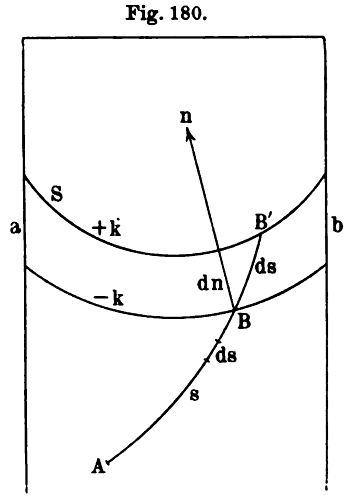
$$\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (41,a)$$

Die letzte Gleichung drückt die Bedingung für die solenoidale Magnetisierung aus. Das Potential V des Magneten ist in diesem Falle gleich, vgl. (37),

$$V=\int\frac{k\,dS}{r}=J\int\frac{\cos(J,n)}{r}\,ds \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (41,b)$$

Die Magnetisierung heißt geschichtet (lamellar), wenn der ganze Magnet in eine unendlich große Zahl von einfachen magnetischen Blättern zerlegt werden kann. Jedes Blatt besitzt eine bestimmte Kraft und liegt an einer gewissen Fläche S (Fig. 180). Die Magnetisierung J hat in jedem Punkte eine zu der durch diesen Punkt gehenden Fläche S senkrechte Richtung. Es sei ab eines der unendlich dünnen magnetischen Blätter, n die Normale zu seiner Oberfläche, dn seine Dicke. Die Kraft dieses Blattes ist eine unendlich kleine Größe, und zwar ist sie gleich $k\,dn$, wenn k die endliche Dichte des freien Magnetismus bedeutet, welche sich an der Fläche S zeigen würde, wenn man das Blatt ab aus dem Magneten herausschneiden würde. Schneiden wir aus dem Blatte einen Teil heraus, dessen Oberfläche gleich dS, dessen Volumen gleich $dv = dS\,dn$ ist. Das magnetische Moment dieses Teiles ist dann gleich $k\,dS\,dn = k\,dv$; andererseits ist das Moment gleich $J\,dv$, also $J = k$, die Kraft des Blattes daher gleich $J\,dn$, wo J die Richtung der Normalen n hat. Es sei A ein beliebiger Anfangspunkt. Geht man von diesem Punkte auf einer beliebigen Kurve s zu einem beliebigen Punkte B auf der Oberfläche unseres Blattes über, so hängt die Summe der Kräfte aller Blätter, welche von der Kurve s geschnitten werden, offenbar weder von der Form der Kurve s, noch auch von der Lage des Punktes B auf der Fläche S ab. Diese Summe ist eine Funktion der Koordinaten x, y, z des Punktes B und die Flächen S sind ihre Niveauflächen. Wir werden diese Funktion durch $\varphi(x, y, z)$ andeuten. Symbolisch kann man sie in folgender Form angeben:

Fig. 180.



$$\varphi=\int_A^B J\,dn=\int_A^B J\cos(dn, ds)\,ds=\int_A^B J\cos(J, ds)\,ds \quad . \qquad (42)$$

Gehen wir durch die Schicht ab hindurch, d. h. von B nach B', so wächst diese Funktion um $d\varphi = J\,dn$; hieraus folgt

$$J = \frac{d\varphi}{dn} \quad \text{. . . . . (43)}$$

Die Funktion φ werden wir das Potential der Magnetisierung nennen; sie spielt in bezug auf J dieselbe Rolle, wie das Potential V in bezug auf die Intensität H. Formel (43) gibt

$$d\varphi = J\,dn = J\cos(J, ds)\,ds.$$

Es ist aber $J\cos(J, ds)\,ds = A\,dx + B\,dy + C\,dz$, wo $A = J\cos(J, x)$ ist usw., $dx = ds\cos(ds, dx)$ usw. Auf diese Weise erhalten wir

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = d\varphi$$

und hieraus

$$A = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad B = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad C = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad \text{. . . (43, a)}$$

Aus obigem folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . . (44)}$$

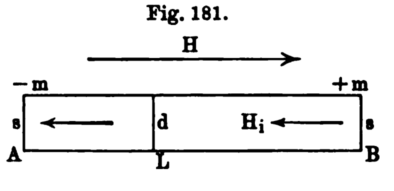
Im Falle der geschichteten Magnetisierung ist ein Potential φ der Magnetisierung vorhanden; die Niveauflächen dieses Potentials sind die Oberflächen der magnetischen Blätter. Die Magnetisierung J ist überall senkrecht zu diesen Niveauflächen und ihre Größe wird durch Formel (43) bestimmt. Die Bedingung für die geschichtete Magnetisierung ist in den Formeln (44) enthalten.

Es versteht sich von selbst, daß die Bezeichnung „Potential" hier nur der Analogie wegen gewählt ist, und daß zwischen der Größe φ und einer Arbeit keinerlei Zusammenhang existiert.

Nachdem wir das Auftreten, einige besondere Fälle der Verteilung und die äußeren Wirkungen des freien Magnetismus betrachtet haben, wollen wir noch einige Worte über seine Wirkungen auf Punkte im Innern des Magneten hinzufügen. Einer eingehenderen Untersuchung alles dessen, was im Innern einer magnetischen Substanz vor sich geht, werden wir in der Folge begegnen. An dieser Stelle sei bloß auf einen sehr wesentlichen Umstand hingewiesen, nämlich auf die sogenannte entmagnetisierende Wirkung des freien Magnetismus. Wir wollen uns darauf beschränken, vorzugsweise die qualitative Seite der Erscheinung zu betrachten.

Wir bringen einen Eisenstab AB (Fig. 181) in ein Magnetfeld, dessen Intensität nach Größe und Richtung durch den Pfeil H bezeichnet ist; es sei L die Länge, d die Dicke des Stabes. Unter der unmittelbaren Einwirkung dieses Feldes erhielte man eine gewisse Magnetisierung J_0. Wie jedoch aus der Figur ersichtlich, rufen die freien magnetischen Massen $\pm m$, die wir uns an den Grundflächen s konzentriert denken, im Innern des Magneten ein gewisses Feld H_i hervor, dessen Richtung derjenigen des Außenfeldes H entgegengesetzt ist. Infolgedessen entsteht eine Magnetisierung J, welche kleiner als J_0 ist. Im Auftreten des Innenfeldes H_i besteht nun aber die Ursache für die entmagnetisierende Wirkung des freien Magnetismus oder, wie man zu sagen pflegt, der Magnetenden. Für einen sehr langen Stabmagneten kann man die Annahme machen, daß an seiner Mitte $H_i = 0$ ist. Der mittlere Wert von H_i' für den ganzen Stab ist proportional m, d. h. proportional d^2; ferner kann man H_i' indirekt proportional L^2 setzen. Es sei $L:d = q$; wir wollen diese Größe die Streckung des Stabes nennen: wie wir sehen, ist die mittlere entmagnetisierende Wirkung H_i' der Stabenden indirekt proportional dem Quadrate der Streckung q des Stabes.

Fig. 181.



Das Verhältnis

$$N' = -\frac{H_i'}{J} \quad \dots\dots\dots \quad (45)$$

heißt der mittlere Entmagnetisierungskoeffizient. Es ist dies eine unbenannte Zahl, da H_i' und J die gleiche Dimension haben (vgl. d. flgde., § 6). Denkt man sich H_i' und J als gegeben, so erhält man

$$N'q^2 = C \quad \dots\dots\dots \quad (45,\mathrm{a})$$

wo C eine konstante, d. h. von L und d unabhängige Zahl ist. Versuche mit zylindrischen Eisenstäben haben die Formel (45, a) bestätigt. Man fand $C = 45$ für $q > 100$, d. h. für sehr stark gestreckte Stäbe.

Bringt man einen Eisenring in ein ringförmiges Feld, wo H, also auch J_0 überall dem Achsenkreise des Ringes parallel sind, so erhält man eine geschlossene magnetische Kette; freier Magenetismus ist hier nicht vorhanden und die Größe J_0 entspricht überall der Feldintensität H. Schneidet man jedoch aus dem Ringe eine schmale Platte heraus, so daß sich ein Spalt bildet, so treten auf dessen beiden Seiten freie Magnetismen auf und man erhält anstatt J_0 einen kleineren Mittelwert J. Für eine gleichmäßig magnetisierte Kugel gibt Formel (22, b), S. 441, überall den gleichen Wert von N'

$$N' = \frac{4}{3}\pi \, (= 4{,}1888) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (45,\text{b})$$

Für eine dünne Platte, deren Seiten senkrecht zu H sind, hat man, vgl. (22, c), S. 441

$$N' = 4\pi \, (= 12{,}5664) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (45,\text{c})$$

Für eine solche Platte erhält man den allergrößten Entmagnetisierungskoeffizienten $N' = 12{,}5664$. Wir wollen nun noch einige Formeln anführen, ohne sie jedoch herzuleiten.

Rotationsellipsoid, dessen Achse parallel zu H ist; halbe Rotationsachse c, Radius des Äquators a; es sei $c:a = q$; die Exzentrizität e.

1. Ovoid (langgestrecktes Ellipsoid), $c > a$, $q > 1$; $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{q^2}}$.

$$\left.\begin{aligned} N' &= 4\pi\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)\left(\frac{1}{2e}\, lg \frac{1+e}{1-e} - 1\right) \\ &= \frac{4\pi}{q^2 - 1}\left\{\frac{q}{\sqrt{q^2-1}}\, lg\,(q + \sqrt{q^2-1}) - 1\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \qquad (45,\text{d})$$

Für ein sehr langgestrecktes Ovoid ($q > 50$) kann man

$$N' = \frac{4\pi}{q^2}(lg\, 2q - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (45,\text{e})$$

setzen, wo lg das Zeichen für den natürlichen Logarithmus ist.

2. Sphäroid (abgeplattetes Ellipsoid), $c < a$, $q < 1$; $e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - q^2}$.

$$\left.\begin{aligned} N' &= \frac{4\pi}{e^2}\left\{1 - \frac{1}{e}\sqrt{1-e^2}\, arcsin\, e\right\} \\ &= \frac{4\pi}{1-q^2}\left\{1 - \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}\, arccos\, q\right\} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \qquad (45,\text{f})$$

Für einen der Quere nach magnetisierten Zylinder (H ist senkrecht zur Zylinderachse) ist

$$N' = 2\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (45,\text{g})$$

Wir wollen aus dem Werke von Du Bois einige Werte für N' entlehnen.

Rotationsellipsoid (H ist der Rotationsachse parallel), $q = c:a$

$q =$	0	0,5	1	5	10	
$N' =$	12,5664	6,5864	4,1888	0,7015	0,2549	
$q =$	20	50	100	200	500	1000
$N' =$	0,0848	0,0181	0,0065	0,0016	0,0003	0,00008.

Die erste Zahl bezieht sich auf eine dünne Platte, die zweite auf ein Sphäroid, die dritte auf eine Kugel, die übrigen auf Ovoide.

Der Länge nach magnetisierter Zylinder, $q = L:d$.

$q =$	0	10	15	25	50
$N' =$	12,5664	0,2160	0,1206	0,0533	0,0162

$q =$	100	200	500	1000
$N' =$	0,0045	0,0011	0,00018	0,00018.

Angefangen von $q = 100$ ist $N'q^2 = 45$, vgl. (45, a).

§ 6. **Einheiten der magnetischen Größen.** Die physikalischen Größen, denen wir in der Lehre vom magnetischen Felde und seinen Quellen begegnen, werden durch die sogenannten elektromagnetischen Einheiten gemessen. Wir werden in diesem Paragraphen eine Übersicht dieser Größen und ihrer Dimensionen geben. Von besonderer Bedeutung sind hier, wie jetzt in fast sämtlichen Teilen der Physik, die C. G. S.-Einheiten. Für einige Größen hat man noch die Gaussschen Einheiten in Betracht zu ziehen, deren Grundeinheiten das Millimeter, Milligramm und die Sekunde sind, denn diese Einheiten sind noch bis jetzt an einigen magnetischen Observatorien zur Messung der Intensität des Erdmagnetismus in Gebrauch.

1. Magnetische Menge *m*. Auf S. 402 war bereits die Definition der Einheit der magnetischen Menge gegeben worden, welche als Grundlage für die Festsetzung der elektromagnetischen Einheiten dient. Für die Dimensionen hatten wir die Formeln (4) und (4, a), S. 403, gefunden:

$$\left.\begin{aligned}[m] &= [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\\ [m] &= L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Der Zusammenhang zwischen den C. G. S.-Einheiten und der Gaussschen Einheit ergibt sich nach der entsprechenden, im Bande I mitgeteilten Regel:

$$\left.\begin{aligned}1\ \text{C. G. S.-Einheit} &= 1\,\frac{(\text{cm})^{\frac{3}{2}}(\text{g})^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}} = 1\,\frac{(10\,\text{mm})^{\frac{3}{2}}(1000\,\text{mg})^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}}\\ &= 1000\,\frac{(\text{mm})^{\frac{3}{2}}(\text{mg})^{\frac{1}{2}}}{\text{sec}} = 1000\ \text{Gausssche Einheiten}\end{aligned}\right\} \quad (46,\text{a})$$

Für die numerischen Werte einer gegebenen Menge Magnetismus erhält man in den beiden Systemen:

$$m\,(\text{C. G. S.}) = 0{,}001\ \text{m}\,(\text{Gauss}) \quad \ldots \quad (46,\text{b})$$

2. Feldintensität H (α, β, γ) $= f : m$, wo f eine Kraft ist. Es ist daher

$$[H] = [f] : [m] = LMT^{-2} : [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \qquad (47)$$

Oder, wenn man μ als unbenannte Zahl betrachtet

$$[H] = L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (47,a)$$

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ C. G. S.-Einheit} &= 1\,(\text{cm})^{-\frac{1}{2}}(\text{g})^{\frac{1}{2}}(\text{sec})^{-1} \\ &= 1\,(10\,\text{mm})^{-\frac{1}{2}}\,(1000\,\text{mg})^{\frac{1}{2}}\,(\text{sec})^{-1} \\ &= 10\,(\text{mm})^{-\frac{1}{2}}(\text{mg})^{\frac{1}{2}}(\text{sec})^{-1} = 10 \text{ Gausssche Einheiten} \end{aligned}\right\} \qquad (47,b)$$

$$H(\text{C. G. S.}) = 0{,}1\, H \,(\text{Gauss}) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (47,c)$$

Wird somit die horizontale Komponente der Intensität des Erdmagnetismus von einem magnetischen Observatorium zu 1,4 (Gauss) angegeben, so ist sie gleich 0,14 C. G. S.-Einheiten der Intensität.

Die C. G. S.-Einheit der Intensität ist die Intensität in einem Punkte, in welchem auf die C. G. S.-Einheit der magnetischen Menge die Kraft von einer Dyne einwirkt.

3. Die Oberflächendichte des freien Magnetismus ist $k = m : s$, wo s die Oberfläche ist

$$[k] = \frac{[m]}{L^2} = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (48)$$

4. Die Volumendichte des freien Magnetismus ist $\varrho = m : v$, wo v das Volumen ist

$$[\varrho] = \frac{m}{L^3} = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (48,a)$$

5. Das magnetische Moment ist $M' = ml$, wo l eine Länge ist.

$$[M'] = [m]\, L = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (49)$$

oder im besonderen Falle

$$[M'] = L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (49,a)$$

$$\left.\begin{aligned} 1 \text{ C. G. S.-Einheit} &= 1\,(\text{cm})^{\frac{5}{2}}(\text{g})^{\frac{1}{2}}(\text{sec})^{-1} \\ &= 1\,(10\,\text{mm})^{\frac{5}{2}}\,(1000\,\text{mg})^{\frac{1}{2}}\,(\text{sec})^{-1} \\ &= 10000\,(\text{mm})^{\frac{5}{2}}(\text{mg})^{\frac{1}{2}}(\text{sec})^{-1} = 10000 \text{ Gausssche Einh.} \\ M'(\text{C. G. S.}) &= 0{,}0001\, M' \,(\text{Gauss}) \end{aligned}\right\} \qquad (49,b)$$

Ist m gleich der C. G. S.-Einheit des Magnetismus und $l = 1$ cm, so ist $M' = 1$ C. G. S.-Einheit des magnetischen Momentes.

6. Magnetisierung $J\,(A, B, C) = M' : v$, wo v das Volumen ist.

$$[J] = [M'] : L^3 = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \; . \; . \; . \quad (50)$$

Die Größen k und J haben dieselbe Dimension, wie dies offenbar auch der Fall sein muß, vgl. (20), S. 439. Die Magnetisierung ist $J = 1$ C. G. S.-Einheit, wenn das magnetische Moment eines Cubikcentimeters gleich der C. G. S.-Einheit des Momentes ist.

7. Kraftfluß $\Phi = Hs$, wo s eine Oberfläche ist.

$$[\Phi] = [H] . L^2 = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \; . \; . \; . \quad (51)$$

8. Der Induktionsfluß ist $\Psi = \mu \Phi$.

$$[\Psi] = [\mu]\,[\Phi] = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \; . \; . \quad (51, a)$$

9. Das magnetische Potential und die magnetomotorische Kraft ist $V = m : l\mu$, wo l eine Länge ist.

$$[V] = [m] : L\mu = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \; . \; . \; . \quad (52)$$

Das Produkt Vm hat die Dimension

$$[\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} = L^2 M T^{-2},$$

also die Dimension einer Arbeit, wie zu erwarten ist.

10. Der magnetische Widerstand des Mediums ist $1 : \mu$ (S. 414), hat also offenbar die Dimension $[\mu]^{-1}$. Der magnetische Widerstand eines Abschnittes einer Induktionsröhre ist gleich $r = V : \Psi$, vgl. (38, a), S. 415

$$[r] = [V] : [\Psi] = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} : [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} = [\mu]^{-1} L^{-1} \quad (53)$$

und im besonderen Falle

$$[r] = \frac{1}{L} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (53, a)$$

Formel (37), S. 415, gibt dasselbe Resultat, da σ die Dimension von L^2 hat.

11. Die Kraft einer magnetischen Doppelschicht oder eines magnetischen Blattes ist $\omega = k\delta$, wo δ eine Länge ist

$$[\omega] = [k]\,L = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} . L = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} \quad . \quad (53, b)$$

Formel (35), S. 449, gibt als Dimension der Größe $W_{1,2}$

$$[W_{1,2}] = [\omega]^2 [\mu]^{-1} L^{-1} . L^{-2} . L^4 = L^2 M T^{-2} \quad . \; . \quad (53, c)$$

d. h. die Dimension einer Arbeit.

12. Der Koeffizient der gegenseitigen Induktion der Umgrenzungen zweier Blätter im Vakuum $L_{1,2}$, vgl. (36), S. 450, hat offenbar die Dimension

$$[L_{1,2}] = L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion in einem beliebigen Medium werden wir im späteren kennen lernen, seine Dimension ist $[\mu]\, L$.

§ 7. **Natürliche und künstliche (Stahl-) Magnete.** Wir haben verschiedene Größen kennen gelernt, welche sich auf Magnete beziehen und deren Eigenschaften charakterisieren; hierher gehört vor allem die Magnetisierung J und der freie Magnetismus. Wie wir sahen, gibt es einen temporären und permanenten Magnetismus. In diesem Kapitel werden wir die Magnete als Quellen des magnetischen

Fig. 182.

Fig. 183.



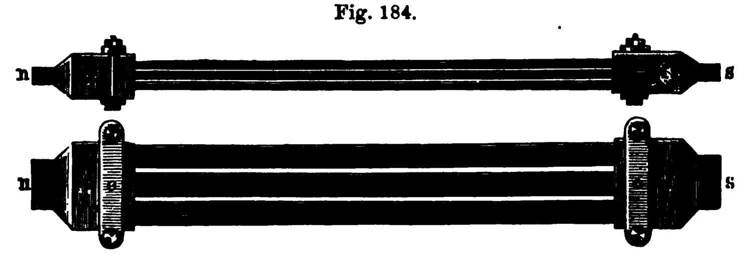
Feldes kennen lernen und müssen dabei besondere Aufmerksamkeit auf die permanenten Magnete verwenden, da nur solche Magnete als ursprüngliche Feldquellen angesehen werden können; es war hiervon schon im § 1 die Rede. Das Auftreten von temporärem Magnetismus im Magnetfelde werden wir später betrachten, indem wir diese Erscheinung zu den Wirkungen des Magnetfeldes rechnen.

Es gibt zwei Arten von permanenten Magneten, natürliche und künstliche. Natürliche Magnete sind gewisse Eisenerze, die man an verschiedenen Orten auffindet, beispielsweise im Ural. Die stärksten magnetischen Eigenschaften weist das Magneteisenerz $Fe_3O_4 = FeO + Fe_2O_3$ auf, weniger magnetisch ist der Magnetkies $6\,FeS + Fe_2S_3$. Erzstücke, die soeben dem Boden entnommen sind, zeigen fast niemals magnetische Eigenschaften; letztere treten erst nach Ablauf einer gewissen Zeit auf und auch durchaus nicht bei allen Stücken. Wenn man ein solches Erz künstlich magnetisiert, so bleibt in ihm fast ebensolch ein remanenter Magnetismus zurück, wie im Stahl. In Fig. 182 ist ein

natürlicher Magnet abgebildet, an dessen Pole die Eisenplatten l und l' angelegt und durch kupferne Ringe befestigt sind; auf die verdickten Enden p und p' gehen die Magnetpole über.

Künstliche Magnete werden aus Stahl angefertigt. Man gibt ihnen die Form von Stäben oder Hufeisen. Besonders stark sind Magnete, die derart aus mehreren übereinander gelegten Lamellen hergestellt werden, daß man die Lamellen zunächst einzeln magnetisiert und hierauf übereinander legt, wobei die mittleren Lamellen eine etwas größere Länge haben. In Fig. 184 ist ein geradliniger Magnet in der Seitenansicht und Daraufsicht abgebildet; derselbe besteht aus neun einander nicht berührenden Lamellen. Auf den gemeinsamen Endstücken ff befinden sich die Magnetpole. In ähnlicher Weise werden auch hufeisenförmige Magnete hergestellt. An die hufeisenförmigen Magnete werden Stäbe oder Lamellen aus Eisen angelegt. Ein solcher Stab heißt dann der Anker des Magneten. Ein Hufeisenmagnet mit an-

Fig. 184.



gelegtem Anker bildet eine geschlossene magnetische Kette. Es hat sich ergeben, daß sich der allmähliche Verlust an remanentem Magnetismus verringert, wenn der Anker angelegt ist. Aus diesem Grunde werden auch Stabmagnete gewöhnlich derart aufbewahrt, daß man sie paarweise nebeneinander legt und die gleichnamigen Pole nach entgegengesetzten Seiten kehrt, die Enden der Stäbe aber durch kleine Stäbe aus weichem Eisen miteinander verbindet. Jamin hat sehr starke Hufeisenmagnete aus einer großen Zahl von dünnen Stahllamellen (bis zu 50) hergestellt.

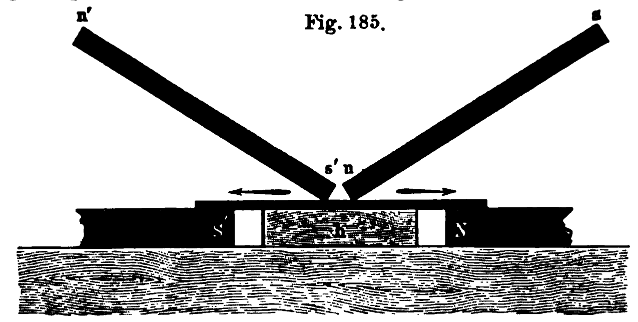
Von besonderer Bedeutung ist für die Herstellung von Stahlmagneten die Wahl der Stahlsorte und die Art ihrer Bearbeitung. Je nach der Bestimmung des Magneten hat man entweder eine möglichst große Stärke anzustreben, d. h. eine möglichst große Menge von remanentem Magnetismus, oder aber es ist weniger die Menge als vielmehr die Konstanz des remanenten Magnetismus von Wichtigkeit. Im ersten Falle muß der Stahl eine möglichst große Retentionsfähigkeit (§ 1, S. 430) besitzen, im zweiten eine möglichst große Koerzitivintensität (s. ebenda).

Der Stahl muß gehärtet sein, d. h. bis zu einer gewissen Temperatur erhitzt und darauf durch plötzliches Eintauchen in Wasser ab-

gekühlt sein. Angelassener, d. h. erhitzter und hierauf allmählich abgekühlter Stahl besitzt eine sehr geringe Retentionsfähigkeit.

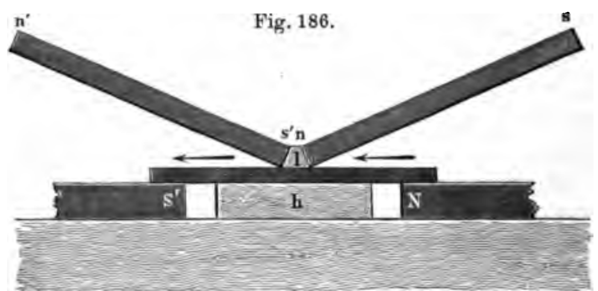
Barus und Strouhal (1883), Holborn (1891), Guthe (1897) und Mme. Curie (1898) haben die besten Methoden zur Herstellung von Magneten zu finden gesucht. Mme. Curie findet, daß für Stahlsorten, welche 0,8 bis 1,4 Proz. Kohlenstoff enthalten, die geeignetste Härtungstemperatur bei 760 bis 800° liegt. Nach der Härtung hat

Fig. 185.



man den Stahl während 48 Stunden auf einer Temperatur von 60 bis 70° zu halten, ihn bis zur Sättigung zu magnetisieren und hierauf bis zu 0,9 der erreichten Magnetisierung zu entmagnetisieren. Magnete, welche in dieser Weise hergestellt sind, besitzen eine sehr große Konstanz, d. h. eine sehr große Koerzitivintensität. Barus und

Fig. 186.



Strouhal schlagen vor, den Stahl nach der Härtung ungefähr 24 Stunden lang bei 100° zu halten und nach erfolgter Magnetisierung noch fünf Stunden lang bei derselben Temperatur. Ferner finden sie, daß ein Magnet gegen Erschütterungen unempfindlich wird, wenn man ihn eine Zeit lang absichtlich erschüttert, hämmert, erhitzt usw.

Das Magnetisieren des Stahls wurde früher durch Bestreichen ausgeführt; diese Methode benutzt man gegenwärtig wohl nur noch für magnetische Beobachtungszwecke auf Reisen. Man legt den Stahlstab zu diesem Zwecke direkt auf einen Tisch oder, wie in Fig. 185 und Fig. 186 abgebildet, auf die ungleichnamigen Enden zweier Magnete

Dumont, Dumas u. a. Der remanente Magnetismus dieser Legierung ist nur gering, auf seinen temporären Magnetismus werden wir später zu sprechen kommen.

Wir wenden uns jetzt der Frage nach der Verteilung des freien Magnetismus auf der Oberfläche eines Stahlmagneten zu. Es gibt zwei Hauptmethoden zur Untersuchung dieser Verteilung: die Methode der Magnetnadelschwingung und die Methode des Losreißens.

Die Schwingungsmethode ist äußerst ungenau und kann nur bei sehr langen Magneten zur Anwendung kommen; sie ist von Coulomb angewandt worden. Diese Methode beruht auf dem Umstande, daß die sekundliche Schwingungszahl einer Magnetnadel im Magnetfelde proportional $\sqrt{H}$ ist, wenn H die Komponente der Feldintensität bedeutet, welche in diejenige Ebene fällt, in welcher die Nadel ihre Schwingungen ausführt; für Magnetnadeln von gewöhnlicher Einrichtung ist diese Ebene horizontal. Es sei H_0 die horizontale Komponente der Intensität des Erdmagnetismus, n_0 die Schwingungszahl der Nadel, wenn sie nur unter der Einwirkung des Erdmagnetismus steht. Man kann $H_0 = c_1 n_0^2$ setzen, wo c_1 ein Proportionalitätsfaktor ist. Man stellt den Magneten in vertikaler Lage auf, bringt die Magnetnadel in geringen Abstand von irgendeinem horizontalen Querschnitt des Magneten, und zwar in der Ebene des magnetischen Meridians, welcher durch die Magnetachse von der Nordseite aus hindurchgehen muß, wenn der Querschnitt in der Nordhälfte, von der Südseite aus, wenn er in der Südhälfte des Magneten liegt. Die Feldintensität an der Nadel ist jetzt gleich $H_0 + H$; man kann hier $H = c_2 k$ setzen, wenn k die Oberflächendichte am betreffenden Querschnitt, c_2 ein Proportionalitätsfaktor ist, was offenbar nicht genau ist. Ist jetzt die Schwingungszahl der Nadel gleich n, so ist $H + H_0 = c_1 n^2$; hieraus folgt $H = c_1 (n^2 - n_0^2)$; es ist aber $H = c_2 k$, also $k = C(n^2 - n_0^2)$, wo $C = c_1 : c_2$ ist. Somit kann die Größe $n^2 - n_0^2$ als Maß für die Oberflächendichte k dienen. Bestimmt man n in verschiedenen Höhen, so erhält man hierdurch einen Begriff von der Verteilung des freien Magnetismus im Magneten.

Die Methode des Losreißens besteht in folgendem: man bringt den zu untersuchenden Magneten in horizontale Lage und mißt die Kraft f, welche dazu erforderlich ist, ein kleines Kügelchen aus weichem Eisen, welches die horizontale Oberfläche des Magneten berührt, von derselben loszureißen. Anstatt eines Kügelchens kann man auch einen kleinen Zylinder mit abgerundeter unterer Grundfläche wählen. Man setzt $f = ck^2$, wo k die Dichte des freien Magnetismus an der Stelle bedeutet, an welcher das Losreißen stattfindet. Streng genommen ist f proportional kk_1, wo k_1 die Dichte des Magnetismus auf dem kleinen Kügelchen oder Zylinder bedeutet. Für weiches Eisen kann man aber innerhalb gewisser Grenzen die Annahme machen, daß

k_1 proportional k ist, so daß hieraus $f = ck^2$ folgt. Als Maß für die gesuchte Größe k dient somit die Größe $\sqrt{f}$. Zur Messung der Kraft f kann eine gewöhnliche Wage dienen, oder besser eine zu solchen Messungen geeignete Federwage.

Biot hat aus seinen Beobachtungen folgende Beziehung zwischen der Dichte k des freien Magnetismus und dem Abstande x des Punktes von der Mitte des Magneten gefunden, dessen Länge gleich $2l$ ist:

$$k = a(b^x - b^{-x}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Hier sind a und b gewisse Konstanten. Für $x = 0$, d. h. an der Mitte des Magneten, ist $k = 0$, an den Enden $k = \pm(b^l - b^{-l})$. Streng genommen ist die Größe k, welche man nach einer der beiden beschriebenen Methoden erhält, nicht die Dichte k einer Oberflächenschicht des freien Magnetismus, sondern hat als Maß der Gesamtmenge des freien Magnetismus zu gelten, die sich in einer transversalen Schicht des Magneten von geringer, aber an allen Stellen gleicher Dicke befindet. Nimmt man an, daß die Magnetisierung J überall die Richtung der Magnetachse hat, so kann man k seiner physikalischen Bedeutung nach für identisch mit der Größe ϱ in Formel (39), S. 451 halten. Diese Formel gibt

$$J = J_0 - a_1(b^x + b^{-x}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56, a)$$

wo J_0 die Magnetisierung in der Mitte des Magneten ist; $a_1 = a : lgb$, Formel (56, a) ist als van Reessche Gleichung bekannt. Van Rees hat die Größen J unmittelbar bestimmt, wobei er sich der Induktionsmethode bediente, die wir später betrachten werden.

Wir gehen zur Frage nach den Polen der Magnete über. Auf S. 434 hatten wir die Magnetpole als „Schwerpunkte“ der gleichnamigen Magnetismen m bzw. $-m$ definiert. Bezeichnet man den Abstand der Pole voneinander mit l, so wird, wie wir sahen, das magnetische Moment M des Magneten durch Formel (11), S. 434, gegeben:

$$M = ml \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Ferner haben wir gesehen, daß die Pole die Angriffspunkte eines Kräftepaares sind, das auf den Magnet im homogenen Magnetfelde wirkt. Man sieht leicht ein, daß die Wirkung des Magneten selbst in Punkten, deren Abstand vom Magneten sehr groß im Vergleich zu dessen Dimensionen ist, die gleiche ist wie für den Fall, daß die Gesamtmengen des gleichnamigen Magnetismus $+m$ und $-m$ an den Polen konzentriert sind. Man findet indes, daß die Bestimmung der Lage der Magnetpole nur von geringem theoretischen Interesse ist und fast gar keine praktische Bedeutung hat. Die theoretische Lage der Pole, nämlich als der Schwerpunkte der gleichnamigen freien Magnetismen, steht im engen Zusammenhange mit dem Verteilungsgesetze

dieser Magnetismen. Kennt man dieses Gesetz, so kann man die Lage der Pole durch Rechnung finden. Eine praktische Bedeutung der Pole könnte sich nur in zwei Fällen geltend machen: wenn sich der Magnet im homogenen Felde befindet, und wenn seine Einwirkung auf sehr weit von ihm entfernte Punkte betrachtet wird. Gerade in diesen beiden Fällen aber sind alle Größen von praktischer Bedeutung dem magnetischen Moment M proportional, das als Produkt der beiden Faktoren m und l erscheint. Dies wird für den ersten Fall durch Formel (12), S. 434, bestätigt, für den zweiten aber durch sämtliche Formeln, welche die Wirkung des Magneten in sehr weit von ihm entfernten Punkten ausdrücken; stets ist diese Wirkung proportional M. Eine der hierhergehörigen Formeln wird etwas später hergeleitet werden, die allgemeineren Formeln aber in einem der folgenden Kapitel (ponderomotorische Wirkungen von Magneten). Übrigens bestätigt auch Formel (13, c), S. 436, das Gesagte. Aber M ändert sich nicht, wenn man m und l durch die anderen Größen m_1 und l_1 ersetzt, vorausgesetzt, daß

$$m_1 l_1 = m l = M \quad \ldots \ldots \ldots \quad (57,a)$$

ist. Somit ändert sich, wenn man anstatt der wahren Pole andere nimmt, die den Abstand l_1 voneinander haben, und sich in ihnen

Fig. 187.

die anderen magnetischen Mengen m_1 konzentriert denkt, die der Formel (57, a) entsprechen, weder die Wirkung des homogenen Feldes auf den Magnet, noch auch die Wirkung des Magneten selbst in sehr weit von ihm entfernten Punkten. Einfacher ausgedrückt heißt das: in den beiden einzigen Fällen, in denen die Lage der Pole, d. h. die Entfernung l von Interesse sein kann, besitzt nur die Größe M eine praktische Bedeutung.

Die Wirkung eines Magneten in einem ihm **nahe** gelegenen Punkte A kann nicht durch die Wirkung zweier ungleichnamiger, gleicher magnetischer Massen ersetzt werden. Nehmen wir jedoch an, der Punkt A befinde sich in einem solchen Abstande r vom Magneten, daß man die Größe $L_1^2 : r^2$ nicht, wohl aber die Größe $L_1^4 : r^4$ vernachlässigen kann, wo L_1 eine von der Magnetlänge L nur wenig verschiedene Länge bezeichnet. In diesem Falle kann die Wirkung des Magneten im Punkte A durch die Wirkung zweier Massen $\pm m_1$ ersetzt werden, die sich in einem Abstande l_1 voneinander in den Punkten P_1 und P_2 befinden, wobei m_1 und l_1 der Gleichung (57, a) genügen. Riecke hat diese Punkte als **äquivalente Pole** be-

zeichnet. Die Lage dieser Pole, d. h. die Größen l_1 und m_1, hängen von der Lage des Punktes A ab.

Wir wollen alles oben gesagte an einem einfachen Beispiele erläutern. Es sei BC (Fig. 187) ein Magnet, in welchem die ungleichnamigen Magnetismen $+m$ und $-m$ symmetrisch zu beiden Seiten von der Mitte O aus liegen. Es sei ferner M das magnetische Moment; P, P seien die gewöhnlichen Pole, wobei $PP = l$, $M = ml$ ist. Auf der Verlängerung der Achse befinde sich der Punkt A; $AO = r$, die Feldintensität im Punkte A, bezeichnen wir mit H; die Länge des Magneten mit L. Wir wollen die Größe H berechnen. Wir nehmen zwei symmetrisch gelegene Abschnitte a und b des Magneten in der Entfernung x von O; die Dicke der Abschnitte sei gleich dx, die gesamte Menge des freien Magnetismus in diesen Abschnitten sei mit λdx bezeichnet. Wir führen ferner die Bezeichnung

$$\int_0^{\frac{1}{2}L} \lambda x^n dx = M_n \quad \ldots\ldots \quad (57,\text{b})$$

ein. Es ist klar, daß man für $n = 0$ und $n = 1$

$$\left.\begin{aligned} m &= M_0 \\ M &= 2M_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57,\text{c})$$

erhält.

Die beiden Abschnitte a und b zusammengenommen geben in A die Feldintensität dH; dieselbe ist gleich

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\lambda dx}{(r-x)^2} - \frac{\lambda dx}{(r+x)^2} = \lambda dx \frac{4rx}{(r^2-x^2)^2} \\ &= \lambda dx \frac{4rx}{r^4\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)^2} = \frac{4\lambda x dx}{r^3}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)^{-2} \\ &= \frac{4\lambda x dx}{r^3}\left\{1+\frac{2x^2}{r^2}+\frac{3x^4}{r^4}+\frac{4x^6}{r^6}+\cdots\right\}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$H = \frac{4}{r^3}\int \lambda x dx + \frac{8}{r^5}\int \lambda x^3 dx + \frac{16}{r^7}\int \lambda x^5 dx + \ldots,$$

wo alle Integrale zwischen den Grenzen von $x = 0$ bis $x = \frac{L}{2}$ genommen sind.

Führt man die Bezeichnung (57,b) ein und berücksichtigt Formel (57,c), so erhält man

$$H = \frac{2M}{r^3}\left\{1+\frac{4M_3}{r^2 M}+\frac{8M_5}{r^4 M}+\cdots\right\} \quad \ldots\ldots \quad (58)$$

Suchen wir jetzt die Intensität H', welche von zwei magnetischen Massen $\pm m_1$, die sich in P_1, P_1 befinden, im Punkte A hervorgerufen wird, wobei $P_1 P_1 = l_1$ gesetzt ist. Es ist offenbar

$$\left.\begin{aligned} H' &= \frac{m_1}{\left(r - \frac{1}{2} l_1\right)^2} - \frac{m_1}{\left(r + \frac{1}{2} l_1\right)^2} = \frac{2 r l_1 m_1}{\left(r^2 - \frac{1}{4} l_1^2\right)^2} \\ &= \frac{2 r l_1 m_1}{r^4 \left(1 - \frac{l_1^2}{4 r^2}\right)^2} = \frac{2 l_1 m_1}{r^3} \left(1 - \frac{l_1^2}{4 r^2}\right)^{-2} . \\ &= \frac{2 l_1 m_1}{r^3} \left\{1 + \frac{l_1^2}{2 r^2} + \frac{3 l_1^4}{16 r^4} + \cdots\right\} \end{aligned}\right\} \quad (58, a)$$

Um $H = H'$ zu erhalten, muß man zunächst

$$l_1 m_1 = M \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58, b)$$

setzen, es muß also das magnetische Moment des äquivalenten Magneten gleich dem magnetischen Momente des gegebenen Magneten sein. Hieraus folgt bereits, daß die äquivalenten Pole P_1, P_1 in allen Fällen, wo das Moment vorkommt, die gewöhnlichen Pole ersetzen können, d. h. sowohl in dem Falle, daß ein Magnet in ein homogenes Magnetfeld gebracht wird, als auch bei Untersuchung der Wirkung eines Magneten auf sehr entfernte Punkte. Die Entfernung l wird bestimmt durch den Ausdruck

$$l = \frac{M}{m} = \frac{2 \int \lambda x \, dx}{\int \lambda \, dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58, c)$$

Die Entfernung l_1 muß nun derart gewählt sein, daß H' sich möglichst wenig von H unterscheidet. Beschränkt man sich auf die zweiten Glieder in den Reihen (58) und (58, a), so erhält man

$$l_1 = \sqrt{\frac{8 M_3}{M}} = 2 \sqrt{\frac{\int \lambda x^3 dx}{\int \lambda x \, dx}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58, d)$$

Durch diese Formel wird die Entfernung l_1 der äquivalenten Pole voneinander im vorliegenden Falle bestimmt; die entsprechende magnetische Menge m_1 an diesen Polen wird sodann nach Formel (58, b) bestimmt. Die Länge l_1 ist merklich verschieden von l. So erhält man z. B. bei linearer Abhängigkeit des λ von x den Wert $l = \frac{2}{3} L$; $l_1 = \sqrt{\frac{3}{5}} L$; $l_1 = 1{,}1619\, l$. Die Differenz beträgt mehr als 16 Proz. oder fast $^1/_6$. Wollte man eine noch größere Genauigkeit erreichen, so müßte man die Summen der zweiten und dritten Glieder in den Formeln (58) und (58, a) einander gleichsetzen; hierdurch würde aber eine nur geringe Änderung der Größe l_1 erreicht werden, wenn $L : r$ ein nicht großer Bruch ist.

Die von uns abgeleiteten Formeln beziehen sich auf die besondere Lage des Punktes A, welche der Fig. 187 entspricht.

Riecke hat die Abhängigkeit der Größe l_1 von der Lage des Punktes A eingehend untersucht. Er fand, daß l_1 den gleichen Wert für alle Punkte A hat, die auf einer durch die Mitte des Magneten gehenden Linie liegen, seinen Wert aber beim Übergange von einer Geraden zur anderen ändert.

Zur experimentellen Bestimmung der Lage der Pole P, P oder der Pole P_1, P_1 gibt es viele verschiedene Methoden. Ist das Gesetz für die Verteilung des freien Magnetismus bekannt, so ist es leicht, die Entfernung l der gewöhnlichen Pole P, P voneinander nach Formel (58, c) zu berechnen. Pouillet, Benoit, F. Kohlrausch, van Rees, Petruschewski, Mascart, Holborn, Mme. Curie, Benedicks (1902) u. a. haben verschiedenartige Methoden zur Bestimmung der Entfernung l angegeben. Im Hinblick auf das früher Gesagte werden wir uns bei Betrachtung dieser Methoden nicht aufhalten. Die numerischen Werte, welche von verschiedenen Forschern für das Verhältnis $l:L$, wo L die Länge des Magneten bedeutet, gefunden worden sind, schwanken innerhalb sehr weiter Grenzen, was auch nicht zu verwundern ist, da die Lage der Pole von der Verteilung des freien Magnetismus abhängt, die ihrerseits von der Form des Magneten, den Eigenschaften des Stahls, der Magnetisierungsart und dem Magnetisierungsgrade abhängen muß. Angenähert kann man $l : L = 0{,}8$ setzen. Mme. Curie fand für Stäbe mit quadratischem Querschnitte (Länge 20 cm, Breite 1 cm) Zahlen, welche zwischen 0,72 und 0,84 schwanken. Benedicks findet, daß die Größe $l:L$ mit Zunahme der Magnetisierung wächst.

Die maximale Belastung, die ein künstlicher Magnet zu tragen vermag, heißt seine Tragkraft. Nimmt man an, daß die Magnetisierung bis zur höchstmöglichen Grenze gebracht ist, so kann man sagen, daß die Tragkraft von der Stahlsorte und der Form des Magneten abhängt. Hufeisenmagnete besitzen bei gleichem Gewichte mehr als die doppelte Tragkraft, wie geradlinige Magnete, die auf die Last nur mit einem ihrer Enden einwirken. Häcker hat die Tragkraft Q von Magneten, die aus der gleichen Stahlsorte bestanden und die gleiche Form, aber verschiedenes Gewicht P hatten, untereinander verglichen. Er leitete aus seinen Beobachtungen die empirische Formel

$$Q = aP^{\frac{2}{3}} \quad \text{. . . . .} \quad (59)$$

ab, wo a einen konstanten Faktor bedeutet. Die Größe $q = Q : P$ stellt die relative Tragkraft dar, die auf die Gewichtseinheit des Magneten kommt. Formel (59) gibt

$$q = \frac{a}{\sqrt[3]{P}} \quad \text{. . . . .} \quad (59, a)$$

Wie man sieht, nimmt die relative Tragkraft eines Magneten mit Zunahme seines Gewichtes ab. Ist $P = a^3$, so kann der Magnet gerade sein Eigengewicht tragen; ist $P > a^3$, so trägt er weniger, bei $P < a^3$ mehr als sein Eigengewicht. Häcker findet, daß, wenn man P und Q in Kilogrammen ausdrückt, für Hufeisenmagnete $a = 10{,}33$ ist. Für die besten gegenwärtig angefertigten Magnete ist die Größe a bedeutend größer als jener Wert und kann bis zu $a = 20$ gehen.

Der Magnetisierungsgrad, also auch die Tragkraft von künstlichen Magneten, die sich selbst überlassen sind, nimmt im Laufe der Zeit ab. Diese Tatsache war bereits dem arabischen Gelehrten Geber (Abû Mûsu Gâbir ben Hajjaw) bekannt. Je größer die Koerzitivintensität (S. 430) ist, um so langsamer erfolgt jene Abnahme. Sie wird ganz bedeutend verringert, wenn die Magnete Teile einer geschlossenen magnetischen Kette (S. 461) bilden.

§ 8. Einfluß von mechanischen Einwirkungen und Temperaturänderungen auf künstliche Magnete. Erschütterungen, sowie mehrfach wiederholte Streckungen und Tordierungen (abwechselnd nach verschiedenen Seiten) eines Stahlstabes während des Magnetisierens vergrößern den remanenten Magnetismus.

Erschütterung eines fertigen Stahlmagneten verringert seine Magnetisierung. Den Einfluß von Stoß, Herabfallen aus einer gewissen Höhe und ähnliches haben G. Wiedemann, Villari, Streintz, Brown, Berson, Krüse u. a. untersucht. Unterwirft man einen Magneten einer Reihe von Stößen, so nimmt der Einfluß dieser Stöße allmählich ab und wird für den $n$ten Stoß nach Streintz durch eine Exponentialfunktion von der Gestalt a^{-n} ausgedrückt oder nach Berson durch den absteigenden Ast einer gleichseitigen Hyperbel. Krüse findet, daß der Einfluß der Erschütterungen bei wiederholtem Herabfallen eines Magneten nicht von seinen Dimensionen abhängt, sondern von der Stahlsorte. Beim Fallen aus einer Höhe von 9,6 m kann der Verlust des remanenten Magnetismus bis zu 25 Proz. gehen. Ein sehr interessantes Resultat hat G. Wiedemann gefunden: entmagnetisiert man einen Stahlmagneten, indem man ihn der Einwirkung eines negativen Magnetfeldes unterwirft, so tritt unter dem Einfluß der Erschütterungen von neuem ein Teil des remanenten Magnetismus auf. Dehnung ruft einen Verlust an Magnetismus hervor, welcher sich beim Aufhören der Dehnung wieder ersetzt.

Von großem Interesse ist der Einfluß der Tordierung auf fertige Stahlmagnete. Diesen Einfluß hat besonders G. Wiedemann studiert, ferner Wertheim, Matteucci, Knott u. a. Wir wollen hier die wichtigsten der von Wiedemann gefundenen Resultate anführen.

Der remanente Magnetismus von Stahlstäben nimmt bei der Tordierung ab, jedoch langsamer, als einer Proportionalität des Torsions-

winkels entsprechen würde; die Abnahme ist der ursprünglichen Magnetisierung proportional. Das Retordieren ruft abermals eine Abnahme des Magnetismus hervor. Wiederholtes Tordieren nach ein und derselben Seite ist von geringem Einfluß; aber die erste hierauf folgende Tordierung nach der entgegengesetzten Seite ruft abermals eine bedeutende Abnahme des Magnetismus hervor.

Sehr interessant ist das folgende Resultat: ändert sich nach wiederholtem Tordieren nach beiden Seiten der Magnetismus im retordierten Zustande nicht mehr, so ruft eine Tordierung nach der einen Seite eine Verminderung, nach der anderen Seite eine Vermehrung des Magnetismus hervor. Nicht weniger bemerkenswert ist der Einfluß der Tordierung auf teilweise oder völlig entmagnetisierten Stahl. Ist die Abnahme des Magnetismus gering, so verliert der Magnet bei geringen Tordierungen weniger Magnetismus, als ein einfach magnetisierter Stab. War die Entmagnetisierung eine bedeutende, so nimmt beim Tordieren der Magnetismus zunächst zu, erreicht ein Maximum und nimmt hierauf wieder ab. Je vollständiger die Entmagnetisierung war, bei einer um so stärkeren Tordierung wird das Maximum erreicht. War die Entmagnetisierung eine vollkommene, so ruft die Tordierung (sowie eine Erschütterung) von neuem einen Teil der ursprünglichen Magnetisierung hervor.

G. Wiedemann hat für die verschiedenen mechanischen Einwirkungen auf Magnete eine sehr eingehende Erklärung gegeben, wobei er von der Theorie der drehbaren Molekularmagnete ausging. Eine ausführliche Darlegung dieser Frage kann man in G. Wiedemanns Lehre von der Elektrizität, Bd. III, Braunschweig 1895, finden.

Wir gehen zur Frage nach dem Einfluß von Temperaturänderungen auf Stahlmagnete ein. Faraday hat gezeigt, daß Magnete bei der Siedetemperatur des Mandelöls (unter 400°) ihren remanenten Magnetismus vollkommen einbüßen, obgleich sie bei dieser Temperatur temporären Magnetismus anzunehmen vermögen.

Wenn man einen frisch magnetisierten Stahlmagnet zum ersten Male bis auf eine gewisse Temperatur t erwärmt, so nimmt sein Magnetismus ab; diese Erscheinung ist zuerst von Canton (1759) beobachtet worden. Kühlt man darauf den Magnet bis auf seine ursprüngliche Temperatur t_0 ab, so kehrt ein Teil des verlorenen Magnetismus wieder zurück. Somit besteht der Verlust bei der Erwärmung aus zwei Teilen, aus einem zeitweiligen Verluste und einem endgültigen. Bei nochmaliger Erwärmung bis zur Temperatur t erfolgt abermals ein Verlust, der aber geringer ist als der zeitweilige Verlust bei der ersten Erwärmung; bei Abkühlung bleibt abermals ein gewisser endgültiger Verlust, der jedoch bedeutend geringer ist als der nach der ersten Erwärmung und Abkühlung erhaltene. Eine drittmalige Erwärmung und Abkühlung zwischen den Grenzen t und t_0 liefert einen noch geringeren

konstanten Verlust an Magnetismus. Wiederholt man das gleiche Erwärmen und Abkühlen viele Male hintereinander, so tritt schließlich nur noch ein temporärer Verlust beim Erwärmen auf, d. h. es kehrt beim Abkühlen der magnetische Zustand völlig wieder zurück. Der Magnet hat in diesem Falle gewissermaßen einen stationären Zustand zwischen den Temperaturen t_0 und t erlangt. Erwärmt man einen solchen Magneten bis auf eine Temperatur $t_1 < t$, so ist sein Verlust an Magnetismus ein bloß zeitweiliger. Erwärmt man ihn aber auf eine Temperatur $t_1 > t$, so zeigt er bei der Temperatur t_0 abermals einen neuen endgültigen Verlust an Magnetismus und ein stationärer Zustand wird erst nach abermaligen wiederholten Erwärmungen bis auf t_1 und Abkühlungen bis auf t_0 erreicht.

Die Größe des endgültigen Verlustes an Magnetismus bei wiederholtem Erwärmen und Abkühlen hängt von der Form und der Substanz des Magneten ab. Es sei m_0 der ursprüngliche Magnetismus des Magneten, $m = m_0(1 - \beta)$ der remanente Magnetismus nach wiederholtem Erwärmen bis auf t^0 und Abkühlen auf t_0^0. Man findet dann, daß β beinahe proportional der Stabdicke wächst; ferner ist β um so kleiner, je länger der Magnet ist. Für harten Stahl ist β viel größer als für weichen. So fand man z. B. bei $t_0 = 10^0$ und $t = 100^0$ für weichen Stahl $\beta = 0{,}153$, für harten aber $\beta = 0{,}515$.

Sehr große Bedeutung hat bei allen Beobachtungen, die man an Magneten oder mit ihrer Hilfe anstellt, der Temperaturkoeffizient α von Magneten, die zuvor in den oben erwähnten stationären Zustand gebracht sind. In der Formel $m = m_0\{1 - \alpha(t - t_0)\}$ drückt die Größe $\alpha m_0(t - t_0)$ ausschließlich den zeitweiligen Verlust an Magnetismus bei Erwärmung von t_0 auf t aus. Für Magnete, welche aus früheren Zeiten stammen, ergab sich der Temperaturkoeffizient zwischen 0,0007 und 0,0010 oder noch größer. Für jetzt hergestellte Magnete schwankt α zwischen 0,0002 und 0,0009 je nach der Stahlsorte, dem Härtungsgrade und den Dimensionen des Magneten. Moureaux findet für die meisten der gegenwärtig in magnetischen Observatorien im Gebrauch befindlichen Magnete Werte zwischen $\alpha = 0{,}0004$ und $\alpha = 0{,}0005$. Ashworth (1898) fand, daß α für die härtesten Stahlsorten sehr klein ist. Für einige Nickelstahlsorten, sowie für Stahlsaiten ist α negativ; man kann auch Stahlsorten herstellen, für welche $\alpha = 0$ ist. Durward (1898) hat ebenfalls α für verschiedene Stahlsorten bestimmt.

Sehr bemerkenswert ist, daß das erstmalige Abkühlen eines frisch hergestellten Magneten ebenfalls seinen Magnetismus vermindert. Magnetisiert man bei 100⁰ einen Stahlstab, so verliert er beim Abkühlen einen Teil seines Magnetismus. Erwärmt man ihn von neuem, so nimmt sein Magnetismus noch weiter ab, bei darauffolgendem Abkühlen aber nimmt der Magnetismus bereits zu. Trowbridge fand bei einem seiner Versuche, daß der Magnetismus eines Stahlmagneten,

welcher bei 20° angefertigt war, sich um mehr als 65 Proz. verminderte, wenn er bis auf —140° abgekühlt worden war. Dewar und Fleming fanden jedoch, daß bei plötzlichem Abkühlen eines Stahlmagnets bis zur Temperatur der flüssigen Luft (—185°) sowohl eine Abnahme wie eine Zunahme des Magnetismus eintreten kann, je nach der Zusammensetzung des Stahls, z. B. je nach der Menge des in ihm enthaltenen Nickels.

Seltsame Eigenschaften besitzt auch hinsichtlich des Einflusses der Erwärmung mehr oder weniger entmagnetisierter Stahl. Die folgende kleine Zusammenstellung zeigt die Resultate von fünf Beobachtungsreihen, welche von G. Wiedemann mit einem Stabe aus weichem Stahl erhalten worden sind. In dieser Tabelle bezeichnet M den ursprünglichen remanenten Magnetismus bei 0°, m den Rest nach Entmagnetisierung bei 0°, m_{100} den Magnetismus beim Erwärmen auf 100°, m_0 den Magnetismus nach Abkühlen auf 0°.

	M	m	m_{100}	m_0
1	70,5	70,5	42,2	54,5
2	72	40,1	27	40,5
3	70	25	18	39,5
4	72	2	2	9
5	75	0	0	9,5

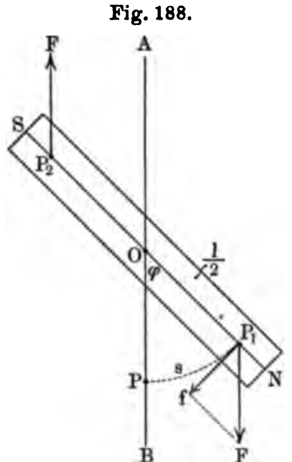
Die erste Reihe bezieht sich auf den Fall, daß der Magnet gar nicht entmagnetisiert worden ist ($m = M$), die letzte Reihe auf den Fall der vollständigen Entmagnetisierung ($m = 0$). Die kleine Tabelle zeigt, daß bei schwacher Entmagnetisierung, Erwärmung und darauf folgender Abkühlung eine weitere Verminderung des Magnetismus hervorrufen ($m_0 < m$). Bei beträchtlicher Entmagnetisierung erhält man eine Zunahme des Magnetismus nach Erwärmung und Abkühlung ($m_0 > m$). Besonders interessant ist die letzte Reihe: ein Stab, welcher keinen Magnetismus aufweist ($m = 0$), wird magnetisch beim Erwärmen auf 100° und darauf folgendem Abkühlen auf 0° ($m_0 = 9,5$). Ferner hat G. Wiedemann gefunden, daß, wenn man umgekehrt bei 100° den Stab magnetisiert (M) und entmagnetisiert (m), ihn hierauf bis auf 0° (m_0) abkühlt und abermals bis auf 100° (m_{100}) erwärmt, je nach dem Grade der Entmagnetisierung $m_{100} < m$ oder $m_{100} > m$ erhalten werden kann. Das letztere gilt auch für den Fall $m = 0$ ($M = 56$, $m = 0$, $m_0 = 14,5$, $m_{100} = 5,5$).

G. Wiedemann hat den Einfluß einer Temperaturänderung auf den remanenten Magnetismus theoretisch untersucht. Dieser Einfluß ist offenbar ein zweifacher: einerseits ruft eine Temperaturänderung eine zeitweilige Änderung des Magnetismus hervor, die bei Rückkehr

zur früheren Temperatur verschwindet, andererseits hat sie die vollständige Vernichtung eines Teils des remanenten Magnetismus zur Folge. Gestützt auf die Lehre von den drehbaren Molekularmagneten kann man annehmen, daß der Magnetismus eines jeden Moleküls eine Funktion der Temperatur darstellt, wodurch auch die zeitweilige Änderung des Magnetismus ihre Erklärung findet. Außerdem ändert z. B. die Erwärmung die innere Struktur der Substanz, macht die Moleküle freier beweglich und beseitigt vielleicht in einigen Fällen die Ursachen, welche sie an einer Rückkehr in die Lagen hindert, die sie vor der Magnetisierung einnahmen. Daher kehren viele Moleküle bei der Erwärmung in diejenigen Lagen zurück, oder aber nähern sich wenigstens den Lagen, die sie vor der Magnetisierung eingenommen hatten, dies aber entspricht der Vernichtung eines Teiles des remanenten Magnetismus.

§ 9. Einfache, gedämpfte und aperiodische Schwingungen eines Magneten. Denken wir uns einen Magneten NS (Fig. 188), der sich frei um eine durch den Punkt O hindurchgehende, zur Ebene der Zeichnung senkrechte Achse drehen kann. Nehmen wir ferner an, der Magnet sei in ein homogenes Magnetfeld gebracht; wir bezeichnen die Komponente der Feldintensität, welche in die Zeichenebene fällt, mit H, das magnetische Moment des Magneten mit M. Die Pole befinden sich in P_1 und P_2; es sei die Entfernung $P_1P_2 = l$. Endlich sei AB die Richtung der Komponente H; dies ist zugleich die Richtung der Magnetachse für den Fall, daß sich der Magnet in der Ruhelage befindet. Ist der Magnet aus der Gleichgewichtslage um den Winkel $P_1OB = \varphi$ abgelenkt, so steht er unter der Einwirkung eines Kräftepaares $F = Hm$, dessen Moment gleich $MH \sin\varphi$ ist, vgl. (12), S. 434.

Fig. 188.



Es sei nun P die Gleichgewichtslage des Poles P_1, der Bogen $PP_1 = s$, $f = -F\sin\varphi$ die in die negative Richtung des Bogens s fallende Komponente der Kraft f. Für sehr kleine Werte von φ kann man $f = -F\varphi = -\frac{2F}{l}s$ setzen. Dieser Ausdruck zeigt, daß der Magnet bei sehr kleinen Ablenkungen harmonische Schwingungsbewegungen um seine Gleichgewichtslage ausführt. Wir wollen diese Schwingung eingehender untersuchen. Nehmen wir an, es drehe sich der Magnet unter dem Einfluß eines Kräftepaares FF während der Zeit dt um einen Winkel $-d\varphi$. Die Arbeit dr des Kräftepaares ist dann gleich

dem Produkte aus dem Moment des Kräftepaares und dem Winkel $-d\varphi$; es ist also $dr = -MH \sin\varphi\, d\varphi$ (denn es ist $dr = -2f\,ds = -2F \sin\varphi\, ds = -2F\frac{l}{2}\sin\varphi\, d\varphi = -Hml\sin\varphi\, d\varphi = -MH \sin\varphi\, d\varphi$). Diese Arbeit ist gleich dem Zuwachs der Wucht I des sich drehenden Magneten. Wir hatten aber gesehen (Bd. I), daß I gleich dem halben Produkt aus dem Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Drehungsachse und dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ ist. Bezeichnet man das Trägheitsmoment des Magneten in bezug auf die Drehachse mit K, so ist $I = \frac{1}{2}K\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$. Hieraus folgt

$$dI = K\frac{d\varphi}{dt}\frac{d^2\varphi}{dt^2}dt = K\frac{d^2\varphi}{dt^2}d\varphi.$$

Die Gleichung $dr = dI$ gibt

$$K\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -MH\sin\varphi$$

oder

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{MH}{K}\sin\varphi \quad \dots\dots\dots \quad (60)$$

Für sehr kleine Schwingungen erhält man

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{MH}{K}\varphi \quad \dots\dots\dots \quad (60,\mathrm{a})$$

In der Praxis kommt es darauf heraus, nicht die Winkel φ zu beobachten, sondern irgendwelche ihnen proportionale Größen y, beispielsweise die Anzahl der Skalenteile bei der bekannten Methode der Spiegelablenkung (Bd. I). Führt man die Größe y ein, so erhält man als Gleichung für kleine Schwingungen des Magneten

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{MH}{K}y = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (61)$$

Setzt man

$$\frac{MH}{K} = c^2 \quad \dots\dots\dots \quad (61,\mathrm{a})$$

so erhält man

$$\frac{d^2y}{dt^2} + c^2y = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (62)$$

Dieser linearen Differentialgleichung genügt ein Wert von der Form $y = Ce^{\alpha t}$. Substituiert man denselben in Formel (62), so erhält man $\alpha^2 + c^2 = 0$, woraus $\alpha = \pm ci$ folgt $\left(i = \sqrt{-1}\right)$. Das vollständige Integral lautet dann

$$y = C_1e^{cit} + C_2e^{-cit} = (C_1 + C_2)\cos ct + i(C_1 - C_2)\sin ct.$$

Nehmen wir an, es sei bei $t = 0$ auch $y = 0$ und die Geschwindigkeit $\frac{dy}{dt} = v_0$, dann lautet die erste Bedingungsgleichung $C_1 + C_2 = 0$, so daß

$$y = i(C_1 - C_2)\, sin\, ct$$

ist. Die zweite Bedingungsgleichung lautet, da

$$\frac{dy}{dt} = ic(C_1 - C_2)\, cos\, ct$$

ist,

$$ic(C_1 - C_2) = v_0.$$

Beide Bedingungen zusammen geben uns

$$C_1 = -C_2 = \frac{v_0}{2ic}; \qquad C_1 - C_2 = \frac{v_0}{ic},$$

also

$$y = \frac{v_0}{c}\, sin\, ct \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = v_0\, cos\, ct \quad \ldots\ldots \quad (63,a)$$

Die Amplitude a erhält man, wenn man $v = 0$ setzt, was $ct = \frac{\pi}{2}$ gibt, und diesen Wert in (63) substituiert. So erhält man

$$a = \frac{v_0}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63,b)$$

Die Dauer T_1 einer vollen Schwingung erhält man aus der Gleichung

$$c(t + T_1) = ct + 2\pi,$$

woraus

$$T_1 = \frac{2\pi}{c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63,c)$$

folgt, die Formeln (63, b) und (63, c) geben an Stelle von (63) die Gleichung

$$y = a\, sin\, 2\pi \frac{t}{T_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

d. h. die gewöhnliche Gleichung der harmonischen Schwingungsbewegungen. (61, a) und (63, c) geben die Dauer T_1 einer vollen Schwingung des Magneten.

Für die Dauer $T = \frac{1}{2} T_1$ einer halben Schwingung des Magneten erhält man

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Die Schwingungsdauer T eines Magneten ist indirekt proportional der Quadratwurzel aus der Intensität H des

Magnetfeldes, welches in der Schwingungsebene wirkt. Hieraus folgt, daß die Anzahl n der Schwingungen (in einem gegebenen Zeitraume) proportional $\sqrt{H}$ oder daß n^2 proportional H ist, was wir bereits auf S. 463 benutzt haben. Formel (65) liefert die Schwingungsdauer für sehr kleine Ausschläge α. Die genauere Formel hat folgende Gestalt:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \cdots \right\} \quad . \quad . \quad (65,\text{a})$$

Für viele Fälle erweist sich auch die folgende Formel als hinreichend genau:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65,\text{b})$$

oder die noch einfachere:

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{MH}} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{16} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65,\text{c})$$

Setzt man (61, a) in (63, b) ein, so erhält man

$$v_0 = ac = a \sqrt{\frac{MH}{K}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65,\text{d})$$

Bei Herleitung der Formel (60) hatten wir die Annahme gemacht, daß auf den Magneten keine anderen Kräfte außer denen wirken, welche durch die Intensität des Magnetfeldes definiert sind. Nehmen wir jetzt an, es wirke auf den Magnet außer dem Magnetfelde auch noch ein Kräftepaar, welches an Größe der Winkelgeschwindigkeit des sich drehenden Magneten proportional ist und welches die Bewegung des Magneten behindert, d. h. den Magneten nach der entgegengesetzten Seite, seiner Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ direkt entgegen, zu drehen sucht. Dieses Kräftepaar tritt natürlich nur während der Bewegung des Magneten auf. Als Quelle dieses Kräftepaares kann man den Widerstand der umgebenden Luft ansehen. Ein viel wichtigeres Beispiel für die Bewegung eines Magneten im Magnetfelde bei gleichzeitiger Einwirkung eines ähnlichen Kräftepaares, das der Bewegung einen Widerstand entgegensetzt, werden wir in der Theorie der Galvanometer finden, die mit sogenannten Dämpfern versehen sind. Wir werden sehen, daß bei der Bewegung eines Magneten, in dessen Nähe sich nichtmagnetische Metalle, wie z. B. Kupfer, befinden, in diesen Metallen elektrische Ströme auftreten, die auf den Magneten zurückwirken und seine Bewegung behindern; die Stärke dieser Ströme, also

auch ihre Wirkung, sind in jedem gegebenen Augenblicke der Bewegungsgeschwindigkeit des Magneten proportional.

Das Moment a des die Magnetbewegung behindernden Kräftepaares ist gleich $-n\frac{d\varphi}{dt}$, wo n ein Proportionalitätsfaktor ist.

Vermindert sich der Winkel φ um den Betrag $d\varphi$, so ist die Arbeit dieses Kräftepaares gleich

$$-n\frac{d(-\varphi)}{dt}(-d\varphi) = -n\frac{d\varphi}{dt}d\varphi.$$

Als Zuwachs dI der Wucht erhält man jetzt

$$dI = K\frac{d^2\varphi}{dt^2}d\varphi = -MH\sin\varphi\, d\varphi - n\frac{d\varphi}{dt}d\varphi.$$

Nimmt man φ als sehr klein an, führt die Größe c^2 ein, vgl. (61,a), und die Bezeichnung

$$\frac{n}{K} = 2p,$$

so erhält man als **Bewegungsgleichung eines Magneten unter dem Einflusse eines Dämpfers:**

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2p\frac{d\varphi}{dt} + c^2\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Für $p = 0$ erhält man die betrachtete Bewegung eines Magneten ohne Dämpfung. Die Größe p tritt hier gleichsam als **Maß der Dämpfung** auf, d. h. als Maß derjenigen Ursache, welche die Bewegung des Magneten behindert. Führt man wieder die unmittelbar beobachtete, dem Winkel φ proportionale Größe y ein, so erhält man die Gleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2p\frac{dy}{dt} + c^2y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67)$$

Diese Gleichung ist ebenfalls eine lineare und es genügt ihr eine Funktion von der Gestalt $Ce^{\alpha t}$. Substituiert man diese in (67), so erhält man

$$\alpha^2 + 2p\alpha + c^2 = 0,$$

$$\alpha_1 = -p + \sqrt{p^2 - c^2}, \qquad \alpha_2 = -p - \sqrt{p^2 - c^2} \quad . \quad (67,a)$$

Die Lösung der Gleichung (67) hat folgende allgemeine Form

$$y = C_1e^{\alpha_1 t} + C_2e^{\alpha_2 t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67,b)$$

wo C_1 und C_2 beliebige konstante Koeffizienten sind.

Man hat zwei Fälle voneinander zu unterscheiden: den Fall, wo die Dämpfung nicht sehr stark, und den Fall, wo sie sehr stark ist.

I. **Die Dämpfung ist nicht sehr stark; die Schwingungen sind gedämpft.** Es ist dies der Fall, wo

$$p < c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

ist. Führt man die Bezeichnung

$$q = \sqrt{c^2 - p^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68,a)$$

ein, so ist

$$\alpha_1 = -p + qi; \quad \alpha_2 = -p - qi$$

und aus Formel (67, b) folgt

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{-pt} (\cos qt + i \sin qt) + C_2 e^{-pt} (\cos qt - i \sin qt) \\ &= (C_1 + C_2) e^{-pt} \cos qt + i (C_1 - C_2) e^{-pt} \sin qt. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, es sei für $t = 0$ auch $y = 0$ und $v = \frac{dy}{dt} = v_0$. Die erste Bedingung gibt dann $C_1 + C_2 = 0$, also

$$y = i (C_1 - C_2) e^{-pt} \sin qt \quad \ldots\ldots \quad (68,b)$$

Da

$$v = i (C_1 - C_2) e^{-pt} (q \cos qt - p \sin qt)$$

ist, so gibt uns die zweite Bedingung

$$qi (C_1 - C_2) = v_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68,c)$$

Fügt man hierzu noch die Bedingung $C_1 + C_2 = 0$, so erhält man

$$C_1 = \frac{v_0}{2qi}, \quad C_2 = -\frac{v_0}{2qi};$$

hieraus folgt wiederum $i (C_1 - C_2) = \frac{v_0}{q}$, also

$$y = \frac{v_0}{q} e^{-pt} \sin qt \quad \ldots\ldots\ldots \quad (68,d)$$

Es sei

$$\frac{v_0}{q} = \frac{v_0}{\sqrt{c^2 - p^2}} = a \quad \ldots\ldots \quad (68,e)$$

dann ist schließlich

$$y = a e^{-pt} \sin qt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

Ist $p = 0$, d. h. fehlt eine Dämpfung, so erhält man die einfache harmonische Schwingungsbewegung. Gleichung (69) ist identisch mit der Gleichung der gedämpften Schwingungsbewegung, welche in Bd. I betrachtet wurde. Wir haben es hier mit einer Schwingungsbewegung mit allmählich abnehmenden Amplituden zu tun. Die erste Amplitude ist

$$a_1 = \frac{ap}{\sqrt{q^2 + p^2}} e^{-\frac{p}{q} \operatorname{arctan} \frac{q}{p}} \quad \ldots\ldots \quad (69,a)$$

Der natürliche Logarithmus λ des Verhältnisses der absoluten Werte zweier aufeinander folgender Amplituden a_n und a_{n+1} heißt das logarithmische Dekrement. Es ist gleich

$$\lambda = lg\,\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\pi p}{q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (69,b)$$

Die Dauer τ von einem Durchgange durch die Gleichgewichtslage bis zum nächstfolgenden, oder aber die ihr gleiche Dauer von einem Stillstande zum anderen wird durch folgende Formel gegeben:

$$\tau = \frac{\pi}{q} = \frac{\pi}{\sqrt{c^2 - p^2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (69,c)$$

Für $p = 0$ erhält man als Schwingungsdauer $T = \frac{\pi}{c}$, vgl. (63, c), wo $T_1 = 2\,T$ ist. Es ist offenbar $\tau > T$, da

$$\frac{\tau^2}{T^2} = \frac{c^2}{c^2 - p^2} = \frac{q^2 + p^2}{q^2} = \frac{\pi^2 + \frac{\pi^2 p^2}{q^2}}{\pi^2} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{\pi^2} \quad . \quad (69,d)$$

Die Formeln (68, e) und (69, a) geben

$$v_0 = aq = a_1 \sqrt{q^2 + p^2}\, e^{-\frac{p}{q} \operatorname{arctan} \frac{q}{p}} \quad . \; . \; . \quad (69,e)$$

dies ist die Abhängigkeit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der Anfangsamplitude a_1.

II. Die Dämpfung ist sehr stark, die Schwingungen sind aperiodisch. Nehmen wir an, es sei in (67)

$$p > c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (70)$$

Wir führen die Bezeichnung

$$q = \sqrt{p^2 - c^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (71)$$

ein. Jetzt geben die Formeln (67, a) und (67, b)

$$y = e^{-pt} \{ C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt} \} \quad . \; . \; . \; . \quad (71,a)$$

Die Geschwindigkeit v der Bewegung ist gleich

$$v = \frac{dy}{dt} = -e^{-pt} \{(p - q) C_1 e^{qt} + (p + q) C_2 e^{-qt}\} \quad . \quad (71,b)$$

Betrachten wir drei Spezialfälle:

1. Der Magnet wird um einen Winkel abgelenkt, welchem der Wert $y = a$ entspricht; in dieser Lage ist $v = 0$, $t = 0$. Hierauf wird der Magnet sich selbst überlassen. Es ist die Abhängigkeit der Größen y und v von t zu untersuchen. Die Bedingungen, daß bei $t = 0$, $y = a$ und $v = 0$ ist, geben $C_1 + C_2 = a$ und $(p - q) C_1 + (p + q) C_2 = 0$. Hat man hieraus C_1 und C_2 bestimmt und in (71, a) und (71, b) substituiert, so erhält man

$$y = \frac{ae^{-pt}}{2q}\{(p+q)e^{qt} - (p-q)e^{-qt}\} \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

$$v = -\frac{(p^2-q^2)ae^{-pt}}{2q}\{e^{qt} - e^{-qt}\} \quad . \quad . \quad . \quad (72,a)$$

Die erste dieser Formeln zeigt uns, daß für keinen positiven ert von t die Ablenkung y negativ wird und erst für $t = \infty$, $y = 0$ rd. Der Magnet führt gar keine Schwingungen aus, er nähert ch asymptotisch der Gleichgewichtslage, erreicht sie aber eoretisch erst nach einer unendlich langen Zeit. Faktisch sehen wir, ß sich der Magnet zur Gleichgewichtslage hin bewegt und zur Ruhe langt, sobald er sie erreicht hat. Man nennt eine derartige Beigung eine aperiodische. Die Geschwindigkeit v erreicht ihren ößten Wert

$$v_m = -a\sqrt{p^2-q^2}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{\frac{p}{2q}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72,b)$$

. einer Zeit

$$t_m = \frac{1}{2q}\, lg\, \frac{p+q}{p-q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72,c)$$

e von der ursprünglichen Ablenkung a unabhängig ist, und mmt darauf wieder ab.

2. Der Magnet war um einen Betrag $y = a$ abgelenkt, hielt darauf einen Stoß und erreichte dadurch zur Zeit $t = 0$ ıe Geschwindigkeit $-v_0$ in bezug auf die Gleichgewichtslage. Die ›dingungen für C_1 und C_2 sind jetzt die folgenden:

$$C_1 + C_2 = a, \quad (p-q)\,C_1 + (p+q)\,C_2 = v_0.$$

ıraus folgt

$$y = \frac{e^{-pt}}{2q}\{[v - a(p-q)]\,e^{-qt} - [v_0 - a(p+q)]\,e^{qt}\} \quad . \quad (73)$$

Dieser Ausdruck gibt $y = 0$ für

$$t_1 = \frac{1}{2q}\, lg\, \frac{v_0 - a(p-q)}{v_0 - a(p+q)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73,a)$$

Damit dieses t_1 eine positive Größe wird, muß der Bedingung

$$v_0 > a(p+q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73,b)$$

nügt werden. Dann erreicht der Magnet die Gleichgewichtslage mit r Geschwindigkeit

$$v_0' = -\sqrt{(v_0 - ap)^2 - a^2q^2}\left[\frac{v_0 - a(p+q)}{v_0 - a(p-q)}\right]^{\frac{p}{2q}} \quad . \quad . \quad (73,c)$$

ıht nach der entgegengesetzten Seite, kommt zur Ruhe (vgl. Aufg. 3) .d kehrt asymptotisch zur Gleichgewichtslage zurück. Ist v_0 kleiner

oder gleich $a(p+q)$, so geht der Magnet, obgleich er einen Stoß erhalten, nicht über die Gleichgewichtslage hinaus.

3. Der Magnet befindet sich in der Gleichgewichtslage ($y = 0$), und erhält bei $t = 0$ einen Stoß, der ihm die Geschwindigkeit v_0 verleiht. Für $t = 0$ ist $y = 0$, $v = v_0$: daraus folgt $C_1 + C_2 = 0$, $(p-q)\,C_1 + (p+q)\,C_2 = -v_0$. Anstatt (71, a) erhalten wir

$$y = \frac{v_0 e^{-pt}}{2q}\{e^{qt} - e^{-qt}\} \quad \ldots \ldots \quad (74)$$

$$v = \frac{v_0 e^{-pt}}{2q}\{(p+q)\,e^{-qt} - (p-q)\,e^{qt}\} \,. \quad (74, a)$$

Man erhält $v = 0$ zu einer Zeit

$$t_m = \frac{1}{2q}\,lg\,\frac{p+q}{p-q} \quad \ldots \ldots \quad (74, b)$$

welche von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unabhängig ist; der Wert y_m der größten Ablenkung ist gleich

$$y_m = \frac{v_0}{\sqrt{p^2 - q^2}}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^{\frac{p}{2q}} \quad \ldots \ldots \quad (74, c)$$

Interessant ist, daß Formel (72, c) identisch mit (74, b) und (72, b) sehr ähnlich der Formel (74, c) ist.

III. Übergangsfall. Nehmen wir an, es sei in Gleichung (66)

$$p = c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (75)$$

dann werden die Wurzeln α_1 und α_2, vgl. (67, a), einander gleich. In diesem Falle bedient man sich einer Methode, die aus der Lehre von der Integration linearer Differentialgleichungen bekannt ist. Wir werden jedoch anders verfahren, indem wir den Wert $q = 0$ in die Formeln des Falles II substituieren und nach bekannter Art den Ausdruck von der Gestalt $\frac{0}{0}$ bestimmen.

1. Für $t = 0$ ist $y = a$, $v = 0$. Formel (72) gibt für $q = 0$

$$y = a e^{-pt}(1 + pt) \quad \ldots \ldots \quad (76)$$

$$v = -a p^2 t e^{-pt} \quad \ldots \ldots \quad (76, a)$$

Die Bewegung ist aperiodisch. Für

$$t_m = \frac{1}{p} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76, b)$$

erhält man das Maximum der Geschwindigkeit

$$v_m = -\frac{ap}{e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (76, c)$$

2. Für $t = 0$ ist $y = a$, $v = -v_0$. Formel (73) gibt für $q = 0$

$$y = \{a - (v_0 - ap)\,t\}\,c^{-pt} \quad \text{. . . . . . .} \quad (77)$$

Bei

$$t_1 = \frac{a}{v_0 - ap} \quad \text{. . . . .} \quad (77,\text{a})$$

geht der Magnet durch seine Gleichgewichtslage mit der Geschwindigkeit

$$v_0' = -(v_0 - ap)\,e^{-\frac{ap}{v_0 - ap}} \quad \text{. . . . .} \quad (77,\text{b})$$

Damit der Magnet seine Gleichgewichtslage passiert, muß

$$v_0 > ap \quad \text{. . . . .} \quad (77,\text{c})$$

sein.

3. Bei $t = 0$ ist $y = 0$, $v = v_0$. Formel (74) gibt für $q = 0$

$$y = v_0\,t\,e^{-pt} \quad \text{. . . . .} \quad (78)$$

$$v = v_0\,e^{-pt}\,(1 - pt) \quad \text{. . . . . . .} \quad (78,\text{a})$$

Die größte Ablenkung y_m tritt ein bei

$$t_m = \frac{1}{p} \quad \text{. . . . .} \quad (78,\text{b})$$

$$y_m = \frac{v_0}{p\,e} \quad \text{. . . . .} \quad (78,\text{c})$$

Die hier gegebene Theorie der gedämpfen Schwingung eines Magneten stammt von Gauss. Kompliziertere Fälle sind von Schering und dem Autor dieses Lehrbuches untersucht worden. Eine Theorie der aperiodischen Bewegungen hat E. du Bois-Reymond gegeben.

Literatur.

Zu § 1.

Hopkinson: Phil. Trans. **176**, 465, 1885.

Zu § 3.

Lindeck: Instr. **9**, 352, 1889.
Ebert: Magnetische Kraftfelder. 2. Aufl. München 1905, S. 8.

Zu § 7.

Jamin: Compt. rend. **76**, 1153, 1873; **77**, 305, 1873; Carls Repert. d. Phys. **9**, 253, 1873.
Barus and Strouhal: Bull. Unit. States Geol. Surv. **14**, 1885; W. A. **11**, 930, 1880; **20**, 525, 621, 662, 1883.
Holborn: Instr. **11**, 113, 1891; Berl. Ber. 1898, S. 159.

Guthe: Transact. Am. Electr. Eng. **14**, 59, 1897; Proc. Phys. Soc. **15**, 268, 1897.
Mme. Curie: Bull. de la Soc. d'Encouragement **3**, 36, 1898; The Metallographist **1**, 107, 1898.
Hopkinson: Trans. Pr. Soc. **2**, 463, 1885.
Negbauer: Elektrotechn. Zeitschr. 1889, S. 348.
P. Meyer: Elektrotechn. Zeitschr. 1889, S. 582.
Du Bois: Phil. Mag. (5) **29**, 293, 1890.
Coulomb: Mém. de l'Acad. 1789, p. 468.
Biot: Traité de phys. **3**, 76, 1816.
Riecke: P. A. **149**, 62, 1873; W. A. **8**, 299, 1879.
F. Kohlrausch: W. A. **22**, 411, 1884; **27**, 45, 1886; **31**, 609, 1887.
Petruschewski: P. A. **150**, 388, 537, 1873; **152**, 42, 1874; Lehrbuch der Physik (russ.). 2. Aufl. St. Petersburg 1874, S. 313.
Pouillet: Compt. rend. **67**, 853, 1868.
Benoit: Compt. rend. **84**, 76, 1877.
Van Rees: P. A. **70**, 15, 1847.
Mascart: Compt. rend. **104**, 635, 1887; Ann. de chim. et de phys. (6) **18**, 1, 1884; Traité de magnétisme terrestre 1900, p. 82.
Benedicks: Journ. de phys. (4) **1**, 302, 1902; Bihang t. k. Svenska Vet. Ak. Hanal. **27**, I, 1902.
Häcker: P. A. **57**, 321, 1842; **62**, 366, 1844; **72**, 63, 1847; **74**, 394, 1848.
Geber (Abû Mûsa Gâbir ben Hajjan), vgl. E. Wiedemann, W. A. **4**, 320, 1878.

Zu § 8.

G. Wiedemann: P. A. **100**, 241, 1857.
Villari: Nuov. Cim. **27**, 1868; P. A. **137**, 569, 1869.
Streintz: Wien. Ber. **76**, 946, 1877.
Brown: Phil. Mag. (5) **23**, 420, 1887.
Berson: Compt. rend. **106**, 592, 1888; **108**, 94, 1899.
Krüse: Wien. Ber. **109**, 195, 1900.
Wertheim: Compt. rend. **35**, 702, 1852; Ann. de chim. et phys. (3) **50**, 385, 1857.
Matteucci: Compt. rend. **24**, 301, 1847; Ann. de chim. et phys. (3) **53**, 385, 1858.
Knott: Phil. Trans. R. Soc. Edinb. **36**, 485, 1891.
G. Wiedemann (Tordieren): P. A. **103**, 563, 1858; **106**, 161, 1859; Verh. Baseler Naturf.-Ges. **2**, 169, 1860; W. A. **27**, 376, 1886.
Canton: Phil. Trans. 1759, p. 398.
Ashworth: Proc. R. Soc. **62**, 210, 1898.
Durward: Sill. Journ. **5**, 245, 1898.
Trowbridge: Sill. Journ. (3) **21**, 316, 1881.
G. Wiedemann (Temperaturänderung): P. A. **100**, 235, 1852; **103**, 563, 1858; **122**, 355, 1864.

Zu § 9.

Gauss: Resultate des magnetischen Vereins 1837, S. 58.
E. du Bois-Reymond: Berl. Ber. 1869, S. 807; 1870, S. 537; Abh. **1**, 284.
Schering: W. A. **9**, 287, 452, 1880.
Chwolson: Magnetische Dämpfer (russ.). St. Petersburg 1880; Mém. de l'Acad. des Sc. de St. Pétersbourg (7) **26**, No. 14, 1879; **28**, No. 3, 1880.

Drittes Kapitel.

Quellen des Magnetfeldes. Elektrischer Strom.

§ 1. Einleitung. Nachdem wir im vorhergehenden Kapitel die erste der beiden Quellen des Magnetfeldes, die Magnete, und zwar hauptsächlich die permanenten Magnete, kennen gelernt haben, wenden wir uns jetzt der anderen Quelle des Magnetfeldes, den elektrischen Strömen, zu. Wir werden in diesem Kapitel einen der Fälle, in denen ein elektrischer Strom entsteht, näher betrachten, werden einige auf den Strom bezügliche Fragen näher beleuchten, sowie auch die Eigenschaften desjenigen Magnetfeldes angeben, das im Raume rings um die Körper auftritt, in denen sich die Erscheinung des elektrischen Stromes zeigt. Ein tieferes Eingehen auf theoretische Fragen soll in diesem Kapitel noch nicht stattfinden.

Im zweiten Kapitel des ersten Teiles haben wir uns mit einer ganzen Reihe von Erscheinungen bekannt gemacht, die als Grundlagen für unsere weiteren Betrachtungen dienen werden. Zur Bequemlichkeit des Lesers wollen wir an diese Erscheinungen in Kürze erinnern.

Wenn zwei verschiedenartige Körper A und B, welche aus einem die Elektrizität leitenden Stoffe bestehen, zu gegenseitiger Berührung gebracht werden, so erweisen sie sich beide als elektrisiert, der eine positiv, der andere negativ. Ihre Potentiale V_1 und V_2 sind ungleich, es tritt zwischen ihnen eine Potentialdifferenz auf oder es zeigt sich beim Übergange von einem Körper zum anderen ein Sprung des Potentials $V_1 - V_2$. Die Ursache für diese Erscheinung haben wir als elektromotorische Kraft (E) bezeichnet; wir nahmen an, daß sie die Richtung des Sprunges nach oben hat, d. h. vom Körper mit kleinerem Potential V_2 zum Körper mit größerem Potential V_1. Als Maß derselben nahmen wir die Größe dieses Sprunges an, d. h. wir setzten, vgl. (7), S. 170,

$$E = V_1 - V_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Symbolisch werden wir schreiben $E = A\,|\,B = -B\,|\,A$. In einer Kette aus verschiedenartigen Körpern $A, B, C \ldots M, N$, die einander der Reihe nach berühren, wirkt eine Reihe von elektromotorischen Kräften e_k, deren Summe die elektromotorische Kraft der Kette E bildet:

$$E = A\,|\,B + B\,|\,C + \cdots + M\,|\,N = \Sigma e_k = V_1 - V_n \quad . \quad (1,a)$$

sie ist gleich der Differenz der Potentiale V_1 und V_n an den Enden der Kette. Eine Kette, deren Endglieder einander gleich sind, nannten wir eine regelrecht offene Kette.

Die elektromotorische Kraft einer regelrecht offenen Kette, die aus Leitern der ersten Klasse (Metalle, Kohle, Mineralien, Oxyde) besteht, ist gleich Null. Die einander gleichen Körper, d. h. die Enden der Kette, befinden sich auf gleichen Potentialen. Für eine solche Kette aus drei verschiedenartigen Körpern erhält man das Voltasche Gesetz, das durch Formel (12), S. 172 ausgedrückt ist:

$$A|B + B|C = A|C \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Leiter der ersten Klasse können in eine Voltasche Reihe (S. 173) gebracht werden.

Die Leiter der zweiten Klasse oder Elektrolyte (gelöste oder geschmolzene Säuren und Salze) befolgen das Voltasche Gesetz nicht. Die elektromotorische Kraft E, welche in einer regelrecht offenen Kette wirkt, in welcher auch Elektrolyte S vorkommen, oder aber die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ der Enden einer solchen Kette, ist von Null verschieden. Man hat für dieselbe z. B.

$$E = V_1 - V_2 = A|S + S|B + B|A \gtrless 0 \quad \ldots \quad (2,a)$$

oder in einem anderen Falle

$$E = V_1 - V_2 = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \gtrless 0 \quad . \quad (2,b)$$

vgl. (13), S. 174. Statt von Formel (2) ist jetzt

$$A|S + S|B \gtrless A|B \quad \ldots \ldots \quad (2,c)$$

Die Richtung der elektromotorischen Kraft E fällt mit derjenigen Richtung zusammen, in welcher die positiven Sprünge, also die Sprünge nach oben, überwiegen; mit anderen Worten, E hat die Richtung von V_2 nach V_1, wenn $V_2 < V_1$ ist. Eine Zusammenstellung von Körpern, welche eine solche Kette bilden, heißt ein galvanisches Element. Verschiedene Schemata derartiger Elemente sind in (14, a, b, c, d), S. 174 gegeben worden. Wir hatten die Bezeichnung

$$(A, B) = A|S + S|B + B|A$$

gebraucht und den Beweis erbracht, daß

$$(A, B) + (B, C) = (A, C) \quad \ldots \ldots \quad (2,d)$$

ist und daß diese Gleichung auch richtig bleibt, wenn

$$(A, B) = A|S_1 + S_1|S_2 + S_2|B + B|A \quad . \quad . \quad (2,e)$$

ist, vgl. S. 175. Während man die Körper A, B, C variiert, muß man die Elektrolyte S oder S_1 und S_2 ungeändert lassen. Ein typisches Element, dessen elektromotorische Kraft nach dem Schema (2, e) gebildet ist, ist das Daniellsche Element, das auf S. 176 beschrieben und in Fig. 77 abgebildet ist. Für dasselbe ist, vgl. (17), S. 176:

$$E = V_1 - V_2 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = Cu|CuSO_4 + CuSO_4|ZnSO_4$$
$$+ ZnSO_4|Zn + Zn|Cu \quad \ldots \ldots \quad (2,f)$$

Die Größe E ist völlig bestimmt und man kann sie sehr genau messen. Die Frage nach der Größe ihrer vier Komponenten aber ist bis jetzt noch eine offene. Wir hatten diese Frage ausführlich in den §§ 9 bis 14 des zweiten Kapitels vom ersten Abschnitt (S. 212 bis 241) besprochen. Als beste Illustration des Standes dieser Frage kann die kleine Tabelle dienen, die im § 9, S. 214 gegeben ist. Zum Glück haben wir es im weiteren nur mit der Größe E zu tun, während ihre Komponenten von e_1 bis e_4 keine Rolle spielen werden.

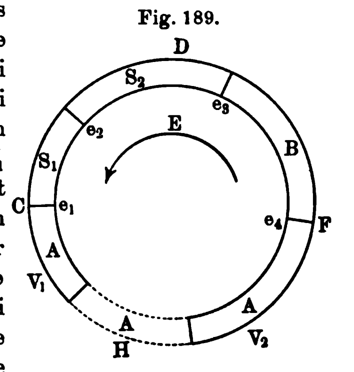
Die Enden eines regelrecht offenen Elementes nannten wir Elektroden und unterschieden dabei eine positive und eine negative.

Die elektromotorische Kraft (der Potentialsprung) der Berührung zweier Körper hängt weder von der Größe, noch auch von der Form dieser Körper oder der Größe ihrer Berührungsflächen ab, sondern nur von der chemischen Zusammensetzung und dem physikalischen Zustande der Körper selbst. Hieraus hatten wir auch den Satz abgeleitet (S. 179), daß die elektromotorische Kraft eines Elementes weder von der Form und den Dimensionen des Elementes, noch auch von seiner inneren Einrichtung, sondern nur von der Art und dem physikalischen Zustande der Substanzen abhängt, aus denen es besteht.

Zum Schluß erinnern wir daran, daß in den §§ 14 und 15 (S. 241 bis 259) noch verschiedene andere Quellen des elektrischen Zustandes teils eingehend behandelt, teils kurz erwähnt worden sind.

§ 2. Entstehung des hydroelektrischen (galvanischen) Stromes. Fig. 189 stellt die uns bereits bekannte regelrecht geöffnete Kette schematisch dar, wobei des Beispiels halber die Annahme gemacht ist, daß sie zwei Metalle (genauer genommen zwei Leiter A und B erster Klasse) und zwei Elektrolyte S_1 und S_2 enthält. Die Enden A, A befinden sich auf den Potentialen V_1 und V_2; die elektromotorische Kraft E ist gleich $V_1 - V_2$ und hat die durch den Pfeil angegebene Richtung. Jeder der Bestandteile A, S_1, S_2, B, A der Kette befindet sich auf seinem Potential, wobei die Potentialdifferenzen dieser Teile vollkommen bestimmte Größen sind. Die Potentiale selbst aber sind vollkommen zufällige Größen, da jeder der Bestandteile der Kette auf jedes beliebige positive oder negative Potential gebracht werden kann.

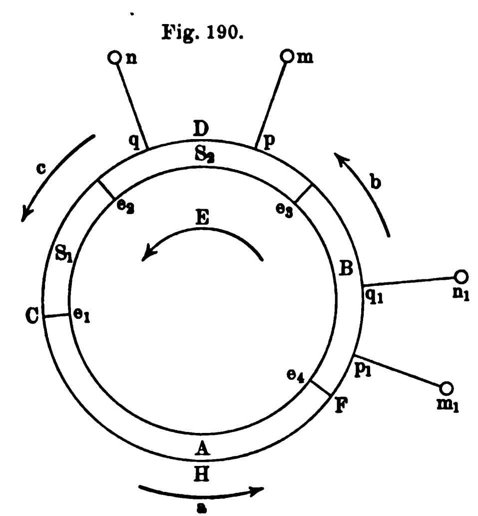
Fig. 189.



Betrachten wir jetzt den Vorgang beim Schließen der regelrecht geöffneten Kette, wenn ihre Enden in Berührung gebracht werden oder wenn man diese Enden untereinander mit einem Körper aus demselben Material A verbindet. Zunächst ist es klar, daß man hierbei keine neue elektromotorische Kraft in die Kette einführt, da die neuen Berührungen zwischen gleichartigen Stoffen erfolgen. Wir wollen ferner noch die Annahme machen, obgleich dies für das Fernere ohne Belang ist, daß die Größen e_i, also auch ihre Summe E, sich beim Schließen der Kette nicht ändern.

Ist ein statischer elektrischer Zustand in einer Kette, welche Elektrolyte enthält, möglich? Nehmen wir an, er sei möglich und der ganze Teil CHF (Fig. 190) befinde sich auf irgend einem Potential V. Dann muß sich der Teil B auf dem Potential $V + e_4$, S_2 auf $V + e_4 + e_3$, S_1 auf $V + e_4 + e_3 + e_2$ und endlich der S_1 benachbarte Teil A auf dem Potential $V + e_4 + e_3 + e_2 + e_1 = V + E$ befinden, was der Annahme eines statischen Zustandes widerspricht, bei dem sich der ganze Teil CAF auf einem überall gleichen Potential V befinden mußte.

Fig. 190.



In einer Elektrolyte enthaltenden, geschlossenen Kette kann sich ein statischer elektrischer Zustand nicht herstellen. Dagegen würden wir einen solchen Zustand erhalten, wenn die Kette nur aus Leitern der ersten Klasse bestände ($V_1 = V_2$, $E = 0$).

Da in einer geschlossenen Kette, welche Elektrolyte enthält, ein statischer Zustand unmöglich ist, so muß sich ein dynamischer Zustand, d. h. ein Strömen der Elektrizität, herstellen. Im Teile CHF muß das Strömen der positiven Elektrizität in der Richtung von C nach F erfolgen, siehe den Pfeil a, da sich der S_1 benachbarte Teil, wie wir soeben sahen, auf höherem Potential befindet, als der an B grenzende Teil. Das Strömen der positiven Elektrizität ist aber nur „von oben nach unten" möglich, d. h. vom größeren Potential zum kleineren. Hieraus folgt, daß sich das Potential am ganzen Teile CHF entlang kontinuierlich verringern muß, sich also längs CHF ein Potentialgefälle einstellen muß.

Bei anderer Betrachtungsweise kann man sagen, daß ein Strömen der Elektrizität nur dort möglich ist, wo eine elektrische Kraft existiert; diese letztere aber ist nur dort vorhanden, wo das Potential nicht konstant ist.

Wir werden das Potentialgefälle in der Richtung nach unten als positiv ansehen; die Potentialsprünge (elektromotorischen Kräfte) wollten wir in der Richtung nach oben positiv rechnen.

Wir haben uns davon überzeugt, daß die positive Elektrizität ununterbrochen in der Richtung CAF strömen muß. Da in F keine Stauung der Elektrizität stattfindet, und da der Teil A selbst ganz willkürlich gewählt war, denn eine regelrecht offene Kette kann an beiden Enden die Substanz B oder S_1 oder S_2 haben, so ist es klar, daß in allen Teilen der Kette ein Strömen der positiven Elektrizität in der Richtung der Pfeile b und c stattfinden muß. Hieraus aber folgt, daß in allen Teilen der Kette sich Potentialgefälle in der Strömungsrichtung der positiven Elektrizität herstellen müssen. Diese Richtung sieht man als Richtung des elektrischen Stromes in der Kette an. Aus Fig. 190 ist ersichtlich, daß die Richtung des elektrischen Stromes und des Potentialgefälles die gleiche ist wie die Richtung der elektromotorischen Kraft E, welche in der Kette wirkt, d. h. wie die Richtung, in welcher wir, rings um die Kette herumgehend, auf eine positive Summe der Potentialsprünge treffen.

Man nimmt an, daß gleichzeitig mit der Strömung der positiven Elektrizität in der Richtung des Potentialgefälles und der Größe E ein gleiches Strömen der negativen Elektrizität in der entgegengesetzten Richtung erfolgt. Beide Strömungen zusammen bilden die Erscheinung des elektrischen Stromes in der Kette, welche Elektrolyte enthält. Man kann einen solchen Strom einen hydroelektrischen Strom nennen.

Man darf dem Bilde vom inneren Wesen eines Stromes, wie es soeben entworfen wurde, keinen großen Wert beilegen. Zwei Strömungen zweier Elektrizitäten in zwei entgegengesetzten Richtungen sind etwas nicht leicht vorstellbares. Für uns ist aber auch nur wichtig, daß man, ausgehend von der Tatsache, daß Körper bei der Berührung elektrisiert werden, oder von der Tatsache, daß an den Enden einer regelrecht offenen Kette, welche Elektrolyte enthält, eine Potentialdifferenz besteht, zu einer Erklärung der notwendigen Existenz eines dynamischen Zustandes in der geschlossenen Kette und eines Potentialgefälles in allen ihren Teilen gelangt. Dieses Abfallen des Potentials ist ebenfalls eine feststehende Tatsache. Verbindet man nämlich irgend zwei Punkte p und q oder p_1 und q_1, die zu einem der Bestandteile der Kette gehören, mit zwei Kugeln m und n oder m_1 und n_1, so überzeugt man sich davon, daß alle Kugeln elektrisiert sind und daß die Potentiale der Kugeln m und m_1 entsprechend höher sind als die Potentiale der Kugeln n und n_1.

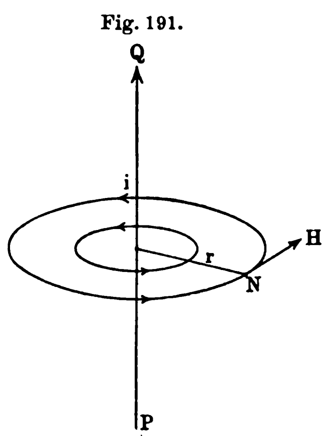
Worin das Wesen der Erscheinung des elektrischen Stromes besteht, das ist eine Frage, die wir vorläufig außer acht lassen können, wenn wir uns an das Bild halten, zu welchem wir durch Untersuchung der Vorgänge beim Schließen einer Elektrolyte enthaltenden Kette geführt wurden.

Die Kette besteht gewöhnlich aus einem Elemente, das Elektrolyte enthält, und aus Drähten, die zum Schließen der Kette dienen. Durch das Einschalten von Drähten in die Kette veranlaßt man den Strom, sie zu durchfließen. Gehören diese Drähte einem Apparate an, so sagt man, der Apparat werde in die Kette eingeschaltet.

Der Raum, welcher die stromdurchflossenen Leiter umgibt, ist ein Magnetfeld. Die Eigenschaften dieses Feldes werden wir in einem der folgenden Paragraphen dieses Kapitels eingehend betrachten, beschränken uns daher vorläufig auf einige wenige Hinweise.

Die Kraftlinien des Magnetfeldes eines elektrischen Stromes sind geschlossene Kurven, welche die stromdurchflossenen Leiter umgeben. Die Untersuchung dieses Feldes zeigt, daß die Kraftlinien im Falle eines langen, geradlinigen Stromes PQ (Fig. 191) Kreise sind, deren Ebenen senkrecht zur Linie PQ des Stromes stehen und deren Zentren auf dieser geraden Linie liegen. Die Richtung der Kraftlinien ist in Fig. 191 durch Pfeile für den Fall angedeutet, daß der Strom die Richtung von P nach Q hat. Diese Richtung läßt sich nach der Ampèreschen Regel oder der Schraubenregel (Bohrerregel) finden. Die Ampèresche Regel lautet wie folgt: Ein Beobachter, der sich an der Stromlinie derartig aufgestellt hat, daß der Strom von seinen Füßen nach seinem Kopfende fließt, sieht die Kraftlinien von rechts nach links gehen; wendet er sich mit dem Gesicht einem beweglichen Nordpol N zu, so sieht er denselben sich nach links bewegen, d. h. in der Richtung der Feldintensität H.

Fig. 191.



Die Schraubenregel lautet: Befindet sich die Achse einer Schraube längs der Stromlinie, so erhält sie bei Drehung des Schraubenkopfes in der Richtung der Kraftlinien des Magnetfeldes eine in der Stromrichtung PQ fortschreitende Bewegung.

Die experimentelle Untersuchung zeigt ferner, daß im betrachteten einfachen Falle die Feldintensität H in einem gegebenen Punkte N indirekt proportional dem Abstande r des Punktes von der Stromlinie ist, so daß man

folgenden aber von der Annahme ausgehen, daß ihre Einrichtung im allgemeinen den Lesern bekannt ist.

Betrachten wir jetzt näher das Strömen der Elektrizität innerhalb eines Leiters und leiten wir einige Schlüsse ab, die sich aus den Grundvorstellungen ergeben, zu denen uns die Untersuchungen über das Zustandekommen eines Stromes geführt haben. Der einmal zustande gekommene und dahinfließende elektrische Strom stellt, wenn er keinen Änderungen unterworfen wird, ein Beispiel eines dynamischen Gleichgewichts dar, wie wir demselben schon wiederholt begegnet sind: trotz des Strömens bleibt der elektrische Zustand jedes Punktes der Kette unverändert. Denken wir uns innerhalb des Leiters, der einen Bestandteil der Kette bildet, eine beliebig geschlossene Fläche s. Machen wir die Annahme, daß die Elektrizitätsmenge $d\eta$, die in der Zeit τ durch das Element ds ins Innere der Oberfläche eintritt, gleich

$$d\eta = c\frac{\partial V}{\partial n}\tau ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

ist; hier bedeutet n die Richtung der äußeren Normalen an das Flächenelement ds. Das Wesen der Annahme, die sich in Formel (5) birgt, besteht darin, daß wir die Elektrizität als trägheitslos ansehen. Wir nehmen an, daß die in Bewegung versetzte Elektrizitätsmenge proportional der wirkenden elektrischen Kraft ist, daß mit dem Verschwinden jener Kraft auch die Bewegung der Elektrizität selbst aufhört. Da der stationäre elektrische Zustand innerhalb der Fläche s ungeändert bleibt, so muß die Gesamtmenge der Elektrizität, welche durch diese Fläche eintritt, gleich Null sein. Hieraus ergibt sich die Gleichung

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5, a)$$

Wir wissen aber, daß dieses Integral gleich $-4\pi\eta_i$ ist, vgl. (41, a), S. 91, wenn η_i die innerhalb der Fläche s befindliche Elektrizitätsmenge bedeutet. Formel (5, a) gibt $\eta_i = 0$. Man kann auch anders überlegen: wendet man Formel (5, a) auf ein unendlich kleines Parallelepipedon an, dessen Kanten dx, dy, dz sind, so erhält man die Formel (41, e), S. 91

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

in allen Punkten des Leiters, durch welchen der stationäre Strom hindurchfließt. Die linke Seite in (6) ist aber gleich $-4\pi\varrho$, wo ϱ die Volumdichte der Elektrizität ist. Somit erhält man $\varrho = 0$. Alles dieses führt uns zu folgendem Bilde: Im Innern des Leiters, durch welchen ein elektrischer Strom fließt, ist keine freie Elektrizität vorhanden. Freie Elektrizität befindet sich nur an der

Oberfläche von Leitern. Ihr Potential ist die in den Formeln (5) und (6) vorkommende Größe V.

Nimmt man ferner an, daß durch die Seitenfläche eines Leiters kein Elektrizitätsverlust stattfindet, so gilt für sämtliche Punkte dieser Fläche die Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial n_1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6,a)$$

wo n_1 die Richtung der Normalen zur Seitenfläche des Leiters ist.

§ 3. Die wichtigsten Größen in der Lehre vom Strome und deren Einheiten. Untersucht man mittels einer Magnetnadel die Feldintensität in der Nähe von verschiedenen Teilen der Kette, so überzeugt man sich davon, daß die Stromstärke in allen Teilen der Kette die gleiche ist. Es ist also

$$J = Const \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Zu demselben Resultate werden wir später auch auf theoretischem Wege gelangen. Wenden wir uns einer Betrachtung der Elektrizitätsmenge η_1 zu, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt der Kette hindurchfließt. Da der elektrische Zustand innerhalb der Kette einen dynamischen Gleichgewichtszustand darstellt, so kann, wie bereits gesagt war, nirgends eine Anhäufung der Elektrizität stattfinden. Nimmt man zudem an, daß nirgends ein Elektrizitätsverlust durch die Seitenfläche der Leiter hindurch stattfindet, so muß offenbar

$$\eta_1 = Const \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7,a)$$

sein, d. h. es muß η_1 in allen Querschnitten der Kette den gleichen Wert haben. Nimmt man an, daß der in Betracht gezogene Teil der Kette die Form eines Drahtes hat, so kann man folgern, daß die Niveauflächen des Potentials, senkrecht zu denen das Fließen der Elektrizität erfolgt, mit den Querschnitten des Drahtes zusammenfallen. Es sei AB (Fig. 192) ein Teil des Drahtes, V_1 und V_2 die Potentiale in den Querschnitten A und B, wobei $V_1 > V_2$ ist; s sei der Flächeninhalt des Querschnitts, $AB = l$ die Länge des Drahtstückes. Der Strom fließt von A nach B. In einem beliebigen mittleren Querschnitte sei das Potential gleich V; die Normale, welche die Richtung des Stromes hat, bezeichnen wir mit x. In Formel (5) ist jetzt $\tau = 1$ und η_1 anstatt $d\eta$, s anstatt ds zu setzen; außerdem hat x die entgegengesetzte Richtung wie n in Formel (5). Man erhält daher

Fig. 192.

$$\eta_1 = -c\frac{dV}{dx}s \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7,b)$$

Die Größe c hängt von der Substanz des Leiters ab. Je größer c ist, eine um so geringere Kraft $-\frac{dV}{dx}$ ist erforderlich, um die Elektrizitätsmenge η_1 in Bewegung zu versetzen. Wir wollen die Größe c das spezifische Leitungsvermögen der Substanz nennen; den reziproken Wert hiervon $1:c$ bezeichnen wir mit ϱ und nennen ihn den spezifischen Widerstand. Formel (7, b) gibt

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\varrho}{s}\eta_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7,c)$$

Nimmt man an, der in Betracht gezogene Teil der Kette sei in geometrischer, wie in physikalischer Hinsicht gleichartig, d. h. s und ϱ seien konstante Größen, so erhält man im Hinblick auf (7, a) die Relation

$$\frac{dV}{dx} = -C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7,d)$$

wo die Größe $C = \frac{\varrho}{s}\eta_1$ von l unabhängig ist. Ist V eine stetige Funktion von x, erleidet also keine Sprünge, so erhält man

$$V = V_0 - Cx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

In einem geometrisch und physikalisch homogenen Teile der Kette ist das Potential eine lineare Funktion der Länge x, die am Leiter entlang gerechnet wird. Mit anderen Worten:

In einem derartigen Teile der Kette ist das Potentialgefälle pro Längeneinheit eine konstante Größe. Wendet man Formel (8) auf den Abschnitt $AB = l$ an und substituiert $C = \frac{\varrho\eta_1}{s}$, so erhält man

$$V_2 = V_1 - \frac{\varrho l}{s}\eta_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8,a)$$

Wir führen die Bezeichnung

$$\frac{\varrho l}{s} = R \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

ein und nennen R den Widerstand des Teiles AB der Kette. Dann folgt aus (8, a)

$$\eta_1 = \frac{V_2 - V_1}{\frac{\varrho l}{s}} = \frac{V_2 - V_1}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Die Formeln (9) und (10) geben folgenden Satz:

Der Widerstand eines Drahtes (s und ϱ sind konstant) ist direkt proportional dem spezifischen Widerstande seiner Substanz, direkt proportional seiner Länge und indirekt

proportional dem Flächeninhalte seines Querschnittes. Er ist von der Form des Querschnittes unabhängig. Da η_1 in allen Teilen der Kette den gleichen Wert hat, so folgt aus (10)

$$\frac{V_1 - V_2}{R} = Const \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Diese wichtige Gleichung zeigt die Verteilung des Potentialgefälles in verschiedenen Teilen der Kette an. R ist der Widerstand desjenigen Teiles der Kette, in welchem das totale Potentialgefälle gleich $V_1 - V_2$ ist, es stellt daher das Verhältnis $(V_1 - V_2) : R$ das Potentialgefälle pro Einheit des Widerstandes dar.

Das Potentialgefälle pro Einheit des Widerstandes hat in allen Teilen der Kette den gleichen Wert, wenn diese Teile derart gewählt sind, daß in ihnen keine Sprünge des Potentials vorkommen, d. h. in ihnen keine elektromotorischen Kräfte wirken. Dieses Gefälle ist numerisch gleich der in der Zeiteinheit durch einen beliebigen Querschnitt der Kette hindurchfließenden Elektrizitätsmenge.

Formel (10) stellt den Zusammenhang zwischen drei Größen her: dem Potential, dem Widerstande und der Elektrizitätsmenge. Von diesen sind die Einheiten des Potentials und der Elektrizitätsmenge miteinander dadurch verknüpft, daß $(V_1 - V_2)\,\eta_1$ numerisch gleich der Arbeit sein muß, welche von den elektrischen Kräften beim Übergange der Menge η_1 von V_1 nach V_2 geleistet werden muß. Demnach hat man die Einheiten für noch zwei Größen R und η oder V zu wählen.

In der Zeiteinheit strömt in der Kette die Elektrizitätsmenge η_1 zwischen den Querschnitten A und B. In der Zeit t strömt die Menge $\eta = \eta_1 t$ hindurch. Die Arbeit r, welche von elektrischen Kräften im Teile AB des Stromkreises in der Zeit t geleistet wird, ist gleich

$$r = (V_1 - V_2)\,\eta = (V_1 - V_2)\,\eta_1 t = \eta_1^2 R t = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R}\,t \quad . \quad (12)$$

Eine dieser Arbeit äquivalente Wärmemenge Q wird tatsächlich im Stromkreise frei. In der Zeiteinheit wird die Arbeit

$$r_1 = (V_1 - V_2)\,\eta_1 = \eta_1^2 R = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \quad \ldots \quad (12,\text{a})$$

geleistet und eine entsprechende Wärmemenge Q_1 frei, die gleich

$$Q_1 = A\,(V_1 - V_2)\,\eta_1 = A\,\eta_1^2 R = \frac{A\,(V_1 - V_2)^2}{R} \quad . \quad (12,\text{b})$$

ist, wo A das thermische Arbeitsäquivalent bedeutet.

Auf S. 491 hatten wir den Begriff der Stromstärke J als einer Größe eingeführt, welche diejenige Eigenschaft des Stromes charakte-

risiert, von welcher die Feldintensität H abhängig ist; hierbei waren H und J miteinander durch die Formel (3, a), S. 491, verknüpft.

Unmittelbare Versuche zeigen, daß die Stromstärke J proportional der Elektrizitätsmenge η_1 ist, welche in der Zeiteinheit durch einen beliebigen Querschnitt der Kette hindurchfließt, d. h. daß man

$$J = C\eta_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

setzen kann.

Um die Möglichkeit einer experimentellen Prüfung dieser Formel einzusehen, hat man sich eine klare Vorstellung davon zu machen, welche von den in den letzten Formeln vorkommenden Größen einer unmittelbaren Beobachtung und Messung zugänglich sind. Schreiben wir zu diesem Zwecke die Formeln (3, a), (10) und (12, b) nebeneinander hin:

$$H = \frac{cJ}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13, a)$$

$$\eta_1 = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{V_1 - V_2}{\frac{\varrho l}{s}} \quad \ldots\ldots \quad (13, b)$$

$$Q_1 = A(V_1 - V_2)\eta = A\eta_1^2 R = \frac{A(V_1 - V_2)^2}{R} \quad . \quad (13, c)$$

In diesen Formeln sind c und A Proportionalitätsfaktoren; ferner können außer r, l und s gemessen und beobachtet werden:

1. Die Feldintensität H aus der Größe der Kraft, welche auf den Pol einer Magnetnadel wirkt.

2. Die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ mit Hilfe eines Elektrometers.

3. Die Wärmemenge Q_1 nach irgend einer kalorimetrischen Methode.

Es bleiben somit die drei Größen J, η_1 und ϱ übrig, die aus drei Gleichungen (13, a, b, c) gefunden werden. Hierbei findet man

a) daß für eine gegebene Substanz $\varrho = Const$ ist; für verschiedene Substanzen erhält man die relativen Werte der spezifischen Widerstände ϱ;

b) daß die Größen J und η_1 einander proportional sind. Und zwar:

Die Gleichungen (13, c) ergeben die Größen R, wenn man Q und $V_1 - V_2$ mißt. Variiert man l und s, so findet man für ϱ einen konstanten Wert bei der gleichen Substanz; variiert man die Substanz, so erhält man die relativen Werte der Größen ϱ.

Dieselben Gleichungen (13, c) liefern η_1, wenn Q_1 und $V_1 - V_2$ durch Messung gefunden sind. Endlich liefert noch (13, a) die relativen

Werte der Stromstärke J, wenn H durch Messung gefunden ist. Hat man auf diese Weise die J und η gemessen, so kann man sich durch den Versuch von der Richtigkeit der Gleichung (13) überzeugen. Man kann auch noch weiter gehen. Nehmen wir an, wir hätten die Größen r, H und $V_1 - V_2$ in C. G. S.-Einheiten gemessen, für A das Verhältnis der Wärmeeinheit zum Erg gewählt und anstatt der Formel (13, a), d. h. an Stelle von (3, a), S. 491, die Formel (4) gewählt, also $c = 2$ gesetzt. In diesem Falle ergibt das Experiment, daß in (13) der Koeffizient $C = 1$ ist. Nimmt man Formel (4) an, so erhält man

$$J = \eta_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14)$$

Die Stromstärke wird durch diejenige Elektrizitätsmenge gemessen, welche in der Zeiteinheit durch einen beliebigen Querschnitt des Stromkreises hindurchfließt.

Auf diese Weise haben wir gezeigt, daß die Stromstärke in der Tat in allen Teilen des Stromkreises die gleiche sein muß, denn (14) und (7, a) geben die Formel (7).

Das Verhältnis

$$i = \frac{J}{s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14, a)$$

in welchem s den Flächeninhalt des Querschnittes der Kette bedeutet, wird die Stromdichte genannt.

Substituiert man $\eta_1 = J$ in (13, b) und (13, c), so erhält man

$$J = \frac{V_1 - V_2}{R} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

$$Q_1 = A(V_1 - V_2)J = AJ^2R = \frac{A(V_1 - V_2)^2}{R} \quad \ldots \quad (16)$$

Für die Wärmemenge Q, welche im betrachteten Teile des Stromkreises in der Zeit t frei wird, erhält man

$$Q = A(V_1 - V_2)Jt = AJ^2Rt = \frac{A(V_1 - V_2)^2 t}{R} \quad \ldots \quad (17)$$

Die ihr entsprechende Arbeit r der elektrischen Kräfte ist gleich

$$r = (V_1 - V_2)Jt = J^2Rt = \frac{(V_1 - V_2)^2 t}{R} \quad \ldots \quad (18)$$

Die Elektrizitätsmenge η, welche in der Zeit t durch einen beliebigen Querschnitt des Stromkreises hindurchfließt, ist gleich

$$\eta = \eta_1 t = Jt \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

Die gefundenen Relationen setzen uns in den Stand, die el.-mg. Einheiten der Größen η, $V_1 - V_2$ (oder V) und R (oder ϱ) zu finden. Formel (19) gibt den Satz:

Die el.-mg. Einheit der Elektrizitätsmenge fließt in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters bei der el.-mg. Einheit der Stromstärke. Letztere war auf S. 491 definiert worden. Wie erinnerlich, hatten wir im ersten Abschnitte, auf S. 41, die el.-st. Einheit der Elektrizitätsmenge, ausgehend vom Coulombschen Gesetze über die Wechselwirkung von elektrisierten Körpern bestimmt. Hier aber haben wir eine andere, die el.-mg. Einheit der Elektrizitätsmenge gefunden, indem wir vom Coulombschen Gesetze ausgingen, das sich auf die Wechselwirkung von magnetisierten Körpern bezieht. Wir wollen diese beiden Einheiten mit η_e und η_m bezeichnen. Wir werden sehen, daß

$$\eta_m = v\eta_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

ist, wo v der numerische Wert der Lichtgeschwindigkeit ist, ausgedrückt in den Einheiten der Geschwindigkeit, welche auf die gleichen Grundeinheiten der Länge und Zeit zurückgehen, wie sie zusammen mit der Masseneinheit dem Systeme der el.-st. und el.-mg. Einheiten zugrunde liegen.

Im besonderen Falle erhält man folgende Definition: Die el.-mg. C.G.S.-Einheit der Elektrizitätsmenge fließt in einer Sekunde durch einen beliebigen Querschnitt des Stromkreises bei einer el.-mg. C.G.S.-Einheit der Stromstärke. An Stelle der allgemeinen Formel (20) hat man jetzt

$$\eta_m = 3 \,.\, 10^{10}\eta_e \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20,\mathrm{a})$$

Diese Formel zeigt uns, daß die el.-mg. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge eine im gewöhnlichen Sinne des Wortes sehr große Menge darstellt. Zwei derartige Einheiten wirken, wenn sie um einen Kilometer voneinander abstehen, mit einer Kraft von

$$\frac{3 \,.\, 10^{10} \,.\, 3 \,.\, 10^{10}}{(10^5)^2} \text{ Dynen} = 108000 \text{ kg}$$

aufeinander ein.

Die Formeln (19) und (4, a) liefern uns die Dimension der el.-mg. Einheit der Elektrizitätsmenge, nämlich

$$[\eta] = [J]\,T = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\, T = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \qquad (20,\mathrm{b})$$

Sieht man μ als Größe von der nullten Dimension an, so ist

$$[\eta] = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20,\mathrm{c})$$

Die Elektrizitätsmenge, welche in einer Sekunde durch einen beliebigen Querschnitt des Stromkreises bei einer Stromstärke von einem Ampere fließt, heißt Coulomb. Es ist dies die in der Praxis gebräuchliche el.-mg. Einheit der Elektrizitätsmenge. Aus der Definition des Ampere (S. 491) folgt, daß das Coulomb gleich 0,1 el.-mg. C. G. S.-Einheiten der Elek-

trizitätsmenge ist. Ein Coulomb ist gleich 3.10^9 el.-st. C. G. S.-Einheiten der Elektrizitätsmenge. Zwei Coulombs Elektrizität in einem Kilometer Entfernung voneinander wirken mit einer Kraft von 1080 kg aufeinander ein. Ein Mikrocoulomb (10^{-6} Coulombs) ist gleich 3000 el.-st. C. G. S.-Einheiten der Elektrizitätsmenge.

Die erste der Formeln (12), nämlich die Formel

$$r = (V_1 - V_2)\eta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

liefert uns für die Einheit des Potentials folgende Definition:

Die el.-mg. Einheit des Potentials ist gleich der Potentialdifferenz zweier Punkte, wenn beim Übergange der el.-mg. Einheit der Elektrizitätsmenge aus einem dieser Punkte zum anderen die Einheit der Arbeit geleistet wird. Sie ist offenbar $v$mal kleiner als die el.-st. Einheit des Potentials. Die el.-mg. C. G. S.-Einheit des Potentials ist gleich der Potentialdifferenz zweier Punkte, wenn beim Übergange der el.-mg. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge von einem dieser Punkte zum anderen ein Erg Arbeit geleistet wird. Sie ist 3.10^{10}mal kleiner als die el.-st. C. G. S.-Einheit des Potentials. Da diese letztere (das Potential eines Kügelchens von 1 cm Radius, auf dessen Oberfläche sich eine el.-st. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge befindet) schon eine im gewöhnlichen Sinne des Wortes kleine Größe ist, so ist natürlich die el.-mg. C. G. S.-Einheit des Potentials eine ganz verschwindend kleine Größe.

Formel (21), in welcher r eine Arbeit bedeutet, sowie Formel (20, b) liefern die Dimension der el.-mg. Einheit des Potentials V oder der Potentialdifferenz oder — was dasselbe besagt — der elektromotorischen Kraft E

$$[V] = [E] = [r]:[\eta] = L^2 M T^{-2} : [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \quad (21,\mathrm{a})$$

Im besonderen Falle, wo man μ als Größe der nullten Dimension ansieht, ist

$$[V] = [E] = L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \quad \ldots\ldots \quad (21,\mathrm{b})$$

Die in der Praxis gebräuchliche el.-mg. Einheit des Potentials oder der Potentialdifferenz ist das Volt; dasselbe ist gleich 10^8 el.-mg. C. G. S.-Einheiten des Potentials. Eine C. G. S.-Einheit des Potentials ist also gleich 300 Volt.

Die elektromotorische Kraft eines Daniellelementes, d. h. die Potentialdifferenz an den Enden einer regelrecht offenen Kette, in welche ein Daniellelement eingeschaltet ist, beträgt etwas mehr als 1 Volt. Schaltet man hintereinander (S. 180) 300 Elemente, von denen jedes eine elektromotorische Kraft von 1 Volt hat und verbindet den einen Pol dieser Kette mit der Erde, den anderen mit einem Kügelchen von 1 cm Radius, so befindet sich auf diesem Kügelchen eine el.-st. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge.

Formel (15) liefert uns die el.-mg. Einheit des Widerstandes: Die el.-mg. Einheit des Widerstandes ist der Widerstand eines Leiters, in welchem die el.-mg. Einheit der Stromstärke auftritt, wenn die Potentialdifferenz seiner Enden gleich der el.-mg. Einheit des Potentials ist. Im besonderen Falle: Die el.-mg. C. G. S.-Einheit des Widerstandes ist der Widerstand eines Leiters, in welchem die el.-mg. C. G. S.-Einheit der Stromstärke (10 Amperes) auftritt, wenn die Potentialdifferenz seiner Enden gleich der el.-mg. C. G. S.-Einheit des Potentials ist. Da 10 Amperes eine Stromstärke ist, welche bereits einen elektrischen Lichtbogen zu liefern vermag, die el.-mg. C. G. S.-Einheit des Potentials aber eine sehr kleine Größe ist, so folgt hieraus, daß die el.-mg. C. G. S.-Einheit des Widerstandes eine überaus kleine Größe ist. Aus Formel (15) folgt als Dimension der el.-mg. Einheit des Widerstandes:

$$[R] = [V] : [J] = [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} : [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} = [\mu] L T^{-1} \quad (21,c)$$

oder für den Fall, daß man μ als Größe der nullten Dimension ansieht,

$$[R] = \frac{L}{T} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (21,d)$$

Diese Dimension ist identisch mit der Dimension einer Geschwindigkeit. Die in der Praxis gebräuchliche Einheit des Widerstandes entspricht dem Ampere als Einheit der Stromstärke und Volt als Einheit der elektromotorischen Kraft und heißt Ohm. Symbolisch kann man auf Grund von Formel (15) schreiben:

$$1 \text{ Ohm} = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ampere}} = \frac{10^8 \text{ el.-mg. C. G. S-Einheiten des Potentials}}{0{,}1 \text{ el.-mg. C. G. S.-Einheit der Stromstärke}}$$
$$= 10^9 \text{ el.-mg. C. G. S.-Einheiten des Widerstandes.}$$

Somit ist das Ohm gleich 10^9 el.-mg. C. G. S.-Einheiten des Widerstandes. Untersuchungen, auf welche wir später zu sprechen kommen werden, haben gezeigt, daß das Ohm gleich dem Widerstande einer Quecksilbersäule von 1 qmm Querschnitt und 106,3 cm (wahrscheinlich genauer 106,27 cm) Länge bei 0° ist.

Den in der Praxis gebräuchlichen Einheiten, mit denen wir bekannt geworden sind, muß eine bestimmte Arbeitseinheit entsprechen, und zwar wird die Arbeit r in Formel (18) in dieser Einheit ausgedrückt, wenn man J, R und $V_1 - V_2$ in Coulombs, Ohms und Volts, die Zeit aber in Sekunden mißt. Die Gleichung $r = (V_1 - V_2)\, Jt$ gibt

Praktische Arbeitseinheit = (1 Volt) (1 Amp.) (1 sec)
= (10^8 el.-mg. C. G. S.-Einheiten des Potentials) (0,1 el.-mg. C. G. S.-Einheiten der Stromstärke) (1 C. G. S.-Einheit der Zeit)
= $10^8 . 0{,}1$ C. G. S.-Einheiten der Arbeit = 10^7 Erg = 10 Megaerg
= 1 Joule = 0,24 Grammkalorien.

Die Arbeitseinheit im System der praktischen Einheiten ist gleich einem Joule, das 0,24 Grammkalorien äquivalent ist. Man kann demnach die Formeln (17) und (18) folgendermaßen schreiben:

$$Q = 0{,}24\,(V_1 - V_2)\,Jt = 0{,}24\,J^2Rt = \frac{0{,}24\,(V_1 - V_2)^2 t}{R}\ \text{Grammkal.} \quad (22)$$

$$r = (V_1 - V_2)\,Jt = J^2Rt = \frac{(V_1 - V_2)^2 t}{R}\ \text{Joules} . \quad (22,\text{a})$$

Das Joule kann man als elektrotechnische Arbeitseinheit bezeichnen. Die ihr entsprechende elektrotechnische Einheit der Arbeitsfähigkeit ist das Sekundenjoule, das Watt; dasselbe ist gleich $\frac{1}{736}$ Pferdestärke. Wir haben bereits im I. Bande das Joule und Watt kennen gelernt, doch konnten wir erst an dieser Stelle erläutern, worauf sich die Wahl dieser Einheiten stützt.

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch die el.-mg. Einheit der Kapazität q betrachten. Ist η die Ladung, V das Potential, q die Kapazität eines Leiters, beispielsweise eines Kondensators, so ist $\eta = qV$; diese Formel zeigt uns, daß die el.-mg. Einheit der Kapazität gleich der Kapazität eines Körpers ist, der bei einer Ladung von einer el.-mg. Einheit der Elektrizitätsmenge die el.-mg. Einheit des Potentials aufweist. Da von den beiden letzten Einheiten die erste v mal größer, vgl. (20), die zweite aber v mal kleiner ist, als die entsprechenden el.-st. Einheiten, so ist klar, daß die el.-mg. Einheit der Kapazität v^2 mal größer ist als die el.-st. Einheit der Kapazität, oder daß sie gleich der Kapazität einer Kugel ist, deren Radius v^2 Längeneinheiten enthält.

Die el.-mg. C. G. S.-Einheit der Kapazität ist die Kapazität eines Körpers, der bei einer Ladung von einer el.-mg. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge (10 Coulombs) die el.-mg. C. G. S.-Einheit des Potentials aufweist. Sie ist gleich $v^2 = 9 . 10^{20}$ el.-st. C. G. S.-Einheiten der Kapazität oder gleich der Kapazität einer Kugel, deren Radius gleich $9 . 10^{20}$ cm $= 9 . 10^{15}$ km $=$ 64 Millionen Erdbahnradien ist.

Die Dimension der el.-mg. Einheit der Kapazität ist

$$[q] = [\eta]:[V] = [\mu]^{-\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} : [\mu]^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} = [\mu]^{-1} L^{-1} T^2 . \quad (23)$$

Oder, wie oben

$$[q] = L^{-1} T^2 \quad \ldots\ldots \quad (23,\text{a})$$

Die in der Praxis gebräuchliche Einheit der Kapazität heißt Farad.

Sie hat bei einer Ladung von einem Coulomb ein Potential von einem Volt. Symbolisch kann man schreiben:

$$1 \text{ Farad} = \frac{(1 \text{ Coulomb})}{(1 \text{ Volt})}$$

$$= \frac{(0{,}1 \text{ el.-mg. C. G. S.-Einheit der Elektrizitätsmenge})}{(10^8 \text{ el.-mg. C. G. S.-Einheiten des Potentials})}$$

$$= 10^{-9} \text{ el.mg. C. G. S.-Einheiten der Kapazität.}$$

Das Farad ist gleich 10^{-9} el.-mg. C. G. S.-Einheiten der Kapazität oder gleich $9 . 10^{11}$ el.-st. C. G. S.-Einheiten der Kapazität. Es ist dies die Kapazität einer Kugel, deren Radius gleich 9 Millionen Kilometer ist. Die faktisch in der Praxis gebräuchliche Größe ist das Mikrofarad $= 10^{-6}$ Farad. Ein Mikrofarad ist gleich 10^{-6} Farad $= 10^{-15}$ el.-mg. C. G. S.-Einheiten $= 900000$ el.-st. C. G. S.-Einheiten der Kapazität.

Das Mikrofarad ist gleich der Kapazität einer Kugel von 9 km Radius. Die Kapazität der Erdkugel ist gleich 708 Mikrofarads. Die Kapazität eines kreisförmigen Luftkondensators, dessen Plattenabstand 1 mm beträgt, ist gleich einem Mikrofarad, wenn der Plattenradius gleich 6 m ist; vgl. erster Abschnitt, Kap. I, (56, c), S. 116.

Wir wollen beweisen, daß das in der Technik gebräuchliche System von Einheiten ein absolutes System ist, d. h. daß es in richtiger Weise aus bestimmten Grundeinheiten der Länge L, Masse M und Zeit T abgeleitet ist. Beim Entwerfen dieses Systemes hatten wir willkürlich das Ampere $= 0{,}1$ el.-mg. C. G. S.-Einheiten und das Volt $= 10^8$ el.-mg. C. G. S.-Einheiten festgesetzt. Außerdem hatten wir bei Definition des Coulomb und Joule bereits als Zeiteinheit $T = 1$ Sekunde angenommen; das Ohm und Farad waren darauf regelrecht auf Grund des Ampere, Volt und Coulomb abgeleitet worden. Es bleibt also L und M zu bestimmen. Es sei $L = x\,\text{cm}$, $M = y\,\text{g}$. Dann erhält man nach (4, b) und (21, b):

$$1 \text{ Ampere} = 1 . (x\,\text{cm})^{\frac{1}{2}} (y\,\text{g})^{\frac{1}{2}} (\text{sec})^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \text{ C. G. S.-Einheiten der Stromstärke;}$$

$$1 \text{ Volt} = 1 . (x\,\text{cm})^{\frac{3}{2}} (x\,\text{g})^{\frac{1}{2}} (\text{sec})^{-2} = x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} \text{ C. G. S.-Einheiten des Potentials.}$$

Aus der Definition des Ampere und Volt folgt

$$x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 0{,}1 \qquad x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 10^8.$$

Hieraus ist $x = 10^9$, $y = 10^{-11}$. Das technische Maßsystem basiert somit auf den Grundeinheiten $L = 10^9\,\text{cm}$ (ungefähr die Länge eines Erdquadranten), $M = 10^{-11}\,\text{g}$ und $T = 1$ sec.

Im ersten Abschnitt sind wir bereits auf technische Einheiten gestoßen und haben auf die verschiedenen Beziehungen zwischen denselben hingewiesen.

§ 4. Ohmsches Gesetz. Schaltung von Elementen. Als Grundlage für unsere weiteren Untersuchungen sollen die beiden Formeln (2, f), S. 486 und (15), S. 497 dienen, in denen wir jedoch die Bezeichnungen etwas verändern werden. Der ersten von ihnen geben wir die Form

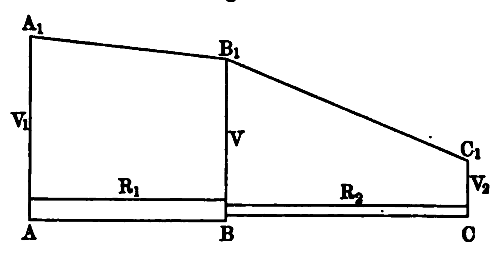
$$E = \Sigma e_k = V' - V'' \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Sie besagt, daß die elektromotorische Kraft E eines Elementes gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte oder Potentialsprünge e_k ist, die in der Kette vorkommen, sowie auch gleich der Potentialdifferenz $V' - V''$ an den Enden der regelrecht offenen Kette. Die zweite Formel

$$J = \frac{V_1 - V_2}{R_{1,2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

liefert uns die Stromstärke in einem geometrisch und physikalisch homogenen Teile des Stromkreises, wenn der Widerstand dieses Teiles $R_{1,2}$, die Potentialdifferenz seiner Enden gleich $V_1 - V_2$ ist. Formel (25) besagt, daß in allen solchen Teilen des Stromkreises das

Fig. 193.



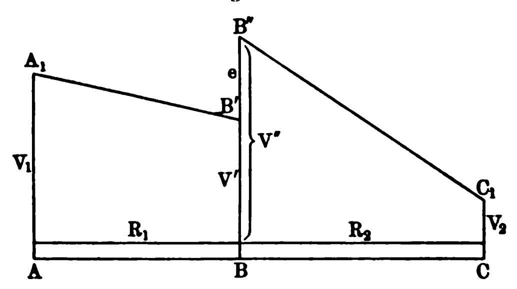
Potentialgefälle ein und denselben, der Stromstärke gleichen Wert hat. Je größer der Widerstand der Längeneinheit des zum Stromkreis gehörigen Leiters ist, um so schneller fällt das Potential. Wenden wir uns dem Falle zu, wo der betreffende Teil des Stromkreises physikalisch homogen, aber geometrisch inhomogen ist. Es mögen die Teile AB und BC (Fig. 193) aus demselben Stoffe bestehen, jedoch verschiedene Dicke haben; V_1 und V_2 seien die Potentiale in A und C; R_1 und R_2 die Widerstände der Teile AB und BC. Wir tragen die Werte der Potentiale als Ordinaten zu den am Stromkreise entlang genommenen Abszissen ab. Die Verteilung der Potentiale stellt sich dann graphisch in Form der gebrochenen Linie $A_1B_1C_1$ dar; das Gefälle längs BC ist größer als dasjenige längs AB. Es sei V das Potential in B und $R_1 + R_2 = R_{1,2}$. Dann ist

$$J = \frac{V_1 - V}{R_1} = \frac{V - V_2}{R_2} = \frac{(V_1 - V) + (V - V_2)}{R_1 + R_2} = \frac{V_1 - V_2}{R_{1,2}} \quad (25,\text{a})$$

$$V = \frac{V_1 R_2 + V_2 R_1}{R_1 + R_2} \quad \ldots\ldots \quad (25,\text{b})$$

Die erste der Gleichungen zeigt uns, daß Formel (25) für jeden physikalisch homogenen Teil des Stromkreises gilt, wenn derselbe auch geometrisch inhomogen ist. Wenden wir uns nun dem Falle zu, wo ein Teil des Stromkreises physikalisch inhomogen ist. AC sei ein Teil der Kette, der aus zwei ungleichartigen Teilen AB und BC besteht (Fig. 194), wobei in B die elektromotorische Kraft e wirkt, die

Fig. 194.



gleich dem Potentialsprung $V''-V'$ ist. Die Verteilung des Potentials wird dann durch die gebrochene Linie $A_1B'B''C_1$ dargestellt, wobei $B''B' = V''-V' = e$ ist. Es ist

$$\left.\begin{aligned} J = \frac{V_1-V'}{R_1} = \frac{V''-V_2}{R_2} = \frac{(V_1-V')+(V''-V_2)}{R_1+R_2} \\ = \frac{V_1-V_2+(V''-V')}{R_1+R_2} = \frac{V_1-V_2+e}{R_{1,2}} \end{aligned}\right\} . \quad (25,c)$$

Hieraus folgt

$$V' = \frac{V_1R_2+V_2R_1-eR_1}{R_1+R_2}; \quad V'' = \frac{V_1R_2+V_2R_1+eR_2}{R_1+R_2} \quad (25,d)$$

Wenden wir uns jetzt der vollständigen geschlossenen Kette zu. In ihr kommen Potentialsprünge vor, die wir positiv nach oben, und Gefälle, die wir positiv nach unten rechnen. Gehen wir, von irgend einem Punkte M der Kette beginnend, in Gedanken um die ganze Kette herum und kehren dann zu M zurück, so kehren wir auch zum früheren Werte des Potentials zurück. Hieraus folgt, daß die Summe der Änderungen des Potentials längs der ganzen Kette gleich Null ist. Da aber diese Änderungen bloß Sprünge und Gefälle sein können, so wird aus obigem klar, daß in einer geschlossenen Kette die Summe der Potentialsprünge gleich der Summe der Potentialgefälle ist. Die Summe der Sprünge ist aber nichts anderes als die im Stromkreise wirkende elektromotorische Kraft E, folglich ist im geschlossenen Stromkreise die Summe aller Potentialgefälle gleich der elektromotorischen Kraft E. Teilen wir den ganzen Stromkreis in physikalisch homogene Teile;

es seien die Potentiale an den Enden des ersten Teiles V_1 und V_2, des zweiten Teiles V_3 und V_4 usw. Natürlich ist V_2 nicht gleich V_3, V_4 nicht gleich V_5, da an den Grenzen dieser Teile Potentialsprünge vorhanden sind. $R_{1,2}$, $R_{3,4}$ usw. seien die Widerstände der Teile und $R = R_{1,2} + R_{3,4} + \cdots$ der Widerstand der ganzen Kette. Für jeden Teil kann man die Gleichung (25, a) anschreiben. Man erhält

$$J = \frac{V_1 - V_2}{R_{1,2}} = \frac{V_3 - V_4}{R_{3,4}} = \cdots = \frac{(V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) + (V_5 - V_6) + \cdots}{R_{1,2} + R_{3,4} + R_{5,6} + \cdots}$$

Im Zähler haben wir die Summe aller Potentialgefälle der Kette, die, wie soeben bewiesen wurde, gleich E ist; führt man nun noch die Summe der Widerstände R ein, so erhält man

$$J = \frac{E}{R} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Durch diese Formel wird das berühmte Ohmsche Gesetz ausgedrückt: Die Stromstärke ist direkt proportional der elektromotorischen Kraft, welche im Stromkreise wirkt und indirekt proportional dem gesamten Widerstand der ganzen Kette. Auch die Formeln (25, a) und (26, c) kann man als Ausdrücke des Ohmschen Gesetzes ansehen, bezogen auf einen Teil der Kette, wenn im ersten Falle $V_1 - V_2$, im zweiten $V_1 - V_2 + e$ als elektromotorische Kraft, die auf den gegebenen Teil der Kette wirkt, angesehen wird.

Kennt man E und R, so erhält man die Stromstärke J, welche auch gleich dem Potentialgefälle pro Einheit des Widerstandes ist. Kennt man die Widerstände aller Teile der Kette im einzelnen, so kann man die Größe des Potentialgefälles in jedem Teile der Kette bestimmen. Befindet sich im Stromkreise ein Element, so darf man im allgemeinen das Potentialgefälle innerhalb des Elementes nicht vernachlässigen, da zu letzterem Flüssigkeiten gehören, deren spezifischer Widerstand sehr groß im Vergleich zu dem der Metalle ist. Es läßt sich leicht finden, ein wie großer Teil des Gefälles auf das Element selbst kommt. Bezeichnen wir den „inneren" Widerstand, d. h. den Widerstand des Elementes mit R_i, den „äußeren" Widerstand, d. h. den Widerstand des übrigen Teiles der Kette, in welchem keine elektromotorischen Kräfte mehr wirken, mit R_e, so ist $R_i + R_e = R$. Das Potentialgefälle im Inneren des Elementes ist gleich $\frac{R_i E}{R}$, dasjenige der äußeren Kette gleich $\frac{R_e E}{R}$.

Nehmen wir an, es sei bei offenem Stromkreise die Potentialdifferenz an den Polschrauben des Elementes, an denen die äußere Kette beginnt, gleich $V_1 - V_2$, dann ist $V_1 - V_2 = E$. Wir haben die Gleichung (26)

$$J = \frac{E}{R} = \frac{V_1 - V_2}{R_i + R_e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26, a)$$

Bezeichnen wir die Potentialdifferenz an denselben Klemmschrauben bei geschlossener Kette mit $V' - V''$. Dann gibt (25, a) für den äußeren Teil der Kette

$$J = \frac{V' - V''}{R_e} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26, b)$$

Hieraus folgt

$$\frac{V' - V''}{V_1 - V_2} = \frac{V' - V''}{E} = \frac{R_e}{R} = \frac{R_e}{R_e + R_i} \quad \ldots \quad (26, c)$$

Ist der äußere Widerstand R_e sehr groß im Vergleich zu R_i, so ist $V' - V''$ fast gleich $V_1 - V_2$ oder gleich E; ist R_e sehr klein im Vergleich zu R_i, so ist $V' - V''$ eine sehr kleine Größe.

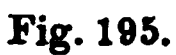
Es sind von verschiedenen Forschern zahlreiche experimentelle Untersuchungen zur Prüfung des Ohmschen Gesetzes angestellt worden. Alle diese Arbeiten haben aber gegenwärtig nur noch historisches Interesse, weshalb wir uns fast ausschließlich auf einen Hinweis auf die allerwichtigsten von diesen Arbeiten beschränken werden. Aus der Zahl der älteren Arbeiten sind zu erwähnen die von Fechner (1831), Pouillet, Gaugain, Beetz (1862) und Kohlrausch (1869), welche die Gesetze bezüglich der Abhängigkeit des Widerstandes von den Dimensionen des Leiters, sowie auch das Ohmsche Gesetz selbst bestätigten.

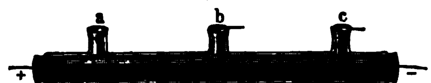
Ferner hat eine Kommission, zu welcher Maxwell, Everett und Schuster gehörten, im Auftrage der British Association eine Prüfung des Ohmschen Gesetzes ausgeführt; fast gleichzeitig hat Chrystall eine noch genauere Untersuchung nach einer von Maxwell vorgeschlagenen Methode ausgeführt. Speziell für flüssige Leiter haben Cohn, Fitzgerald und Trouton, sowie endlich für sehr verdünnte Lösungen Sulzberger das Ohmsche Gesetz verifiziert. Alle diese Arbeiten haben innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler die Richtigkeit jenes Gesetzes bestätigt.

Ein sehr bequemer Apparat und eine elegante Methode zur Prüfung aller Teile des Ohmschen Gesetzes als praktische Übung für Studierende sind in E. Wiedemann und H. Ebert: „Physikalisches Praktikum“, 5. Aufl., Braunschweig 1904, S. 410, beschrieben.

Das Gesetz, daß in allen Teilen der Kette das Potentialgefälle pro Einheit des Widerstandes das gleiche ist, ist theoretisch gleichbedeutend mit dem Gesetz, nach welchem die Stromstärke in allen Teilen der Kette die gleiche ist. Nichtsdestoweniger sind auch heute noch die Arbeiten von Ermann und R. Kohlrausch von Interesse, welche die Verteilung der Elektrisierung (des Potentials) längs der Kette untersucht haben. Ermann (1801) hat bereits lange vor Ohm die Elektrisierung

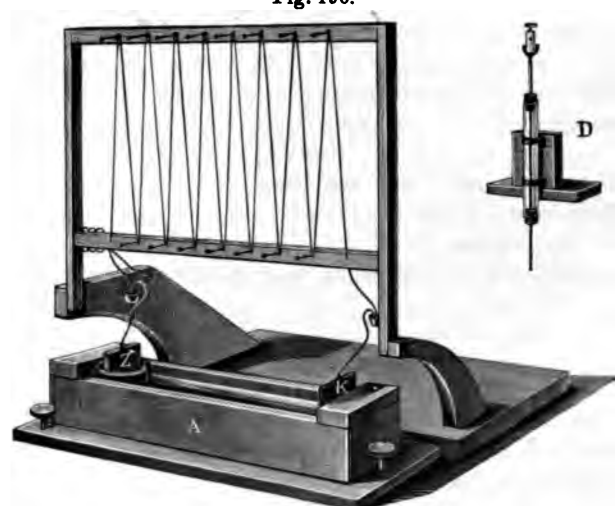
verschiedener Punkte einer Flüssigkeitssäule (Fig. 195) untersucht, welche in den Stromkreis geschaltet war. Die Flüssigkeit befand sich hierbei im Inneren einer langen Röhre, welche mit seitlichen Röhrchen *a*, *b*, *c* versehen war; durch letztere wurden Drähte eingeführt, welche mit einem empfindlichen Elektroskop in Verbindung standen. Hierbei wurde am einen Ende eine positive, am anderen eine negative Elektrisierung beobachtet und in der Mitte ein neutraler Punkt. Sehr sorgfältige Untersuchungen hat R. Kohlrausch (1848) ausgeführt. Unter


Fig. 195.



Benutzung eines ebenen Kondensators (S. 110) wies er nach, daß die elektromotorische Kraft der Elemente, welche in geschlossener Kette nach einer der später zu erwähnenden Methoden gemessen wird, proportional der Potentialdifferenz der Enden der regelrecht offenen Kette ist. Ferner untersuchte er das Potentialgefälle längs einer geschlossenen Kette, wobei er sich des in Fig. 196 abgebildeten Apparates bediente.

Fig. 196.



Das Element bestand aus einem länglichen Kasten *A*, welcher Kupfervitriollösung, eine Kupferplatte *K* und ein poröses Gefäß mit Zinksulfatlösung und einer Zinkplatte enthielt. Die äußere Kette bestand aus einem langen Drahte, der im Zickzack auf einem Holzrahmen befestigt war. Einer der Punkte (*a*) der Kette wurde mit einer der Platten eines Kondensators und mit der Erde verbunden, ein anderer Punkt (*b*) mit der anderen Kondensatorplatte; die Ladung des Konden-

sators maß die Potentialdifferenz der Punkte *a* und *b*. Für den flüssigen Teil der Kette dienten Drahtsonden *D*. Durch Variierung der Punkte *a* und *b*, Wechsel der Leiter usw. wurde dann in leicht verständlicher Weise die Abhängigkeit des Potentialgefälles vom Widerstande untersucht.

Die Richtigkeit des Ohmschen Gesetzes für den Fall, daß in die Kette sehr schlechte Leiter eingeführt sind, haben Gaugain (1860, Zwirnfäden), sowie J. J. Thomson und Newall (1887, Olivenöl, Schwefelkohlenstoff, Benzol) untersucht.

Die Richtigkeit des Ohmschen Gesetzes für Elektrolyte ist für gute Leiter und geringes Potentialgefälle (10^{-6} Volt pro Centimeter) von Kohlrausch und Nippolt (1869) nachgewiesen worden, für schlechte Leiter (destilliertes Wasser) und starkes Gefälle (100 Volt pro Centimeter) von Kohlrausch und Heydweiller (1894). Für Wechselströme ist das Ohmsche Gesetz in bezug auf Elektrolyte von Kohlrausch und Grotrian (1874) bestätigt worden, die bis zu 100 Wechseln pro Sekunde gingen; E. Cohn (1884) ging bis zu 25 000 Stromschwingungen (Wechseln) pro Sekunde und endlich Nernst (1897) und Erskine (1897) bis zu vielen Millionen Schwingungen (Hertzsche Strahlen). E. Cohn hat auf theoretischem Wege gezeigt, daß, falls das Faradaysche Gesetz der Elektrolyse (s. u.) richtig ist, Abweichungen vom Ohmschen Gesetz für Elektrolyte sogar bei 10^9 Schwingungen pro Sekunde noch nicht nachgewiesen werden können, sondern daß erst bei Schwingungen von der Ordnung 10^{15} pro Sekunde (Lichtschwingungen) das Ohmsche Gesetz seine Gültigkeit verliert.

Bellati und Lussanna, Herwig, Siemens und insbesondere Braun haben auf eine Reihe von Substanzen hingewiesen, bei deren Anwesenheit in der Kette das Ohmsche Gesetz sich nicht vollständig bestätigen läßt. Indes in allen diesen Fällen hat man es mit irgendwelchen sekundären Erscheinungen zu tun, die auf die Beobachtungsresultate einwirken.

Das Ohmsche Gesetz gestattet, die Stromstärke in einer Kette zu berechnen, in welcher n zu einer sogenannten Batterie vereinigte Elemente wirken. Es sei e die elektromotorische Kraft, r der Widerstand eines Elementes, R_0 der Widerstand der äußeren Kette, E die elektromotorische Kraft, R_i der Widerstand der Batterie. Die Verbindung der Elemente kann entweder eine Reihenschaltung, Parallelschaltung oder Gruppenschaltung sein. Betrachten wir zunächst die beiden ersten Schaltungsweisen. Auf S. 180 war bereits bewiesen worden, daß bei der Reihenschaltung $E = ne$ ist, bei der Parallelschaltung $E = e$. Bei der Reihenschaltung ist offenbar $R_i = nr$, bei der Parallelschaltung $R_i = r : n$, da n parallel geschaltete Elemente gleichsam ein einziges Element bilden, bei welchem der Flächeninhalt des vom Strom durchflossenen Querschnittes n mal vergrößert ist. Die folgende Tabelle ist demnach ohne weiteres verständlich.

	Allgem. Formel	R_0 sehr groß	R_0 sehr klein
Ein Element	$J=\frac{e}{r+R_0}$	$J=\frac{e}{R_0}$	$J=\frac{e}{r}$
n in Reihen geschaltete Elemente	$J=\frac{ne}{nr+R_0}$	$J=\frac{ne}{R_0}$	$J=\frac{e}{r}$
n parallel geschaltete Elemente	$J=\frac{e}{\frac{r}{n}+R_0}$	$J=\frac{e}{R_0}$	$J=\frac{ne}{r}$

Die beiden letzten Vertikalkolumnen zeigen, daß man die Elemente in Reihen zu schalten hat, wenn der äußere Widerstand R_0 sehr groß im Vergleich zum inneren R_i ist, und parallel zu schalten hat, wenn umgekehrt R_0 klein im Vergleich zu R_i ist.

Setzen wir $n=pq$, wo p und q zwei ganze Zahlen sind. Die gegebenen n Elemente kann man in Gruppen schalten, und zwar p Elemente hintereinander, die erhaltenen q Gruppen parallel schalten oder, was im wesentlichen dasselbe ist, je q Elemente parallel, die erhaltenen p Gruppen aber hintereinander. In diesem Falle ist $E=pe$; $R_i=\frac{pr}{q}$, so daß die Stromstärke

$$J=\frac{pe}{\frac{pr}{q}+R_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

ist. Substituiert man $q=n:p$, so ist

$$J=\frac{pe}{\frac{p^2r}{n}+R_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27,\text{a})$$

Es fragt sich nun, wie man die Faktoren p und q zu wählen hat, damit man die größtmögliche Stromstärke erhält, welche Gruppierung der n Elemente in dieser Hinsicht die vorteilhafteste ist. Um diese Aufgabe zu lösen, sehen wir J einstweilen als Funktion der sich stetig ändernden Zahl p an. Dann finden wir das Maximum von J aus der Bedingungsgleichung $\frac{dJ}{dp}=0$, d. h.

$$\frac{dJ}{dp}=\frac{\left(\frac{p^2r}{n}+R_0\right)e-pe\cdot\frac{2pr}{n}}{\left[\frac{p^2r}{n}+R_0\right]^2}=\frac{R_0-\frac{p^2r}{n}}{\left[\frac{p^2r}{n}+R_0\right]}e=0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{p^2r}{n}=R_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27,\text{b})$$

oder

$$R_i=R_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27,\text{c})$$

Die maximale Stromstärke tritt bei einer derartigen Gruppierung der gegebenen n Elemente ein, bei welcher der Widerstand der Batterie gleich dem äußeren Widerstande der Kette ist. Formel (27, b) und die Relation $q = n:p$ geben

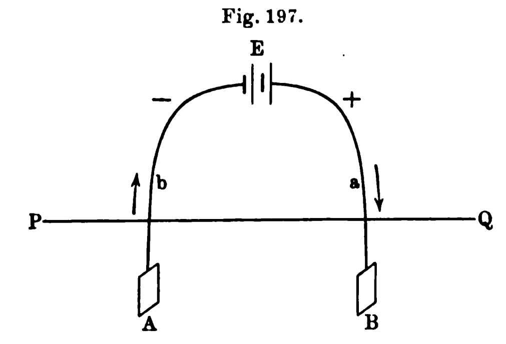
$$p = \sqrt{\frac{R_0}{r} n}; \quad q = \sqrt{\frac{r}{R_0} n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27,d)$$

In der Praxis hat man für p und q diejenigen ganzen Zahlen zu wählen, welche den nach diesen Formeln berechneten am nächsten stehen und der Gleichung $pq = n$ genügen.

Außer den von uns betrachteten Schaltungsarten kann man auch noch andere anwenden, bei denen z. B. die einzelnen Gruppen nicht untereinander gleich sind. Wassmuth, Auerbach, Grawinkel und Zetlin haben verschiedene hierauf bezügliche Aufgaben gelöst. Außerdem gibt es Fälle, wo man nicht nach der Erreichung einer möglichst großen Stromstärke strebt, sondern irgend welchen anderen Bedingungen zu genügen hat. Hierher gehört z. B. die Bedingung, daß die Wirkungsweise der Batterie eine möglichst ökonomische sei, d. h. daß der Stoffverbrauch (z. B. der Verbrauch von Zn) in bezug auf die Einheit der erhaltenen Stromstärke ein möglichst geringer sei. Mit dieser letzteren Aufgabe haben sich insbesondere Weinhold und Handl beschäftigt.

Zum Schlusse wollen wir noch einige Worte über das Schließen einer Kette durch die Erde sagen. Es stelle PQ (Fig. 197) die Erdoberfläche dar. A und B seien zwei im Erdboden eingegrabene Metallplatten; verbindet man dann letztere mit der Batterie E, so erweist sich die Kette als geschlossen, d. h. es strömt in bEa ein kontinuierlicher Strom, wenn sich auch die Platten A und B in ungeheuer großem Abstande voneinander befinden. Es wäre ein Irrtum, wenn man annehmen wollte, daß in diesem Falle in der Erde ein Strömen der positiven Elektrizität von B nach A erfolgt. Man hat vielmehr die Erdkugel als ein ungeheuer großes Reservoir der Elektrizität anzusehen, das sich auf dem Potential Null befindet. Die Batterie E erhält in a ein positives, in b ein negatives Potential aufrecht, weshalb ein kontinuierliches Strömen der positiven Elektrizität von a durch B zur Erde und von der Erde durch A nach b stattfindet.

Fig. 197.



Es ist oft wichtig, zu beachten, daß man beim Anschluß einer Batterie an die Erde fast immer in die Kette neue elektromotorische Kräfte einführt, welche an den Berührungsflächen der Platten A und B mit dem mehr oder weniger feuchten Erdboden wirken. Sind die innerhalb der Kette wirkenden elektromotorischen Kräfte überhaupt gering und hat man es mit genauen Messungen zu tun, so kann der angedeutete Umstand von nicht geringer Bedeutung werden.

§ 5. Stromverzweigungen. Bis hierhin hatten wir angenommen, daß die Kette aus einem Elemente oder einer Batterie und einer ununterbrochenen Reihe von linearen Leitern (Drähten) besteht. Im äußeren Teile einer solchen Kette ist die Stromrichtung überall die gleiche und das Potentialgefälle in dieser Richtung überall positiv, d. h. nach unten gerichtet. Gehen wir nun zu dem Falle über, wo die linearen Leiter ein Netz bilden, in welchem an verschiedenen Punkten sich die Leiter verzweigen, während an anderen Punkten elektromotorische Kräfte wirken. Unsere Aufgabe besteht dann im folgenden:

Gegeben sei ein bestimmtes Netz, d. h. es seien die geometrische Verteilung aller dieser Leiter, sowie alle elektromotorischen Kräfte nach Größe, Richtung und dem Orte ihres Wirkens im Netze gegeben. Es ist die Stärke der Ströme in allen Leitern, aus denen das Netz besteht, nach Größe und Richtung zu bestimmen. Die obige Aufgabe kann mit Hilfe der beiden Kirchhoffschen Gesetze, die wir sogleich betrachten wollen, vollständig gelöst werden.

Nehmen wir an, es treffe in einem gewissen Punkte P des Netzes eine Reihe von Leitern zusammen; einen solchen Punkt kann man dann als Knoten (Verzweigungspunkt) bezeichnen. Da im Knoten weder eine Anhäufung noch auch ein Verlust an Elektrizität eintritt, so ist klar, daß ebensoviel Elektrizität in der Zeiteinheit zu diesem Punkte hinströmt, als von ihm fortströmt. Mit anderen Worten: die Summe der Stromstärken J, welche zum Knoten hinströmen, muß gleich der Summe der Stromstärken sein, welche vom Knoten fortströmen. Sieht man jedoch die Ströme, welche zum Knoten hinfließen, als positiv, die vom Knoten fortfließenden als negativ an, so kann man obiges Resultat einfacher durch folgende Formel ausdrücken:

$$\Sigma J = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Erstes Kirchhoffsches Gesetz: Die Summe der Stromstärken in Leitern, welche in einem Knotenpunkte zusammentreffen, ist gleich Null; hierbei muß man den zum Knoten hinfließenden und den vom Knoten fortfließenden Strömen das entgegengesetzte Vorzeichen geben.

Gehen wir jetzt zum zweiten Gesetz über; dasselbe bezieht sich auf ein beliebiges System von Leitern, welche im gegebenen Netze eine

geschlossene Figur oder, wie wir sagen werden, eine geschlossene Kontur bilden. Es sei $ABCDEFGA$ (Fig. 199) eine solche Kontur; in ihr wirken die gegebenen elektromotorischen Kräfte E_1, E_2, E_3 usw. Jeder Abschnitt derselben AB, BC usw. besitzt einen bestimmten Widerstand, der ebenfalls gegeben ist; es ist die Stärke des in jedem Abschnitte fließenden Stromes zu finden. Wir teilen nun die ganze Kontur in Teile, welche keine elektromotorischen Kräfte und auch keine Knotenpunkte enthalten, z. B. in die Teile Aa, bB, BC, Cc, dD, DE, EF usw. Formel (25, a) zeigt uns, daß in jedem Teile das Potentialgefälle an Größe gleich dem Produkte aus der Stromstärke J und dem Widerstande ist und die Richtung des Stromes J hat. Geht man in Gedanken in irgend einer bestimmten Richtung um die ganze Kontur herum, so ergibt sich die Summe der Potentialgefälle gleich der Summe der

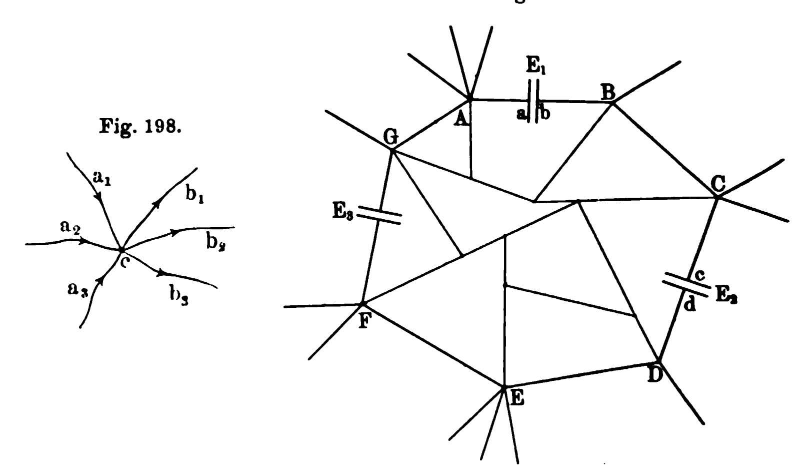


Fig. 198.

Fig. 199.

Größen JR. Die Summe der Gefälle aber, die nach unten hin positiv gerechnet werden, muß gleich der Summe der Sprünge sein, die positiv nach oben hin gerechnet werden, da die Summe aller Potentialänderungen, auf die man beim Gange um die Kontur herum trifft, offenbar gleich Null sein muß. Auf diese Weise erhält man die Gleichung

$$\Sigma JR = \Sigma E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Sind jedoch in der gewählten Kontur keine elektromotorischen Kräfte vorhanden, so ist

$$\Sigma JR = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29,a)$$

Zweites Kirchhoffsches Gesetz: In jeder geschlossenen Kontur ist die Summe der Produkte aus den Stromstärken und den Widerständen der Konturteile gleich der Summe

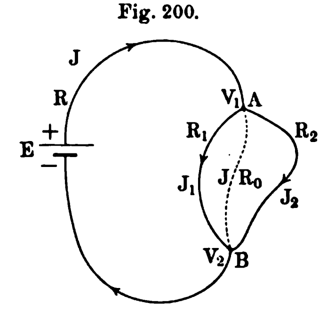
der elektromotorischen Kräfte. Während man in Gedanken die Kontur umwandert, hat man J als positiv anzusehen, wenn der Strom in der Richtung unserer Wanderung fließt, E als positiv, wenn man einen nach oben gerichteten Potentialsprung trifft.

Schreibt man die Gleichungen (28) und (29) oder (29, a) für die verschiedenen Knotenpunkte und Konturen an, so findet man stets die notwendige und hinreichende Zahl von Gleichungen zur Bestimmung aller gesuchten Werte von J.

Da die Stromstärke J beispielsweise in Aa und bB oder in cC und dD die gleiche ist, so ist klar, daß die Teile AB, CD, FG ein Glied von der Form JR liefern, wo R der Gesamtwiderstand eines solchen Teiles ist.

Über die Aufstellung der Gleichungen von der Form (28) und (29) wollen wir noch eine überaus wichtige Bemerkung machen. Die Aufgabe besteht, wie wir gesehen haben, darin, die Stromstärken J nach Größe und Richtung zu bestimmen. Indes könnte es scheinen, daß zur Aufstellung der Gleichungen (28) und (29) die Stromrichtungen bereits bekannt sein müssen, da die Größen J in diese Gleichungen, wie oben erwähnt, mit den zugehörigen Vorzeichen eingeführt werden müssen. In Wirklichkeit ist aber eine derartige Schwierigkeit nicht vorhanden. Es ist nämlich in einigen Fällen schon aus der Anordnung der einzelnen Teile der Kette ersichtlich, was für eine Richtung der Strom in jedem der Teile haben muß. Ist dies jedoch nicht zu ersehen, so hat man den Strömen J in diesen Teilen vorläufig irgend eine willkürliche Richtung zuzuschreiben. Erhält man dann bei Auflösung der Gleichungen (28) und (29) das Resultat $J > 0$, so heißt das, die angenommene Richtung war die richtige; im anderen Falle erhält man $J < 0$.

Fig. 200.



Es sind von verschiedenen Forschern noch andere allgemeine Gesetze und Regeln aufgestellt worden, die sich auf die Stromverzweigung in einem Systeme von Leitern beziehen, so z. B. von Bosscha, Helmholtz, Borgmann, Sluginow u. a.; allgemeine Hinweise auf Methoden zur Aufstellung und Auflösung der Gleichungssysteme (28) und (29) stammen von Maxwell, Fleming, Ulbricht, Guillaume u. a. Wir wollen uns bei diesen Arbeiten nicht weiter aufhalten, da wir es nur mit sehr einfachen Fällen der Stromverteilung zu tun haben werden, deren Untersuchung keinerlei Schwierigkeiten bietet. Im Kapitel von den elektrischen Messungen kommen einige kompliziertere Fälle der Stromverzweigung vor, hier jedoch werden wir nur die einfachsten Fälle berücksichtigen.

I. Einfache Verzweigung und Nebenschluß (Shunt). Das Schema der einfachen Stromverzweigung ist in Fig. 200 (a. v. S.) dargestellt In der Kette wirkt die elektromotorische Kraft E; die Punkte A und B sind durch zwei Drähte verbunden, deren Widerstände R_1 und R_2 sind; der Teil AEB besitzt den Widerstand R. Man hat die Stromstärken J, J_1 und J_2 in der Hauptkette und den beiden Zweigen AB zu finden. Die Richtungen dieser Ströme sind ohne weiteres ersichtlich; sie sind durch Pfeile angedeutet. Formel (28) gibt für den Punkt A

$$J = J_1 + J_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Das zweite Kirchhoffsche Gesetz in Anwendung auf die von der Verzweigung gebildete Kontur gibt

$$J_1 r_1 - J_2 r_2 = 0$$

oder

$$J_1 r_1 = J_2 r_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30, a)$$

Für die Kontur AJ_1BEA gibt es

$$JR + J_1 R_1 = E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30, b)$$

Somit haben wir drei Gleichungen mit drei Unbekannten J, J_1 und J_2. Gleichung (30, a) gibt

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30, c)$$

Die Stromstärken in zwei parallelen Zweigen sind indirekt proportional den Widerständen dieser Zweige. (30) und (30, c) geben

$$J_1 = \frac{JR_2}{R_1 + R_2}; \qquad J_2 = \frac{JR_1}{R_1 + R_2} \quad . \quad . \quad . \quad (30, d)$$

Endlich ist noch gemäß (30, b)

$$J = \frac{E(R_1 + R_2)}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} = \frac{E}{R + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad . \quad . \quad (30, e)$$

$$J_1 = \frac{ER_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}; \; J_2 = \frac{ER_1}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2} . \quad (30, f)$$

Die beiden letzten Formeln enthalten die Lösung der Aufgabe selbst. Ist J gegeben, so bestimmt (30, d) die Größen J_1 und J_2, aus denen J besteht.

Als Verzweigungswiderstand bezeichnet man den Widerstand R_0 eines Leiters, durch dessen Einschaltung zwischen den Punkten A und B an Stelle der beiden Drähte AJ_1B und AJ_2B (siehe die punktierte Linie in Fig. 200) die Stromstärke J im Hauptkreise nicht geändert wird. Nach einer solchen Substituierung erhält man aber

$J = \frac{E}{R + R_0}$. Vergleicht man dies mit (30, e), so erhält man folgenden wichtigen Ausdruck:

$$R_0 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad \ldots \ldots \quad (30, g)$$

Der Widerstand eines Systemes aus zwei parallel zueinander in den Stromkreis geschalteten Drähten ist gleich dem Produkt der Widerstände dieser Drähte, dividiert durch deren Summe. Formel (30, g) kann man auf folgende Form bringen:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \ldots \ldots \quad (30, h)$$

Die Leitfähigkeit eines Systemes aus zwei parallel in den Stromkreis geschalteten Drähten ist gleich der Summe der Leitfähigkeiten dieser Drähte. Formel (30, g) kann man herleiten, ohne auf Gleichung (30, b) zurückzugehen. Es seien V_1 und V_2 die Potentiale der Punkte A und B. Dann ist

$$J_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1}, \quad J_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2}, \quad J = \frac{V_1 - V_2}{R_0}.$$

Aus den beiden ersten Formeln erhält man (30, c); substituiert man aber alle drei in (30) und hebt durch $V_1 - V_2$, so erhält man Formel (30, h) und hieraus (30, g).

Die einfache Verzweigung benutzt man bei der sog. Nebenschlußschaltung von Apparaten, z. B. von Galvanometern. Nehmen wir an, der im Stromkreise fließende Strom J sei zu stark, um ihn durch einen gegebenen Apparat G (Fig. 201) hindurchzuleiten. Schaltet man dann diesen Apparat in die Kette zwischen den Punkten A und B ein, so wünscht man, daß durch ihn ein Strom J_g hindurchgehe, der einen bestimmten gegebenen Teil von J, z. B. 0,1 J oder 0,01 J usw. bildet. Nehmen wir an, es solle

Fig. 201.

$$J_g = \frac{1}{n} J \quad \cdot \quad (30, i)$$

sein, wo n eine gegebene Zahl ist. Man verbindet zu diesem Zweck die Punkte A und B durch einen Draht, den man Nebenschluß (Shunt) nennt. Es sei R_g der Widerstand des nebengeschlossenen (abgezweigten) Apparates; zu bestimmen ist der Widerstand R_s des Nebenschlusses aus den beiden gegebenen Größen R_g und n. Die Formeln (30, d) geben

$$J_g = \frac{R_s}{R_s + R_g} J.$$

Die Bedingungsgleichung (30, i) führt zum Ausdruck

$$\frac{R_s}{R_s + R_g} = \frac{1}{n},$$

hieraus aber folgt

$$R_s = \frac{1}{n-1} R_g \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30,k)$$

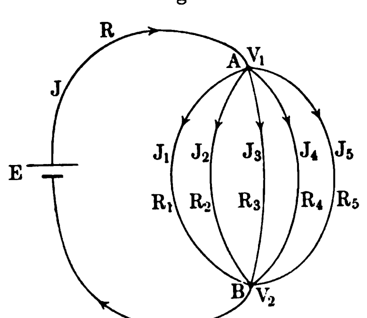
Soll durch einen Apparat nur der $n$te Teil des Stromes hindurchgehen, so muß der Widerstand des Nebenschlusses den $(n-1)$ten Teil vom Widerstande des Apparates betragen. Durch Einführen des Nebenschlusses S vermindert man den Gesamtwiderstand der Kette, wodurch sich die Stromstärke J vergrößert. Damit J ungeändert bleibt, hat man in den Stromkreis einen Kompensationswiderstand K einzuführen. Vor Einführung des Nebenschlusses war der Widerstand zwischen den Punkten A und B gleich R_g, nach Einführung desselben ist er gleich $\frac{R_g R_s}{R_g + R_s}$, vgl. (30, g). Es ist nun offenbar

$$K = R_g - \frac{R_g R_s}{R_g + R_s} = \frac{R_g^2}{R_g + R_s} = \frac{R_g^2}{R_g + \frac{R_g}{n-1}} = \frac{n-1}{n} R_g \quad (30,l)$$

Soll z. B. $J_g = \frac{1}{10} J$ werden, so hat man $R_s = \frac{1}{9} R_g$ und $K = \frac{9}{10} R_g$ zu nehmen.

II. Mehrfache Verzweigung. Zwischen den Punkten A und B ist eine beliebige Anzahl von Drähten mit den Widerständen R_1, R_2, $R_3 \ldots R_k \ldots$ eingeschaltet; E und R haben die frühere Bedeutung. Man hat mit Hilfe der gegebenen Werte für E, R und R_k die Werte von J und von sämtlichen J_k zu finden. Im Punkte A ist

Fig. 202.



$$J = \Sigma J_k \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Es seien V_1 und V_2 die Potentiale der Punkte A und B; R_0 der Widerstand der Verzweigung, d. h. des ganzen Bündels der parallel geschalteten Drähte. Dann ist

$$J_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_1},$$

$$J_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2}, \quad J_3 = \frac{V_1 - V_2}{R_3}, \ldots J_k = \frac{V_1 - V_2}{R_k} \text{ usw.} \quad (31,a)$$

Hieraus folgt $J_1 R_1 = J_2 R_2 = J_3 R_3 = \cdots J_k R_k$ usf. oder

$$J_1 : J_2 : J_3 \cdots : J_k : \cdots = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3} : \cdots : \frac{1}{R_k} : \text{ usf.} \quad . \quad . \quad (31,b)$$

Die Stromstärken in den parallelen Drähten sind indirekt proportional den Widerständen oder direkt proportional den Leitfähigkeiten der Drähte. Führt man an Stelle des Bündels von Drähten einen einzigen mit dem Widerstande R_0 ein, so ist

$$J = \frac{V_1 - V_0}{R_0} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31,\mathrm{c})$$

Substituiert man (31, c) und (31, a) in (30), so erhält man

$$\frac{1}{R_0} = \sum \frac{1}{R_k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31,\mathrm{d})$$

Die Leitfähigkeit des ganzen Bündels ist gleich der Summe der Leitfähigkeiten seiner Teile. Ferner ist

$$J = \frac{E}{R + R_0} = \frac{E}{R + \frac{1}{\sum \frac{1}{R_k}}} = \frac{E \sum \frac{1}{R_k}}{R \sum \frac{1}{R_k} + 1} \quad . \quad (31,\mathrm{e})$$

Endlich erhält man noch aus (31, b) und (30) für den *p*ten Strom J_p

$$J_p = \frac{\frac{1}{R_p}}{\sum \frac{1}{R_n}} J = \frac{E}{R_p} \frac{1}{R \sum \frac{1}{R_n} + 1} \quad . \; . \; . \quad (31,\mathrm{f})$$

So haben wir z. B. für vier Leiter

$$J = \frac{R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_2 R_3}{R(R_2 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_3) + R_1 R_2 R_3 R_4} E \quad (31,\mathrm{g})$$

Die vier Summanden im Zähler sind die Zähler in den Ausdrücken für J_1, J_2, J_3 und J_4, der Nenner der letzteren ist mit dem Nenner in (31, g) identisch. Zu denselben Formeln würde man durch Anwendung von Formel (29) auf die Konturen $AEBJ_1A$, AJ_1BJ_2A, AJ_2BJ_3A usw. gelangen.

Fig. 203.

III. Wheatstonesche Brücke. Das Schema der Wheatstoneschen Brücke, von welcher wir bereits eine Form auf S. 337 kennen gelernt hatten, ist für den einfachsten Fall in Fig. 203 abgebildet; sie unterscheidet

sich von der einfachen Verzweigung nur durch den hinzugefügten Leiter *CD*, die sogenannte Brücke. *AC*, *AD*, *BC* und *BD* sind die vier Zweige oder Seiten der Brücke. Die Widerstände und Stromstärken bezeichnen wir mit den in der Figur angegebenen Buchstaben. Die Größen E, R, R_1, R_2, R_3, R_4 und R_0 sind gegeben: gesucht werden die sechs Größen J, J_1, J_2, J_3, J_4, J_0. Das erste Kirchhoffsche Gesetz gibt für die Punkte *A*, *C* und *B*

$$\left.\begin{aligned} J &= J_1 + J_2 \\ J_1 &= J_0 + J_3 \\ J &= J_3 + J_4 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (32)$$

Hierbei haben wir dem Strome J_0 die willkürliche Richtung von *C* nach *D* gegeben. Das zweite Gesetz liefert für die Konturen *AFBCA*, *ACDA* und *CDBC* die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} JR + J_1R_1 + J_3R_3 &= E \\ J_1R_1 + J_0R_0 - J_2R_2 &= 0 \\ J_0R_0 + J_4R_4 - J_3R_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots \quad (32,\text{a})$$

Aus den sechs Gleichungen (32) und (32, a) kann man die sechs gesuchten Stromstärken ermitteln. Hat man diese Gleichungen aufgelöst, so findet man für die Stromstärke in der Brücke:

$$\left.\begin{aligned} J_0 &= \frac{E(R_2R_3 - R_1R_4)}{K}, \\ K &= R_0\{(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)R + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)\} \\ &\quad + R(R_3 + R_4)(R_1 + R_2) + R_1R_3(R_2 + R_4) \\ &\quad + R_2R_4(R_1 + R_3) \end{aligned}\right\} \quad (32,\text{b})$$

Die Stromstärke in der Brücke ist gleich Null, wenn $R_2R_3 - R_1R_4 = 0$ ist oder wenn

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \quad \dots\dots\dots \quad (32,\text{c})$$

d. h. wenn die Widerstände der Zweige eine geometrische Proportion bilden. Im Hinblick auf die hervorragende Wichtigkeit der letzten Formel wollen wir zeigen, wie man sie unmittelbar herleiten kann. Ist $J_0 = 0$, so ist offenbar $J_1 = J_3$ und $J_2 = J_4$, denn in den Punkten *C* und *D* findet keine Verzweigung statt. Das zweite Kirchhoffsche Gesetz gibt jetzt für die Konturen *ACDA* und *CDBC*

$$J_1R_1 - J_2R_2 = 0; \quad J_3R_3 - J_4R_4 = 0.$$

Hieraus folgt

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{J_2}{J_1}; \qquad \frac{R_3}{R_4} = \frac{J_4}{J_3}.$$

Hier sind die rechten Seiten einander gleich, da $J_2 = J_4$ und $J_1 = J_3$ ist, folglich sind auch die linken Seiten einander gleich und daraus

folgt die Formel (32, c). Belehrend ist auch folgende Überlegung. Es seien V_1 und V_2 die Potentiale der Punkte A und B. Längs ACB und ADB fällt das Potential von V_1 bis V_2. Die Richtung des Stromes J_0 in der Brücke hängt davon ab, welcher der beiden Punkte C und D das höhere Potential hat. Es ist $J_0 = 0$, wenn C und D das gleiche Potential V haben. Hieraus folgt, daß man zu jedem Punkte C (oder D) auf einer der Leitungen einen solchen Punkt D (oder C) auf der anderen Leitung finden kann, daß auf der diese Punkte verbindenden Brücke die Stromstärke gleich Null wird. In diesem Falle aber ist, da $J_1 = J_3$ und $J_2 = J_4$ ist,

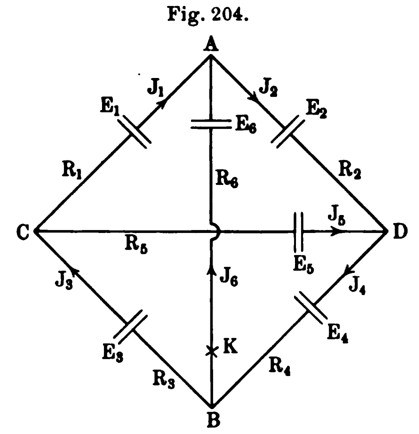
$$J_1 = \frac{V_1 - V}{R_1} = J_3 = \frac{V - V_2}{R_3}$$

$$J_2 = \frac{V_1 - V}{R_2} = J_4 = \frac{V - V_2}{R_4}.$$

Dividiert man die untere Gleichung durch die obere, so erhält man Formel (32, c).

Das Schema der Wheatstoneschen Brücke kann in verschiedener Weise dargestellt werden. Zeichnet man z. B. den Zweig AEB innerhalb der Kontur $ACBDA$, so erhält man eine Figur, die an ein Viereck mit beiden Diagonalen erinnert; in einer von ihnen wirkt die Batterie E, in der anderen wird die Stromstärke J_0 gemessen. Ist die Bedingung (32, c) erfüllt, so wirkt eine Schließung oder Öffnung einer der Diagonalen nicht auf die Stromstärke in der anderen ein: J_0 bleibt gleich Null; J ändert sich offenbar nicht, wenn man die Diagonale CD öffnet, während sie stromfrei ist.

Fig. 204.



Frölich hat gezeigt, daß bei einem solchen Verhältnisse der Diagonalen die Formel (32, c) auch in dem viel allgemeineren Falle gilt, daß in allen sechs Leitungen, welche das Netz bilden, elektromotorische Kräfte wirken. Ein solcher Fall ist in Fig. 204 dargestellt, wo R_1 bis R_6 und E_1 bis E_6 die Widerstände und elektromotorischen Kräfte bedeuten; J_1 bis J_6 sind die Stromstärken, wenn beide Diagonalen geschlossen sind. Die Pfeile zeigen die Richtungen der elektromotorischen Kräfte an; da die Richtungen der Ströme zunächst willkürlich gewählt sein können (S. 513), so wollen wir annehmen, daß diese selben Pfeile auch die Richtungen der Ströme anzeigen. In K

befindet sich ein Stromunterbrecher. Nehmen wir an, daß ein Schließen und Öffnen der Diagonale AB nicht auf die Stromstärke J_5 auf der Diagonale CD einwirkt. Der erste Kirchhoffsche Satz gibt dann für die Punkte A, D und C:

$$J_2 = J_1 + J_6;\ J_4 = J_5 + J_2 = J_5 + J_1 + J_6;\ J_3 = J_1 + J_5 \quad (32,d)$$

Der zweite Kirchhoffsche Satz gibt für die Konturen $ACDA$ und $BCDB$:

$$E_1 + E_2 - E_5 = J_1 R_1 + J_2 R_2 - J_5 R_5;$$
$$E_3 + E_4 - E_5 = J_3 R_3 + J_4 R_4 + J_5 R_5$$

oder auf Grund von (32, d):

$$E_1 + E_2 - E_5 = J_1 R_1 + (J_1 + J_6) R_2 - J_5 R_5$$
$$= J_1 (R_1 + R_2) - J_5 R_5 + J_6 R_2$$
$$E_1 + E_4 - E_5 = (J_1 + J_5) R_3 + (J_5 + J_1 + J_6) R_4 + J_5 R_5$$
$$= J_1 (R_3 + R_4) + J_5 (R_3 + R_4 + R_5) + J_6 R_4.$$

Öffnen wir den Zweig AB; die linken Seiten der beiden letzten Gleichungen ändern sich dann nicht; auf der rechten Seite ist dann $J_6 = 0$, J_5 ändert sich nach der Voraussetzung nicht, J_1 nimmt den neuen Wert J_1' an. Da sich die linken Seiten nicht ändern, so haben wir

$$J_1 (R_1 + R_2) - J_5 R_5 + J_6 R_2 = J_1' (R_1 + R_2) - J_5 R_5$$
$$J_1 (R_3 + R_4) + J_5 (R_3 + R_4 + R_5) + J_6 R_4$$
$$= J_1' (R_3 + R_4) + J_5 (R_3 + R_4 + R_5)$$

oder

$$(J_1 - J_1)(R_1 + R_2) = J_6 R_2$$
$$(J_1' - J_1)(R_3 + R_4) = J_6 R_4.$$

Hieraus folgt

$$\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} = \frac{R_2}{R_4} \quad \text{oder} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}.$$

Wenn in den sechs Leitungen, d. h. den vier Seiten und beiden Diagonalen, welche das allgemeine Schema der Wheatstoneschen Brücke bilden, beliebige elektromotorische Kräfte wirken, so gilt der folgende Satz: Wenn das Öffnen und Schließen einer Diagonale nicht auf die Stromstärke in der anderen Diagonale einwirkt, so bilden die Widerstände der vier Seiten die geometrische Proportion (32, c). Der Satz bleibt selbstverständlich richtig, wenn einige von den Größen E_1 bis E_6, beispielsweise alle mit Ausnahme von einer gleich Null sind. Für den Fall einer einfachen Brücke (Fig. 203) sind alle E außer E_6 gleich Null.

IV. Doppelte Wheatstonesche Brücke. Das Schema dieser Verzweigung ist in Fig. 205 dargestellt, es unterscheidet sich vom

Schema der einfachen Brücke dadurch, daß ein Ende H der Brücke CH an den Ergänzungsdraht DHF angeschlossen ist. Die Widerstände der Leiter sind mit R_1 bis R_7 bezeichnet, wobei R_1 und R_2, R_3 und R_4, R_5 und R_6 symmetrisch zueinander liegen. Wir wollen bloß den Fall betrachten, daß die Stromstärke J in der Brücke CH gleich Null ist. In diesem Falle ist die Stromstärke die gleiche in AC und CB, nämlich J_1, in AD und FB, nämlich J_2 und endlich in DH und HF, nämlich J_3, wie dies auch in der Figur angegeben ist. Die Stromstärke in DF ist mit J_4 bezeichnet. Wendet man das zweite Kirchhoffsche Gesetz auf die Konturen $ADHCA$ und $FBCHF$ an, so erhält man

Fig. 205.

$$\left.\begin{aligned} R_1 J_1 &= R_3 J_2 + R_5 J_3 \\ R_2 J_1 &= R_4 J_2 + R_6 J_3 \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Diese Formeln geben uns folgenden wichtigen Lehrsatz:

Ist in der Brücke $J = 0$ und ist von den drei Verhältnissen $\frac{R_1}{R_2}, \frac{R_3}{R_4}, \frac{R_5}{R_6}$ irgend ein Paar untereinander gleich, so sind alle drei Verhältnisse untereinander gleich. Um die allgemeine Bedingung dafür zu erhalten, daß $J = 0$ ist, wenden wir die erste Kirchhoffsche Formel auf den Punkt D und die zweite auf die Kontur $DHFD$ an:

$$J_2 = J_3 + J_4 \quad \ldots \ldots \quad (33,\text{a})$$

$$(R_5 + R_6) J_3 = R_7 J_4 \quad \ldots \ldots \quad (33,\text{b})$$

Diese Gleichungen geben

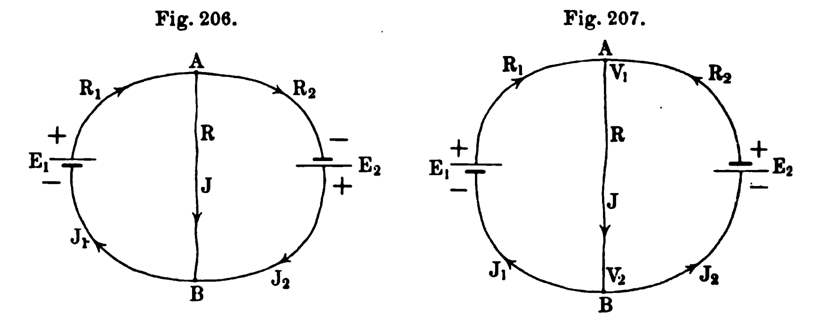
$$J_2 = J_3\left(1 + \frac{R_5 + R_6}{R_7}\right).$$

Setzt man diesen Ausdruck in (33) ein und dividiert die erste Gleichung durch die zweite, wobei sich J_1 und J_3 heben lassen, so erhält man

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3\left(1 + \frac{R_5 + R_6}{R_7}\right) + R_5}{R_4\left(1 + \frac{R_5 + R_6}{R_7}\right) + R_6} \quad \ldots \quad (33,\text{c})$$

Für $R_7 = 0$ erhält man die Bedingung der einfachen Brücke $R_1 : R_2 = R_3 : R_4$.

V. Zwei hintereinander geschaltete Elemente. Die Elemente E_1 und E_2 (Fig. 206) sind hintereinander geschaltet; die beiden Punkte A und B sind miteinander durch einen Draht verbunden. Die Teile AE_1B und AE_2B besitzen die Widerstände R_1 und R_2, wo natürlich auch die Widerstände der Elemente selbst mit eingerechnet sind; der Widerstand von AB ist gleich R. Die Stromstärken sind mit J_1, J_2 und J bezeichnet, wobei die Richtungen der Ströme J_1 und J_2 nicht zweifelhaft sind; die Richtung des Stromes J jedoch ist will-



kürlich als von A nach B verlaufend angenommen. Die Kirchhoffschen Sätze geben in bezug auf den Punkt A und die Konturen AE_1BA und AE_2BA:

$$J_1 = J_2 + J \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

$$J_1R_1 + RJ = E_1 \quad \ldots\ldots \quad (34,\text{a})$$

$$J_2R_2 - RJ = E_2 \quad \ldots\ldots \quad (34,\text{b})$$

Ist $J = 0$, so ist $J_1 = J_2$, $J_1R_1 = E_1$, $J_2R_2 = E$, woraus folgt

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{E_1}{E_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34,\text{c})$$

Damit die Stromstärke im Verbindungszweige AB gleich Null wird, muß die Bedingung (34, c) erfüllt sein. Löst man die drei Gleichungen auf, so erhält man:

$$J_1 = \frac{E_1(R+R_2)+E_2R}{RR_1+RR_2+R_1R_2} \quad \ldots\ldots \quad (34,\text{d})$$

$$J_2 = \frac{E_2(R+R_1)+E_1R}{RR_1+RR_2+R_1R_2} \quad \ldots\ldots \quad (34,\text{e})$$

$$J = \frac{E_1R_2-E_2R_1}{RR_1+RR_2+R_1R_2} \quad \ldots\ldots \quad (34,\text{f})$$

Die letzte Gleichung gibt für $J = 0$ die Bedingung (34, c).

VI. Zwei parallel geschaltete Elemente. Dieses Schema unterscheidet sich von dem vorhergehenden nur dadurch, daß die Elemente E_1 und E_2 (Fig. 207) parallel geschaltet sind. Hier ist über die

Richtung des Stromes J kein Zweifel möglich; die Richtungen der Ströme J_1 und J_2 aber sind willkürlich gewählt.

Die Kirchhoffschen Formeln geben:

$$J = J_1 + J_2 \quad \dots \dots \dots \quad (35)$$

$$J_1 R_1 + RJ = E_1 \quad \dots \dots \quad (35, a)$$

$$J_2 R_2 + RJ = E_2 \quad \dots \dots \quad (35, b)$$

Ist $J_1 = 0$, so ist $J = J_2$ und ferner

$$E_1 = RJ \quad \dots \dots \dots \quad (35, c)$$

$$E_2 = (R + R_2) J \quad \dots \dots \quad (35, d)$$

Hieraus folgt

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{R}{R + R_2} < 1 \quad \dots \dots \quad (35, e)$$

Die Stromstärke im Zweige, welcher das Element E_1 enthält, kann nur dann gleich Null sein, wenn $E_1 < E_2$ ist und die Bedingung (35, e) erfüllt ist; hierbei ist $E_1 = RJ$, wo R den Widerstand des Verbindungsdrahtes AB, J die in allen Teilen der Kontur ABE_2A gleiche Stromstärke bedeutet.

Wegen der Wichtigkeit dieses Resultates wollen wir dasselbe noch auf folgende Weise erläutern.

Es sei $J_1 = 0$, V_1 und V_2 die Potentiale der Punkte A und B. Da in BE_1A kein Strom vorhanden ist, so ist auch kein Potentialgefälle vorhanden; der Zweig BE_1A stellt gewissermaßen eine regelrecht offene Kette dar, es ist daher $V_1 - V_2 = E_1$. Aber in AB haben wir:

$$J = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{E_1}{R}, \quad \text{d. h.} \quad E_1 = RJ.$$

Ferner ist der Strom J in der ganzen Kette ABE_2A der gleiche, es ist daher:

$$J = \frac{E_2}{R + R_2}.$$

Vergleicht man die beiden Werte von J miteinander, so erhält man (35, e). Löst man die drei Gleichungen (35), (35, a) und (35, b) auf, so erhält man:

$$J_1 = \frac{E_1 (R + R_2) - E_2 R}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \quad \dots \quad (35, f)$$

$$J_2 = \frac{E_2 (R + R_1) - E_1 R}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \quad \dots \quad (35, g)$$

$$J = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{RR_1 + RR_2 + R_1 R_2} \quad \dots \quad (35, h)$$

Ist $E_1 = E_2 = E$, so gibt die letzte Formel

$$J = \frac{E}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad \ldots \ldots \quad (35, i)$$

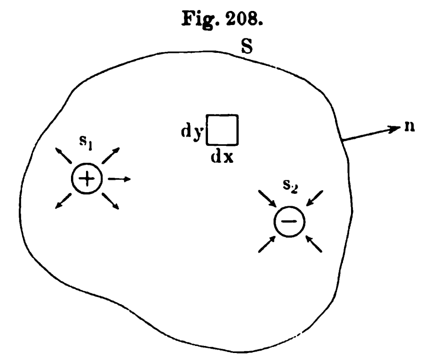
Ist dann noch $R_2 = R_1$, so erhält man

$$J = \frac{E}{R + \frac{R_1}{2}} \quad \ldots \ldots \quad (35, k)$$

Die letzten beiden Formeln bestätigen, daß die elektromotorische Kraft zweier parallel geschalteter Elemente die gleiche ist wie die eines einzigen Elementes; (35, k) bestätigt, daß ihr Widerstand gleich der Hälfte vom Widerstande eines Elementes ist. Obige Schlüsse lassen sich auch leicht für eine beliebige Anzahl parallel geschalteter Elemente verallgemeinern.

VII. Ströme in dünnen Platten und in Körpern. Bisher hatten wir die Stromverteilung in Drähten betrachtet. Wir wollen nun noch mit einigen Worten auf die Ausbreitung eines Stromes in dünnen Platten und Körpern eingehen.

Fig. 208.



Es sei S eine dünne, ebene Platte, welche die Elektrizität leitet; c ihr spezifisches Leitvermögen, h ihre Dicke. Zwei Drähte seien an eine Seite der Platte gelötet, und s_1 und s_2 (Fig. 208) seien die Stellen, durch welche der Strom J in die Platte eintritt oder aus ihr heraustritt. Zu bestimmen sind die Stromlinien, d. h. jene Kurven, auf denen die Elektrizität von s_1 nach s_2 fließt. Denkt man sich die Dicke h sehr gering, so kann man annehmen, daß das Strömen nur parallel den Plattenseiten, d. h. nur in zwei Dimensionen stattfindet. Die Stromlinien sind die orthogonalen Trajektorien der Niveaulinien des Potentials V; kennt man V, so kann man auch die Stromlinien bestimmen. Betrachten wir das Plattenelement $dy\,dx$ und bestimmen wir die Elektrizitätsmenge $d\eta$, welche in dasselbe in der Zeit τ hineinströmt. Durch die Seite dy strömt die Menge $-ch\,dy\,\frac{dV}{dx}\,\tau$, durch die entgegengesetzte Seite eine Menge, die sich aus der ersten ergibt, wenn man anstatt x den Wert $x + dx$ setzt und das Vorzeichen ändert, nämlich $ch\,dy\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx\right)\tau$; im

ganzen strömt durch beide Seiten $ch\tau\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx dy$. Durch die Seite dx und die ihr gegenüberliegende strömt die Menge $ch\tau\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}dx dy$, so daß

$$d\eta = ch\tau\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dx dy$$

ist. Bei stationärer Strömung muß in allen Plattenpunkten, ausgenommen die Punkte innerhalb s_1 und s_2, $d\eta = 0$ sein, d. h.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Liegt $dx dy$ innerhalb s, so ist $d\eta = \frac{J\tau}{s_1}dx dy$, da während der Zeit τ durch die gesamte Fläche s_1 in die Platte die Elektrizitätsmenge $J\tau$ einströmt; für die Punkte innerhalb s_2 erhält man $d\eta = -\frac{J\tau}{s_2}dx dy$.

Man erhält also innerhalb s_1

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{J}{ch s_1} \quad \ldots\ldots \quad (36, a)$$

innerhalb s_2

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{J}{ch s_2} \quad \ldots\ldots \quad (36, b)$$

Da durch den äußeren Plattenrand die Elektrizität nicht hindurchströmt, so muß am ganzen Plattenrande

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36, c)$$

sein, wenn n (s. Fig.) die Richtung der Normalen zum Plattenrande ist. Es läßt sich beweisen, daß die letzten vier Gleichungen die Funktion V vollständig bestimmen, wenn die Form der Platte, die Lage von s_1 und s_2, der Eintritts- und Austrittsstelle der Elektrizität, sowie die Größen c, h und J gegeben sind. Wir können aber auf die Methoden zur Bestimmung der Funktion V nicht näher eingehen, da sie größtenteils auf die Anwendung des logarithmischen Potentials zurückgehen, ein Eingehen hierauf uns aber über die Grenzen hinausführen würde, die wir uns für dieses Lehrbuch gesteckt haben. Wir wollen uns auf einige wenige Hinweise beschränken.

Für eine unendlich große Platte kommt die Bedingung (36, c) in Fortfall. Den Bedingungen (36), (36, a) und (36, b) genügt die Funktion

$$V = A - \frac{J}{2\pi ch}\,lg\frac{r_1}{r_2} \quad \ldots\ldots \quad (36, d)$$

Hier ist A eine willkürliche konstante Zahl, r_1 und r_2 sind die Entfernungen des Punktes, in dem das Potential gleich V ist, von den

Stellen s_1 und s_2. Die Gleichung der Niveaulinien des Potentials lautet $V = Const$, oder

$$\frac{r_1}{r_2} = Const \qquad (36,e)$$

Es sind also Kreise, welche die Stellen s_1 und s_2 exzentrisch umschließen. Ihre orthogonalen Trajektorien, d. h. die Stromlinien, sind Kreisbogen, welche s_1 mit s_2 verbinden.

Für eine Kreisplatte, an deren Rande s_1 und s_2 liegen, sind die Stromlinien ebenfalls Kreisbogen.

Besteht die Platte aus inhomogenen Teilen, so erleiden die Stromlinien beim Übergange aus einem Teil zum anderen eine Brechung. Bezeichnen wir mit s die Kurve, welche zwei solche Plattenteile voneinander abgrenzt, und mögen sich V_1 und c_1 auf den einen, V_2 und c_2 auf den anderen Plattenteil beziehen, ds das Element der Kurve s, n die Richtung der Normalen zu diesem Elemente sein. Es gilt dann in allen Punkten der Kurve s die Relation:

$$c_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = c_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} \qquad (36,f)$$

als Bedingung dafür, daß in diesen Punkten weder eine Anhäufung der Elektrizität, noch auch eine Abnahme derselben stattfindet. Längs der Kurve ist $V_1 - V_2 = Const$, daher also

$$\frac{\partial V_1}{\partial s} = \frac{\partial V_2}{\partial s} \qquad (36,g)$$

Die Stromlinie fällt mit der Diagonalen des Rechtecks zusammen, welches im ersten Medium aus $\frac{\partial V_1}{\partial n}$ und $\frac{\partial V_1}{\partial s}$, im zweiten aber aus $\frac{\partial V_2}{\partial n}$ und $\frac{\partial V_2}{\partial s}$ konstruiert ist. Sind φ_1 und φ_2 die Winkel, welche in beiden Medien von der Stromlinie und der Normalen gebildet werden, so ist offenbar:

$$tg\,\varphi_1 = \frac{\partial V_1}{\partial s} : \frac{\partial V_1}{\partial n}; \qquad tg\,\varphi_2 = \frac{\partial V_2}{\partial s} : \frac{\partial V_2}{\partial n}.$$

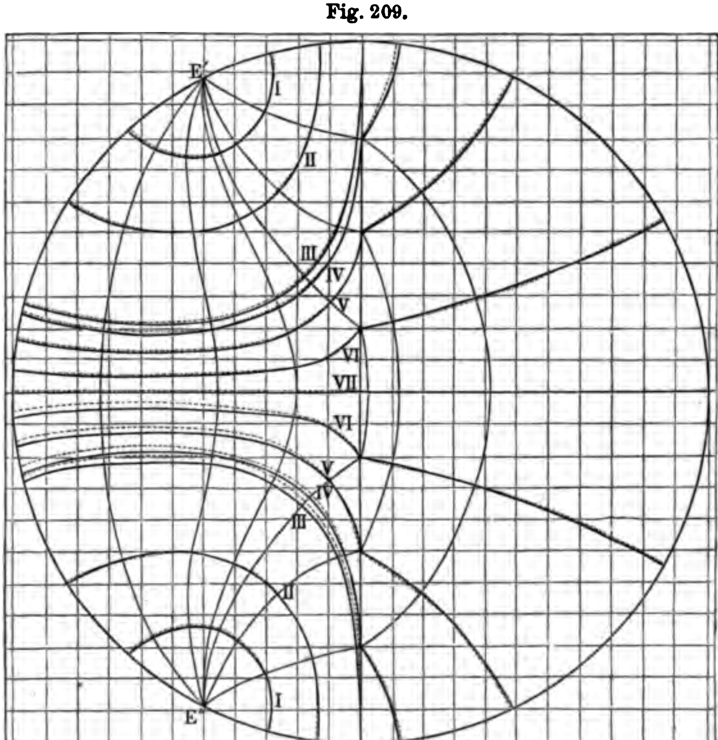
Die Gleichungen (36, g) und (36, f) geben

$$\frac{tg\,\varphi_1}{tg\,\varphi_2} = \frac{c_1}{c_2} \qquad (36,h)$$

Diese Formel spricht das Brechungsgesetz der Stromlinien aus. Quincke hat die Verteilung von Strömen in einer zur Hälfte aus Pb, zur Hälfte aus Cu (Fig. 209) bestehenden Kreisplatte theoretisch und experimentell untersucht; die Elektroden befinden sich in E' und E''. In der Figur sieht man die gebrochenen Stromlinien, welche E' mit E'' verbinden.

Außer den Stromlinien, an denen entlang sich die Elektrizität ausbreitet, sind noch von großem Interesse die Linien gleicher Stromstärke; letztere ist nämlich an den Stromlinien entlang keineswegs konstant, da diese Stromlinien nach dem Hervortreten aus einer Elektrode zunächst divergieren, darauf aber wieder konvergieren. Gleiche Stromstärke herrscht in den Punkten, in denen $\frac{\partial V}{\partial N} = Const$ ist; N bedeutet hier die Richtung der Normalen zur Niveaulinie des Potentials.

Fig. 209.



Man kann die entsprechende Bedingung in folgender Form zum Ausdruck bringen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (36, \text{i})$$

Im Falle einer unendlichen Platte, wo die Stromlinien Kreisbogen sind, die Niveaulinien des Potentials aber durch die Gleichungen $r_1 : r_2 = Const$ ausgedrückt werden, vgl. (36, e), lauten die Gleichungen der Linien gleicher Stromstärke $r_1 r_2 = Const.$ Es sind dies Lemniskaten, welche die Punkte s_1 und s_2 umschlingen. Die Verteilung von Strömen

in krummflächigen Platten ist von Kirchhoff, C. Neumann, Lipschitz und W. Wolf untersucht worden.

Die Bestimmung der Stromausbreitung in Körpern, d. h. im dreidimensionalen Raume, führt ebenfalls zur Bestimmung des Potentials V; die orthogonalen Trajektorien zu den Niveauflächen des letzteren sind die gesuchten Stromlinien. Es ist leicht einzusehen, daß V in allen Punkten des Körpers, mit Ausnahme der Elektroden selbst, der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

genügt, die analog (36) gebildet ist.

Auf der Oberfläche des Körpers ist

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37,\mathrm{a})$$

An der Grenze zweier Medien gilt die Gleichung (36, f) und findet eine Brechung der Stromlinien nach dem durch Formel (36, h) gegebenen Gesetz statt. An der Oberfläche der Elektroden, die sich an der Oberfläche oder im Innern des Körpers befinden können, gilt eine Bedingung, die sich in jedem Sonderfalle leicht formulieren läßt und den Satz zum Ausdruck bringt, daß die gesamte Elektrizitätsmenge, die in der Zeiteinheit durch die Elektrodenoberfläche hindurch in den betrachteten Körper eintritt, gleich $\pm J$ ist, wo J die gegebene Stromstärke außerhalb dieses Körpers bedeutet. Die Stromdichte i ist gleich

$$i = -c\,\frac{\partial V}{\partial N} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37,\mathrm{b})$$

wo N die Normale zur Fläche $V = Const$ ist. Bezeichnen wir mit u, v, w die in die Richtung der Koordinatenachsen fallenden Komponenten der Stromdichte i. Es ist dann im isotropen Körper

$$u = -c\,\frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = -c\,\frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = -c\,\frac{\partial V}{\partial z} \quad . \quad (37,\mathrm{c})$$

In einem anisotropen Körper hängt c von der Richtung ab, wodurch die Formeln sehr kompliziert werden; sie sollen von uns nicht betrachtet werden.

Die Größe V kann im allgemeinen als Potential zweier gleich großer, jedoch dem Vorzeichen nach entgegengesetzter elektrischer Massen angesehen werden, welche die Oberflächen der Elektroden bedecken, und gewisser die gesamte Körperoberfläche bedeckender fingierter Massen; letztere hat man derart zu wählen, daß die Bedingung (37, a) erfüllt wird. Betrachten wir den einfachsten Fall eines unbegrenzten Körpers, in dessen Innern sich zwei kugelförmige Elektroden S_1 und S_2 vom Radius ϱ befinden, der im Vergleich zum Abstand d beider

Elektroden voneinander sehr klein ist. Das Potential V in irgend einem Punkte M ist in diesem Falle gleich

$$V = C\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

wenn C eine Konstante ist und r_1 und r_2 die Entfernungen des Punktes M von den Zentren der Kugeln S_1 und S_2 bedeuten. Es ist offenbar

$$J = -4\pi\varrho^2 c\left(\frac{\partial V}{\partial r_1}\right)_{r_1=\varrho}.$$

Da aber ϱ klein im Vergleich zu d ist, so kann man V in der Nähe der Oberfläche der Elektrode S_1 gleich $C:r_1$ setzen. Man erhält dann

$$J = -4\pi\varrho^2 c C\left(-\frac{1}{r_1^2}\right)_{r_1=\varrho} = 4\pi c C.$$

Entnimmt man hieraus C und substituiert es in (38), so erhält man

$$V = \frac{J}{4\pi c}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (38,\mathrm{a})$$

Die Stromlinien sind offenbar identisch mit den magnetischen Kraftlinien für zwei ungleichnamige Magnetpole; ihre Gleichung lautet $\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 = Const.$ vgl. (23, c), S. 442, wo α_1 und α_2 die Winkel sind, welche von den Radienvektoren r_1 und r_2 mit der Geraden $S_1 S_2$ gebildet werden. Die Potentiale V_1 und V_2 der kleinen Kugeln S_1 und S_2 kann man gleich

$$V_1 = \frac{J}{4\pi c}\cdot\frac{1}{\varrho}; \qquad V_2 = -\frac{J}{4\pi c}\cdot\frac{1}{\varrho} \quad \ldots \quad (38,\mathrm{b})$$

setzen, wenn man das Glied $1:(d-\varrho)$ im Vergleich zu $1:\varrho$ vernachlässigt. Die durch Formel $J = (V_1 - V_2):R$ zu bestimmende Größe R kann man als den Widerstand eines unendlich großen Körpers bezeichnen; (38, b) gibt

$$R = \frac{1}{2\pi c\varrho} \quad \ldots \ldots \quad (38,\mathrm{c})$$

Der Widerstand ist indirekt proportional den Radien der Elektroden und hängt von deren Abstande nicht ab.

Taucht man in Kupfervitriollösung eine horizontale Ag-, Pt- oder Messingplatte, welche mit dem negativen, und einen vertikalen Draht, welcher mit dem positiven Pole einer Batterie verbunden ist, so erhält man auf ersterer als Resultat der Elektrolyse (s. u.) Niederschläge von Kupfer in Form von hellroten Ringen, die voneinander durch dunklere Ringe getrennt sind. Lösungen von Mangansalzen oder Bleioxyd in Kalilauge geben Ringe, die, was die Anordnung der Farben anlangt, den Newtonschen Farbenringen (Bd. II) völlig analog sind. Diese Ringe hat Nobili (1827) entdeckt und zuerst untersucht; man nennt

sie die Nobilischen Ringe. Kompliziertere Figuren hat Guébhard (1880) erhalten. Das Zustandekommen von Ringen und anderen Figuren wird durch die Theorie der Stromausbreitung zwischen Draht und Platte vollkommen erklärt. Die Dicke der bei der Elektrolyse ausgeschiedenen Schicht ist in den verschiedenen Punkten proportional der Stromdichte in diesen Punkten, die Farbe aber hängt von der Dicke der Schicht ab. Somit entsprechen diese Figuren den Schnittkurven der Plattenoberfläche mit den Oberflächen gleicher Stromdichte. Die Gleichung der letzteren lautet offenbar $\frac{\partial V}{\partial N} = Const.$ Voigt, H. Weber, Heine, Ditscheiner, Riemann u. a. haben eine vollständige Theorie der Nobilischen Ringe und Guébhardschen Figuren entwickelt.

§ 6. Magnetfeld des elektrischen Stromes. Im ersten Kapitel dieses Abschnittes haben wir uns mit den Eigenschaften des Magnetfeldes überhaupt bekannt gemacht, unabhängig von seinen Quellen: hierauf haben wir im zweiten Kapitel im besonderen das Magnetfeld betrachtet, welches Magnete umgibt und hierbei u. a. die magnetischen Doppelschichten oder magnetischen Blätter. Jetzt wenden wir uns dem Studium des Magnetfeldes zu, welches vom elektrischen Strome durchflossene Leiter umgibt. Wir wollen zunächst einige von den Formeln wiederholen, die in den vorhergehenden Kapiteln abgeleitet worden waren. Die Komponenten α, β, γ der Intensität des Magnetfeldes genügen außerhalb der Magnete oder außerhalb der Wirbelräume den Bedingungen (30), S. 413:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\partial \beta}{\partial x}; \quad \frac{\partial \beta}{\partial z} = \frac{\partial \gamma}{\partial y}; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Die Arbeit der magnetischen Kräfte ist gleich Null bei Bewegung eines Magnetpols auf einer beliebigen geschlossenen Kurve, welche keinen Wirbelraum umschließt.

Existieren im Magnetfelde geschlossene Kraftlinien, welche in ihrem Gesamtverlauf in einem homogenen Medium liegen, so umschließen solche Kraftlinien unbedingt zum mindesten einen Wirbelraum (S. 424), innerhalb dessen die magnetischen Kräfte kein Potential besitzen und die Größen α, β, γ nicht den Gleichungen (39) genügen. Der Wirbelraum muß geschlossen sein, d. h. die Form eines Ringes haben. Wir bezeichnen mit σ folgenden Ausdruck, vgl. (51), S. 424:

$$\left.\begin{aligned}\sigma = \iint \Big\{ \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) \cos(n,x) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) \cos(n,y) \\ + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \cos(n,z) \Big\} \, ds\end{aligned}\right\} \quad . \quad (39, a)$$

Hier erstreckt sich das Integral auf alle Elemente ds eines beliebigen Schnittes des Wirbelraumes; man kann sich diesen Schnitt als Teil einer Fläche denken, die zur Umgrenzung eine beliebige Kraftlinie oder überhaupt eine beliebige geschlossene Linie hat, die den Wirbelraum umschließt. Die Größe σ hat für alle Schnitte eines gegebenen Wirbelraumes den gleichen Wert: sie ist gleich der von magnetischen Kräften in dem Falle geleisteten Arbeit R, daß die Einheit der magnetischen Menge sich auf einem beliebigen geschlossenen Wege, der den Wirbelraum einmal umschließt, herumbewegt. Genauer genommen ist

$$R = \pm \sigma \quad \ldots \ldots \quad (39,\text{b})$$

wo das Vorzeichen von der Bewegungsrichtung abhängt. Das Potential V ist eine mehrdeutige Funktion; sie ändert sich um den Betrag σ, wenn man bei Wanderung längs einer geschlossenen, den Wirbelraum umschließenden Kurve zum Ausgangspunkte zurückkehrt. Somit ist

$$V = V_0 - p\sigma \quad \ldots \ldots \quad (39,\text{c})$$

vgl. (54), S. 425. In einem ringförmigen Wirbelraume existiert eine Richtung, die wir als die positive bezeichnet hatten. Diese Richtung und die positive Richtung der Kraftlinien, für welche $R > 0$ und $p > 0$ ist, haben in bezug aufeinander eine Lage, welche durch die Schrauben- oder Bohrerregel (S. 426) definiert ist. Eine magnetische Doppelschicht oder ein magnetisches Blatt besitzt in jedem Punkte eine Kraft $\omega = k\delta$, wo $\pm k$ die Dichte des Magnetismus, δ die Schichtdicke ist. Das Potential V der Schicht in einem beliebigen Punkte M ist gleich

$$V = \omega\,\Omega \quad \ldots \ldots \quad (39,\text{d})$$

vgl. (27), S. 444, wo Ω der Raumwinkel ist, unter welchem von M aus der Umfang der Schicht erscheint. Beim Durchgange durch die Schicht macht das Potential einen Sprung vom Betrage

$$V_1 - V_2 = 4\pi\omega \quad \ldots \ldots \quad (39,\text{e})$$

vgl. (27, b), S. 445. Die potentielle Energie eines magnetischen Blattes, welches sich im Magnetfelde befindet, wird durch Formel (28), S. 446 bestimmt; die potentielle Energie zweier Blätter durch Formel (30), S. 447.

Wenden wir uns jetzt einer Betrachtung der Eigenschaften des Magnetfeldes des elektrischen Stromes zu. Wie sich von selbst versteht, kann man sich über die Grundeigenschaften dieses Feldes nicht anders unterrichten als durch das Experiment. Um den Begriff der Stromstärke J als einer Größe einzuführen, welche für einen gegebenen Strom charakteristisch und a priori unter gleichen Bedingungen durch die Feldintensität H meßbar ist, hatten wir auf S. 490 den Charakter und die Intensität des Feldes für den besonderen Fall betrachtet, daß

es sich um einen sehr langen, geradlinigen Leiter handelt. Wir sahen, daß die Kraftlinien Kreise sind, die den Leiter umgeben und daß die Feldintensität in der Entfernung r vom Leiter durch Formel (3, a), S. 491 ausgedrückt wird:

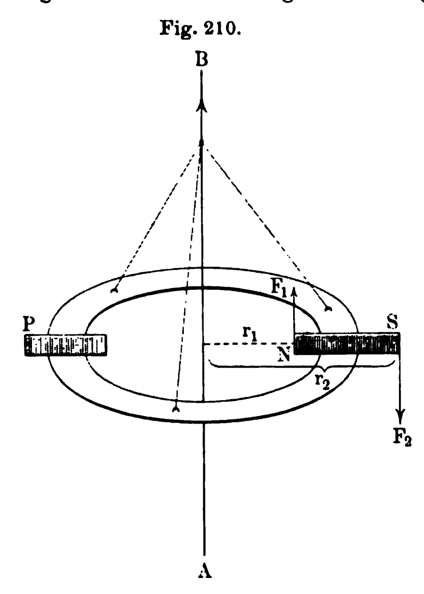
$$H = \frac{cJ}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (40)$$

wo c ein Proportionalitätsfaktor ist. Dadurch, daß wir $c = 2$, d. h.

$$H = \frac{2J}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (41)$$

setzten, führten wir die el.-mg. Einheit der Stromstärke ein. Der folgende Versuch bestätigt die Richtigkeit der Formel (40). An einem vertikalen Drahte AB (Fig. 210) wird an drei Fäden ein Ring befestigt, auf welchen der Magnet NS und das Gegengewicht P gelegt wird; läßt man dann durch AB einen Strom hindurchgehen, so bleibt der Ring unbeweglich, obgleich auf die Pole N und S die Kräfte $F_1 = H_1 m$ und $F_2 = H_2 m$ einwirken; m bedeutet die magnetische Menge. Hieraus folgt, daß das Drehmoment der Kräfte F_1 und F_2 in bezug auf die Achse AB gleich Null ist, d. h. daß $F_1 r_1 - F_2 r_2 = 0$ ist, wenn r_1 und r_2 die Abstände der Magnetpole von AB sind. Es ist also

Fig. 210.



$$H_1 m r_1 - H_2 m r_2 = 0,$$

hieraus folgt

$$H_1 : H_2 = r_2 : r_1;$$

die Feldintensität ist dem Abstande r indirekt proportional.

Ausgehend von Formel (41) erhält man für die Arbeit R, welche von magnetischen Kräften geleistet wird, während die Einheit der magnetischen Menge auf einer der Kraftlinien den Strom umwandert:

$$R = 2\pi r H = 2\pi r \frac{2J}{r} = 2\pi J \quad \ldots \quad (42)$$

Die Kräfte, welche im Magnetfelde des Stromes, das sich vom Felde von Magneten nicht unterscheidet, wirken, besitzen zweifellos ein Potential V und genügen außerhalb des Stromes den Gleichungen (29). Bestimmen wir den Wert dieses Potentials. Bezeichnen wir mit P irgend eine durch unseren geradlinigen Strom hindurch-

gehende und mit einer Ausgangsebene P_0 den Winkel θ einschließende Ebene. Alle Ebenen P sind äquipotentiale Flächen, da bei der Bewegung eines Magnetpoles in einer solchen Ebene, die überall senkrecht zu den Kraftlinien ist, die Arbeit der magnetischen Kräfte gleich Null ist. Es seien V_1 und V die Werte des Potentials in den Ebenen P_0 und P. Die Arbeit bei dem Übergang von der magnetischen Menge $m = 1$ von P_0 nach P auf einer der Kraftlinien ist gleich $r\theta : H = r\theta \frac{2J}{r} = 2J\theta$, also

$$V = V_1 - 2J\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42, \text{a})$$

Wenn man die xy-Ebene senkrecht zum Strome legt und die x-Achse in der Ebene P_0 zieht und endlich die Koordinaten des Punktes in der Ebene P mit x, y bezeichnet, so ist $tg\,\theta = y : x$, also

$$V = V_1 - 2J \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42, \text{b})$$

Die Vieldeutigkeit des Potentials ist durch diese Formel besonders deutlich ausgesprochen. Geht man rings um den Strom herum, so ändert sich V um den Betrag $4\pi J$, so daß der allgemeine Ausdruck für das Potential eines gegebenen Punktes M folgende Gestalt hat:

$$V = V_0 - 4\pi p J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42, \text{c})$$

wo p eine ganze positive oder negative Zahl ist, welche angibt, wievielmal man den Strom in der positiven Richtung der Kraftlinien umwandert hat; letztere Richtung steht mit der Stromrichtung in einem durch die Schraubenregel (S. 490) definierten Zusammenhange. Da (42, c) nicht davon abhängen kann, auf welchen Kurven wir uns bewegt haben, so ist offenbar die Arbeit gleich

$$R = 4\pi p J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42, \text{d})$$

auf welcher Kurve wir uns auch bewegt haben mögen, wenn diese Kurve nur, während wir von einem gewissen Punkte M ausgehen und zu ihm zurückkehren, den Strom p mal umlaufen hat. Kehren wir nach M zurück, ohne den Strom umwandert zu haben, oder nachdem wir ihn ebensovielmal in positiver wie in negativer Richtung umwandert haben, so ist $R = 0$ und wir treffen in M auf den ursprünglichen Wert des Potentials.

Der vom Strome selbst, d. h. vom Leiter eingenommene Raum ist ein Wirbelraum; in ihm besitzen die magnetischen Kräfte kein Potential und werden die Bedingungen (39) nicht erfüllt. Die positive Richtung des Wirbelraumes fällt offenbar mit der Richtung des Stromes J zusammen, da diese beiden Richtungen mit der Richtung der Kraftlinien durch die Schraubenregel verknüpft sind. Vergleicht man (42, c) mit (39, c) oder, was dasselbe ist, (42) mit (39, b), so erhält man die überaus wichtige Formel

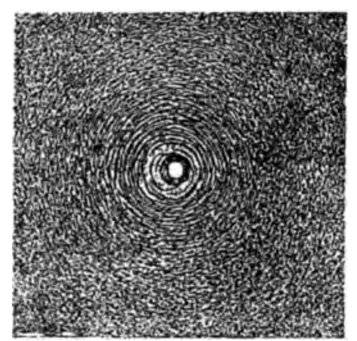
$$4\pi J = \sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

wo σ durch Formel (39, a) gegeben wird, in der wir jetzt das Integral auf einen beliebigen Schnitt, der vom Strome J durchdrungen wird, auszudehnen haben.

Um mit Hilfe von Eisenfeilicht die Kraftlinien im betrachteten Falle zu erhalten, läßt man einen vertikalen Draht durch eine kleine Öffnung in einem horizontalen Kartonblättchen hindurchgehen und sendet durch ihn einen möglichst starken Strom. Streut man hierauf Eisenfeilspäne auf das Blättchen, so ordnen sich diese in der Art an, wie Fig. 211 zeigt.

Wir haben bisher das Magnetfeld eines langen geradlinigen Stromes betrachtet, um die Grundeigenschaften eines solchen Feldes kennen zu lernen. Wenden wir uns jetzt dem allgemeinen Falle zu, wo ein linearer Leiter (d. h. ein Draht), in welchem ein Strom fließt, eine ganz beliebige Form hat und sehen wir zu, was uns die direkte Beobachtung ergibt.

Fig. 211.



Die Beobachtung zeigt zunächst, daß die Kraftlinien des Magnetfeldes eines Stromes immer geschlossene Kurven sind, welche in ihrem gesamten Verlaufe innerhalb des den stromdurchflossenen Leiter umgebenden Raumes liegen. Dieser Satz bestätigt sich, wie nahe wir auch immer an die Leiteroberfläche herankommen mögen. Hieraus folgt:

1. Der Raum, welcher vom stromdurchflossenen Leiter eingenommen wird, ist ein Wirbelraum; in ihm besitzen die magnetischen Kräfte kein Potential und sind die Gleichungen (39) nicht erfüllt.

2. Es gibt nur geschlossene elektrische Ströme.

3. Die auf eine beliebige geschlossene, den Leiter $p$mal umlaufende Kurve bezogene Arbeit R hängt weder von der Form dieser Kurve ab, noch auch von ihrer Lage und ist gleich

$$R = p\sigma \qquad (44)$$

wo σ durch Formel (39, a) gegeben ist.

4. Die Größe σ hat für alle Schnitte des Leiters mit beliebigen Flächen ein und denselben Wert; die Normale n muß nach der Seite hin gewählt werden, nach welcher der elektrische Strom fließt. Die Arbeit R hängt nicht von der Stromumgrenzung, sondern nur von der Größe σ ab, die ihrerseits von den Vorgängen im Innern des Leiters, d. h. von den besonderen Eigenschaften des Stromes, ab-

hängt; andererseits leuchtet ein, daß bei gegebener Stromumgrenzung, d. h. gegebener Anordnung der Leiter, die Arbeit R proportional der Feldintensität H in den Punkten des umgebenden Feldes ist. Die Größe, welche jene Stromeigenschaft charakterisiert, von der die zu beobachtende Feldintensität abhängt, haben wir die Stromstärke genannt und mit J bezeichnet. Offenbar ist R proportional J; hieraus folgt, daß σ proportional J ist, daß man also

$$R = \sigma = CJ \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

schreiben kann, wobei sich R jetzt auf die Kurve bezieht, welche den Leiter einmal ($p = 1$) umgibt. Setzt man $C = 4\pi$, d. h.

$$R = \sigma = 4\pi J \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (46)$$

so führt man hiermit eine bestimmte Einheit der Stromstärke ein. Die Formel (4), die uns die el.-mg. Einheit der Stromstärke lieferte, sowie die aus ihr hervorgehende Formel (42) überzeugen uns davon, daß man durch die Substitution von $C = 4\pi$ in Formel (45) bloß auf eine andere Art die gleiche el.-mg. Einheit der Stromstärke einführt. Bewegt sich auf einer geschlossenen Kurve die magnetische Menge m, so ist die in absoluten Einheiten ausgedrückte Arbeit R_m gleich

$$R_m = \sigma m = 4\pi m J \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (46, a)$$

Als Dimension für die Einheit der Stromstärke erhält man

$$[J] = [R_m] : [m].$$

Es ist aber R_m eine Arbeit, also ist $[R_m] = ML^2 : T^2$; Formel (4), S. 403, gibt

$$[J] = ML^2T^{-2} : [\mu]^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} = [\mu]^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1} \qquad (46, b)$$

was mit (4, a), S. 491, übereinstimmt.

Substituiert man in (46) den Wert von σ, so erhält man

$$4\pi J = \iint \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}\right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) \cos(n, y) \\ &+ \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \cos(n, z) \end{aligned} \right\} ds \quad . \qquad (46, c)$$

Hier ist ds ein Element des vom Leiter mit einer beliebigen Fläche gebildeten Schnittes. Als Stromdichte i haben wir das Verhältnis der Stromstärke zum Flächeninhalte des Querschnittes eines stromdurchflossenen Leiters bezeichnet. Die Projektionen der Stromdichte auf die Koordinatenachsen wollen wir mit u, v, w bezeichnen. Es ist offenbar

$$J = \iint i \cos(n, i)\, ds,$$

ferner aber ist $\cos(n, i) = \cos(n, x)\cos(i, x) + \cos(n, y) + \cos(i, y) + \cos(n, z)\cos(i, z)$ und $u = i\cos(i, x)$ usw. Somit ist

$$4\pi J = 4\pi \iint \{u\cos(n,x) + v\cos(n,y) + w\cos(n,z)\} ds \qquad (46, \text{d})$$

Vergleicht man (46, c) mit (46, d) und beachtet, daß die Gleichheit der Integrale für jede Fläche besteht, welche unseren Leiter durchschneidet, so erhält man die berühmten Maxwellschen Gleichungen, welche die Projektionen der Stromdichte i (u, v, w) in einem beliebigen Punkte des Leiters mit den Projektionen der magnetischen Kraft H (α, β, γ) in Relation setzen, die in demselben Punkte wirkt:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ 4\pi v &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} \\ 4\pi w &= \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (47)$$

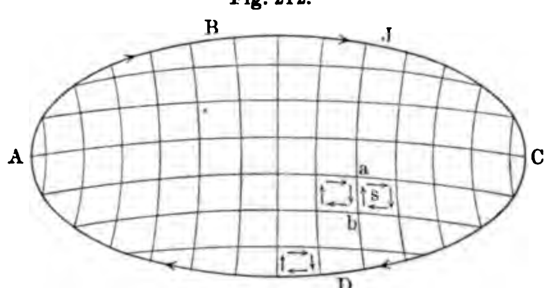
Es ist wichtig, diese Formeln mit den Formeln (39) zu vergleichen, die sich auf alle Punkte außerhalb des stromdurchflossenen Leiters beziehen, d. h. auf die Punkte, in denen die magnetischen Kräfte ein Potential haben. Die Formeln (47) zeigen in besonders anschaulicher Weise, daß die magnetischen Kräfte innerhalb des stromdurchflossenen Leiters kein Potential haben können.

Wir wollen uns jetzt einer besonders wichtigen Eigenschaft des Magnetfeldes zuwenden. Dieselbe besteht darin, daß die Feldintensität eines gegebenen Stromes nicht von der Substanz abhängt, welche den Raum rings um den Strom erfüllt, falls sie nur homogen, isotrop und unbegrenzt ist. Nehmen wir nämlich zunächst an, es sei im umgebenden Medium $\mu = 1$. Bringt man dann in dieses Medium einen Körper, für welchen μ nicht gleich Eins ist, so entsteht in ihm, wie dies im Kapitel von der magnetischen Induktion streng bewiesen werden soll, eine solenoidale Verteilung des Magnetismus, bei welcher die Volumdichte des Magnetismus im Innern des Körpers gleich Null ist; der freie Magnetismus erscheint nur auf der Oberfläche des Körpers und gerade dieser Magnetismus ist es, der die Änderung des Magnetfeldes hervorruft. Vergrößert man die Dimensionen dieses Körpers in solchem Grade, daß er den ganzen Raum rings um den Strom bis zur Leiteroberfläche selbst ausfüllt, so ist gar kein freier Magnetismus vorhanden, da die äußere Oberfläche sich in unendlicher Entfernung befindet, auf der Berührungsfläche mit dem Leiter aber kein freier Magnetismus anwesend sein kann, da die den Strom umgebenden Linien aus dieser Oberfläche nicht heraustreten können. Somit ist klar, daß die Anwesenheit eines solchen

Körpers die Feldintensität H im gegebenen Punkte M nicht verändert; die Größe der auf die gegebene Menge von freiem Magnetismus einwirkenden Kraft hängt von μ nicht ab, wenn nur der Wert von μ im gesamten Raume der gleiche ist.

Zum Schlusse wollen wir noch darauf hinweisen, daß man einen gegebenen geschlossenen Strom durch ein System von Strömen ersetzen kann, die in bestimmter Weise angeordnet sind. Es sei $ABCDA$ (Fig. 212) ein geschlossener Strom, dessen Stärke gleich J ist. Legen wir durch die Linie $ABCDA$ eine Fläche hindurch und teilen wir dieselbe in eine beliebige Anzahl von Teilen s. Des Beispiels halber ist in unserer Figur die Teilung mit Hilfe von zwei einander schneidenden Kurvensystemen ausgeführt worden. Umgeben wir jeden dieser Teile s mit einem Strome, dessen Stärke gleich J ist und dessen Richtung mit derjenigen des gegebenen Stromes $ABCDA$ zusammenfällt. Es ist dann leicht ersichtlich, daß alle diese Ströme einander paarweise längs

Fig. 212.



aller Umgrenzungslinien der Teile s aufheben, soweit dieselben nicht dem gegebenen Strome $ABCDA$ anliegen. So strömen z. B. längs des Abschnittes ab zwei Ströme J in entgegengesetzten Richtungen; ihre gesamte sich nach außen erstreckende Wirkung ist also gleich Null. Es bleiben nur die Ströme übrig, welche an der Umgrenzungslinie $ABCDA$ entlang fließen. Somit erhalten wir folgendes Endresultat: Jeder geschlossene Strom kann durch eine beliebig große, selbst unendlich große Anzahl von geschlossenen Strömen ersetzt werden, welche die gleiche Stärke und Richtung wie der gegebene Strom haben; diese Ströme können auf einer beliebigen Fläche S angeordnet werden, deren Umgrenzungslinie der gegebene Strom bildet; die von ihnen umgrenzten Teile der Fläche S müssen diese Fläche, wie Fig. 212 zeigt, vollständig einnehmen.

§ 7. Gesetz von Biot und Savart. Ersetzung eines Stromes durch ein magnetischs Blatt. Solenoid. Beim Studium des Magnetfeldes eines Stromes kamen Biot und Savart zu dem Ergebnisse, daß

die Kraft, mit welcher ein geschlossener Strom auf einen Magnetpol einwirkt, als Resultante einer unendlich großen Anzahl von Kräften angesehen werden kann, die gewissermaßen von unendlich kleinen Teilen ausgehen, in welche man sich den Strom zerlegt denken kann; letztere wollen wir als Stromelemente bezeichnen. Es sei AB (Fig. 213) ein Teil des Stromes, ds die Länge eines der Stromelemente,

Fig. 213.

Fig. 214.

r der Abstand dieses Elementes vom Magnetpole m, φ der Winkel zwischen ds und r. Das Gesetz von Biot und Savart besagt dann, daß das Stromelement ds auf m mit einer Kraft f einwirkt, welche der Größe nach durch die Formel

$$f = C \frac{J m ds}{r^2} \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

bestimmt wird, wo C ein Proportionalitätsfaktor ist. Diese Kraft ist senkrecht zu der durch ds und r hindurchgehenden Ebene und nach der durch die Schraubenregel zu bestimmenden Seite gerichtet. Fließt der Strom J von A nach B, so hat f die Richtung vom Beschauer senkrecht zur Ebene der Figur. Ist ein geschlossener Strom von willkürlicher Form gegeben, so bildet die Bestimmung der Feldintensität in einem beliebigen Punkte auf Grund von Formel (48) eine Aufgabe der Mechanik, die mit Hilfe der Integralrechnung gelöst werden kann.

Wenden wir die Formel (48) zur Berechnung der Intensität des Magnetfeldes eines geradlinigen, unendlich langen Stromes AB (Fig. 214) in einem Punkte M an, der sich im Abstande r von AB befindet. In diesem Falle ist die Resultante F aller Kräfte f gleich deren Summe, da alle Kräfte f die gleiche, zur Ebene der Zeichnung senkrechte Richtung haben. Wir werden s vom Punkte O aus in der Richtung OB positiv rechnen.

Es ist dann

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{CJm}{l^2} \sin\varphi\, ds = CJm \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\varphi\, ds}{l^2}.$$

Führen wir die unabhängige Variable φ ein. Es ist $l = r : \sin\varphi$; $s = r \operatorname{cotg}\varphi$, $ds = \frac{r}{\sin^2\varphi}\, d\varphi$; die Grenzen für den Winkel φ sind offenbar 0 und π. Somit ist

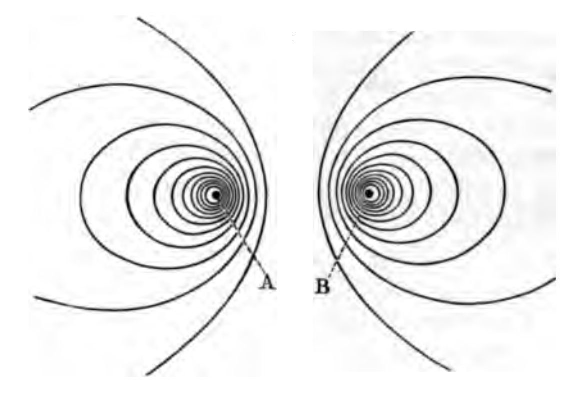
$$F = CJm \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi . \sin^2\varphi}{r^2} \cdot \frac{r\, d\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{CJm}{r} \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{2\,CJm}{r}.$$

Setzt man $m = 1$, so erhält man für die Feldintensität im Punkte M

$$H = \frac{2\,CJ}{r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48,\text{a})$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (41), S. 532, so sieht man erstens, daß uns die Formel von Biot und Savart den wirklichen Zu-

Fig. 215.



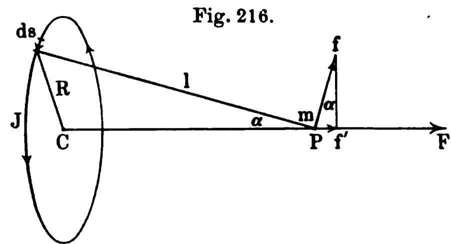
sammenhang zwischen H und r ergeben hat und daß man zweitens, wenn man in der Formel von Biot und Savart $C = 1$ setzt, hierdurch die elektromagnetische Einheit für die Stromstärke einführt. Man sieht leicht ein, daß (48, a) für die Dimension der Einheit der Stromstärke denselben Ausdruck gibt, den wir bereits zweimal abgeleitet hatten, als wir das erste Mal von Formel (4), S. 491, das andere Mal von Formel (46, a), S. 535, ausgingen, vgl. (4, a), S. 491, und (46, b).

Wenden wir uns jetzt dem wichtigen Falle des Kreisstromes zu, d. h. eines Stromes, welcher an einem Kreise entlang strömt, dessen Radius mit R bezeichnet sein mag. In diesem Falle ist eine der Kraft-

linien die Achse selbst, d. h. die Gerade, welche durch das Zentrum des Kreises senkrecht zu dessen Ebene hindurchgeht. In Fig. 215 (a. v. S.) ist ein durch diese Achse hindurchgelegter Schnitt dargestellt; er wird von dem Strome geschnitten, dessen Ebene senkrecht zur Ebene der Zeichnung in den Punkten A und B ist.

Suchen wir die Feldintensität H im Punkte P (Fig. 216), welcher sich auf der Achse des Kreisstromes in der Entfernung l vom Strome selbst (nicht aber von seinem Mittelpunkte C) befindet. Das Stromelement ds liefert die zur Ebene (l, ds) senkrechte Kraft f; ihre in el.-mg. Einheiten ausgedrückte Größe wird aus (48) erhalten, wenn man $C = 1$ und $\sin\varphi = \sin(l, ds) = 1$ setzt. Dies gibt $f = \frac{Jm\,ds}{l^2}$.

Fig. 216.



Alle Kräfte f bilden die Seitenlinien eines Kegels, dessen Achse mit der Achse des gegebenen Stromes zusammenfällt. Offenbar ist die Resultante F gleich der Summe der Projektionen f' der Kräfte f auf die Richtung dieser Achse. Aus der Figur sieht man, daß $f' = f \sin\alpha$ und $\sin\alpha = R:l$ ist. Es ist also $f' = \frac{J\,ds\,.\,m\,.\,R}{l^3}$ und

$$F = \int \frac{JmR}{l^3}\,ds = \frac{JmR}{l^3}\int ds = \frac{JmR}{l^3}\,2\pi R = \frac{2\pi R^2 Jm}{l^3}.$$

Setzt man $m = 1$, so erhält man für die Feldintensität H im Punkte P

$$H = \frac{2\pi R^2 J}{l^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Für den Kreismittelpunkt C ist $l = R$, also

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= \frac{2\pi Jm}{R} \\ H_0 &= \frac{2\pi J}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (49,\text{a})$$

Bezeichnen wir mit F_s und H_s die Kraft und die Feldintensität, die im Mittelpunkte C durch den Strom hervorgerufen sind, welcher den Kreisbogen s umfließt. Offenbar ist $F_s : F_0 = s : 2\pi R$; hieraus folgt

$$F_s = \frac{Jsm}{R^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49,\text{b})$$

$$H_s = \frac{Js}{R^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49,\text{c})$$

Die letzten Formeln liefern uns eine neue Definition für die el.-mg. Einheit der Stromstärke: es ist dies die Stärke eines Stromes, welcher einen der Längeneinheit gleichen Bogen eines Kreises, dessen Radius gleich Eins ist ($R = 1$), umfließt und hierbei im Mittelpunkte dieses Kreises die el.-mg. Einheit der Feldintensität ($H_s = 1$) hervorruft, d. h. auf eine in diesem Mittelpunkte vorhandene Einheit der magnetischen Menge ($m = 1$) mit der Einheit der Kraft ($F_s = 1$) einwirkt.

Die el.-mg. C. G. S.-Einheit der Stromstärke (10 Ampere) ist die Stärke eines Stromes, der beim Umfließen eines Kreisbogens von 1 cm Länge eines Kreises vom Radius 1 cm im Zentrum desselben die el.-mg. C. G. S.-Einheit der Feldintensität hervorruft, d. h. auf die C. G. S.-Einheit der magnetischen Menge, die sich im Kreiszentrum befindet, mit der Kraft einer Dyne einwirkt.

Wenden wir uns jetzt einer der wichtigsten Fragen aus der Lehre vom elektrischen Strome zu, nämlich der Frage nach den — innerhalb gewisser Grenzen — identischen Außenwirkungen eines Stromes und eines magnetischen Blattes, oder — mit anderen Worten — der Möglichkeit, Ströme durch magnetische Blätter zu ersetzen, welche sich auf einer beliebigen Oberfläche S befinden, deren Umgrenzung die Stromlinie selbst bildet. Wie wir sahen, haben die Kraftlinien in beiden Fällen eine analoge Lage: sie umschlingen den Stromleiter oder die Umgrenzung des Blattes. Die Arbeit R, welche bei der Bewegung der Einheit der magnetischen Menge auf einer beliebigen geschlossenen, den Strom J umschlingenden Kraftlinie geleistet wird, oder die Periode des Potentials $V_1 - V_2$ ist gleich, vgl. (46), S. 535

$$R = V_1 - V_2 = 4\pi J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Für ein magnetisches Blatt hatten wir, wenn man von einer Seite der Oberfläche S um die Umgrenzung herum zur anderen Seite desselben geht, vgl. (40), S. 416, oder (27, b), S. 445, die Relation

$$R = V_1 - V_2 = 4\pi \frac{\omega}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50, a)$$

erhalten, wo $\omega = k\delta$ die Kraft des Blattes, μ die magnetische Permeabilität des umgebenden Mediums ist. Die Analogie der Formeln (50) und (50, a) leuchtet ohne weiteres ein. Da unsere Frage von hervorragender Bedeutung ist, so wollen wir zunächst die Überlegungen anführen, welche Drude in seiner „Physik des Äthers" anstellt; sie stützen sich zum Teil auf einen Satz, für den wir einen strengen Beweis nicht liefern werden. Hierauf erst werden wir, ausgehend von der Biot-Savartschen Formel, eine strenge Ableitung geben.

Es sei s ein geschlossener, sehr dünner Leiter, in welchem der Strom J fließt, und S' irgend eine, die Linie s vollständig umgebende

Fläche. Außerhalb der Fläche S' hat man dann ein Magnetfeld, das sich von dem Magnetfelde von Magneten durchaus in Nichts unterscheidet: die magnetischen Kräfte haben überall ein Potential, und zwar ein eindeutiges Potential, denn es ist für alle geschlossenen Kurven, welche die Oberfläche S' nicht schneiden, $R = 0$. Es läßt sich der folgende Satz streng beweisen: Existiert außerhalb irgend einer geschlossenen Fläche S' ein Magnetfeld, in dessen sämtlichen Punkten die magnetischen Kräfte ein Potential haben, so läßt sich jederzeit eine solche Verteilung der magnetischen Massen auf der Fläche S' finden, daß das magnetische Feld derselben außerhalb der Fläche S' gerade das gegebene Magnetfeld wird. Wir können hier den strengen Beweis dieses Satzes nicht geben, beschränken uns daher auf folgenden Hinweis. Kann das gegebene Magnetfeld durch magnetische Massen hervorgerufen werden, so müssen diese Massen offenbar innerhalb des von der Fläche S' begrenzten Raumes liegen. Solche Massen aber können, wie aus der Potentialtheorie bekannt ist, auf die Fläche S' „äquivalent verschoben" werden.

Es kann also das Feld des Stromes außerhalb S' als ein Feld von magnetischen Massen betrachtet werden, die auf S' liegen. Denken wir uns eine beliebige Fläche S, welche innerhalb S' liegt und zur Umgrenzung die Stromlinie hat. Die Fläche S ist durchaus willkürlich, es ist nur erforderlich, daß sie die Stromlinie umgibt. Wir wollen deshalb diese Fläche uns derart gereckt denken, daß sie sich dem Stromleiter von außen her dicht anlegt und daß ihre beiden Teile sich von beiden Seiten her der Fläche S bis auf unendlich kleine Entfernung nähern. Vernachlässigt man dann die Querdimensionen des Leiters, so erhält man zwei Verteilungen der magnetischen Massen zu beiden Seiten von S in überall gleichem Abstande δ voneinander. Die Anzahl der Kraftlinien, welche von der einen Seite her eintreten, von der anderen Seite austreten, ist die gleiche; hieraus folgt, daß die Dichten k bei diesen beiden Verteilungen der magnetischen Massen die gleichen sein müssen und sich nur durch ihre Vorzeichen unterscheiden; zwei solche Verteilungen bilden aber ein magnetisches Blatt und zwar ein einfaches, da der Potentialsprung $4\pi\frac{\omega}{\mu}$, wo $\omega = k\delta$ ist, überall denselben Wert $4\pi J$ hat. Der Strom J kann durch ein magnetisches Blatt ersetzt werden, dessen Umgrenzung die Stromlinie bildet und dessen Kraft ω sich aus der Gleichung

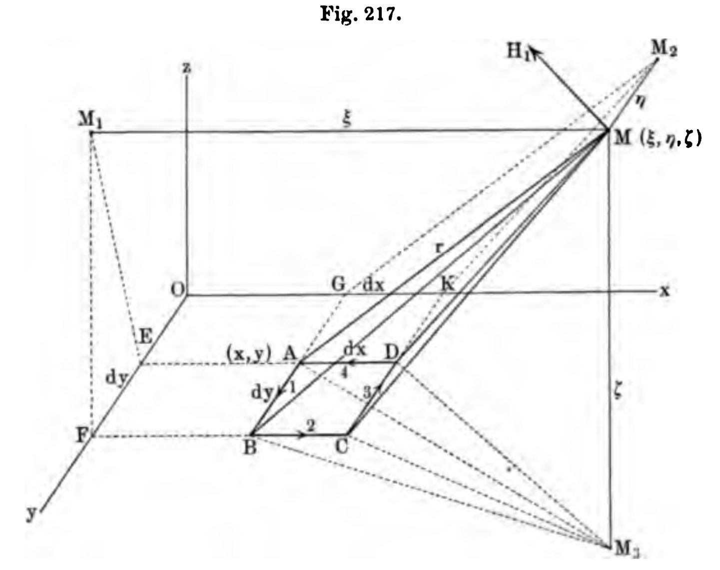
$$\frac{\omega}{\mu} = J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

ergibt.

Wir wollen diesen Satz jetzt auf anderem Wege beweisen, indem wir von der Biot-Savartschen Formel ausgehen. Betrachten wir die Wirkung eines unendlich kleinen rechteckigen Stromes in einem be-

liebigen äußeren Punkte. Es möge der Strom J in der Richtung $ABCDA$ (Fig. 217) längs der Umgrenzung eines in der Ebene xOy gelegenen Rechtecks dahinfließen. Die Koordinaten des Punktes A bezeichnen wir mit x, y; $AD = dx$, $AB = dy$; die Indizes 1, 2, 3, 4 beziehen wir auf die Seiten AB, BC, CD und DA. Zu bestimmen ist die Feldintensität H im Punkte M, dessen Koordinaten $\xi = MM_1$, $\eta = MM_2$ und $\zeta = MM_3$ sind. Verlängern wir die Seiten, so finden wir die Achsenabschnitte $GK = dx$ und $EF = dy$. Die Punkte M und M_3 verbinden wir mit den Punkten A, B, C und D; Punkt M_1 mit F und E, endlich noch Punkt M_2 mit G und K. Die Intensität H

Fig. 217.



ist die Resultante der vier Intensitäten H_1, H_2, H_3 und H_4, welche von den vier Teilen des Stromes J hervorgerufen werden; die Komponenten längs den Koordinatenachsen bezeichnen wir mit H_x, H_y, H_z, $H_{1,x}$, $H_{1,y}$, $H_{1,z}$, $H_{2,x}$, $H_{2,y}$ usw. bis $H_{4,z}$. Es ist offenbar:

$$H = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

$$\left.\begin{aligned} H_x &= H_{1,x} + H_{2,x} + H_{3,x} + H_{4,x} \\ H_y &= H_{1,y} + H_{2,y} + H_{3,y} + H_{4,y} \\ H_z &= H_{1,z} + H_{2,z} + H_{3,z} + H_{4,z} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (52, a)$$

$$H_{1,x} = H_1 \cos(H_1, x); \; H_{1,y} = H_1 \cos(H_1, y); \; H_{1,z} = H_1 \cos(H_1, z) \quad (52, b)$$

Ebensolche Gleichungen — neun an der Zahl — erhält man für $H_{2,x}$ usf. bis $H_{4,z}$.

Den Abstand AM bezeichnen wir mit r, es ist daher:

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + \zeta^2} \quad \ldots \quad (52, c)$$

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\xi - x}{r} \\ -\frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{\eta - y}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta} &= \frac{\zeta}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (52,\mathrm{d})$$

Unter Benutzung der Biot-Savartschen Formel bestimmen wir die Größen H_1, H_2, H_3, H_4 und deren Komponenten $H_{1,x}$ bis $H_{4,z}$. Nur eine von den vier Intensitäten, nämlich H_1, ist in der Figur dargestellt.

Der Strom AB gibt in M die Intensität H_1, dieselbe ist gleich

$$H_1 = \frac{J\,dy}{r^2} \sin MAB = \frac{J}{r^3} r\,dy \sin MAB = \frac{2J}{r^3} \text{ Fläche } MAB \quad (53)$$

H_1 ist senkrecht zur Fläche MAB und entsprechend der Ampèreschen Regel nach links oben gekehrt, wie es unsere Figur zeigt.

$$H_{1,x} = H_1 \cos(H_{1,x}) = \frac{2J}{r^3} \text{ Fläche } MAB \cos(H_{1,x}).$$

Es ist jedoch $\angle (H_{1,x}) = 180^0 - \angle (MAB, zOy)$, daher

$$\left.\begin{aligned} H_{1,x} &= -\frac{2J}{r^3} \text{ Fläche } MAB \cos(MAB,\ zOy) \\ &= -\frac{2J}{r^3} \text{ Fläche } M_1EF = -\frac{J\,dy}{r^3}\zeta \end{aligned}\right\} \quad . \quad (53,\mathrm{a})$$

$$H_{1,y} = H_1 \cos(H_1, y) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (53,\mathrm{b})$$

da $H_1 \perp MAB$ ist, also $H_1 \perp y$.

$$\left.\begin{aligned} H_{1,z} &= H_1 \cos(H_1, z) = \frac{2J}{r^3} \text{ Fläche } MAB \cos(H_1, z) \\ &= \frac{2J}{r^3} \text{ Fläche } MAB \cos(MAB, xOy) \\ &= \frac{2J}{r^3} \text{ Fläche } M_3AB = \frac{J\,dy}{r^3}(\xi - x) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (53,\mathrm{c})$$

In ähnlicher Weise erhält man:

$$H_4 = \frac{J\,dx}{r^2} \sin MAD = \frac{J}{r^3} r\,dx \sin MAD = \frac{2J}{r^3} \text{ Fläche } MAD.$$

Die Intensität H_4 ist senkrecht zu MAD und ist vom Leser fort. d. h. nach der Seite der negativen y gekehrt:

$$H_{4,x} = H_4 \cos(H_4, x) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (53,\mathrm{d})$$

$$\left.\begin{aligned} H_{4,y} &= H_4 \cos(H_4, y) = -\frac{2J}{r^3}\text{ Fläche } MAD \cos(MAD, xOz) \\ &= -\frac{2J}{r^3}\text{ Fläche } M_2KG = -\frac{J\,dx}{r^3}\,\zeta \end{aligned}\right\} \quad (53,\text{e})$$

$$\left.\begin{aligned} H_{4,z} &= H_4 \cos(H_4, z) = \frac{2J}{r^3}\text{ Fläche } MAD \cos(MAD, xOy) \\ &= \frac{2J}{r^3}\text{ Fläche } M_3AD = \frac{J\,dx}{r^3}\,(\eta - y) \end{aligned}\right\} \quad (53,\text{f})$$

Der Strom CD unterscheidet sich vom Strome AB dadurch, daß seine Richtung die entgegengesetzte ist und die Koordinate x durch die Koordinate $x + dx$ ersetzt ist. Hieraus folgt, vgl. (52, d),

$$\left.\begin{aligned} H_{3,x} &= -\left(H_{1,x} + \frac{\partial H_{1,x}}{\partial x}dx\right) = \frac{J\,dy}{r^3}\,\zeta - \frac{3J\,dy}{r^4}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\zeta\,dx \\ &= \frac{J\,dy}{r^3}\,\zeta + \frac{3J\,dy\,dx}{r^5}\,(\xi - x)\,\zeta \end{aligned}\right\} \quad (53,\text{g})$$

$$H_{3,y} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53,\text{h})$$

$$\left.\begin{aligned} H_{3,z} &= -\left(H_{1,z} + \frac{\partial H_{1,z}}{\partial x}dx\right) = -\frac{J\,dy}{r^3}\,(\xi - x) + \frac{J\,dy}{r^3}\,dx \\ &\quad - \frac{3J\,dy\,dx}{r^5}\,(\xi - x)^2 \end{aligned}\right\} \quad (53,\text{i})$$

In ähnlicher Weise findet man

$$H_{2,x} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53,\text{j})$$

$$\left.\begin{aligned} H_{2,y} &= -\left(H_{4,y} + \frac{\partial H_{4,y}}{\partial y}dy\right) = \frac{J\,dx}{r^3}\,\zeta \\ &\quad + \frac{3J\,dx\,dy}{r^5}\,(\eta - y)\,\zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (53,\text{k})$$

$$\left.\begin{aligned} H_{2,z} &= -\left(H_{4,z} + \frac{\partial H_{4,z}}{\partial y}dy\right) = -\frac{J\,dx}{r^3}\,(\eta - y) \\ &\quad + \frac{J\,dx}{r^3}\,dy - \frac{3J\,dx\,dy}{r^5}\,(\eta - y)^2 \end{aligned}\right\} . \quad (53,\text{l})$$

Die Formeln (52, a) geben jetzt

$$H_x = \frac{3J\,dx\,dy}{r^5}\,(\xi - x)\,\zeta \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

$$H_y = \frac{3J\,dx\,dy}{r^5}\,(\eta - y)\,\zeta \quad \ldots\ldots \quad (54,\text{a})$$

$$H_z = \frac{2J\,dx\,dy}{r^3} - \frac{3J\,dx\,dy}{r^5}[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]$$

$$= \frac{2J\,dx\,dy}{r^3} - \frac{3J\,dx\,dy}{r^5}(r^2 - \xi^2),$$

d. h.

$$H_z = -\frac{J\,dx\,dy}{r^3} + \frac{3J\,dx\,dy}{r^5}\zeta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (54, b)$$

Die drei letzten Formeln geben uns die Komponenten der Intensität H im Punkte M.

Bezeichnen wir mit Ω' den unendlich kleinen Raumwinkel, unter dem vom Punkte M aus das Rechteck $ABCD$ sichtbar ist. Es sei σ der Flächeninhalt des Durchschnittes dieses Raumwinkels mit der Oberfläche einer Kugel, welche mit dem Radius r um den Punkt M als Zentrum beschrieben ist. Es ist dann $\sigma = r^2\Omega'$; andererseits ist

$$\sigma = \text{Fläche } ABCD \cos(\sigma, ABCD) = dx\,dy \cos(r, \zeta) = dx\,dy\,\frac{\zeta}{r}.$$

Hieraus folgt

$$\Omega' = \frac{dx\,dy}{r^3}\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (55)$$

Dies gibt, vgl. (52, d),

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \xi} = -\frac{3\,dx\,dy}{r^4}\frac{\partial r}{\partial \xi}\zeta = -\frac{3\,dx\,dy}{r^5}(\xi - x)\zeta \quad . \qquad (55, a)$$

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \eta} = -\frac{3\,dx\,dy}{r^5}(\eta - y)\zeta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (55, b)$$

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial \zeta} = \frac{dx\,dy}{r^3} - \frac{3\,dx\,dy}{r^5}\zeta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (55, c)$$

Vergleicht man diese drei Ausdrücke mit (54), (54, a) und (54, b), so findet man

$$\left.\begin{aligned} H_x &= -\frac{\partial(J\Omega')}{\partial \xi} \\ H_y &= -\frac{\partial(J\Omega')}{\partial \eta} \\ H_z &= -\frac{\partial(J\Omega')}{\partial \zeta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (56)$$

Hier beziehen sich H_x, H_y, H_z auf den Punkt M, dessen Koordinaten ξ, η, ζ sind. Diese Formeln zeigen uns, daß das Potential V' des Stromes J, welcher das Rechteck $ABCD$ umfließt, im Punkte M gleich

$$V' = J\Omega' + Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (57)$$

ist, d. h. gleich dem Produkte aus der Stromstärke und dem Raumwinkel, unter welchem die Umgrenzung des Stromes vom Punkte M aus erscheint. Auf Grund des früheren kann man schreiben

$$V' = J\Omega' - 4\pi p J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

wo p angibt, wievielmal man durch die Stromumgrenzung hindurchgelangt ist, wenn man, ausgehend von M, zu diesem Punkte wieder zurückgekehrt ist.

Ersetzen wir den Strom $ABCD$ durch ein magnetisches Blatt von denselben Dimensionen und der Kraft $\omega = k\delta$, wo $\pm k$ die Oberflächendichte ist, während $+k$ (der Nordmagnetismus) sich auf der Seite der positiven z befindet, δ die Entfernung beider Oberflächen ist. Ein solches Blatt kann man auch als einen kurzen Magneten ansehen, dessen Achse der z-Achse parallel und dessen Moment M gleich $k\delta\, dx\, dy$ oder gleich

$$M = k\delta\, dx\, dy = \omega\, dx\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

ist. Für einen solchen Magneten hatten wir aber im zweiten Kapitel als Ausdruck des Potentials, vgl. (14), S. 436

$$V = \frac{k\delta}{\mu}\,\Omega' = \frac{\omega}{\mu}\,\Omega' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59,\text{a})$$

gefunden, wo Ω' dieselbe Bedeutung wie in (57) hat. Ferner hatten wir dortselbst auch die Formel (13, c), S. 436

$$H = \frac{M}{\mu r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi},$$

wo φ der Winkel zwischen r und der Magnetachse ist. Setzt man hier das magnetische Moment aus (59) ein, so erhält man

$$H = \frac{\omega\, dx\, dy}{\mu r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59,\text{b})$$

Vergleicht man (57) mit (59, a), so sieht man, daß der betrachtete unendlich kleine Strom unter der Bedingung $J = \omega : \mu$ durch ein magnetisches Blatt ersetzt werden kann; jene Bedingungsgleichung aber ist die Formel (51), deren Gültigkeit wir für einen beliebigen Strom beweisen wollen. Zunächst aber suchen wir die Größe der Feldintensität H für unseren Strom. Es war, vgl. (52),

$$H^2 = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2.$$

Die Formeln (54) und (54, a) geben, da

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = r^2 - \zeta^2$$

ist,

$$H_x^2 + H_y^2 = \frac{9 J^2 dx^2 dy^2}{r^{10}}\,\zeta^2 (r^2 - \zeta^2).$$

Fügt man noch H_z^2, vgl. (54, b), hinzu, so erhält man

$$H^2 = \frac{9J^2dx^2dy^2}{r^8}\zeta^2 - \frac{9J^2dx^2dy^2}{r^{10}}\zeta^4 + \frac{J^2dx^2dy^2}{r^6}$$
$$-\frac{6J^2dx^2dy^2}{r^8}\zeta^2 + \frac{9J^2dx^2dy^2}{r^{10}}\zeta^4 = \frac{J^2dx^2dy^2}{r^6}$$
$$+\frac{3J^2dx^2dy^2}{r^8}\zeta^2 = \frac{J^2dx^2dy^2}{r^6}\left(1+3\frac{\zeta^2}{r^2}\right).$$

Bezeichnet man mit φ den Winkel zwischen r und der z-Achse, so ist $\cos\varphi = \zeta : r$ und daher

$$H = \frac{Jdxdy}{r^3}\sqrt{1+3\cos^2\varphi} \quad \dots\dots \quad (59,c)$$

Der Winkel φ in (59, b) und (59, c) ist ein und derselbe, da die magnetische Achse des Blattes, welches den Strom $ABCDA$ ersetzt, die Richtung der z-Achse hat. Vergleicht man (59, b) mit (59, c), so überzeugt man sich wiederum davon, daß unser Satz unter der Bedingung $J = \omega : \mu$ richtig ist.

Gehen wir zum allgemeinen Falle über, wo der Strom J einen beliebigen, geschlossenen, dünnen Leiter durchfließt. Auf Grund des im § 6 (S. 537) bewiesenen Satzes ersetzen wir den gegebenen Strom durch eine unendlich große Zahl von Strömen J auf einer beliebigen Fläche S, welche zu ihrer Umgrenzung die Stromlinie hat. Zieht man auf S zwei Systeme von aufeinander senkrechten Kurven (vgl. Fig. 212, S. 537), so kann man die Annahme machen, daß jeder der Ströme, die den gegebenen Strom ersetzen, längs der Umgrenzung eines unendlich kleinen Rechtecks dahinfließt. Ersetzt man jeden dieser Ströme durch ein magnetisches Blatt, so erhält man schließlich ein einziges magnetisches Blatt, das die ganze Oberfläche S überdeckt; die Kraft ω dieses Blattes ist an allen Stellen die gleiche und kann aus der Gleichung $J = \omega : \mu$ berechnet werden.

Somit haben wir, ausgehend vom Biot-Savartschen Gesetze, den Beweis erbracht, daß jeder geschlossene Strom J durch ein magnetisches Blatt ersetzt werden kann, das eine beliebige, von der Stromlinie umgrenzte Fläche S überdeckt. Die Kraft dieses Blattes wird aus der Gleichung

$$\frac{\omega}{\mu} = J \quad \dots\dots\dots \quad (59,d)$$

gefunden.

Die Nordseite des Blattes muß nach der Seite gekehrt sein, von der aus die Stromrichtung der Bewegungsrichtung des Uhrzeigers entgegengesetzt erscheint.

Das Potential V eines geschlossenen Stromes ist gleich der Summe der Potentiale der ihn ersetzenden Ströme. Formel (58) gibt

$$V = \Sigma V' = \Sigma J\Omega' - 4\pi pJ = J\Sigma\Omega' - 4\pi pJ.$$

Das Summenzeichen erstreckt sich nicht auf das zweite Glied des Ausdrucks (58), da die Linie, welche die Fläche S schneidet, innerhalb der Umgrenzung **nur eines einzigen** der Ströme verläuft, durch welche wir den gegebenen Strom ersetzt hatten. Es sei Ω der Raumwinkel, unter welchem der gegebene Strom, d. h. die Umgrenzung der Fläche S sichtbar ist; offenbar ist dann $\Sigma\Omega' = \Omega$, also

$$V = J\Omega - 4\pi p J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

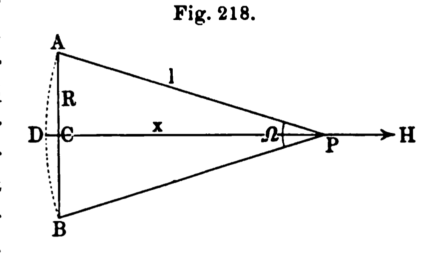
Das Potential eines geschlossenen Stromes in einem gegebenen Punkte ist eine vieldeutige Funktion, wobei einer ihrer Werte gleich dem Produkte aus der Stromstärke J und dem Raumwinkel ist, unter welchen die Stromlinie von diesem Punkte aus erscheint; die Periode der Funktion ist gleich $4\pi J$.

Für die Feldintensität H erhält man

$$H = -J\frac{\partial \Omega}{\partial n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60,\mathrm{a})$$

wo n die Richtung der Normalen zur Oberfläche $\Omega = Const$ ist. Prüfen wir die Formel (60, a) für den Fall, auf den sich Formel (49), S. 540, und Fig. 216 beziehen, d. h. für die Wirkung eines Kreisstromes auf einen Punkt, der auf der Achse desselben liegt. Es sei AB (Fig. 218) der Durchmesser des Stromes, dessen Ebene zur Ebene der Zeichnung senkrecht ist; R, l und x haben hier dieselbe Bedeutung, wie in Fig. 216.

Fig. 218.



Der Raumwinkel Ω am Punkte P verhält sich zu 4π, wie die Oberfläche des Kugelsegments ADB, d. h. $2\pi l CD = 2\pi l(l - x)$ zur Kugeloberfläche $4\pi l^2$. Hieraus folgt

$$\Omega = 2\pi\frac{l - x}{l} = 2\pi - \frac{2\pi x}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Die Formel (60, a) gibt im Hinblick darauf, daß im Punkte P die Normale n offenbar mit der Richtung von x zusammenfällt,

$$H = -J\frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\frac{2\pi R^2 J}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2\pi R^2 J}{l^3},$$

übereinstimmend mit (49).

Nehmen wir an, der Strom J fließe am Umfange einer **ebenen Figur** vom Flächeninhalte σ dahin. Die Wirkung dieses Stromes ist die gleiche, wie diejenige eines magnetischen Blattes, das wir als eben

ansehen können. Die magnetische Achse des Blattes ist senkrecht zur Ebene σ; das magnetische Moment M des Blattes wird durch die Formel $M = k\sigma\delta = \omega\sigma$ gegeben. Wir haben aber die Gleichung $J = \omega:\mu$, woraus sich

$$M = J\sigma\mu \quad \ldots \ldots \quad (60,\text{b})$$

ergibt. Für Punkte, die weit genug abstehen, kann man das Blatt durch einen kurzen Magneten ersetzen, ohne hierbei die Richtung der Achse und die Größe des magnetischen Moments zu ändern. Hieraus folgt, daß die Wirkung eines geschlossenen ebenen Stromes J auf entfernte Punkte durch die Wirkung eines kurzen Magneten ersetzt werden kann, dessen Achse senkrecht zur Stromebene ist und dessen magnetisches Moment gleich dem Produkte aus der Stromstärke und der Fläche ist, welche vom Strom umflossen wird, multipliziert mit der magnetischen Permeabilität des umgebenden Mediums. Der Nordpol dieses Magneten muß sich auf der Seite befinden, von der aus die Stromrichtung entgegengesetzt der Bewegungsrichtung eines Uhrzeigers erscheint. Für $\mu = 1$ ist

$$M = J\sigma \quad \ldots \ldots \quad (60,\text{c})$$

In engem Zusammenhange mit dem soeben Betrachteten steht die Lehre von den Solenoiden.

Denken wir uns eine große Zahl von gleichen, geschlossenen Strömen J, welche die gleichen Flächenräume σ umfließen und dabei einander parallel sind. Sie scheinen gleichsam auf eine gerade Linie aufgereiht, senkrecht zu welcher ihre Ebenen liegen. Ein System von solchen Strömen heißt ein elektrodynamisches Solenoid oder einfach Solenoid zum Unterschied vom magnetischen Solenoid, das wir auf S. 452 kennen gelernt haben. Die erwähnte Gerade heißt die Achse des Solenoids. Der Einfachheit halber kann man sich vorstellen, daß alle σ untereinander gleiche Kreise sind, deren Zentren auf der Solenoidachse liegen. Streng genommen sollte man annehmen, daß die Stromstärke J unendlich klein, die Anzahl der unendlich benachbarten Ströme aber unendlich groß ist. Man nimmt jedoch an, daß J eine endliche Größe ist und daß die Ströme sich in einem zwar sehr geringen, jedoch ebenfalls endlichen Abstande β voneinander befinden. Die Anzahl der auf die Längeneinheit des Solenoids kommenden Ströme bezeichnen wir mit n; es ist dann offenbar

$$n\beta = 1 \quad \ldots \ldots \quad (61)$$

Die Größe

$$J_s = nJ \quad \ldots \ldots \quad (61,\text{a})$$

kann man die Kraft des Solenoids nennen; man kann dieselbe als gegebene Größe ansehen, die sich nicht ändert, wenn die Zahl n unendlich wächst und die Stromstärke J abnimmt.

Es sei AB (Fig. 219) die Solenoidachse; die zu ihr senkrechten, voll ausgezogenen Geraden stellen die Durchschnitte der Zeichnungsebene mit den Ebenen der Ströme dar, deren gegenseitiger Abstand gleich β ist. Jeden Strom aa ersetzen wir durch ein magnetisches Blatt. Setzt man $\mu = 1$, so ist, vgl. (60),

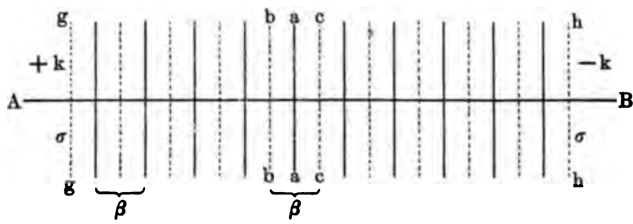
$$\omega = J \quad \ldots \ldots \ldots \quad (61,\mathrm{b})$$

Hier ist $\omega = k\delta$, wobei $\pm k$ die magnetische Dichte auf zwei zu aa parallelen Ebenen ist, die sich in dem kleinen Abstande δ voneinander befinden. Setzen wir $\delta = \beta$, d. h. ersetzen wir den Strom aa durch das magnetische Blatt $bbcc$, dessen Ebenen um $\frac{\beta}{2}$ von aa abstehen. In diesem Falle ist $\omega = k\beta = J$, und hieraus folgt, vgl. (61) und (61, a):

$$k = \frac{J}{\beta} = nJ = J_s \quad \ldots \ldots \quad (61,\mathrm{c})$$

Nehmen wir eine derartige Vertauschung mit sämtlichen Strömen vor; in diesem Falle werden in jeder der durch punktierte Linien an-

Fig. 219.



gedeuteten Flächen je zwei Oberflächenschichten von ungleichnamigen Magnetismen zusammenfallen, deren Gesamtwirkung gleich Null ist. Es bleibt dann nur noch die Wirkung der beiden äußersten Ebenen gg und hh übrig, auf denen sich die magnetischen Mengen $\pm m$ befinden, wo

$$m = k\sigma = nJ\sigma = J_s\sigma \quad \ldots \ldots \quad (61,\mathrm{d})$$

ist. Die Außenwirkung eines Solenoids ist gleich der Wirkung zweier magnetischer Massen $\pm m$, die gleichmäßig auf seinen beiden Grundflächen verteilt sind, wobei $m = J_s\sigma$ ist, wenn $J_s = nJ$ die Kraft des Solenoids, σ der Flächeninhalt seines Querschnittes ist.

Alles oben Gesagte bleibt offenbar auch für ein nicht geradliniges Solenoid in Geltung, wenn n so groß ist, daß man die Ebenen der benachbarten Ströme als parallel ansehen kann.

Die Außenwirkung eines Solenoids hängt nicht von dessen Form ab, d. h. von der Form seiner Achse, sondern bloß

von der Lage seiner Enden. Man könnte sagen, daß die Außenwirkung eines Solenoids gleichsam in seinen Enden konzentriert sei. Wir werden diese Enden als das Nord- und Südende bezeichnen, wobei als Nordende dasjenige gilt, an welchem die Stromrichtung der Richtung der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzt ist. Ein in sich geschlossenes Solenoid übt keinerlei Außenwirkung aus.

Das Potential V eines Solenoids in irgend einem Außenpunkte ist gleich

$$V = nJ\sigma\left\{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right\} = J_s\sigma\left\{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right\} \quad . \quad . \quad (61,e)$$

wo r_1 und r_2 die Entfernungen des Punktes P von den Enden des Solenoids sind. Für das Potential V eines magnetischen Solenoids hatten wir die Formel (40), S. 452, in der J den Magnetisierungsgrad bedeutete; es war für das magnetische Solenoid

$$V = J\sigma\left\{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61,f)$$

Die Wirkung eines elektrodynamischen Solenoids ist identisch mit derjenigen eines magnetischen Solenoids, wenn sich die gleichnamigen Enden beider Solenoide an den gleichen Stellen befinden und wenn ferner die Kraft $J_s = nJ$ des ersten Solenoids numerisch gleich dem Magnetisierungsgrade J des zweiten ist.

Leicht läßt sich der Kraftfluß Φ im Innern des Solenoids bestimmen. Es sei AB (Fig. 220) ein Solenoid, P ein Punkt im Innern

Fig. 220.

desselben. Führen wir zwei Schnitte a und b durch das Solenoid, die sich unendlich nahe P befinden. Der Punkt P ist in bezug auf die beiden Solenoide Aa und bB ein Außenpunkt; die Wirkung dieser beiden Solenoide ist gleich der Wirkung der magnetischen Massen $\pm m = \pm k\sigma$, die auf den Querschnittsflächen a und b gleichmäßig verteilt sind. Die Wirkung des unendlich kurzen Solenoids ab ist offenbar gleich Null. Hieraus geht hervor, daß der Kraftfluß Φ im Innern des Solenoids gleich, vgl. (61, d),

$$\Phi = 4\pi m = 4\pi nJ\sigma = 4\pi J_s\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

ist. Für ein Solenoid, dessen Länge groß im Vergleich zu den linearen Dimensionen seines Querschnittes ist, kann man die Annahme machen, daß der Kraftfluß gleichmäßig über die Fläche σ des Querschnittes ver-

teilt ist. In diesem Falle ist die Feldintensität H im Innern des Solenoids gleich $\Phi:\sigma$, d. h. es ist

$$H = 4\pi n J = 4\pi J_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Diese überaus wichtige Formel gilt auch für ein nicht geradliniges Solenoid, sowie auch für ein geschlossenes Solenoid. Wir bringen noch einmal in Erinnerung, daß alle unsere Schlüsse absolut genau nur für ein ideales Solenoid sind, für welches J unendlich klein, n dagegen unendlich groß ist. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß in der Gleichung $m = nJ\sigma$, vgl. (61, d), beide Seiten die gleiche Dimension haben; hierbei muß man im Auge behalten, daß n keine unbenannte Zahl ist, sondern den numerischen Wert einer gewissen physikalischen Größe (der Verteilungsdichtigkeit der Ströme) darstellt, deren Dimension, wie aus (61) folgt, gleich L^{-1} ist.

Für praktische Zwecke erhält man eine Vorrichtung, die sich einem Solenoid nähert, wenn man einen Strom durch einen dünnen, isolierten Draht hindurchsendet, der auf einer Zylinderoberfläche derart aufgewickelt ist, daß sich die einzelnen Windungen innig berühren.

Wie uns Formel (63) zeigt, hängt die Feldintensität H im Innern des Solenoids nicht vom Flächeninhalt seines Querschnittes ab. Hieraus folgt, daß eine elektrodynamische Rolle, d. h. ein in mehreren Lagen zu einer Rolle gewickelter, stromdurchflossener Draht eine Reihe von Solenoiden ergibt, welche eine gemeinsame Achse haben, wobei H im Innenraume durch obige Formel (63) gegeben ist, in welcher n dann die Gesamtzahl der Drahtwindungen pro Längeneinheit der Rolle bedeutet.

Enthalten alle Lagen die gleiche Anzahl n_1 Windungen pro Längeneinheit und ist die Anzahl der Lagen gleich n_2, so ist $n = n_1 n_2$ und man erhält für die Feldintensität H im Innern der elektrodynamischen Rolle den Ausdruck:

$$H = 4\pi n_1 n_2 J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63, a)$$

§ 8. Energie eines in ein Magnetfeld gebrachten Stromes. Elektrische Ströme sind ähnlich den Magneten der Einwirkung des Magnetfeldes unterworfen, in dem sie sich befinden und das im allgemeinen durch irgend welche Magnete oder auch andere Ströme hervorgerufen wird. Diese Einwirkung des Feldes auf Ströme kommt in ponderomotorischen Kräften zum Ausdruck, welche diese oder jene Bewegungen der stromdurchflossenen Leiter hervorrufen. Die Notwendigkeit einer solchen Einwirkung ist eine direkte Folge aus dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. Sagt man nämlich, ein Strom sei von einem Magnetfelde umgeben, so heißt das, es treten in Gegenwart des Stromes ponderomotorische Kräfte auf, welche auf etwaige in der Nähe befindliche Magnete einwirken. Nach

dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung müssen gleiche, entgegengesetzt gerichtete ponderomotorische, auf die Ströme einwirkende Kräfte auftreten, wenn sich in ihrer Nähe Magnete befinden. Solche Kräfte aber sind die Kräfte eines Magnetfeldes, es ist daher klar, daß Ströme, welche sich im Magnetfelde von Magneten befinden, ponderomotorischen Kräften unterworfen sein müssen. Da ferner das Magnetfeld eines Stromes sich im wesentlichen nicht vom Felde eines Magneten unterscheidet, so folgt hieraus, daß ein sich im Magnetfelde eines anderen Stromes befindender Strom ebenfalls ponderomotorischen Kräften unterworfen sein muß. Hieraus folgt die notwendige Existenz einer Wechselwirkung der Ströme.

Man kann auch noch weitergehen. Wir hatten bisher nichts über die ponderomotorischen Wirkungen eines Magneten auf sich selbst ausgesagt, da wir uns die Magnete als feste Körper dachten. Es versteht sich von selbst, daß das Magnetfeld eines gegebenen Magneten keinerlei fortschreitende oder drehende Bewegungen des Magneten selbst als eines Ganzen hervorrufen kann, da die Kräfte der Wechselwirkungen jeden Paares der Magnetteilchen an Größe einander gleich und von entgegengesetzter Richtung sind. Richtet man es aber so ein, daß einige Teile des Magneten beweglich sind, so muß sich zeigen lassen, daß der Magnet eine Wirkung auf sich selbst ausübt. Biegt man z. B. eine dünne Stahllamelle hufeisenförmig und befestigt sie zunächst so, daß keine Bewegung erfolgen kann, magnetisiert sie dann derart, daß sich ihre Pole an ihren Enden befinden und entfernt hierauf die Verfestigungen, so bleiben die Enden der Lamelle in einem Abstande voneinander, in welchem der Wechselwirkung der Pole von den elastischen, durch das Biegen der Lamelle hervorgerufenen Kräften das Gleichgewicht gehalten wird. Auf diese Weise ruft die Wirkung des Magneten auf sich selbst eine Deformation des Magneten hervor. In sehr geringem Grade muß eine solche Deformation in jedem Magneten vorhanden sein; wir werden auf diese Frage später zurückkehren.

Eine viel bedeutendere Rolle muß die ponderomotorische „Wirkung eines Stromes auf sich selbst" spielen. Jeder Teil einer geschlossenen Kette befindet sich im Magnetfelde aller übrigen Teile dieser Kette, es wirken daher auf denselben Kräfte ein, die ihn nach der einen oder der anderen Seite zu verschieben suchen. Somit befinden sich sämtliche Teile einer geschlossenen Kette unter der Wirkung von ponderomotorischen Kräften, die gleichsam von der Kette selbst ausgehen; mit anderen Worten: ein geschlossener Stromkreis sucht sich zu deformieren. Diese Erscheinung läßt sich leicht nachweisen, da es nicht schwer ist, eine Kette derart einzurichten, daß einige Teile derselben beweglich werden; man kann sie beispielsweise schwimmend machen, sie mit Scharnieren versehen oder endlich aus dünnem biegsamen Draht herstellen.

Wenn man einen Strom, der sich in einem gegebenen Magnetfelde befindet, aus diesem Felde zu entfernen beginnt, so leisten die Kräfte, welche auf diesen Strom einwirken, eine gewisse Arbeit, die als Maß für die potentielle Energie W des Stromes gelten kann, der sich in einem Magnetfelde mit einer gewissen Feldintensität H' befindet. Wir werden die Größe W nach zwei Methoden bestimmen. Die Außenwirkung des Stromes J auf die uns unbekannten Quellen (Magnete oder Ströme) des Feldes H' ist gleich der Wirkung auf dieselben Quellen seitens eines magnetischen Blattes, das sich auf einer beliebigen, von der Stromlinie umgrenzten Fläche S befindet und die Kraft $\omega = J\mu$ hat, wo μ die magnetische Permeabilität des umgebenden Mediums ist. Hieraus folgt, daß auch die Wirkung des Feldes H' auf den Strom J gleich der Wirkung des Feldes auf dasselbe magnetische Blatt sein muß und hieraus folgt, daß auch die potentielle Energie W des Stromes gleich der potentiellen Energie des Blattes sein muß. Für letztere Größe hatten wir die Formel (28), S. 446, gefunden:

$$W = -\omega \Phi' = -\omega N' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

wo Φ' den Kraftfluß bedeutet, N' aber die Gesamtzahl der Kraftlinien, welche die Fläche S des Blattes durchsetzen. Für einen Strom J, der sich in einem homogenen Medium μ befindet, erhält man hieraus

$$W = -J\mu \Phi' = -J\mu N' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64, a)$$

Ist das Medium inhomogen, so wird die Feldintensität H' rings um das Element dS der Fläche S sowohl von den ursprünglich gegebenen Feldquellen hervorgerufen, als auch von jenen fingierten magnetischen Massen, die wir uns an der Grenzfläche der ungleichartigen Körper denken müssen. Ersetzen wir den gegebenen Strom auf bekannte Weise durch eine unendlich große Anzahl von Strömen, die auf der Fläche S verteilt sind. Jeden einzelnen Strom ersetzen wir durch ein magnetisches Blatt, dessen Energie dW gleich $-\omega H'_n dS$ ist, vgl. (27, e), S. 446; hier bedeutet H'_n die in die Richtung der an dS gezogenen Normalen n fallende Komponente der Feldintensität. Substituiert man $\omega = J\mu$, so ist

$$dW = -J\mu H'_n dS,$$

also

$$W = -J\int \mu H'_n dS.$$

Es ist aber $\mu H'_n$ gleich B'_n, d. h. gleich der in die Richtung von n fallenden Komponenten der magnetischen Induktion. Daher ist

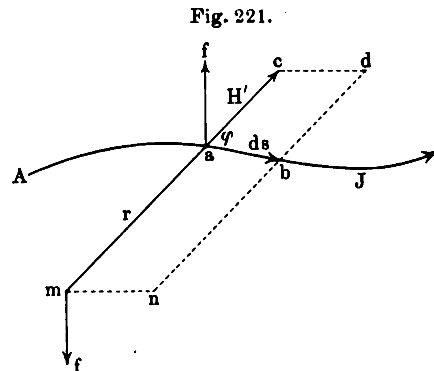
$$W = -J\int B'_n dS = -JN \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64, b)$$

wo wir zum Unterschiede von N' in Formel (64, a) mit N die Gesamtzahl der Induktionslinien bezeichnen, welche die Fläche S schneiden.

Es ist also die potentielle Energie eines Stromes, der sich im Magnetfelde befindet, gleich dem mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Produkte aus der Stromstärke und dem Induktionsflusse oder aus der Stromstärke und der Gesamtzahl der Induktionslinien, welche durch die Umgrenzung des Stromes hindurchgehen und zwar von der Seite her, von welcher aus die Stromrichtung gleich der Richtung der Uhrzeigerbewegung erscheint. Wir werden diese Seite die Südseite nennen. Für ein homogenes Medium geht Formel (64, b) in (64, a) über.

Wir wollen nun W auf einem anderen Wege berechnen. Zu diesem Zwecke bestimmen wir diejenigen ponderomotorischen Kräfte, welche auf einen im Magnetfelde H' befindlichen Leiter des Stromes J einwirken. Es sei AB (Fig. 221) ein Leiter des Stromes J, der von A nach B fließt; $ab = ds$ sei ein Stromelement; $ac = H'$ die Intensität des äußeren Feldes, welche durch die Kraft gemessen wird, die im Punkte a wirken würde, wenn sich in ihm anstatt des Stromelementes die Einheit der magnetischen Menge befinden würde. Die Wirkung des Feldes auf das Stromelement ds kann offenbar nicht davon abhängig sein, von was für einer Quelle das Feld wachgerufen ist. Wir setzen daher voraus, daß die Feldintensität H' durch irgend eine magnetische Menge m hervorgerufen ist, die sich in einer gewissen Entfernung r von a befindet, wobei r offenbar die Richtung von H' hat und die Gleichung

Fig. 221.



$$H' = \frac{m}{\mu r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (65)$$

erfüllt sein muß.

Die Wirkung, welche das Element ds auf m ausübt, wird durch die Kraft f, vgl. (48), gegeben

$$f = \frac{mJds}{r^2} \sin\varphi \quad \ldots \ldots \quad (65, a)$$

wo man $\varphi = \angle cab$ setzen kann und die Stromstärke in el.-mg. Einheiten ($C = 1$) ausgedrückt ist. Diese Kraft steht senkrecht zur Ebene (r, ds), d. h. zu $mabn$ und hat gemäß der Ampèreschen Regel die in der Figur angegebene Richtung. Aus dem Gesetze von der Gleich-

heit der Wirkung und Gegenwirkung müssen wir schließen, daß der Pol m auf das Stromelement ds mit einer Kraft einwirkt, die gleich und parallel f ist, aber, wie die Figur zeigt, nach der entgegengesetzten Seite gekehrt ist. Substituiert man (65) in (65, a), so erhält man

$$f = J \mu H' ds \sin \varphi \quad \ldots \ldots \quad (66)$$

Die vorhin eingeführte Hilfsgröße m kommt in diesem Ausdrucke nicht mehr vor. Das Produkt $H' ds \sin \varphi$ ist gleich dem Flächeninhalte des Parallelogramms $abdc$. Es ist daher

$$f = \mu J \times \text{Fläche } (H', ds) \quad \ldots \quad (66, a)$$

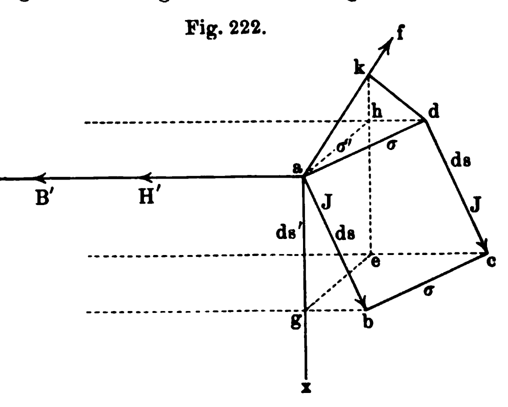
wo Fläche (H', ds) den Flächeninhalt von $abdc$ bedeutet. Die Richtung der Kraft f, die auf das im Magnetfelde H' befindliche Stromelement $J ds$ wirkt, wird nach einer der Ampèreschen analogen Regel gefunden: Schwimmt man in der Stromrichtung und blickt in der Richtung der Kraftlinien, so erscheint die auf den Strom einwirkende Kraft nach links gerichtet.

Eine andere Regel ist als Linkehandregel bekannt: Wenn man den Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der linken Hand miteinander rechte Winkel bilden läßt und hierbei der Mittelfinger die Stromrichtung, und der Zeigefinger die Richtung der Kraftlinien des Feldes hat, so gibt der Daumen die Richtung der Kraft an, welche auf den Strom einwirkt. Man kann schreiben

$$f \perp \text{Fläche } (H', ds) \quad \ldots \ldots \quad (66, b)$$

Bestimmen wir die Arbeit dR, welche von den Kräften f bei einer unendlich kleinen Änderung in der Lage des Stromes geleistet wird. Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst diejenige Arbeit d^2R berechnen, welche bei einer unendlich kleinen Verschiebung eines der Stromelemente $J ds$ geleistet wird. Der Übergang von ds aus der einen Lage in die andere kann durch Parallelverschiebung und eine gewisse Drehung des Elementes ds um einen seiner Punkte bewirkt werden. Die Arbeit der Kraft f, welche die Drehung von ds bewirkt, ist offenbar gleich Null, es genügt daher, die Arbeit der Kraft f zu berechnen, die zu einer beliebigen Parallelverschiebung

Fig. 222.



von ds erforderlich ist. Es sei $ab = ds$ ein Stromelement, aH' die Feldintensität. Die Kraft f ist senkrecht zur Fläche baH'; sie wird durch Formel (66) gegeben, in welcher $\varphi = \angle\, baH'$ ist. Wir nehmen an, der Strom J habe die Richtung ab, so daß f vom Beschauer nach der Ebene der Zeichnung hin verläuft. Es möge sich, wie wir annehmen wollen, ds von ab nach dc verschoben haben; $ad = bc$ setzen wir gleich σ. Dann ist die gesuchte Arbeit d^2R gleich

$$d^2R = f\sigma \cos(f, \sigma) = J\mu H' ds \sin(H', ds)\, \sigma \cos(f, \sigma) \quad . \quad . \quad (67)$$

Ziehen wir die Gerade ax senkrecht zur Fläche faH'; es ist dann Fläche $fax \perp H'$. Da $f \perp$ Fläche baH' ist und gleichzeitig $f \perp ax$, so müssen offenbar die Geraden aH', ax und ab in einer zu fax senkrechten Ebene liegen. Projizieren wir das Parallelogramm $abcd$ auf die Fläche fax; zu diesem Zwecke haben wir von den Punkten b, c und d aus Senkrechte auf fax zu fällen. Die von b auf die Fläche fax gefällte Senkrechte trifft dieselbe im Punkte g, der auf der Geraden ax liegt, da die mit Fläche baH' zusammenfallende Fläche bag senkrecht zur Fläche fax ist. Es sei $ageh$ die Projektion von $abcd$ auf die Fläche fax. Wir ziehen noch $dk \perp af$; verlängert man eh bis zum Durchschnitt mit af, so wird Punkt k zum Durchschnittspunkte. Es ist nämlich $dh \perp$ Fläche fax und $df \perp af$, also $hk \perp af$; nun ist aber $eh \parallel xa$, also $eh \perp af$. Hieraus folgt, daß hk die Verlängerung von eh ist. Winkel ake ist also ein Rechter und ak bildet die Höhe des Parallelogramms $ageh$. Hieraus folgt

$$\text{Fläche } ageh = ag \times ak \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67, a)$$

Wir wenden uns jetzt zu der Formel (67). Wie man aus der Figur ersieht, ist

$$ds \sin(H', ds) = ab \sin(baH') = ab \cos(bag) = ag;$$
$$\sigma \cos(f, \sigma) = ad \cos(daf) = ak.$$

Substituiert man dies in (67) und berücksichtigt die Formel (67, a), so erhält man

$$d^2R = J\mu H' \times \text{Fläche } ageh.$$

Führt man an Stelle von $\mu H'$ die Induktion B' ein, so erhält man

$$d^2R = JB' \times \text{Fläche } ageh.$$

Die Ebene $ageh$ ist aber senkrecht zu B', es ist daher $B' \times$ Fläche $ageh$ der Induktionsfluß, welcher das Parallelogramm $ageh$ durchsetzt. Endlich ist $ageh$ die Projektion des Parallelogramms $abcd$ auf die Fläche fax, welche selbst senkrecht zu B' ist; hieraus folgt, daß der Induktionsfluß, welcher $ageh$ durchsetzt, gleich dem Induktionsflusse ist, welcher durch die Fläche $abcd$ hindurchgeht, die man als die vom Stromelemente ds bei seiner Verschiebung durchwanderte Fläche bezeichnen kann. Anstatt des Induktionsflusses könnte man auch die Anzahl der Induktionslinien wählen, welche die Fläche $abcd$ durch-

setzen. Alle diese Induktionslinien werden vom Elemente ds bei seinem Übergange aus der Lage ab in die Lage dc geschnitten.

Bevor wir das Endresultat formulieren, haben wir noch die Frage nach dem Vorzeichen der Größe d^2R zu lösen. Wir erhielten für d^2R einen positiven Wert, weil Winkel daf ein spitzer war. Ist $\angle\, daf$ ein stumpfer, d. h. liegt das Parallelogramm $abcd$ nicht jenseits der Fläche (ds, H'), sondern vor derselben, so wird die Arbeit d^2R negativ. Im ersten Falle $(d^2R > 0)$ bewegt sich der Beobachter, der in der Richtung des Stromes J schwimmt (von a nach b) und in die Richtung der Kraftlinien blickt, nach links, im zweiten Falle $(d^2R < 0)$ bewegt er sich nach rechts.

Schließlich ist noch darauf hinzuweisen, daß unser Resultat auch für eine endliche Verschiebung des Stromelementes in Geltung bleibt, da eine endliche Verschiebung in eine unendlich große Anzahl von unendlich kleinen Verschiebungen zerlegt werden kann. Man erhält folgendes Endresultat:

Die Arbeit, welche von einem äußeren Magnetfelde bei beliebiger endlicher Verschiebung des Stromelementes ds geleistet wird, ist gleich dem Produkt aus der Stromstärke J und dem Induktionsflusse, welcher die vom Elemente ds bei seiner Verschiebung durchwanderte Fläche durchsetzt oder aber diese Arbeit ist gleich dem Produkt aus der Stromstärke J und der Anzahl der Induktionslinien, welche vom Elemente ds während seiner Wanderung geschnitten werden. Diese Arbeit ist positiv, wenn die Bewegung nach links vom Beobachter vor sich geht, der in der Stromrichtung schwimmt und in die Richtung der Induktionslinien blickt.

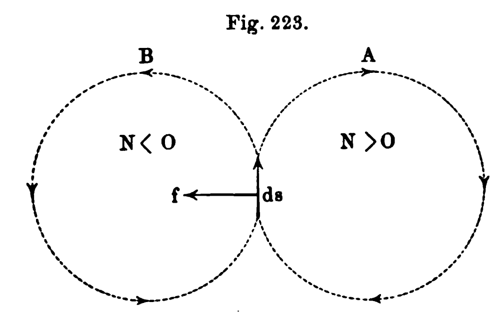
Aus Fig. 222 wird klar, daß bei Berechnung der Arbeit d^2R das Stromelement ds durch seine Projektion auf eine zu den Kraftlinien senkrechte Ebene ersetzt werden und die Verschiebung dieser Projektion anstatt der Verschiebung des Elementes selbst betrachtet werden kann. Würde sich nämlich das Element $ds' = ag$ nach he verschieben, so wäre die Arbeit d^2R gleich $f\sigma' \cos(f, \sigma')$, wo $\sigma' = ah$ ist. Nach der allgemeinen Formel (66) aber, in der jetzt $\sin\varphi = \sin(H', ds') = 1$ ist, erhält man die Kraft $f = J\mu H' ds'$, so daß $d^2R = J\mu H' ds' \sigma' \cos(f, \sigma')$ ist. Es ist aber $\sigma' \cos(f, \sigma') = ak$, $ds' = ag$, mithin $d^2R = J\mu H' \times ak \times ag$, oder, vgl. (67, a), $d^2R = JB' \times$ Fläche $ageh$, was nichts anderes ist als Formel (67, b).

Wenden wir uns zur Betrachtung der Arbeit dR, die vom Magnetfelde bei einer unendlich kleinen Verschiebung des ganzen geschlossenen Stromes geleistet wird. Offenbar ist dR gleich der Summe der Arbeiten d^2R, welche bei den entsprechenden Verschiebungen aller Stromelemente ds geleistet werden. Welches auch die Form der Stromumgrenzung sein mag, jedenfalls hat jene Umgrenzung immer zwei solche

Seiten, daß von der einen Seite her gesehen die Stromrichtung überwiegt, welche der Richtung der Uhrzeigerbewegung entspricht, von der anderen Seite gesehen, ihr entgegengesetzt ist. Die erste von diesen Seiten haben wir schon früher als die Südseite bezeichnet, die letztere wollen wir die Nordseite nennen.

Verschiebt sich das Element ds, so kann die Arbeit d^2R positiv oder negativ sein; andererseits kann die Zahl N der Induktionslinien, welche die Stromumgrenzung durchsetzen, während das Stromelement ds sich verschiebt, sowohl zu-, als auch abnehmen. Sehen wir zu, ob das Vorzeichen der Arbeit d^2R und die Änderung der die Stromumgrenzung durchsetzenden Anzahl N von Induktionslinien nicht in einem gewissen Zusammenhange stehen. Zunächst ist aber noch eine Frage zu erledigen, welche sich auf die Richtung der Induktionslinien in bezug auf die Stromrichtung bezieht: diese Linien können die Stromumgrenzung schneiden, während sie von der Südseite zur Nordseite oder von der Nordseite zur Südseite übergehen. Wir wollen N positiv rechnen, wenn die Induktionslinien die Stromumgrenzung in der Richtung von der Südseite zur Nordseite durchsetzen. Bei entgegengesetzter Richtung dieser Linien werden wir N als negativ betrachten; wir werden in diesem Falle beispielsweise sagen, daß N zunimmt, während die absolute Zahl der Induktionslinien, welche die Stromumgrenzung durchsetzen, abnimmt.

Fig. 223.



Wenden wir uns der Fig. 223 zu; nehmen wir an, es durchschnitten die Induktionslinien die Ebene unserer Figur in der Richtung vom Leser aus, der somit in die Richtung der Kraftlinien blickt. Es sei ds ein Element des Stromes, dessen Umgrenzung zweierlei Lage haben kann; durch punktierte Kreise sind die Projektionen dieser beiden möglichen Lagen auf die Zeichenebene angegeben. Hat der Strom die Lage A, so ist offenbar $N > 0$, hat er die Lage B, so ist $N < 0$. Die auf ds einwirkende Kraft f ist nach links gerichtet.

Es sind zwei Bewegungsfälle des Elementes ds möglich.

1. Die Arbeit d^2R ist > 0; das Element ds bewegt sich in einer Richtung, welche mit f einen spitzen Winkel bildet, d. h. nach links. Klar ist, daß N bei beiden Lagen A und B des Stromes wächst.

2. Die Arbeit d^2R ist < 0; das Element ds bewegt sich nach rechts; die Zahl N der Induktionslinien nimmt bei beiden Lagen des

Stromes ab. Die Arbeit d^2R und die Änderung der Zahl der Induktionslinien, welche die Stromumgrenzung durchsetzen, sind beide positiv oder beide negativ. Wir sahen, daß d^2R gleich dem Produkt aus der Stromstärke J und der Zahl der Induktionslinien ist, welche vom Elemente ds auf seiner Wanderung geschnitten werden, es ist dies aber auch offenbar die Zahl der Linien, welche von neuem in die Stromumgrenzung eintreten oder aus ihr heraustreten. Wendet man daher das Gesagte auf alle Stromelemente ds an und bezeichnet mit dN die Znahme der Anzahl von Induktionslinien, welche die Stromerzeugung durchsetzen, so erhält man für die Arbeit dR des Magnetfeldes bei unendlich kleiner Verschiebung des Stromes den Ausdruck

$$dR = JdN \quad \quad (68)$$

Die Arbeit dR ist gleich der Verminderung dW der potentiellen Energie des Stromes und Feldes, es ist also

$$dW = -JdN \quad \quad (68,a)$$

Hieraus folgt $W = -JN + Const.$ Entfernt man aber den Strom aus dem Magnetfelde, so ist $N = 0$ und $W = 0$, folglich ist die Konstante gleich Null und es ist somit

$$W = -JN \quad \quad (69)$$

was mit der Formel (64, b) übereinstimmt, die wir erhielten, als wir den Strom durch ein magnetisches Blatt ersetzten. Dort war auch eine Formulierung des erhaltenen Resultats gegeben worden.

Für die Arbeit R des Magnetfeldes bei endlicher Verschiebung des Stromes erhält man aus (68) den Ausdruck

$$R = J(N_2 - N_1) \quad \quad (69,a)$$

wo N_1 die Anzahl der Induktionslinien ist, welche bei der ursprünglichen Lage des Stromes die Stromumgrenzung von der Süd- zur Nordseite hin durchsetzen, N_2 die entsprechende Anzahl bei der neuen Lage des Stromes.

Aus Formel (69, a) kann man eine Reihe von Schlüssen ziehen.

Nehmen wir an, das Feld sei homogen, die Induktionslinien also seien einander parallele Geraden und es bewege sich der Strom als Ganzes genommen, d. h. bei unverändert bleibender Umgrenzung.

Bei fortschreitender Bewegung des Stromes, d. h. bei Parallelverschiebung desselben, ist die Arbeit R des Feldes gleich Null.

Bei Drehung eines solchen Stromes um eine den Induktionslinien parallele Achse ist die Arbeit R des Feldes gleich Null.

Die Arbeit eines homogenen Feldes ist nur dann nicht gleich Null, wenn eine Drehung des Stromes um eine Achse erfolgt, die nicht zu den Induktionslinien parallel ist.

Bei fortschreitender Bewegung eines Stromes im inhomogenen Felde ist die Arbeit R positiv, wenn sich die Südseite des Stromes von Stellen mit geringerer zu solchen mit größerer Feldintensität bewegt.

Alle diese Schlußfolgerungen beziehen sich auf einen Strom mit unveränderlicher Umgrenzung; kann sich ein Teil der Umgrenzung, d. h. ein Teil der stromdurchflossenen Leiter, selbständig bewegen, so wird die Arbeit durch die allgemeine Formel (69, a) bestimmt.

Wenden wir uns jetzt dem wichtigen Fall zu, wo das äußere Magnetfeld durch einen anderen Strom hervorgerufen ist, d. h. suchen wir die potentielle Energie $W_{1,2}$ zweier Ströme, deren Stärke wir mit J_1 und J_2 bezeichnen wollen. Setzen wir voraus, daß das Medium homogen ist, so daß seine magnetische Permeabilität μ überall die gleiche ist. Aus dem vorhergehenden wird klar, daß die Energie $W_{1,2}$ gleich der Energie zweier magnetischer Blätter sein muß, deren Kräfte gleich $\omega_1 = \mu J_1$ und $\omega_2 = \mu J_2$ sind. Diese Energie aber wird durch Formel (30), S. 447, bestimmt. Setzt man in derselben ω_1 und ω_2 ein, so erhält man

$$W_{1,2} = -J_1 J_2 \mu L_{1,2} \quad \ldots \ldots \quad (70)$$

wo $L_{1,2}$ eine rein geometrische Größe ist, welche nur von der räumlichen Anordnung der Umgrenzungen der beiden Ströme abhängt. Die Größe $\mu L_{1,2}$ heißt der Koeffizient der gegenseitigen Induktion zweier Ströme (S. 448); ihre Dimension ist $[\mu]L$, wie bereits auf S. 460 erwähnt war. Wir sahen, daß man $L_{1,2}$ nach der Formel

$$L_{1,2} = -\iint \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1 \partial n_2} dS_1\, dS_2 \quad \ldots \ldots \quad (71)$$

berechnen kann, vgl. (36), S. 450. — Bezeichnen wir mit $\Psi_{1,2} = N_{1,2}$ den Induktionsfluß oder die Anzahl der Induktionslinien, die aus der Umgrenzung des ersten Stromes heraustreten und die Umgrenzung des zweiten durchsetzen, wenn $J_1 = 1$ ist, mit $\Psi_{2,1} = N_{2,1}$ aber den Induktionsfluß oder die Anzahl der Induktionslinien, welche aus der Umgrenzung des zweiten Stromes heraustreten und durch die Umgrenzung ds des ersten hindurchgehen, wenn $J_2 = 1$ ist. Dann ist in Formel (69) im ersten Falle $J = J_2$, $N = J_1 N_{1,2}$, im zweiten Falle aber $J = J_1$, $N = J_2 N_{2,1}$; daraus folgt

$$W = -J_1 J_2 N_{1,2} = -J_1 J_2 N_{2,1} \quad \ldots \quad (71, \text{a})$$

Mithin ist

$$\left.\begin{aligned} N_{1,2} &= N_{2,1} \\ \Psi_{1,2} &= \Psi_{2,1} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (71,\mathrm{b})$$

Aus diesen Formeln, die den Formeln (33), S. 448, analog sind, ergibt sich folgender Satz: Hat man zwei Ströme von gleicher Stärke J, so sind der Induktionsfluß $J\Psi_{1,2}$ oder die Anzahl $JN_{1,2}$ der Induktionslinien, welche von der Umgrenzung des ersten Stromes ausgehen und die Umgrenzung des zweiten durchsetzen, gleich dem Induktionsflusse $J\Psi_{2,1}$ oder der Anzahl $JN_{2,1}$ der Induktionslinien, welche von der Umgrenzung des zweiten Stromes ausgehen und durch die Umgrenzung des ersten Stromes hindurchgehen. Vergleicht man (70) mit (71, a), so findet man

$$\mu L_{1,2} = \Psi_{1,2} = N_{1,2} \quad \ldots \ldots \quad (71,\mathrm{c})$$

Der Koeffizient der gegenseitigen Induktion zweier Ströme ist gleich dem Induktionsflusse oder gleich der Anzahl der Induktionslinien, welche von der Umgrenzung des einen Stromes ausgehen und durch die Umgrenzung des anderen hindurchgehen, während die Stromstärken gleich der Einheit sind. Formel (70) lautet in Worten:

Die potentielle Energie zweier Ströme ist gleich dem mit entgegengesetztem Vorzeichen versehenen Produkte $J_1 J_2$ der Stromstärken, multipliziert mit dem Koeffizienten $\mu L_{1,2}$ ihrer gegenseitigen Induktion, der gleich dem eben erwähnten Induktionsflusse ist. Die Größe $L_{1,2}$ ist in Formel (71) in Form eines Integrals gegeben, das sich auf die beiden Flächen S_1 und S_2 erstreckt, die zu ihren Umgrenzungen die beiden gegebenen Ströme haben. Ein solcher Ausdruck erscheint als durchaus natürlich, solange die Rede von zwei magnetischen Blättern ist, deren Oberflächen S_1 und S_2 sind, erscheint jedoch als etwas Gekünsteltes, wenn man es mit zwei Strömen zu tun hat, d. h. geometrisch gesprochen, mit zwei geschlossenen Linien im Raume. Man kann Formel (71) derart umformen, daß in ihr nur die Elemente ds_1 und ds_2 der Umgrenzungen beider Ströme vorkommen. Bezeichnen wir mit x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 die Koordinaten der Elemente ds_1 und ds_2. Wendet man zweimal die Stokessche Formel, vgl. (43), S. 418, an, so kann man folgende Identität beweisen:

$$\left.\begin{aligned} &\iint \frac{1}{r}\left(\frac{\partial x_1}{\partial s_1}\frac{\partial x_2}{\partial s_2} + \frac{\partial y_1}{\partial s_1}\frac{\partial y_2}{\partial s_2} + \frac{\partial z_1}{\partial s_2}\frac{\partial z_2}{\partial s_2}\right) ds_1\, ds_2 \\ &\qquad = -\iint \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1 \partial n_2}\, dS_1\, dS_2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (72)$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist ein Doppelintegral, das sich über die beiden Umgrenzungen s_1 und s_2 der Ströme erstreckt, wobei r

der Abstand der Elemente ds_1 und ds_2 jener Umgrenzungen ist. Die rechte Seite ist ein Doppelintegral, welches über die beiden Flächen S_1 und S_2 genommen ist, wobei r die Entfernung der Elemente dS_1 und dS_2 voneinander ist, n_1 und n_2 die Normalen zu jenen Elementen bedeuten. Bezeichnen wir mit ε den Winkel zwischen den Elementen ds_1 und ds_2, es ist dann

$$\cos\varepsilon = \frac{\partial x_1}{\partial s_1}\frac{\partial x_2}{\partial s_2} + \frac{\partial y_1}{\partial s_1}\frac{\partial y_2}{\partial s_2} + \frac{\partial z_1}{\partial s_1}\frac{\partial z_2}{\partial s_2}.$$

Substituiert man dies in (72) und berücksichtigt (71), so erhält man für den Koeffizienten der gegenseitigen Induktion beider Ströme folgenden Ausdruck:

$$\mu L_{1,2} = \mu \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds_1\, ds_2 \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

Für die potentielle Energie zweier Ströme erhält man, vgl. (70),

$$W_{1,2} = -J_1 J_2 \mu \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds_1\, ds_2 \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

Hier ist r der Abstand der Elemente ds_1 und ds_2 und α der Winkel zwischen ihnen.

Auf S. 554 war darauf hingewiesen worden, daß die einzelnen Teile eines geschlossenen Stromkreises aufeinander ponderomotorische Wirkungen ausüben, daß daher bewegliche Teile einer Kette unter der Wirkung des Magnetfeldes dieser Kette in Bewegung gesetzt werden können. Hieraus folgt, daß jeder Strom einen gewissen Vorrat an potentieller Energie besitzt, den wir mit $W_{1,1}$ bezeichnen wollen. Man sieht leicht ein, daß die Kräfte f, welche in diesem Falle auf die Stromelemente ds wirken, Richtungen haben, die von der Richtung des Stromes im Kreise unabhängig sind, da sich mit Änderung der Stromrichtung auch die Richtung der Induktionslinien ändert. Wir haben immer den Fall A, der der rechten Hälfte der Fig. 223 entspricht und uns zeigt, daß der Strom die Fläche zu vergrößern strebt, deren Umgrenzung er bildet. Es läßt sich leicht der Ausdruck für die Energie $W_{1,1}$ finden, die gleich der Energie eines magnetischen Blattes sein muß, d. h. gleich dem Potential des Blattes auf sich selbst. Kombiniert man in bekannter Weise jedes Element des Blattes mit jedem anderen, so hat man dann die Hälfte der erhaltenen Summe zu nehmen, da bei dieser Art des Kombinierens jedes Elementenpaar zweimal vorkommt. Anstatt der Formel (70) erhält man jetzt

$$W_{1,1} = -\tfrac{1}{2} J_1^2 \mu L_{1,1} \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

Die Größe $\mu L_{1,1}$ heißt der Selbstinduktionskoeffizient des gegebenen Stromes. Die Formeln (71) und (73) geben

$$L_{1,1} = -\iint \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n_1 \partial n_1'} d S_1 d S_1' = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} d s_1 d s_1' \quad . \quad . \quad (76)$$

Hier sind dS_1 und dS_1' Elemente ein und derselben Oberfläche, ds_1 und ds_1' Elemente ein und derselben Umgrenzungslinie. Anstatt (75) können wir schreiben

$$W_{1,1} = -\tfrac{1}{2} J_1^2 \mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} d s_1 d s_1' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Der Gesamtbetrag W der potentiellen Energie beider Ströme J_1 und J_2 besteht aus drei Teilen $W_{1,2}$, $W_{1,1}$ und $W_{2,2}$. Die Formeln (69) und (75) geben

$$W = -\mu \{J_1 J_2 L_{1,2} + \tfrac{1}{2} J_1^2 L_{1,1} + \tfrac{1}{2} J_2^2 L_{2,2}\} \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

Hier ist $L_{1,2}$ der Koeffizient der gegenseitigen Induktion der beiden Ströme, $L_{1,1}$ und $L_{2,2}$ ihre Selbstinduktionskoeffizienten für ein Medium, in welchem $\mu = 1$ ist.

§ 9. Bemerkung über den Charakter der Gesetze, welche die magnetischen und elektrischen Kräfte bestimmen. In der Lehre von den magnetischen und elektrischen Erscheinungen begegnet man drei Arten von Gesetzen: nämlich Punktgesetzen, Differentialgesetzen und Integralgesetzen. Es war hiervon bereits auf S. 41 die Rede.

Die Punktgesetze bestimmen die Wechselwirkung von elementaren Substanzmengen, deren Existenz die Wissenschaft aus irgend welchen Gründen annimmt. Die Frage nach der Realität dieser Substanzen ist hierbei nebensächlich. Selbst in dem Falle, wo man von der Irrealität derselben fest überzeugt ist, fährt die Wissenschaft dennoch fort, sich ihrer zu bedienen und zwar wegen der Bequemlichkeiten, die ihre Benutzung bietet. Sehr kleine Mengen dieser Substanzen denkt man sich häufig gleichsam konzentriert in gewissen Punkten, von denen die wahrgenommenen Kräfte auszugehen scheinen. Zu solchen Punktgesetzen gehören das Coulombsche und auch das Webersche Gesetz, von dem auf S. 41 die Rede war. Die Bedeutung und der Charakter derartiger Gesetze sind im vorhergehenden zur Genüge erklärt.

Differentialgesetzen begegnet man in der Lehre vom elektrischen Strome; durch sie wird die Rolle gekennzeichnet, welche ein einzelnes Stromelement in einer von uns zu beobachtenden Erscheinung unter diesen oder jenen Verhältnissen bei Gegenwart eines geschlossenen Stromkreises spielt. Als Beispiel hierfür kann das Biot-Savartsche Gesetz dienen:

$$f = \frac{m i d s}{l^2} \sin \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$

vgl. (48), S. 538, wo wir $C = 1$ setzen. Ein anderes Beispiel liefert uns Formel (74), S. 564. Nimmt man an, daß die potentielle Energie zweier Ströme gleich der Summe der potentiellen Energien aller paarweise genommenen Stromelemente ist, so kann man annehmen, daß die potentielle Energie $w_{1,2}$ solcher Elemente gleich

$$w_{1,2} = -J_1 J_2 \mu \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad \ldots \ldots \quad (80)$$

ist. Integralgesetze definieren die quantitative Seite der Erscheinungen, die wir bei Anwesenheit von geschlossenen Strömen unmittelbar beobachten. Ein Integralgesetz drückt, wenn es sich in einer gewaltig großen Zahl von möglichst verschiedenen besonderen Fällen bewahrheitet hat, eine nicht zu bezweifelnde Tatsache aus und kann zur absolut sicheren Vorhersage der quantitativen Charakteristik einer Erscheinung dienen, vorausgesetzt natürlich, daß die Erscheinung völlig innerhalb der Grenzen verbleibt, auf welche sich das Integralgesetz bezieht. Als Beispiel eines Integralgesetzes kann das Gesetz gelten, welches durch Formel (74) ausgesprochen ist und die potentielle Energie zweier Ströme bestimmt:

$$W_{1,2} = -J_1 J_2 \mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad \ldots \quad (80,a)$$

Als andere Beispiele können Formeln dienen, welche die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen Magnetpol bestimmen und durch Integration aus der Formel (79) von Biot und Savart erhalten werden, so z. B. die allgemeinen Formeln (56), S. 546, oder die speziellen Formeln (48, a), S. 539 und (49), S. 540. Die Grundlagen, welche ursprünglich zur Ableitung eines Integralgesetzes gedient haben, können sich in der Folge als durchaus falsch erweisen; es hat dies keinen Einfluß auf das Integralgesetz selbst. Wie sehr sich auch unsere Vorstellungen über das Wesen der Erscheinungen ändern mögen, wir behalten immer das Recht, die potentielle Energie zweier Ströme nach Formel (80, a) oder irgend einer anderen Formel zu berechnen, die aus (80, a) durch Umformung erhalten wird. Somit drücken die Integralgesetze eine Tatsache aus, und man kann daher sagen, daß ihre Anwendung nicht sowohl in die theoretische, als vielmehr in die mathematische Physik hineingehört, deren allgemeine Charakteristik in Bd. I gegeben worden ist.

Differentialgesetze können keiner unmittelbaren experimentellen Prüfung unterliegen, da wir nicht die Erscheinungen zu beobachten vermögen, welche von den Elementen eines geschlossenen Stromes hervorgerufen werden; der Beobachtung kann nur die „integrale Erscheinung" unterworfen werden. Es werden aber die Integralgesetze in Wirklichkeit immer aus Differentialgesetzen abgeleitet; so haben wir z. B. die unbedingt richtige Formel (50) aus der

Formel (48) abgeleitet. Es könnte daher scheinen, als ob die durch den Versuch erwiesene Richtigkeit eines Integralgesetzes auch als Beweis für die Richtigkeit des Differentialgesetzes dienen könnte, aus dem es durch Integration erhalten worden ist. Dies ist aber durchaus nicht richtig und zwar aus dem einfachen Grunde, weil, um es kurz zu sagen, ein und derselbe Wert eines bestimmten Integrals bei sehr verschiedenen Werten der unter dem Integralzeichen stehenden Funktion erhalten werden kann. Es ist klar, daß zu dieser Funktion eine beliebige andere Funktion hinzugefügt werden kann, falls das Integral derselben innerhalb der dem vorliegenden Falle entsprechenden Grenzen gleich Null ist.

Betrachten wir z. B. die Formel (79) von Biot und Savart; bezeichnen wir symbolisch mit $F(ds, m)$ irgend eine Funktion der Koordinaten des Pols m und des Stromelementes Jds, welche die Eigenschaft hat, daß die von ihr ausgedrückten Kräfte bei der Summation längs allen ds, d. h. längs der geschlossenen Umgrenzung, die Resultante Null ergeben. In diesem Falle könnte man das Differentialgesetz (79) durch folgendes Gesetz ersetzen:

$$f = \frac{mids}{l^2} \sin\varphi + F(ds, m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Man versteht leicht, daß $F(ds, m)$ ein vollständiges Differential einer gewissen Funktion der Koordinaten des Elementes ds sein muß. Es könnte also das Biot-Savartsche durch Gesetze von der Form (81) ersetzt werden und man wäre nicht imstande, zu entscheiden, welches von ihnen der Wirklichkeit entspricht. Ähnliches gilt auch von Formel (74) oder (80, a), aus der keineswegs (80) folgt. Letztere Formel kann man durch einen willkürlichen Ausdruck von der Form

$$w_{1,2} = -J_1 J_2 \mu \frac{\cos\varepsilon}{r} ds_1 ds_2 + F(ds_1 ds_2) \quad . \quad . \quad (81, a)$$

ersetzen, wo $F(ds_1, ds_2)$ irgend eine Funktion der Koordinaten und Richtungen der Elemente ds_1 und ds_2 darstellt, die bei zweimaligem Summieren längs den Umgrenzungen s_1 und s_2 Null ergibt.

Man kann noch weiter gehen. Das vom Integralgesetz Ausgesprochene ist zweifellos vorhanden, denn die Kräfte H_x, H_y, H_z in (56) oder die Energie (74) werden in Wirklichkeit beobachtet. Was jedoch die Differentialgesetze anlangt, so ist es möglich, daß die Größen, welche durch sie bestimmt werden, gar nicht existieren. Die Wirkung des Magnetfeldes eines Stromes auf einen Magnetpol ist zweifellos vorhanden. Ob man aber überhaupt von der Wirkung eines Stromelementes auf einen Pol reden kann, ist noch eine Frage. Der Begriff einer derartigen Wirkung ist aus der Vorstellung von einer actio in distans erwachsen. Wir können bloß so viel sagen, daß ein

geschlossener Strom auf einen Magnetpol derart einwirkt, als ob jedes Element des Stromes auf diesen Pol mit einer Kraft wirkte, die durch einen von unzählig vielen Ausdrücken von der Form (81) gegeben ist. Ähnliches gilt auch von den Formeln (80, a) und (81, a). Wir werden später sehen, daß (80) beispielsweise durch folgenden Ausdruck ersetzt werden kann:

$$w_{1,2} = -J_1 J_2 \mu \frac{\cos\varphi_1 \cos\varphi_2}{r} ds_1 ds_2 \quad . \quad . \quad . \qquad (81,b)$$

wo $\varphi_1 = \angle(r, ds_1)$, $\varphi_2 = \angle(r, ds_2)$ ist. Aus dem Gesagten geht klar hervor, daß die Differentialgesetze in hohem Grade unbestimmt sind, nicht geprüft werden können, und daß sogar die Existenz der Größen, welche durch diese Gesetze bestimmt werden, wissenschaftlich nicht begründet ist.

Literatur.

Zu § 4.

Ohm: Die galvanische Kette, 1827; Neudr. Leipzig 1887; P. A. **4**, 79, 1825; **7**, 117, 1826; **55**, 178, 1842; Schweiggers Journ. **44**, 1825; **46**, 137, 1826; **49**, 1, 1827.
Fechner: Maßbestimmungen 1831.
Pouillet: Compt. rend. **4**, 267, 1837; P. A. **42**, 281, 1837.
Beetz: P. A. **117**, 15, 1862; **125**, 126, 1865.
F. Kohlrausch: P. A. **138**, 280, 370, 1869.
Schuster: Phil. Mag. **48**, 251, 350, 1875.
Chrystall: Rep. Brit. Assoc. 1876, p. 36.
Cohn: W. A. **21**, 646, 1884.
Fitzgerald and Trouton: Rep. Brit. Assoc. 1886, 1887, 1888.
Ermann: Gilb. Ann. **8**, 205, 1801; **10**, 1, 1802.
R. Kohlrausch: P. A. **75**, 88, 250, 1848; **78**, 1, 1849.
Gaugain: Ann. d. chim. et phys. (3) **59**, 5, 1860; **60**, 326, 1860; **63**, 261, 1861.
Sulzberger: Diss. Zürich 1889; Beibl. **14**, 998, 1890.
J. J. Thomson and Newall: Proc. R. Soc. **42**, 410, 1887.
Kohlrausch u. Nippold: P. A. **138**, 280, 370, 1869.
Kohlrausch u. Heydweiller: W. A. **53**, 209, 1894.
Kohlrausch u. Grotrian: P. A. **154**, 1, 215, 1875.
E. Cohn: W. A. **21**, 146, 1884; **38**, 217, 1889.
Nernst: W. A. **60**, 600, 1897.
Erskine: W. A. **62**, 454, 1897; **66**, 269, 1898.
Bellati e Lussanna: Atti R. Inst. Venet. (6) **6**, 1888.
Herwig: P. A. **153**, 115, 1874.
Siemens: Berl. Ber. 1876, S. 108.
Braun: P. A. **153**, 556, 1874; W. A. **1**, 95, 1877; **4**, 476, 1878.
Wassmuth: Repert. d. Phys. 1879, S. 536.
Auerbach: Elektrotechn. Ztschr. **8**, 66, 1887.
Grawinkel: Lum. électr. **33**, 136, 1889.
Zetlin: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **20**, 29, 1888.

Weinhold: Elektrotechn. Ztschr. **8**, 124, 1887.
Handl: Ztschr. f. Elektrotechn. **5**, 346, 1887.

Zu § 5.

Kirchhoff: P. A. **64**, 512, 1845; **67**, 344, 1846; **72**, 497, 1847; **75**, 189, 1848; **78**, 506, 1849; **102**, 529, 1857; Berl. Ber. 1875, S. 487; 1883, S. 519.
Bosscha: P. A. **104**, 460, 1858.
Helmholtz: P. A. **89**, 211, 353, 1853; Crelles Journ. 72.
Maxwell: Treatise **1**, 367, 1881; Cambr. Phil. Trans. **10**, 27, 1856.
Fleming: Phil. Mag. (5) **20**, 221, 1885.
Ulbricht: Elektrotechn. Ztschr. **11**, 270, 1888.
Guillaume: Compt. rend. **112**, 223, 1891.
Borgman: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **18**, 8, 1886.
Sluginow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **18**, 177, 1886.
Fröhlich: Elektrotechn. Ztschr. **9**, 140, 1888; W. A. **30**, 156, 1887.
Quincke: P. A. **97**, 382, 1856.
C. Neumann: Math. Ann. **10**, 569, 1876.
Lipschitz: Crelles Journ. **58**, 152, 1861; **61**, 1, 1863.
W. Wolf: Diss. Leipzig 1876.
Nobili: P. A. **9**, 183, 1827; **10**, 392, 1827; Bibl. univers. **33**, 302, 1826; **34**, 194; **35**, 40; **36**, 4; **37**, 177.
Guébhard: Journ. de phys. (2) **1**, 205, 1882; **2**, 87; 1883; Compt. rend. **90**, 984, 1124, 1880; **93**, 403, 792, 1881; **94**, 437, 851, 1882; **96**, 1424, 1883; W. A. **20**, 684, 1883.
Voigt: W. A. **17**, 257, 1882; **19**, 183, 1883; **21**, 710, 1884.
H. Weber: Crelles Journ. **75**, 75, 1873.
Heine: Berl. Ber. 1874, S. 186.
Ditscheiner: Wien. Ber. **78**, 1. 93, 1878; W. A. **5**, 282, 1878.
Riemann: P. A. **95**, 130, 1855.

Zu § 7.

Biot: Précis élement. de Physique **2**, 704, 1823; Ann. de chim. et phys. (2) **15**, 222, 1820.
Biot et Savart: Collect. de Mém. **2**, 113.

Viertes Kapitel.

Innerhalb der Kette auftretende Erscheinungen: thermische und mechanische Erscheinungen.

§ 1. Einleitung. Thermische Erscheinungen im Stromkreise. Im vorhergehenden Kapitel haben wir uns mit einem von den Fällen, in denen das Magnetfeld eines elektrischen Stromes entsteht und mit den Eigenschaften dieses Feldes bekannt gemacht. Das Natürliche wäre nun, zur Betrachtung anderer Fälle, in denen ein elektrischer Strom auftritt, überzugehen; wir ziehen es jedoch vor, zunächst

eine Reihe von Erscheinungen zu betrachten, die innerhalb eines geschlossenen Stromkreises auftreten, keineswegs aber von der „Stromquelle" selbst, d. h. von der Art der Stromerzeugung abhängen. Auf diese Weise werden wir in den Stand gesetzt, uns in der Theorie der Stromentstehung zurecht zu finden und zwar sowohl für den Fall des hydroelektrischen Stromes, dessen Entstehungsbedingungen wir bereits betrachtet haben, als auch für die anderen Fälle der Stromentstehung, deren Untersuchung wir in das sechste Kapitel verlegen.

Innerhalb einer Kette, durch welche ein stationärer, konstanter Strom fließt, beobachtet man eine Reihe überaus wichtiger Erscheinungen, deren Betrachtung wir uns nunmehr zuwenden wollen. Man bezeichnet diese Erscheinungen bisweilen als Stromwirkungen; jedoch läßt sich der Gebrauch dieses Ausdruckes nicht rechtfertigen, da durch denselben die ganz bestimmte Vorstellung erweckt wird, es sei der Strom etwas bereits Gegebenes, das in der Kette diese oder jene Erscheinungen wachruft. Indessen haben wir, wenn zu gleicher Zeit das Vorhandensein eines Stromes in der Kette und das Auftreten einer bestimmten Erscheinung in derselben Kette beobachtet werden, a priori kein Recht, die beobachtete Erscheinung unbedingt als Wirkung des Stromes anzusehen. Es wäre möglich, daß diese Erscheinung zugleich mit dem Strome als Resultat der Wirkung irgend einer primären Ursache auftritt, die andererseits eben das Auftreten des Stromes bewirkt. Es wäre ferner möglich, daß die Erscheinung, die uns wie eine Stromwirkung vorkommt, in Wirklichkeit die Ursache ist, welche das Auftreten des Stromes bewirkt. In manchen Fällen kann man jedoch nicht daran zweifeln, daß die gegebene Erscheinung wirklich das Resultat des Stromdurchganges durch die Körper, welche die Kette bilden, darstellt. Da wir aber die Frage nach dem gegenseitigen Verhältnisse zwischen dem elektrischen Strome und den in der Kette beobachteten Erscheinungen nicht von vorn herein entscheiden wollen, so werden wir letztere auch nicht als Stromwirkungen bezeichnen.

Die wichtigsten von den Erscheinungen, welche man im Stromkreise beobachtet, sind die thermischen und chemischen Erscheinungen. In diesem Kapitel werden wir alle diese Erscheinungen mit Ausnahme der chemischen betrachten, denen erst das folgende Kapitel gewidmet werden soll.

Wenden wir uns zunächst den Wärmeerscheinungen zu, welche im geschlossenen Stromkreise auftreten. Auf S. 495 hatten wir bereits die Arbeit bestimmt, welche von elektrischen Kräften in einem Teile des Kreises geleistet wird, wenn in demselben Elektrizität von Stellen höheren Potentials zu solchen mit niedrigerem Potential hinüberströmt, vgl. (12) auf S. 495. Hierauf hatten wir die Wärmemenge Q bestimmt, die dieser Arbeit äquivalent ist, vgl. (17) auf S. 497, nämlich

$$Q = A(V_1 - V_2)Jt = AJ^2Rt = \frac{A(V_1 - V_2)^2 t}{R},$$

wo J die Stromstärke, R der Widerstand des betreffenden Abschnittes des Stromkreises, $V_1 - V_2$ die Potentialdifferenz der Enden jenes Abschnittes, t die Zeitdauer, A das thermische Arbeitsäquivalent ist. Ist J in Ampere ausgedrückt, R in Ohm, $V_1 - V_2$ in Volt, t in Sekunden, Q in Joules, die 10 Megaergs äquivalent oder 0,24 Grammkalorien gleich sind, so ist $A = 1$. Somit erhält man für die Wärmemenge Q, die in einem Abschnitte des Stromkreises frei wird, folgende Ausdrücke, vgl. (22), S. 501,

$$Q = (V_1 - V_2)Jt = J^2Rt = \frac{(V_1 - V_2)^2 t}{R} \text{ Joules} \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} Q &= 0{,}24\,(V_1 - V_2)Jt = 0{,}24\,J^2RT \\ &= 0{,}24\,\frac{(V_1 - V_2)^2 t}{R} \text{ Grammkalorien} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1,\text{a})$$

Wir wollen noch eine Formel angeben, da dieselbe für die Praxis von Nutzen ist. Ist l die Drahtlänge, ausgedrückt in Centimetern, s der Flächeninhalt des Drahtquerschnittes in Quadratmillimetern, ϱ der spezifische Widerstand (für Hg ist derselbe gleich 1), so wird in einer Minute die Wärmemenge

$$Q' = 0{,}13703\,J^2\,\frac{l\varrho}{s} \text{ Grammkalorien} \quad . \quad . \quad . \quad (1,\text{b})$$

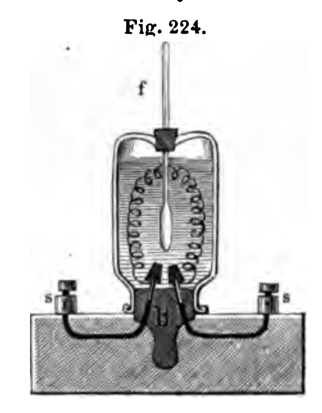
entwickelt, wo J in Ampere ausgedrückt ist.

Es ist noch hinzuzufügen, daß dieser Abschnitt des Stromkreises homogen sein muß, da an den Berührungsstellen von ungleichartigen Substanzen besondere Erscheinungen auftreten, von denen weiter unten die Rede sein wird. Die Gleichung $Q = J^2Rt$ gibt uns folgendes Gesetz: Die Wärmemenge, die sich in einem homogenen Teile einer geschlossenen Kette entwickelt, ist proportional dem Quadrate der Intensität des durch dieselbe fließenden Stromes, proportional dem Widerstande des in Betracht gezogenen Teiles und proportional der Stromdauer.

Dieses Gesetz ist von Clausius (1852) theoretisch begründet worden, viel früher jedoch ist es aus den Versuchen von Joule (1841) empirisch gefunden worden; E. Becquerel (1843) hat es genauer geprüft; die sorgfältigste und vielseitigste Untersuchung aber, welche die Richtigkeit des Gesetzes nach allen Richtungen festgestellt hat, stammt von E. Lenz (1844). Billigerweise wird daher dieses Gesetz, wenigstens bei uns in Rußland, das Gesetz von Joule und Lenz genannt. Die Wärme, die sich im geschlossenen Stromkreise gemäß dem oben genannten Gesetze entwickelt, nennt man die Joulesche Wärme.

Der Apparat, dessen sich Lenz bei seinen Versuchen bediente, ist in Fig. 224 abgebildet. Ein Glasgefäß war mit seinem durchbohrten Boden nach oben gekehrt und an einem Holzbrette befestigt; durch den Glasstöpsel *B* führten zwei dicke Drähte hindurch, die mit den zum Einschalten in die Kette dienenden Klemmschrauben *s*, *s* in Verbindung standen; im Innern des Glasgefäßes wurden an diese beiden Drähte verschiedene dünnere Drähte aus Pt oder einem anderen Metalle angeschlossen. In das Gefäß wurde Spiritus gebracht, dessen Temperatur durch das Thermometer *f* gemessen wurde. Durch Änderung der Stromstärke, des Widerstandes des im Glase befindlichen Drahtes und durch Messung der Zeit, während welcher die Temperatur des Spiritus um 1° stieg, vermochte Lenz die Richtigkeit des oben genannten Gesetzes nachzuweisen. Weitere Untersuchungen für feste Leiter sind von Botto, Romney Robinson, Jahn, Dieterici, H. Weber u. a. ausgeführt worden. Von diesen haben Jahn und Dieterici *Q* mit Hilfe des Bunsenschen Eiskalorimeters (Bd. III) gemessen. Dieterici benutzte die Erwärmung der Drähte zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents und H. Weber zur Messung ihres Widerstandes. Obgleich Dieterici und H. Weber von der Richtigkeit des Joule-Lenzschen Gesetzes ausgingen, fanden sie dennoch aus den Resultaten ihrer Untersuchungen unter anderem auch eine indirekte Bestätigung der Richtigkeit des Gesetzes selbst.

Fig. 224.



Untersuchungen der oben genannten Forscher (Joule, Becquerel, Jahn) haben gezeigt, daß auch in Flüssigkeiten, welche in den Stromkreis eingeführt sind, eine Wärmeentwickelung gemäß dem Gesetze von Joule und Lenz statthat. Um sich hiervon zu überzeugen, hat man jedoch besondere Vorsichtsmaßregeln zu treffen, da die chemischen Erscheinungen, welche in den im Stromkreise befindlichen Flüssigkeiten auftreten, von Wärmeerscheinungen begleitet sein können. Die sorgfältig ausgeführten Untersuchungen lassen keinen Zweifel daran aufkommen, daß das Gesetz von Joule und Lenz auch für flüssige Leiter, also überhaupt für alle Teile eines geschlossenen Stromkreises gilt. Dies setzt uns in den Stand, unsere Formeln auf die Wärme auszudehnen, die in der gesamten Kette entwickelt wird. Denkt man sich die Kette in homogene Teile zerlegt und läßt man die besonderen Wärmeerscheinungen unberücksichtigt, welche an den Berührungsstellen der verschiedenartigen Teile der Kette auftreten, so gilt für jeden Teil ein Ausdruck von der Form

$$Q_i = J^2 R_i t \text{ Joules},$$

wo R_i der Widerstand dieses Teiles, Q_i die in demselben freiwerdende Wärme ist. Bezeichnet man dann mit R den Widerstand der ganzen Kette, mit Q die Gesamtmenge der in ihr freiwerdenden Jouleschen Wärme, so ist $Q = \Sigma Q_i = J^2 t \Sigma R_i = J^2 Rt$. Führt man nach dem Ohmschen Gesetze ($J = E:R$) die elektromotorische Kraft E ein, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} Q &= J^2 Rt = JEt = \frac{E^2 t}{R} \text{ Joules} \\ Q &= 0{,}24\, J^2 Rt = 0{,}24\, JEt = 0{,}24\, \frac{E^2 t}{R} \text{ kl. Kal.} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (2)$$

Hier ist J in Ampere ausgedrückt, R in Ohm, E in Volt, t in Sekunden.

Wir hatten erwähnt, daß Dieterici die Erwärmung von Leitern durch den Strom zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents benutzt hat. Andere hierauf bezügliche Arbeiten (Quintus Icilius, Joule, F. Weber, Griffith) sind in Bd. III betrachtet worden.

Um in der gesamten Kette eine Stromstärke von 1 Ampere aufrecht zu erhalten, während die elektromotorische Kraft gleich 1 Volt ist, oder einen ebensolchen Strom in einem Teile des Stromkreises, während an seinen Enden die Potentialdifferenz 1 Volt beträgt, ist ein Arbeitsverbrauch von 1 Joule =. 10 Megaerg = 0,102 Meterkilogramm pro Sekunde erforderlich; d. h. also, es muß die ursprüngliche Quelle der geleisteten Arbeit ein Arbeitsvermögen von 1 Watt oder $\frac{1}{736}$ Pferdekraft besitzen. Das Watt heißt auch Volt-Ampere. Für das Arbeitsvermögen Z haben wir die Formeln

$$\left.\begin{aligned} Z &= JE = J(V_1 - V_2) = J^2 R = \frac{E^2}{R} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{R} \text{ Watts} \\ Z &= \frac{1}{736}\, JE = \frac{1}{736}\, J(V_1 - V_2) = \frac{1}{736}\, J^2 R \\ &= \frac{1}{736}\, \frac{E^2}{R} = \frac{1}{736}\, \frac{(V_1 - V_1)^2}{R} \text{ Pferdekräfte} \end{aligned}\right\} \quad . \; (3)$$

Hier bezieht sich $V_1 - V_2$ auf den Fall, wo nur ein Teil des Stromkreises, E auf den Fall, wo der gesamte Stromkreis in Betracht gezogen wird.

Das Gesetz von Joule und Lenz gestattet die Lösung von verschiedenen Aufgaben, die sich auf Wärmeentwickelung im Stromkreise beziehen.

Nehmen wir z. B. an, es sei eine Batterie aus Elementen mit der elektromotorischen Kraft E und dem Widerstande R durch einen Draht

von einem derartigen Widerstande x zu schließen, daß die in ihm auftretende Wärmemenge Q ein Maximum werde. Es ist

$$Q = \frac{(V_1 - V_2)^2}{x} = \left(\frac{Ex}{R+x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{E^2 x}{(R+x)^2}.$$

Das Maximum von Q wird für $x = R$ erhalten; es ist gleich $\frac{1}{4}\frac{E^2}{R}$.

Von besonderem Interesse ist die Frage nach der Erwärmung von zwei parallel geschalteten Drähten, deren Widerstände R_1 und R_2 sind und zwischen denen sich ein Strom $J = J_1 + J_2$ verteilt. Es ist offenbar

$$Q = R_1 J_1^2 + R_2 J_2^2 = R_1 J_1^2 + R_2 (J - J_1)^2.$$

Setzt man die erste Ableitung (nach J_1) gleich Null, so erhält man $R_1 J_1 = R_2 J_2$; die zweite Ableitung ist gleich $2(R_1 + R_2)$, folglich hat Q seinen Minimalwert, wenn $R_1 J_1 = R_2 J_2$ ist, welcher Bedingung gemäß in Wirklichkeit die Stromverzweigung stattfindet, vgl. (30, a), S. 514. Der Minimalwert ist $Q = R_0 J^2$, wo R_0 durch Formel (30, g) auf S. 515 bestimmt wird. Das erhaltene Resultat läßt sich leicht auch für den Fall einer vielfachen Stromverzweigung verallgemeinern.

Das Tönen von gespannten Drähten, durch welche ein intermittierender Strom hindurchgesandt wird, erklärt sich unter anderem durch die abwechselnde Erwärmung und Abkühlung.

Die Wärme Q, welche in den Leitern, die in einen geschlossenen Stromkreis eingeführt sind, frei wird, erwärmt jene Leiter. Der Grad dieser Erwärmung hängt nicht bloß von Q ab, sondern auch vom umgebenden Medium. Die Größe Q aber hängt, wie wir sahen, unter anderem vom Widerstande des Leiters ab. Sendet man daher einen Strom nacheinander durch eine Reihe von Drähten gleicher Dicke, so erwärmt sich im allgemeinen derjenige Draht stärker, dessen spezifischer Widerstand der größere ist. Es erwärmt sich beispielsweise ein Platindraht stärker als ein Eisendraht, dieser wiederum stärker als ein Kupferdraht.

Die Temperatur, bis zu der sich ein Leiter erwärmt, hängt vom Wärmeleitungsvermögen des umgebenden Gases ab. In Bd. III, im Kapitel von der Wärmeleitung der Gase, war ein Versuch von Grove beschrieben worden, welcher gezeigt hat, daß ein von Wasserstoff umgebener Draht sich weniger erwärmt als ein Draht, welcher von Stickstoff, Sauerstoff oder Kohlensäure umgeben ist.

Die Abhängigkeit der Temperaturerhöhung eines Drahtes von der Stromstärke und den Dimensionen des Drahtes ist sehr kompliziert und kann auf theoretischem Wege nicht genau ermittelt werden, da

uns die Erkaltungsgesetze nicht mit hinreichender Genauigkeit bekannt sind. Die Frage wird dadurch noch des weiteren verwickelt, daß sich mit Zunahme der Temperatur der Widerstand des Drahtes R vergrößert, was wiederum auf die Stromstärke J der Kette von Einfluß sein kann; außerdem wirkt die Änderung von R auf Q ein, und zwar insbesondere stark, wenn man J konstant erhält.

Nimmt man an, J sei gegeben und ändere sich nicht, so kann man auf theoretischem Wege das Folgende ableiten. Sei l die Länge, d die Dicke, h das äußere Wärmeleitungsvermögen, ϱ der spezifische Widerstand des Drahtes, T_0 die Temperatur des umgebenden Mediums, T die gesuchte Temperatur, bis auf welche sich der Draht erwärmt. Diese Temperatur wird erreicht, wenn die Wärmemenge $Q = J^2R$, welche in der Zeiteinheit im Drahte frei wird, gleich der Wärmemenge Q' ist, die durch die Oberfläche πdl verloren geht; es ist

$$Q' = C\pi dlhf(T, T_0),$$

wo C ein Proportionalitätsfaktor ist. Es ist aber ferner $R = \frac{4\varrho l}{\pi d^2}$; man kann daher $\varrho = \varrho_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ setzen, wo ϱ_0 der spezifische Widerstand bei der Temperatur J_0 ist. Setzt man ϱ in R ein und setzt die Größen Q und Q' einander gleich, so erhält man

$$\frac{4 l \varrho_0 J^2}{\pi d^2}[1 + \alpha(T - T_0)] = C\pi dlhf(T, T_0).$$

Hieraus folgt, wenn man einen neuen Proportionalitätsfaktor mit k bezeichnet,

$$\frac{f(T, T_0)}{1 + \alpha(T - T_0)} = \frac{k\varrho_0 J^2}{hd^3} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Bei sehr geringen Erwärmungen kann man die linke Seite gleich der Temperaturerhöhung $T - T_0$ setzen. Welcher Art aber auch die Gestalt der Funktion $f(T, T_0)$ sein mag, die ganze linke Seite der Gleichung (4) bleibt unverändert, wenn man bei Änderung des Drahtes (ϱ_0, h oder d) und der Stromstärke J immer die gleiche Temperaturzunahme von T_0 bis auf T erhält. Man erhält somit die gleiche Erwärmung der Drähte, wenn die Bedingung

$$\frac{\varrho_0 J^2}{hd^3} = Const \quad \ldots\ldots \quad (4, a)$$

erfüllt ist.

Es werden z. B. Drähte aus derselben Substanz bei verschiedenen Werten der Dicke d in gleichem Maße erwärmt, wenn das Quadrat der Stromstärke J proportional dem Kubus des Drahtdurchmessers wächst, oder wenn

$$J = Cd^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots \quad (4, b)$$

ist. Bei genügend starken Strömen beginnen Drähte aus schwerflüssigen Metallen zu leuchten. Den Zusammenhang zwischen der Leuchtstärke, J und d haben J. Müller, Zöllner und Waltenhofen untersucht, sind aber dabei zu einander widersprechenden Resultaten gelangt. J. Müller fand, daß man die gleiche Helligkeit, d. h. die gleiche von der Oberflächeneinheit eines Drahtes aus gegebenem Material ausgesandte Lichtmenge erhält, wenn die Stromstärke J dem Drahtdurchmesser d proportional ist. Zöllner nahm gleichfalls Drähte von verschiedener Dicke d, beleuchtete mit ihnen eine matte Glasplatte und bestimmte diejenigen Stromstärken J, bei denen gleiche Helligkeit der matten Glasscheibe eintrat, d. h. bei denen die Gesamtoberfläche des Drahtes die gleiche Lichtmenge aussandte. Zöllner fand, daß unter diesen Bedingungen J proportional d wachsen muß, was offenbar dem von Müller gefundenen Resultate durchaus widerspricht.

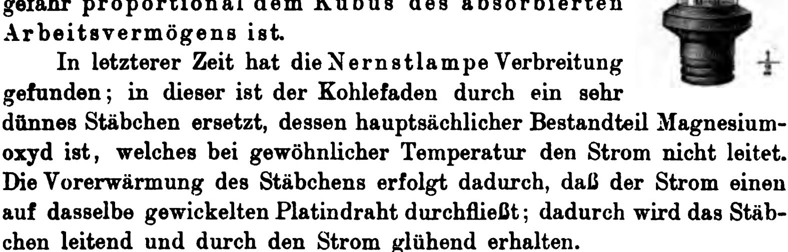
Um einen Draht zum Schmelzen zu bringen, hat man ihn bis zu einer bestimmten Temperatur zu erhitzen; die Beziehung zwischen der hierzu erforderlichen Stromstärke J und dem Durchmesser d wird durch Formel (4, b) ausgedrückt. Preece hat den Zahlenwert des Koeffizienten C für verschiedene Metalle bestimmt. Er fand, daß, für $d = 1$ mm, die in Ampere ausgedrückte Stromstärke J für verschiedene Metalle folgende Werte hat:

	Cu	Al	Pt	Neusilber	Fe	Sn	Pb	
$J =$	80,0	59,2	40,8	40,4	24,1	12,8	10,8	Ampere.

Das Glühendmachen von Drähten durch den Strom benutzt man unter anderem zum Entzünden von Minen, sowie in der Chirurgie (Galvanokaustik). Die wichtigste Anwendung des Glühendmachens durch den Strom findet man bei der elektrischen Beleuchtung, deren nähere Betrachtung nicht in dieses Buch gehört, da sie zu dem Gebiet der Elektrotechnik gehört. Wie allen bekannt, gibt es gegenwärtig zwei Hauptmethoden der elektrischen Beleuchtung, diejenige mittels Bogenlampen, in denen die Lichtquelle den Voltabogen bildet, und diejenige mittels Glühlampen. Mit dem Voltabogen werden wir uns im Kapitel von den elektrischen Entladungen bekannt machen. Eine Glühlampe (Fig. 225) besteht aus einem, gewöhnlich birnförmigen Glasgefäß, aus welchem die Luft herausgepumpt ist. In demselben befindet sich ein Kohlefaden, dessen Länge, Dicke und Form je nach der Bestimmung sehr verschieden sind. Die Grundidee des Glühendmachens eines Kohlestäbchens im Vakuum stammt vom russischen Ingenieur Ladigin. Die Herstellung von dünnen und zugleich harten Kohlefäden ist zuerst Edison gelungen. Gegenwärtig werden sie aus verkohlten organischen Substanzen, beispielsweise aus Papier, Pflanzenfasern usw. hergestellt. Man gibt bei Glühlampen die Lichtstärke an, d. h. die Kerzenzahl,

welcher sie bei normalem Glühen entsprechen, sowie die Potentialdifferenz in Volt, welche an den Enden des Kohlefadens herrschen muß, um jenes normale Glühen hervorzurufen. So spricht man beispielsweise von hundertvoltigen, sechszehnkerzigen Lampen. Der Widerstand des Kohlefadens ist im allgemeinen sehr groß und beträgt einige Hundert Ohm; der Widerstand des glühenden Kohlefadens ist ungefähr gleich der Hälfte des Widerstandes bei Zimmertemperatur. Das von der Lampe absorbierte Arbeitsvermögen Z wird nach einer der Formeln (3) auf S. 573 bestimmt. Die Untersuchungen von Voit, H. F. Weber u. a. haben gezeigt, daß die von einer Lampe ausgesandte Lichtstärke ungefähr proportional dem Kubus des absorbierten Arbeitsvermögens ist.

Fig. 225.



In letzterer Zeit hat die Nernstlampe Verbreitung gefunden; in dieser ist der Kohlefaden durch ein sehr dünnes Stäbchen ersetzt, dessen hauptsächlicher Bestandteil Magnesiumoxyd ist, welches bei gewöhnlicher Temperatur den Strom nicht leitet. Die Vorerwärmung des Stäbchens erfolgt dadurch, daß der Strom einen auf dasselbe gewickelten Platindraht durchfließt; dadurch wird das Stäbchen leitend und durch den Strom glühend erhalten.

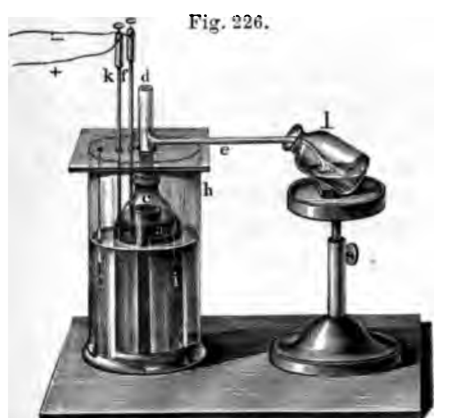
Zu den Wärmeerscheinungen, die man im geschlossenen Stromkreise beobachtet, gehören auch die Erscheinungen von Peltier und Thomson (Thomsoneffekt); wir werden dieselben gleichzeitig mit den thermoelektrischen Erscheinungen betrachten. Von der ersten dieser Erscheinungen war bereits auf S. 187 kurz die Rede.

§ 2. Elektrische Endosmose. Bewegung suspendierter Teilchen. Im geschlossenen Stromkreise beobachtet man eine interessante, rein mechanische Bewegungserscheinung von Flüssigkeiten durch poröse Scheidewände, sowie durch dünne Röhren, und zwar fast immer in der Richtung, welche wir als die Richtung des elektrischen Stromes angenommen haben. Diese Erscheinung ist von Reuss (1807) in Moskau entdeckt worden; Porret, Becquerel u. a. haben dieselbe bestätigt gefunden und auf verschiedene Arten reproduziert. Zuerst hat dieselbe G. Wiedemann (1852) ausführlich untersucht und ihre Gesetze studiert; wir gehen zu den Arbeiten des letzteren über.

G. Wiedemann hat sich zweier Apparate bedient, von denen der erste in Fig. 226 abgebildet ist. Das poröse Gefäß a aus ungebranntem Ton ist von oben durch die Glasglocke c verschlossen, in deren Hals die mit dem seitlichen Schenkel e versehene Röhre d eingesetzt ist. Innerhalb a befindet sich ein Zylinder aus Kupfer oder Platin, von dem der Draht f durch die Wandung der Glasglocke c hindurchführt. Das Gefäß a ist in einen breiten Zylinder h hineingestellt, der einen zweiten

Metallzylinder *i* enthält, an den ein Draht *k* angelötet ist. Die Gefäße *h* und *a* enthalten Wasser oder eine andere zu untersuchende Flüssigkeit. Sobald der Apparat derart in den Stromkreis eingeschaltet wurde, daß der Strom von *i* durch das poröse Gefäß nach *c* floß, so stieg die Flüssigkeit in der Röhre *d* und floß durch die Röhre *e* in das Gefäß *l*. Um die Oberfläche *s* der porösen Wandung, durch welche die Flüssigkeit gleichsam hindurchgepreßt wurde, zu ändern, bedeckte Wiedemann einen Teil der Wandung des porösen Gefäßes mit einer Harzschicht; um die Dicke *d* der Wandung zu variieren, schabte er allmählich die äußeren Schichten derselben ab.

Vor allem wurde die Abhängigkeit der Gewichtsmenge *m* des Wassers, welches durch die poröse Scheidewand innerhalb einer be-





stimmten Zeit hindurchfließt, von der Stromstärke *J*, der Oberfläche *s* und der Wanddicke *d* bestimmt. Die Versuche zeigten, daß die Flüssigkeitsmenge *q* proportional der Stromstärke *J* ist und weder von der Oberfläche *s*, noch von der Wanddicke des porösen Gefäßes abhängt. Ersetzt man das Wasser durch eine Kupfersulfatlösung, so ist die Menge *q* der transportierten Flüssigkeit nahezu indirekt proportional der Konzentration der Lösung.

Der erste Apparat von Wiedemann hat uns mit dem Charakter der Erscheinung bekannt gemacht, die den nicht besonders treffenden Namen elektrische Endosmose erhalten hat. Die poröse Scheidewand aus ungebranntem Ton kann durch Tierblase, feinen Sand usw. ersetzt werden. Je besser eine Flüssigkeit den Strom leitet, um so schwächer tritt obige Erscheinung auf.

Um die Drucke *p* zu messen, unter deren Wirkung die Flüssigkeitsbewegung erfolgt, hat G. Wiedemann einen zweiten Apparat

konstruiert, der sich von dem ersten nur dadurch unterscheidet, daß die seitliche Röhre *e* mit einem Quecksilbermanometer (Fig. 227) verbunden und die Röhre *d* oben geschlossen ist. Das Gefäß *a* enthielt Kupfersulfatlösung. Es zeigte sich, daß der hydrostatische Druck p proportional der Stromstärke J, indirekt proportional der Oberfläche s und direkt proportional der Wanddicke d des porösen Gefäßes war; für verschiedene Kupfersulfatlösungen ist der Druck p in gewissen Grenzen nahezu proportional dem spezifischen Widerstande ϱ der Lösung.

Die beiden von G. Wiedemann gefundenen Resultate werden durch folgende Formeln ausgedrückt:

$$q = a J \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$p = b \frac{J d}{s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5, a)$$

Hier bedeuten a und b zwei Proportionalitätsfaktoren; q hängt von s und d nicht ab. Beide Formeln stimmen gut miteinander überein, wenn man bedenkt, daß man die Ursache, welche den Druck p hervorruft, innerhalb jener Kapillarröhren zu suchen hat, durch welche die Flüssigkeit strömt, und daß sie proportional der Länge jener Röhren, d. h. der Wanddicke d, und proportional der Dichte des Stromes, welcher durch diese Röhren hindurchgeht, d. h. proportional der Größe $J:s$ ist. Ferner ist klar, daß q proportional p und s sein muß; nach dem Gesetz von Poiseuille (Bd. I) ist die Flüssigkeitsmenge q bei gegebenem Druck indirekt proportional der Länge der Kapillarröhre, d. h. also der Wanddicke. Es muß demnach für q eine Formel von folgender Gestalt gelten:

$$q = b_1 \frac{p s}{d}.$$

Setzt man hierin (5, a) ein, so erhält man Formel (5). Nehmen wir an, es sei p wirklich proportional dem spezifischen Widerstand ϱ, d. h. es sei

$$p = c J \frac{\varrho d}{s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5, b)$$

Die Größe $\frac{\varrho d}{s}$ ist der Widerstand der innerhalb der porösen Scheidewand befindlichen Flüssigkeit, die Größe $\frac{J \varrho d}{s}$ aber ist gleich der Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ zu beiden Seiten der Wand: man erhält daher die Formel

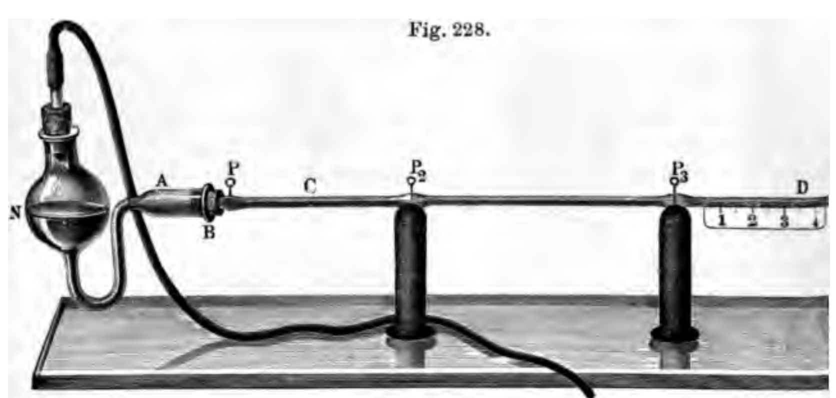
$$p = c\,(V_1 - V_2) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5, c)$$

Der hydrostatische Druck ist proportional der Potentialdifferenz zu beiden Seiten der Scheidewand.

Die Abhängigkeit der Größe q von der Konzentration verschiedener Lösungen ist von Freund untersucht worden.

Quincke (1861) hat zuerst gezeigt, daß eine Bewegung von Flüssigkeiten, welche in den Stromkreis gebracht sind, auch in einzelnen Kapillarröhren erfolgt. Der Apparat von Quincke besteht aus einer dünnen Glasröhre CD (Fig. 228), die mit dem Reservoir N, welches die zu untersuchende Flüssigkeit enthält, verbunden ist. Durch Hineinblasen von Luft in das Gefäß N kann man die Röhre bis zu einem gewissen Skalenteil D mit Flüssigkeit füllen. Läßt man durch zwei von den drei in die Röhre eingeschmolzenen Platindrähten P_1, P_2, P_3 die Entladung einer Leidener Flasche oder einen Batteriestrom hindurchgehen, und zwar in der Richtung von C nach D, so verschiebt sich die Flüssigkeit in derselben Richtung. Versuche mit elektrischen Strömen zeigten, daß der Anstieg der Flüssigkeit, welcher durch die Verschiebung des Endes der Flüssigkeitssäule in D gemessen wurde, pro-

Fig. 228.



portional der Stromstärke, proportional der Länge der Flüssigkeitssäule, d. h. der auf sie einwirkenden elektromotorischen Kraft, und indirekt proportional dem Quadrat des Röhrenhalbmessers ist. Die Röhrenwandung ist ebenfalls von Einfluß; in einer versilberten Röhre ist der Anstieg geringer als in einer gewöhnlichen Glasröhre.

Einen Anstieg beobachtet man nur in schlecht leitenden Flüssigkeiten; Wasser, welches 0,1 Proz. NaCl oder 0,04 Proz. H_2SO_4 enthält, zeigt bereits keinerlei Bewegung.

Quincke hat die bemerkenswerte Tatsache gefunden, daß einige Flüssigkeiten sich entgegengesetzt der Stromrichtung bewegen. Hierher gehört einer der Alkohole, ferner Terpentinöl innerhalb einer Röhre, deren Inneres mit Schellack überzogen ist u. a.

Van der Ven (1901) hat auf einen Umstand hingewiesen, der von Einfluß auf die Ergebnisse der von uns betrachteten Versuche sein könnte: der Stromdurchgang durch die Lösung ruft nämlich eine Änderung

der Konzentration hervor, welche die beobachtete Flüssigkeitsbewegung befördern muß. In einer Reihe von Abhandlungen (1902 bis 1905) hat er sodann verschiedene Salzlösungen untersucht und eine Anzahl solcher gefunden (besonders Nitrate), welche entgegengesetzt der Stromrichtung transportiert werden.

Cruse (1905) hat den Durchgang von destilliertem Wasser durch eine poröse Tonwand (Pukalmasse) im Zusammenhang mit der Temperatur (zwischen 10 und 70°) und der Stromstärke beobachtet. Er fand, daß die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers bei konstanter Stromstärke wächst, wenn die Temperatur von 10° an steigt. Bei 35 bis 40° ist die Geschwindigkeit ein Maximum; hierauf nimmt sie ab und zwar zunächst sehr schnell (bis 50°), darauf aber langsamer. Bei 50° ist die Geschwindigkeit die gleiche wie bei 10°. Ferner fand Cruse, daß Formel (5) für große Werte von J ihre Gültigkeit verliert. Die Größe a nimmt zuerst mit J zu, erreicht ein Maximum und nimmt darauf wieder ab.

Schaltet man in einen Stromkreis eine Flüssigkeit ein, welche suspendierte Teilchen enthält, so können diese Partikel in Bewegung geraten. Diese Erscheinung ist zuerst von Reuss, darauf von Faraday, Armstrong u. a. beobachtet worden. Quincke hat sie einer näheren Untersuchung unterzogen. Es zeigte sich, daß im Wasser suspendierte Teilchen sich der Stromrichtung entgegen bewegen, und zwar gilt dies sowohl von festen, als auch von flüssigen und gasförmigen Teilchen (Bläschen). Auf weitere Einzelheiten wollen wir nicht eingehen.

Die Erscheinungen der elektrischen Endosmose stehen im engen Zusammenhange mit dem Auftreten einer Potentialdifferenz beim Hindurchpressen von Flüssigkeiten durch poröse Scheidewände oder Kapillarröhren, welche Erscheinung wir auf S. 257 betrachtet haben. Wir können jetzt hinzufügen, daß die Richtung des Stromes, welchen man bei Verbindung zweier in eine sich bewegende Flüssigkeit eintauchender Elektroden erhält (vgl. Fig. 101 und 102 auf S. 257), stets der Richtung desjenigen Stromes entgegengesetzt ist, der die vorhandene Flüssigkeitsbewegung hervorrufen würde. Mit anderen Worten: Beim Hindurchströmen einer Flüssigkeit durch enge Kanäle tritt ein Strom auf, der dieser Bewegung entgegenwirkt. Die Arbeit, welche man zur Überwindung dieses Widerstandes zu leisten hat, bildet die Quelle der elektrischen Energie des Stromes. Man nennt diesen Strom bisweilen Kapillarstrom.

Eine theoretische Erklärung der elektrischen Endosmose, der Bewegung suspendierter Teilchen, sowie der Erscheinung der Kapillarströme ist zuerst von Quincke gegeben worden. Sie stützt sich auf die Annahme, daß zwischen der Flüssigkeit und der Wandung der Kapillarröhre eine Potentialdifferenz besteht, wobei die Wandung fast

immer negativ, die Flüssigkeit positiv elektrisiert wird. Längs der Innenfläche der Kapillarröhre bildet sich eine elektrische Doppelschicht, wobei sich die positive Elektrizität auf den Flüssigkeitsteilchen befindet. Wird der Strom geschlossen, so wird die letztgenannte Elektrizität durch dieselben elektrischen Kräfte fortbewegt, welche den elektrischen Strom bilden. Die Flüssigkeit muß schlecht leitend sein, denn nur in diesem Falle bewegen sich ihre Teilchen zugleich mit den an ihnen haftenden Ladungen der freien Elektrizität. Die suspendierten Teilchen werden negativ elektrisiert infolge der Berührung mit der Flüssigkeit; deshalb bewegen sie sich dem Strom entgegen. Helmholtz (1879) hat eine vollständige mathematische Theorie dieser Erscheinungen entworfen, und Dorn hat auf experimentellem Wege einige Folgerungen aus dieser Theorie bestätigt. Jene Theorie ist bereits auf S. 258 erwähnt worden. Sie wurde weiter entwickelt von Lamb (1888) und von Frau M. Smoluchowski (1903).

§ 3. Einwirkung des Stromes auf die Eigenschaften fester Leiter. Man hat zwischen temporären Änderungen der Eigenschaften der Körper, wie sie während des Stromdurchganges durch dieselben auftreten, und bleibenden Änderungen zu unterscheiden, die sich als Folge einer länger dauernden Stromwirkung ergeben.

Die Frage der Stromwirkung auf die Dimensionen, d. h. auf das Volumen oder die Länge von Leitern ist lange Zeit hindurch strittig geblieben. Die Versuche von Edlund, Streintz, Doppler und zum Teil auch von F. Exner ergaben widersprechende Resultate, und erst die Untersuchungen von Blondlot (1878) und diejenigen von Righi haben den Beweis erbracht, daß der Strom keine Änderungen in den Dimensionen eines Leiters hervorruft, abgesehen natürlich von denen, welche eine Folge der Erwärmung darstellen.

Wertheim hat die elastischen Eigenschaften von Drähten untersucht, während durch dieselben ein elektrischer Strom floß. Er fand, daß beim Stromdurchgang die Bruchfestigkeit abnimmt und daß sich der Youngsche Modul verringert. Streintz und Mebius hingegen haben dieses Resultat nicht bestätigt gefunden.

Dufour fand, daß sich nach langdauerndem Stromdurchgang durch Drähte die Bruchfestigkeit bei Kupferdrähten vermindere, bei Eisendrähten jedoch vergrößere.

Der elektrische Widerstand von Drähten nimmt, wie Quintus Icilius gezeigt hat, allmählich zu, wenn dieselben als Stromleiter dienen.

Es läßt sich schwer bestimmen, in welchem Maße die beobachteten Änderungen in den Eigenschaften der Leiter unmittelbar durch den Strom hervorgerufen werden und inwieweit sie eine Folge der andauernden, wenn auch geringen Erwärmung sind.

Zu den Erscheinungen, welche innerhalb der geschlossenen Kette auftreten, gehören auch die physiologischen Wirkungen. Ihre Untersuchung liegt außerhalb des Rahmens dieses Lehrbuches und wir werden uns in bezug auf sie auf einige wenige Andeutungen in der Lehre von den Wechselströmen beschränken. Die physiologischen Wirkungen von konstanten Strömen benutzt man in der Elektrotherapie.

Literatur.

Zu § 1.

Clausius: P. A. **87**, 415, 1852.
Joule: Phil. Mag. **19**, 260, 1841; Rep. Brit. Assoc. 1887, p. 512.
E. Becquerel: Arch. sc. phys. **3**, 181, 1843; Ann. d. chim. et phys. (3) **9**, 21, 1843.
E. Lenz: P. A. **61**, 18, 1844.
Botto: Arch. de l'électr. **5**, 1845.
Romney Robinson: Trans. Irish. Acad. (1) **22**, 3, 1849.
John: W. A. **25**, 49, 1885; **31**, 925, 1887; **37**, 414.
Dieterici: W. A. **33**, 417, 1888.
H. Weber: Diss. Leipzig 1863.
J. Müller: Fortschr. d. Phys. 1849, S. 384.
Zöllner: Baseler Verhandl. (3) **2**, 311, 1859.
Waltenhofen: Sitzber. d. böhm. Ges. d. Wiss. 1847, S. 79.
Preece: Proc. R. Soc. **36**, 464, 1884; **43**, 280, 1888.

Zu § 2.

Reuss: Mém. de la soc. Imp. des natural. à Moscou **2**, 327, 1809.
Porret: Thomson's Journ. 1816, July; Gilb. Ann. **66**, 272, 1820.
A. Becquerel: Traité de l'électr. **3**, 102, 1835.
G. Wiedemann: P. A. **87**, 321, 1852.
Freund: W. A. **7**, 44, 1879.
Quincke: P. A. **113**, 513, 1861.
Van der Ven: Arch. Néerl. (2) **6**, 127, 1901; Arch. Mus. Teyl. (2) **8**, 93, 199, 363, 390, 489, 1902, 1903; **9**, 97, 217, 573, 1904/05.
Cruse: Phys. Zeitschr. **6**, 201, 1905.
Faraday: Exper. Res., Ser. 13, 1839.
Armstrong: P. A. **60**, 354, 1843; Phil. Mag. (3) **23**, 199, 1843.
Helmholtz: W. A. **7**, 351, 1879; Ges. Abh. **1**, 855.
Dorn: W. A. **9**, 513, 1880; **10**, 70, 1880.
Lamb: Phil. Mag. (5) **25**, 52, 1888.
Marie Smoluchowski: Bull. Cracovie **3**, 182, 1903.

Zu § 3.

Edlund: P. A. **129**, 15, 1866; **131**, 337, 1887; Arch. d. sc. phys. **27**, 269, 1866.
Streintz: Wien. Ber. **67**, 323, 1873; P. A. **150**, 368, 1873.
Doppler: P. A. **46**, 128, 1839.
F. Exner: P. A., Ergbd. **7**, 431, 1876; Wien. Ber. **71**, 761, 1875; **75**, 373, 1877; W. A. **2**, 100, 1877.
Blondlot: Compt. rend. **87**, 206, 1878.

Righi: Nuov. Cim. **7**, 116, 1880.
Wertheim: Ann. d. chim. et phys. (3) **12**, 610, 1844.
Mebius: Oefvers. k. Vet. Akad. Forhandl. 1887, p. 681.
Dufour: P. A. **99**, 611, 1856.
Quintus Icilius: P. A. **101**, 86, 1857.

Fünftes Kapitel.

Innerhalb der Kette auftretende Erscheinungen: chemische Erscheinungen. Elektrolyse. Theorie des hydroelektrischen Stromes.

§ 1. Einleitung. Gesetze der Elektrolyse. Die zweite Gruppe der Erscheinungen, welche man im geschlossenen Stromkreise beobachtet, bilden die chemischen Erscheinungen. Mit der hierher gehörigen Terminologie haben wir uns bereits bekannt gemacht. Wiederholen wir zunächst kurz, was uns hierüber bekannt ist.

Stoffe, an denen man chemische Erscheinungen wahrnimmt, wenn man sie in den Stromkreis einschaltet, heißen Elektrolyte. Das Einschalten in den Stromkreis erfolgt gewöhnlich folgendermaßen: in den Elektrolyten, der fast stets flüssig ist, werden zwei Elektroden in gewissem Abstande voneinander eingeführt, die Anode (positive Elektrode) und die Kathode (negative Elektrode). In den allermeisten Fällen dienen als Elektroden Metallplatten. Die Erscheinung, welche an dem in den Stromkreis eingeführten Elektrolyten auftritt, heißt Elektrolyse. Rein äußerlich genommen besteht die Erscheinung der Elektrolyse darin, daß an den Elektrodenflächen bestimmte Stoffe erscheinen oder, wie man sagt, sich abscheiden, die in vielen Fällen nichts anderes sind als die chemisch verschiedenen Teile, aus denen der Elektrolyt besteht. Diese sich bei der Elektrolyse abscheidenden Stoffe werden Ionen genannt; an der Anode scheidet sich das Anion aus, an der Kathode das Kation. So scheidet sich z. B. bei der Elektrolyse einer wässerigen $ZnCl_2$-Lösung zwischen Platinelektroden an der Anode das Anion Cl aus, an der Kathode das Kation Zn. Äußerlich betrachtet, bilden das Anion und Kation die Produkte der Zerlegung des Elektrolyten, und zwar einer Zerlegung, welche scheinbar durch den Strom, der den Elektrolyten durchfließt, hervorgebracht wird.

In Bd. I haben wir den Begriff der Äquivalenz von Atomen und Atomgruppen kennen gelernt und gesehen, daß man einerseits das Atom- und das Molekulargewicht, andererseits das Äquivalent-

gewicht zu unterscheiden hat. Einwertig sind H, K, Na, Cl, Br, NH_4, OH, CN, BrO_3 usw.; alle diese Atome oder Gruppen von Atomen sind einem Wasserstoffatome „äquivalent", d. h. können sich mit ihm vereinigen oder dasselbe ersetzen. Zweiwertig sind Ba, Sr, Zn, Cu, O, S, SO_4, CO_3 usw. Das Molekulargewicht jeder Gruppe oder jeder Verbindung ist gleich der Summe der Atomgewichte der zu ihnen gehörenden Atome.

Das Äquivalentgewicht ist gleich dem k-ten Teile des Atom- oder Molekulargewichts, wenn das Atom oder die Atomgruppe k-wertig ist oder wenn die Verbindung in k-wertige Ionen zerfällt. So ist z. B. für die Atomgruppen NH_4, OH, NO_3 usw. oder für die Verbindungen NaCl, NH_4Cl, $AgNO_3$, NaHO, $KMnO_4$ usw. das Äquivalentgewicht gleich dem Molekulargewichte ($k = 1$). In anderen Fällen aber hatten wir z. B. folgende Äquivalentgewichte $\frac{1}{2}O = 8$, $\frac{1}{2}SO_4 = 48{,}03$, $\frac{1}{2}H_2SO_4 = 49{,}04$, $\frac{1}{2}CuSO_4 = 79{,}83$; ferner $\frac{1}{3}H_3PO_4$, $\frac{1}{4}Na_4P_2O_7$, $\frac{1}{4}C = 2{,}99$, $\frac{1}{5}Na_5JO_6$, $\frac{1}{6}Al_2Cl_6$ usw.

Das Grammäquivalent wiegt so viel Gramm, als Einheiten im Äquivalentgewicht enthalten sind.

Man darf nicht vergessen, daß man von Äquivalenten nur in bezug auf Ionen und auf Verbindungen spricht, welche in ungleichnamige Ionen (Anion und Kation) zerfallen können.

Ein und dasselbe Element, sowie eine bestimmte Gruppe von Atomen können in verschiedenen Verbindungen verschiedene Valenz haben. So ist z. B. das Kupfer in der Verbindung CuCl einwertig, so daß sein Äquivalentgewicht gleich dem Atomgewichte Cu $= 63{,}18$ ist; im $CuCl_2$ ist das Kupfer zweiwertig und sein Äquivalentgewicht ist $\frac{1}{2}Cu = 31{,}59$. Das Ion Fe kann zwei- und dreiwertig sein; Sn zwei- und vierwertig usw.

Nach der von Hittorf gegebenen Definition können nur solche Stoffe Elektrolyte sein, die miteinander in Reaktionen mit doppeltem Austausch treten können, wobei gerade diejenigen Bestandteile, die gegeneinander ausgetauscht werden, die Rolle der Ionen spielen; solche Körper nennt die Chemie heutzutage überhaupt Salze und rechnet zu ihnen auch diejenigen Stoffe, bei denen eines der Ionen Wasserstoff ist. Wahrscheinlich erschöpft jedoch die Definition der Elektrolyte als Salze die Frage nicht vollkommen; es geht dies daraus hervor, daß zwischen Salzen und Nichtsalzen keine ganz scharfe Grenze besteht.

Die Rolle eines Kations bei der Elektrolyse spielen H, die Metalle, NH_4, sowie überhaupt alle Körper, welche mit Cl, NO_3 oder einem anderen Säurerest einen Elektrolyten bilden.

Die Rolle eines Anions spielen die Haloide, OH, die Säurereste wie NO_3, SO_4, PO_4, ClO_3 usw., überhaupt alle Körper, welche mit H. Na oder einem anderen Metalle einen Elektrolyten bilden können.

Einige weniger einfache Beispiele werden weiter unten angeführt werden.

Wir werden sehen, daß die Ionen, aus denen ein Elektrolyt besteht, sich in relativ seltenen Fällen wirklich an den Elektroden ausscheiden. Bei ihrem Erscheinen auf den Elektroden treten die Ionen sehr oft in verschiedenartige, rein chemische Reaktionen beispielsweise mit dem Lösungsmittel, der Elektrodensubstanz, dem Elektrolyten selbst usw. ein. Als Resultat dieser Reaktionen, die man als sekundäre Erscheinungen bei der Elektrolyse bezeichnet, erscheinen auf den Elektroden in Wirklichkeit nicht die Ionen, aus denen der Elektrolyt besteht, sondern ganz andere Stoffe. Denken wir uns z. B., wir hätten eine wässerige Na_2SO_4-Lösung in die Kette eingeschaltet; die Ionen sind hierbei 2 Na und SO_4. Das Natrium tritt jedoch unverzüglich in Reaktion mit dem Lösungsmittel, d. h. dem Wasser; gemäß der Formel $2\,Na + 2\,H_2O = 2\,NaHO + H_2$ erscheint an der Kathode Natronlauge und Wasserstoff. Auf der Anode erfolgt die Reaktion $SO_4 + H_2O = H_2SO_4 + O$, falls die Anode aus Platin, Kohle usw. besteht; ist die Anode jedoch z. B. aus Kupfer, so erhält man die Reaktion $SO_4 + Cu = CuSO_4$, es erfolgt Auflösung der Anode und Bildung von Kupfersulfat. Somit treten anstatt der Ionen Na_2 und SO_4 die Körper $H_2 + 2\,NaHO$ und $H_2SO_4 + O$ oder $CuSO_4$ auf. Weiter unten werden wir ausführlicher verschiedene Fälle von sekundären Wirkungen bei der Elektrolyse betrachten.

Die quantitativen Gesetze der Elektrolyse sind von Faraday (1833 bis 1834) entdeckt worden. Es sind das die beiden folgenden Gesetze:

I. Gesetz. Die Gewichtsmenge der auf den Elektroden bei Einführung eines Elektrolyten in den Stromkreis auftretenden Ionen ist proportional der Elektrizitätsmenge, welche die Kette durchströmt. Diese Menge η ist gleich dem Produkte Jt der Stromstärke und der Stromdauer. Die Menge η werden wir in Coulombs messen und wir können sagen, daß jedem hindurchgeströmten Coulomb eine ganz bestimmte Gewichtsmenge des gegebenen, sich ausscheidenden Ions entspricht.

II. Gesetz. Die Gewichtsmengen der verschiedenen Ionen, welche sich auf den Elektroden bei Hindurchströmen ein und derselben Elektrizitätsmenge ausscheiden, sind proportional den Äquivalentgewichten dieser Ionen.

Aus diesen beiden Gesetzen ergibt sich eine Reihe von äußerst wichtigen Folgerungen.

1. Die Gewichtsmenge des Ions, das sich bei der Elektrolyse ausscheidet, hängt nicht vom Elektrolyten ab, zu dessen Bestand dieses Ion gehört, falls nur seine Wertigkeit in allen Fällen die gleiche

ist. Strömt durch die Kette eine bestimmte Elektrizitätsmenge, so scheidet sich immer ein und dieselbe Gewichtsmenge H, Ag, K, Na, Cl, SO_4, ÓH usw. aus. Dagegen ist z. B. die Menge des ausgeschiedenen Kupfers bei der Elektrolyse von CuCl zweimal so groß, wie bei der Elektrolyse von $CuCl_2$, da das Äquivalentgewicht im ersten Falle gleich Cu (d. h. gleich dem Atomgewichte), im zweiten Falle aber gleich $\frac{1}{2}$ Cu ist; die Menge des abgeschiedenen Chlors ist aber in beiden Fällen die gleiche.

2. Ein Grammäquivalent irgend eines beliebigen Ions scheidet sich auf der Elektrode aus, wenn durch die Kette eine ganz bestimmte Elektrizitätsmenge fließt; letztere bezeichnet man zu Ehren Faradays häufig mit dem Buchstaben F. Es ist

$$F = 96540 \text{ Coulombs} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

3. Die Menge der ausgeschiedenen Ionen hängt weder von der Art des Lösungsmittels, noch von der Elektrodensubstanz ab; sie hängt nicht von den sekundären Erscheinungen ab, welche die Elektrolyse begleiten können.

4. Die Menge der ausgeschiedenen Ionen hängt nicht davon ab, ob sich der Elektrolyt im geschmolzenen oder im gelösten Zustande befindet.

5. Die Menge der abgeschiedenen Ionen hängt nicht von der Intensität J des im Stromkreise zirkulierenden Stromes ab, wofern das Produkt aus Stromstärke und Stromdauer sich nicht ändert.

Eine große Zahl von Arbeiten ist ausgeführt worden, um die beiden obigen Gesetze der Elektrolyse auf ihre Gültigkeit hin zu prüfen; alle diese Arbeiten haben aber gegenwärtig nur noch historisches Interesse und wir werden nur ganz kurz einiger derselben gedenken.

Besonders wichtig ist die Frage, ob in den Elektrolyten eine, wenn auch ganz geringe „metallische" Leitfähigkeit außer der „elektrolytischen" vorhanden ist, d. h. ob durch den Elektrolyten ein, wenn auch geringer Teil des Stromes hindurchgehen kann, ohne die entsprechende Abscheidung von Ionen. Die sorgfältigen Untersuchungen von Buff haben gezeigt, daß die Stromstärke in weiten Grenzen (von 1 bis 200) proportional der Menge der ausgeschiedenen Ionen ist; doch vermochten diese Untersuchungen die erwähnte Frage noch nicht endgültig zu lösen. Faraday selbst nahm die Möglichkeit einer metallischen Leitfähigkeit der Elektrolyte an, indem er glaubte, daß die Elektrolyse erst bei einer Stromstärke beginne, die einen gewissen Minimalwert übertrifft. Die späteren Arbeiten haben jedoch bewiesen, daß das erste Gesetz vollkommen genau erfüllt ist, daß also eine metallische Leitfähigkeit in den Elektrolyten durchaus fehlt. In einer Kette, in welche ein Elektrolyt gebracht ist, kann es keinen

Strom ohne Elektrolyse geben, d. h. ohne das Auftreten von Ionen auf den Elektroden, die mit dem Elektrolyten in Berührung stehen. So haben beispielsweise Ostwald und Nernst (1889) gezeigt, daß beim Durchgange der Entladung einer Leidener Flasche mit bloß $5 \cdot 10^{-6}$ Coulomb Ladung durch eine schwache Schwefelsäurelösung an der Kathode ein Wasserstoffbläschen auftrat, dessen Dimensionen dem ersten Gesetze der Elektrolyse vollständig entsprachen.

Einen noch überzeugenderen Beweis liefern uns aber die Erscheinungen der Polarisation, von denen bereits auf S. 199 die Rede war und auf die weiter unten ausführlicher eingegangen werden soll. Eine entscheidende Bedeutung fällt hier den Versuchen von Sokolow zu, dem es gelang, nachzuweisen, daß eine Polarisation schon bei elektromotorischen Kräften von 0,001 Volt vorhanden ist. Es ist kein Grund zu der Annahme vorhanden, daß hiermit die Grenze erreicht ist, unterhalb deren die Polarisation aufhört.

Von dem Zusammenhange, welcher nach den Untersuchungen von E. Cohn zwischen dem Gesetze der Elektrolyse und der Anwendbarkeit des Ohmschen Gesetzes auf Elektrolyte besteht, war auf S. 508 die Rede.

Es versteht sich von selbst, daß die Erscheinungen der Elektrolyse in keiner Weise von der Quelle für den elektrischen Strom abhängen. Es gibt daher der überaus schwache Strom, den man erhält, wenn man die Konduktoren einer Reibungselektrisier- oder Influenzmaschine durch Leiter miteinander verbindet oder wenn man beide Konduktoren erdet, ebenfalls elektrolytische Erscheinungen. Hiervon haben sich Ritter, Faraday, Riess, Andrews, Buff, Davy, Armstrong u. a. durch unmittelbare Versuche überzeugt. Ostwald und Nernst (1889) haben gezeigt, daß, wenn man in einer Flüssigkeit elektrostatische Induktion hervorruft, das Auftreten der beiden Ladungen auf der Flüssigkeitsoberfläche von Elektrolyse begleitet ist.

Sorgfältige Untersuchungen vieler Forscher haben gezeigt, daß auch das zweite Gesetz der Elektrolyse vollkommen richtig ist. Wir haben gesehen, daß nach diesem Gesetze ein und derselben Elektrizitätsmenge F, welche die Kette durchströmt, die Abscheidung eines Grammäquivalents eines beliebigen Ions entspricht. Die Gewichtsmenge des Ions, welche sich auf den Elektroden abscheidet, während durch die Kette ein Coulomb strömt, heißt das elektrochemische Äquivalent dieses Ions; man pflegt dasselbe in Milligrammen anzugeben. Bezeichnet man das Atom- oder Molekulargewicht des Ions mit m, seine Valenz mit k, so entsprechen F Coulombs $m : k$ Gramme; demnach erhält man für das elektrochemische Äquivalent p den Ausdruck

$$p = \frac{1000\,m}{kF} \text{ Milligramm} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

und hieraus ist

$$F = \frac{1000\,m}{kp} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2, a)$$

Für die Gewichtsmengen P_1 und P_2 irgend zweier Ionen, die sich abscheiden, während durch die Kette ein und dieselbe Anzahl Coulomb fließt, erhält man

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{k_2}{k_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2, b)$$

Die letztgenannte Formel kann zur Prüfung des zweiten Gesetzes der Elektrolyse dienen, da sie dasselbe in der einfachsten Form ausdrückt. Formel (2, a) ermöglicht die Bestimmung der Größe F, wenn die unmittelbaren Messungen das elektrochemische Äquivalent geliefert haben. Die Gewichtsmenge p' des Ions, welche einer Amperestunde (3600 Coulombs) entspricht, ist gleich $3600\,p$ oder in Grammen

$$p' = \frac{3600\,m}{kF} \text{ Gramm} \quad \ldots\ldots \quad (2, c)$$

Eine Prüfung des zweiten Gesetzes der Elektrolyse auf Grund der Formel (2, b) haben zuerst Rayleigh (1884), Gray (1886) und Shaw (1887) vorgenommen, indem sie die Gewichtsmengen P_1 und P_2 von Silber und Kupfer miteinander verglichen, welche ein und derselben Anzahl Coulomb entsprachen. Setzt man $H = 1{,}008$ und nimmt für Silber $m_1 = 107{,}93$, für Kupfer $m_2 = 63{,}604$ (nach Richards), so erhält man (da $k_1 = 1$ und $k_2 = 2$ ist) $P_1 : P_2 = 3{,}3942$. Von den genannten Autoren fanden für dieses Verhältnis Rayleigh 3,406, Gray 3,4013, Shaw 3,3998. Die neueste Untersuchung von Th. W. Richards und Heimrod (1902) hat für obiges Verhältnis einen Wert ergeben, der so nahe bei dem theoretischen, d. h. dem auf rein chemischen Wege gefundenen liegt, daß man aus demselben umgekehrt für das Atomgewicht des Kupfers den Wert Cu = 63,601 erhält. Durch diese wichtige Arbeit ist die Richtigkeit des zweiten Gesetzes der Elektrolyse, d. h. die Proportionalität der elektrochemischen Äquivalente und der Äquivalentgewichte endgültig erwiesen.

Aus dem zweiten Gesetze folgt, daß es genügt, das elektrochemische Äquivalent p irgend eines Ions zu kennen, um diese Größe für alle Ionen zu kennen. Die wichtigsten Messungen der Größe p bezogen sich auf das Silber, außerdem ist sie noch für Kupfer und Wasserstoff bestimmt worden.

Das elektrochemische Äquivalent des Silbers ist (durch Elektrolyse einer $AgNO_3$-Lösung) wiederholt und zwar mit der größten

Sorgfalt bestimmt worden. Bis vor kurzem galten folgende Bestimmungen als die genauesten:

	p
Mascart (1882)	1,1156 mg
F. und W. Kohlrausch (1884) . . .	1,1183 „
Rayleigh und Mrs. Sigdwick (1884) .	1,1179 „

Indem man den beiden letzteren Zahlen das größere Gewicht beilegte, setzte man $p = 1{,}118$ mg; hieraus erhält man nach Formel (2, a), in welcher $k = 1$, $m = 107{,}93$ ist, den Wert $F = 96\,538$, statt dessen wir $F = 96\,540$ angenommen haben. Weitere Untersuchungen von Potier und Pellat (1,1192), Patterson und Guthe (1,1192) und Kahle (1,1183) sind bis 1900 ausgeführt worden. Alle diese Arbeiten, sowie die vorhergehenden hat Leduc einer kritischen Besprechung unterzogen. Nach 1900 sind folgende Arbeiten erschienen. Zunächst gaben Th. W. Richards und Heimrod (1902) für Ag den Wert $p = 1{,}1175$ mg und für Kupfer

$$p = 0{,}32\,929 \text{ mg (Cu)} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Ferner fanden Pellat und Leduc (1903) für Silber $p = 1{,}1195$ mg; sodann gaben Dijk und Kunst (1904) die Zahl $p = 1{,}118\,23$ mg. Dijk zeigte, daß eine Erhitzung des Voltameters bis zur Rotglut auf den Wert von p keinen Einfluß ausübt. In einer neuerdings (1906) erschienenen Arbeit kommt Dijk zu dem Schluß, daß der wahrscheinlichste Wert

$$p = 1{,}1180 \text{ mg (Ag)} \quad \ldots \ldots \quad (3, a)$$

ist. Gleichzeitig gibt Guthe (1906) die Zahl $p = 1{,}11773$ mg, welche sich nur sehr wenig von der vorhergehenden unterscheidet. Wir wollen noch bemerken, daß beim Durchgang von einem Coulomb durch die Kette sich folgende Gasvolumina (bei 0° und 760 mm Druck) abscheiden:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Wasserstoff} \ \ldots\ldots & 0{,}116 \text{ ccm} \\ \text{Knallgas} \ \ldots\ldots & 0{,}174 \ \text{„} \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3, b)$$

Für das elektrochemische Äquivalent des Wasserstoffs $p(H)$ ist auf Grund von Formel (2), in welcher $m = 1$ und $k = 1$ zu setzen ist,

$$p(H) = \frac{1000}{F} \text{ mg} = \frac{1}{F} \text{ g} = 0{,}000\,010\,36 \text{ g} \quad \ldots \quad (3, c)$$

§ 2. Einige Sonderfälle der Elektrolyse. Betrachten wir vor allen Dingen einige Apparate, die man bei der Elektrolyse häufig benutzt. Für einfache Vorlesungsversuche kann der in Fig. 229 abgebildete Apparat dienen. Die Lösung befindet sich hier in einer U-förmigen Röhre, als Elektroden dienen Drähte oder Platten aus Pt oder einem anderen Metall, je nach dem Fall der Elektrolyse, welchen man vor sich hat.

Zur Elektrolyse von salpetersaurem Silber wird ein Apparat benutzt, den man als Silbervoltameter bezeichnet; wir werden später sehen, aus welchem Grunde er diese Bezeichnung erhalten hat. Er besteht aus einem Platinschälchen *A* (Fig. 230), welches die $AgNO_3$-Lösung enthält und als Kathode dient. In die Lösung taucht das untere Ende eines Silberstäbchens, welches in einer federnden Klemme am unteren Ende eines Stabes, den man heben und senken kann, befestigt ist. Die Klemmschrauben *b* und *c* dienen dazu,

Fig. 230.

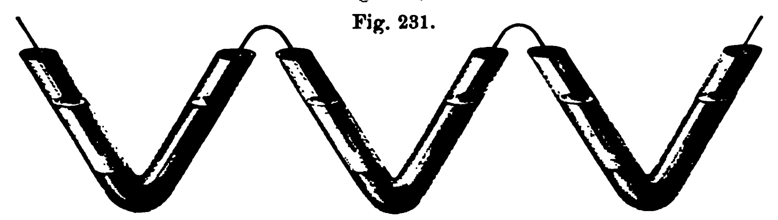


Fig. 229.



den Apparat in einen Stromkreis einzuschalten. Das Silberstäbchen ist von einem Säckchen aus Tüll umgeben, in welchem die Silberstückchen,

Fig. 231.



die sich von dem Stäbchen loslösen, sowie andere Nebenprodukte, die sich an der Anode bilden, zurückbleiben.

Wünscht man eine Reihe von Elektrolyten hintereinander in den Stromkreis zu schalten, so verbindet man sie, wie aus Fig. 231 ersichtlich, mittels Drähte oder durch Heber, die mit den in jedem besonderen Falle geeigneten Flüssigkeiten gefüllt sind.

Bei der Elektrolyse einiger Lösungen (H_2SO_4, Na_2SO_4, KHO u. a.) scheiden sich auf den Elektroden Sauerstoff und Wasserstoff ab. Wünscht

man beide Gase gesondert aufzufangen, so kann man sich hierzu des Apparates von A. W. Hofmann (Fig. 232) bedienen, der aus drei in ihrem unteren Teile miteinander verbundenen Röhren *A*, *B* und *C* besteht. Die mittlere von ihnen geht oben in ein kugelförmiges, offenes Gefäß *R* über; die seitlichen Röhren enthalten die Platinelektroden *P* und *P'*, welche durch Drähte mit den Klemmschrauben *K* und *K'* verbunden sind; die seitlichen Röhren sind durch Hähne *h* und *h'* zu verschließen. Zunächst füllt man den ganzen Apparat mit der zu untersuchenden Lösung, indem man dieselbe in das Gefäß *R* hineingießt, während die Hähne *h* und *h'* geöffnet sind. Hierauf schließt man die Hähne und schaltet den Apparat in den Stromkreis ein. Die Gase sammeln sich nun in den oberen Teilen der Röhren *A* und *B*, wobei die Flüssigkeit von *A* und *B* durch die mittlere Röhre *C* nach *R* verdrängt wird. In unserer Figur ist der Fall dargestellt, wo *P* als Anode dient, *P'* als Kathode, so daß sich in *A* eine gewisse Menge Sauerstoff ansammelt, in *B* dagegen das doppelte Volumen Wasserstoff. Die Röhren *A* und *B* sind mit einer Graduierung versehen.

Fig. 232.

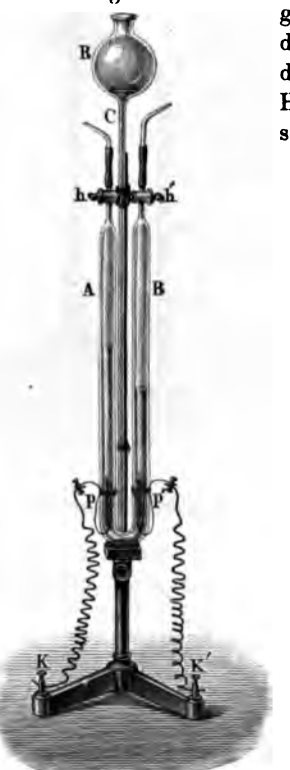


Fig. 233.



Um ein Gemenge aus beiden Gasen, d. h. Knallgas zu erhalten, kann man sich des Apparates von F. Kohlrausch (Fig. 233) bedienen;

rselbe besteht aus einem graduierten Zylinder E, in welchem sich die atinelektroden p_1 und p_2 befinden. Der Zylinder ist mit seinem iteren, verjüngten Ende in ein Gefäß G eingesetzt, aus dessen seitcher Öffnung der Stöpsel S entfernt werden muß, wenn sich der pparat im Stromkreise befindet. Zur Gewinnung größerer Mengen n Knallgas kann auch der in Fig. 234 zum Teil im Durchschnitt gebildete Apparat dienen. Durch den Deckel A führen die Drähte c id d zu zwei großen Elektrodenplatten, ferner mündet in denselben e zur Fortleitung des Gases dienende Röhre b..

Einige kompliziertere Apparate, welche zur Untersuchung verhiedener Schichten des der Elektrolyse unterworfenen Elektrolyten enen, werden weiter unten beschrieben erden.

Fig. 234.



Bevor wir uns einigen besonderen illen der Elektrolyse zuwenden, wollen ir zunächst ein Paar allgemeine Bemerungen vorausschicken. Soll sich auf ner der Elektroden ein Ion in Gestalt nes festen, an der Elektrode haftenden örpers ausscheiden, so darf die Stromichte, die sowohl von der Stromärke innerhalb der Kette, als auch von r Größe der Elektroden abhängt, gewisse Grenzen nicht überschreiten. Wir schränken uns auf ein diesbezügliches eispiel. Bei der Elektrolyse einer $CuSO_4$-ösung erscheint auf der Kathode Kupfer. t die Stromdichte gering (schwacher rom, große Kathodenoberfläche), so heidet sich das Kupfer in Form einer st zusammenhängenden Schicht ab, ist dagegen die Stromdichte groß tarker Strom, kleine Kathodenoberfläche), so entsteht eine körnige, ckere, leicht zerbröckelnde Kupferschicht.

Von großem Einfluß auf die physikalischen Eigenschaften des sich scheidenden festen Ions sind ferner die Konzentration der Lösung, e Temperatur und insbesondere verschiedenartige Beimengungen nderer Stoffe. In letzterer Zeit ist eine Reihe von Versuchen ausführt worden, welche gezeigt haben, daß sich beim Durchrühren des lektrolyten die Stromdichte bedeutend vergrößern läßt und zwar ohne haden für die sich niederschlagende Schicht. Früher glaubte man, lektrolyse sei nur bei Flüssigkeiten möglich. Indessen beweist ne ganze Reihe von Erscheinungen, daß die Elektrolyse auch bei sten Substanzen erfolgen kann und zwar bei Temperaturen, die ch sehr weit von der Schmelztemperatur dieser Substanzen entfernt

sind. So können beispielsweise Kupfersulfid (CuS), Thalliumsulfid, Bleichlorid, Bleibromid, Bleijodid (E. Wiedemann) und Silberjodid im festen oder wenig erweichten Zustande der Elektrolyse unterworfen werden.

Besonderes Interesse bietet die Elektrolyse des Glases dar, die von Warburg studiert worden ist. Ein mit Quecksilber gefülltes Probiergläschen befand sich in einem weiten Glasgefäße, welches Hg mit einem geringen Zusatz von Na enthielt; die Kathode befand sich im inneren, die Anode im äußeren Gefäße. Bei 300° (Glas schmilzt nicht unter 700°) erfolgte Elektrolyse des Glases, wobei sich das Natrium aus dem Natriumsilikat als Kation im inneren Gefäße abschied und zwar in einer Menge, welche genau der durch die Kette geflossenen Anzahl Coulomb entsprach. Eine ebensolche Menge Na ging aus dem äußeren Gefäße in das Glas über. Befand sich zu beiden Seiten des Glases reines Quecksilber, so sank die Stromstärke in der Kette im Verlaufe einer Stunde bis auf 0,001 ihres Anfangswertes, da sich auf der Anodenseite als Produkt der Elektrolyse eine schlechtleitende Schicht von Kieselsäure niederschlug. Ferner haben Warburg und Tegetmeier gezeigt, daß auch Quarz bei 225° elektrolytisch zerlegt werden kann, jedoch nur in der Richtung seiner optischen Achse; Quarz schmilzt aber erst bei einer Temperatur von nicht weniger als 1500°. F. M. Exner (1901) hat gezeigt, daß der beim Schmelzen erhaltene amorphe Quarz bereits bei 100 bis 150° den Strom merklich leitet; es ist sehr wahrscheinlich, daß auch in diesem Falle Elektrolyse stattfindet. Ein bemerkenswertes Beispiel der Elektrolyse einer festen Substanz, nämlich der glühenden Oxyde, aus denen der Faden der Nernstschen Glühlampe besteht, hat Bose (1902) entdeckt. Es zeigt sich, daß beim „Brennen" einer solchen Lampe, d. h. beim Glühen derselben im Vakuum, eine Abscheidung des Metalles an der Kathode stattfindet; hierbei verringert sich der Widerstand des Fadens bis auf 0,1 des Anfangswertes; anstatt der Weißglut tritt bloß Rotglut des Fadens ein und der Glasballon füllt sich mit einem bläulichen Lichtscheine. Das Metall oxydiert sich von neuem, so daß sich im Innern des glühenden Fadens eine Strömung des an der Kathodenseite absorbierten und an der Anode ausgeschiedenen Sauerstoffs ausbildet. Wendet man Wechselstrom an, so brennt die Lampe auch im Vakuum gleichmäßig und treten die beschriebenen Erscheinungen nicht auf.

Auf S. 586 war bereits erwähnt worden, daß das zunächst bewirkte Auftreten der Ionen auf den Elektroden sehr oft von sekundären Erscheinungen begleitet ist, die einen rein chemischen Charakter haben. Ostwald (Allgem. Chem. II, 1, 968, 1893) unterscheidet fünf Fälle derartiger sekundärer Erscheinungen bei der Elektrolyse.

1. Die Ionen werden polymerisiert. Beispiele: $2\,H = H_2$; $2\,Cl = Cl_2$ usw.

2. Die Ionen werden zerlegt. Beispiele: Bei der Elektrolyse der Ammoniumsalze erscheint an der Kathode das Ammonium NH_4; dasselbe zerfällt in NH_3, welches in Lösung bleibt, und in Wasserstoff, welcher abgeschieden wird. Dient jedoch als Kathode Hg, so findet keine Zerlegung statt und es bildet sich Ammoniumamalgam. Bei der Elektrolyse von essigsauren Salzen erscheint das Anion $C_2H_3O_2$, das nach der Formel $2C_2H_3O_2 = C_2H_6 + 2CO_2$ in Äthan und Kohlensäure zerfällt. Ähnliche sekundäre Wirkungen begleiten überhaupt sehr oft die Elektrolyse organischer Säuren und deren Salze.

3. Die Ionen wirken auf das Lösungsmittel ein. Wir hatten bereits die Elektrolyse des Na_2SO_4 betrachtet, für welche die sekundären Wirkungen die folgenden sind: auf der Kathode $Na_2 + 2H_2O = 2NaHO + H_2$, auf der Anode $2SO_4 + 2H_2O = 2H_2SO_4 + O_2$. Bei der Elektrolyse von Na_2SO_3 scheidet sich an der Anode Sauerstoff aus, SO_3 aber verbindet sich mit H_2O und gibt Schwefelsäure.

4. Die Ionen wirken auf den Elektrolyten ein. Hierbei sind verschiedene Fälle möglich. a) Das Anion verbindet sich mit dem Elektrolyten: $SnCl_2$ gibt an der Anode die Reaktion $SnCl_2 + Cl_2 = SnCl_4$. b) Das Kation verbindet sich mit dem Elektrolyten: $CuCl_2$ gibt an der Kathode die Reaktion $Cu + CuCl_2 = Cu_2Cl_2$. c) Die Ionen ergeben mit dem Elektrolyten eine kompliziertere Reaktion: bei Elektrolyse von HNO_3 hat man an der Kathode die Reaktion $4H_2 + HNO_3 = NH_3 + 3H_2O$; salpetersaures Blei gibt an der Anode Sauerstoff ab, welcher das Salz zerlegt, wobei sich Bleisuperoxyd und mit dem Wasser Salpetersäure bildet.

5. Die Ionen wirken auf die Elektroden ein. Der einfachste hierher gehörige Fall ist die Vereinigung des Anions mit der Anode, wobei sich das Salz desjenigen Metalles bildet, aus welchem die Anode besteht. Sogar Anoden aus Pt und Au unterliegen bisweilen dieser Wirkung. $SO_4 + Cu = CuSO_4$; $2Cl + Zn = ZnCl_2$ können als Beispiele für die Einwirkung der Ionen auf die Elektroden dienen. Bei der Elektrolyse des Salmiak (NH_4Cl) erfolgt, wenn MnO_2 als Anode dient (Element von Leclanché), die Reaktion $2NH_4 + 2MnO_2 = 2NH_3 + Mn_2O_3 + H_2O$. Ein interessantes Beispiel bildet die Elektrolyse des $ZnCl_2$, wenn die Kathode Zn, die Anode AgCl ist (Element von Warren de la Rue); an der Anode tritt die Reaktion $Cl_2 + Zn = ZnCl_2$ ein, an der Kathode die Reaktion $2AgCl + Zn = 2Ag + ZnCl_2$.

Von ganz besonderem Interesse sind die Erscheinungen, die bei der sogenannten „Elektrolyse des Wassers“ auftreten, genauer gesagt — wie wir weiter unten sehen werden —, bei der Elektrolyse solcher wässeriger Lösungen, die als Resultat der sekundären Wirkungen an der Kathode Wasserstoff, an der Anode Sauerstoff geben müssen (die Lösungen von H_2SO_4, Na_2SO_4, KHO usw.) und zwar 2 Vol. Wasserstoff auf 1 Vol. Sauerstoff. In Wirklichkeit beobachtet man bis-

weilen sehr bedeutende Abweichungen von diesem Verhältnis (bis zu 1 : 3,5 anstatt 1 : 2); außerdem fallen auch die Mengen beider Gase geringer aus, als nach der Theorie zu erwarten wäre, d. h. gemäß der durch die Kette hindurchgeströmten Elektrizitätsmenge. Nehmen wir an, das Wasser enthalte H_2SO_4 und die Elektroden werden nicht oxydiert. In diesem Falle können folgende Umstände auf die Menge der ausgeschiedenen Gase einwirken.

1. Ist die Lösung frisch, d. h. noch nicht der Elektrolyse unterworfen worden, so lösen sich die Gase, und zwar löst sich der Sauerstoff zweimal stärker als der Wasserstoff.

2. Einige Metalle absorbieren den Wasserstoff. Abgesehen vom Palladium, welches bis zu 900 Vol. H_2 absorbiert (Bd. I, Okklusion), wird auch in den gewöhnlich benutzten Platinelektroden eine gewisse Menge jenes Gases absorbiert, und das gleiche gilt auch von Ni, insbesondere von porösem Nickel.

3. Ein Teil der Sauerstoffionen verdichtet sich zu Ozon (O_3), wodurch sich das Gasvolumen an der Anode vermindert. Soret hat gezeigt, daß sich bis zu 2 Proz. Ozon bilden können.

4. An der Anode kann sich Überschwefelsäure bilden, deren Anhydrid S_2O_7 ist.

5. An der Anode bildet sich Wasserstoffsuperoxyd, H_2O_2; Richarz hat gezeigt, daß das Wasserstoffsuperoxyd durch Zerlegung der sich anfänglich bildenden Überschwefelsäure entsteht.

6. Befindet sich im Wasser gelöste Luft, so verbindet sich ein Teil des sich ausscheidenden Sauerstoffs mit dem gelösten Stickstoff zu Salpetersäure.

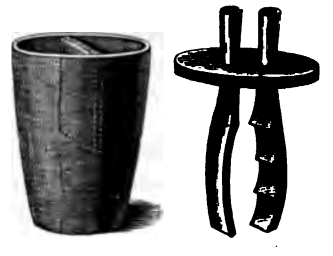
Wie man aus Obigem ersieht, rufen fast alle genannten Erscheinungen eine Verminderung des sichtbaren Volumens des gasförmigen Sauerstoffs hervor. Engelhardt hat (1902) in einer sehr ausführlichen Monographie alles auf die Elektrolyse des Wassers bezügliche dargelegt, sowie deren Anwendungen zu verschiedenen technischen Zwecken.

Wir hatten bereits erwähnt, daß die Elektrolyse von geschmolzenen Elektrolyten denselben Gesetzen folgt wie die Elektrolyse von Lösungen. Es ist jedoch bei der Elektrolyse geschmolzener Salze, z. B. den Haloidverbindungen schwerer Metalle, überaus schwierig, die Ionen in Mengen zu erhalten, wie sie den Gesetzen der Elektrolyse entsprechen. Es kommt dies daher, daß sich die Ionen in der geschmolzenen Masse lösen; dies gilt insbesondere von den Metallen, welche bis zur Anode diffundieren, wo sie sich zum Teil abermals mit dem Haloid verbinden. Außerdem verdampfen die Metalle zum Teil. Es ist daher zu verwundern, daß Faraday die Gesetzmäßigkeiten der Elektrolyse zuerst gerade an geschmolzenen Salzen entdeckt hat, und gelang ihm dies nur dank dem Umstande, daß er als Anode dasjenige

Metall wählte, das sich an der Kathode ausschied ($PbCl_2$). Erst im Jahre 1900 gelang Helfenstein der Nachweis, daß die Elektrolyse von geschmolzenem $PbCl_2$, $PbBr_2$, PbJ_2, $ZnCl_2$, $SnCl_2$, $CdCl_2$, $BiCl_3$ und AgCl streng nach den Faradayschen Gesetzen vor sich geht. Zu diesem Zwecke mußte er zunächst das geschmolzene Salz mit dem entsprechenden Metall sättigen und Kathode und Anode voneinander trennen, indem er zwischen beide poröse Diaphragmen brachte.

Bunsen hat gezeigt, wie man gewisse Metalle, z. B. Mg und Li, durch Elektrolyse ihrer geschmolzenen Salze darstellen kann. In Fig. 235 ist der Apparat zur Darstellung des Magnesiums abgebildet. Er besteht aus einem Porzellantiegel, der fast bis zum Boden durch eine Scheidewand geteilt ist. In diesen Tiegel werden Kohleelektroden eingesetzt, die durch den porzellanenen Tiegeldeckel hindurchgehen. Im Tiegel schmilzt man $MgCl_2$ und schaltet es hierauf in den Stromkreis ein. Der Kohlenkathode gibt man die aus der Figur ersichtliche gezahnte Form; infolgedessen steigt das an derselben ausgeschiedene Magnesium nicht nach oben und kann, nachdem die ganze Masse erkaltet ist, erhalten werden. Ferner haben viele Forscher verschiedene andere Metalle (Rb, Cs, Be, Ca, Sr, Ba, Al, Ce, La) und Metalloide (Bo, Si, Fl) durch Elektrolyse ihrer geschmolzenen Salze dargestellt. Eine ausführliche Beschreibung der diesbezüglichen Arbeiten findet man in Kap. I des Werkes von Bogorodski (Teil I, Kasan 1905, russ.), das in der Literaturübersicht zitiert ist.

Fig. 235.



Betrachten wir einige besondere Fälle der Elektrolyse, die von speziellem Interesse sind.

In historischem Sinne hat die Arbeit von Davy (1807) eine sehr hervorragende Bedeutung, da er durch Elektrolyse von geschmolzenem Ätzkali und Ätznatron den Nachweis erbrachte, daß jene Körper chemische Verbindungen seien und dabei zuerst die neuen Metalle K und Na darstellte. Seebeck hat zur Darstellung dieser Metalle folgende Methode angegeben: ein feuchtes Stück des Alkali wird auf eine als Anode dienende Platinplatte gelegt; in ersterem bringt man eine Vertiefung an und füllt sie mit Quecksilber, in das man einen als Kathode dienenden Platindraht taucht. Es entsteht auf diese Weise das Amalgam des betreffenden Metalles. Noch einfacher ist es, das Quecksilber in ein Gefäß und auf dasselbe eine konzentrierte Lösung der Lauge zu gießen; die Anode taucht man in die Lösung, die isolierte Kathode in das Quecksilber. Davy hat auch metallisches Baryum aus einer breiigen Mischung von Baryumcarbonat, Baryt und Wasser nach der Seebeckschen Methode dargestellt.

Eine sehr vollständige Übersicht über die Arbeiten, welche sich auf die Elektrolyse von geschmolzenen anorganischen Substanzen beziehen, befindet sich in dem oben erwähnten Werke von Bogorodski (Kap. II, S. 40 bis 163), der selbst die Elektrolyse von geschmolzenem KNO_3, $NaNO_3$ und $LiNO_3$ untersucht hat. Dieselbe Frage behandelt das umfangreiche Werk: R. Lorenz, „Die Elektrolyse geschmolzener Salze", Halle a. S. 1905. Die interessante Frage der Elektrolyse von Metallegierungen und Amalgamen ist erst in wenigen Arbeiten von Obach (1876), Elsässer (1879) und Jenkins in Angriff genommen worden; der letztgenannte Autor hat die Unmöglichkeit einer Elektrolyse von Legierungen zu beweisen gesucht.

Moissan (1886) hat durch Elektrolyse von Fluorwasserstoffsäure Fluor dargestellt.

Die Metalle bilden, wenn sie sich während der Elektrolyse an der Kathode abscheiden, bisweilen sehr schöne verästelte Figuren. Hierher gehört z. B. der sogenannte Saturnsbaum, der sich bei der Elektrolyse von essigsaurem oder salpetersaurem Blei bildet.

Die Elektrolyse des Kupfersulfats ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen, da sie in der Technik (Galvanoplastik) eine wichtige Rolle spielt. Förster und Seidel (1897) haben gezeigt, daß sich bei der Elektrolyse in der Nähe der Kathode ein schwefelsaures Salz des Kupferoxyduls bilden kann, in dem das Kupfer einwertig (Cu_2SO_4) ist; diese Verbindung scheidet in einer wässerigen, nicht sauren Lösung Kupferoxydul ab, das sich an der Kathode niederschlägt.

Bei der Elektrolyse einer Lösung von Eisensulfat erhält man auf der Anode schwammiges Eisen und Eisenoxydul. Zusammenhängende Eisenmassen erhält man beispielsweise aus einer Lösung aus zwei Teilen Eisenvitriol und einem Teil Salmiak. Elektrolytisches Eisen enthält fast immer Wasserstoff, Kohlenoxyd und andere Gase. Die Eigenschaften dieses Eisens sind unter anderem von Houllevigue (1897) untersucht worden.

Bei der Elektrolyse von Säuren, wie H_2SO_4 usw., erscheint an der Kathode im allgemeinen nur Wasserstoff, an der Anode $SO_3 + O$, wobei sich abermals Säure bildet und Sauerstoff abgeschieden wird. Übrigens haben bereits Geuther (1859) und Warburg (1868) die Bemerkung gemacht, daß unter gewissen Bedingungen, z. B. bei starker Konzentration und hoher Temperatur, sich bei der Elektrolyse der Schwefelsäure an der Kathode Schwefel und Schwefelwasserstoff abscheidet. Gehrcke (1903) hat gezeigt, daß S und SH_2 auch bei der Elektrolyse einer verdünnten Lösung und bei gewöhnlicher Temperatur auftreten, wenn eine der Elektroden eine sehr kleine Oberfläche hat. Bei niedriger Temperatur und großer Stromdichte bildet sich an der Anode Überschwefelsäure, $H_2S_2O_8$.

Eine seltsame Erscheinung tritt bei der Elektrolyse einiger Uranverbindungen auf. Bei Elektrolyse von Uranoxychlorid, UO_2Cl_2, erhält man an der Anode Cl_2, an der Kathode die Gruppe UO_2 (Uranyl), die hier die Rolle eines Metalles (Kations) spielt.

Eine merkwürdige Erscheinung wird beobachtet bei der Elektrolyse des angesäuerten Wassers, wenn als Anode eine Platte oder ein Draht aus Aluminium dient. Zuerst ist diese Erscheinung von Beetz untersucht worden, welcher fand, daß auf einer Anode aus Aluminium ein Teil des Sauerstoffs zur Oxydierung des Metalles dient, wobei sich Aluminiumoxyd bildet und außerdem noch eine niedrigere Oxydationsstufe, welche an der Metalloberfläche einen grauen Überzug bildet, der die Elektrizität sehr schlecht leitet. Den Widerstand dieses Überzuges hat Lecher gemessen, indem er in die Kette eine Alaunlösung einschaltete, wobei die eine Elektrode aus Pt bestand, die andere aus Al. Bei einem der Versuche betrug die Stromstärke 2 Amp., wenn das Al Kathode war, und bloß 0,01 Amp. bei der entgegengesetzten Stromrichtung. Der Widerstand der Schicht betrug hierbei 880 Ohm. Cook (1904) fand, daß bei Steigerung der Potentialdifferenz V am Aluminiumvoltameter eine plötzliche Steigerung der Stromstärke auftritt; bei 1^0 tritt dies für $V = 47$ Volt ein, bei 48^0 für $V = 22$ Volt. Oberhalb 55^0 tritt diese Erscheinung überhaupt nicht ein, sie wird von einer Änderung im Aussehen der an der Anode befindlichen Schicht begleitet, die sich in mikroskopisch kleine, farbige Kristalle verwandelt, wobei ein Teil der metallenen Oberfläche entblößt wird. Corbino und Maresca (1906) fanden, daß bei Benutzung von Lösungen der Formierungsvorgang der Anode von der Natur des Anions abhängt. Die Anionen NO_3, CO_3, $CH_3.COO$ ergeben keine Formierung; am stärksten ist diese in Tartratlösungen, wo die Spannung bis 150 Volt gehen kann. Die Dicke der isolierenden Schicht ist hierbei gleich 0,05 Mikron; das elektrische Feld in dieser Schicht ist gleich 3 Millionen Volt pro Millimeter und der Druck der elektrostatischen Anziehung erreicht 2000 Atm.

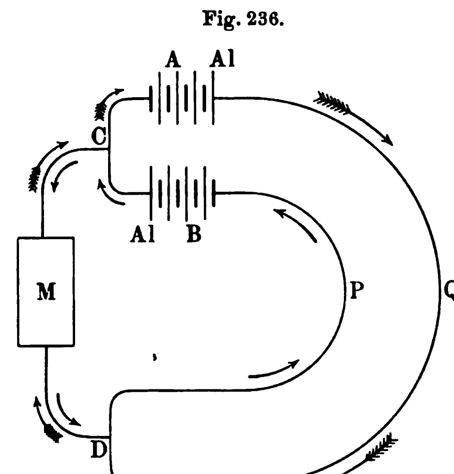
Weitere Untersuchungen wurden in letzter Zeit von Zimmermann (1905), Jacobs (1906) und besonders von G. Schulze (1906, 1907) ausgeführt. G. Schulze findet, daß die eigentlich wirksame Schicht nicht die feste, sondern eine äußerst dünne ($5\,\mu\mu$) Sauerstoffschicht ist, die sich an die feste, poröse Schicht ansetzt. Den elektrostatischen Druck berechnet er als gleich 5500 Atm. und das Spannungsgefälle gleich 8200 Volt auf $1\,\mu$.

Ähnliche Erscheinungen, wie Al, zeigen Mg, welches von Campetti (1901) und Maresca (1906) studiert wurde, ferner Tantal, Niob und Vanadium. G. Schulze (1907) hat das Tantal genauer studiert und gefunden, daß Tantalelektroden sich schneller formieren, als solche aus Al und zwar in allen (47) untersuchten

Elektrolyten. Der Spannungsabfall an der Anode kann 1000 Volt erreichen.

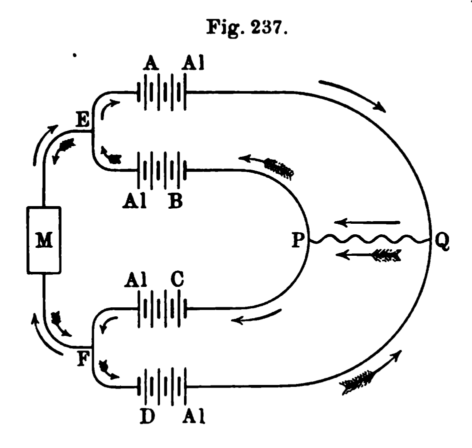
Im Jahre 1897 zeigte Graetz, daß man diese Erscheinung dazu benutzen kann, einen Wechselstrom in einen solchen von konstanter Richtung zu verwandeln. Zu diesem Zwecke schaltete er Gefäße mit Alaunlösung, in denen Platten aus Kohle und Aluminium die Rolle der Elektroden vertraten, hintereinander. Ein derartiges Gefäß besitzt unipolare Leitfähigkeit, falls die elektromotorische Kraft 22 Volt nicht überschreitet, d. h. es geht ein Strom durchs Gefäß, falls das Al Anode ist, in der einen Richtung frei hindurch, nicht aber in der entgegengesetzten Richtung. Hierbei findet man, daß der Widerstand einer solchen Zelle augenblicklich auftritt, sobald in der Kette eine elektromotorische Kraft von der entsprechenden Richtung auftritt.

Fig. 236.



In Fig. 236 und 237 sind zwei Anordnungen von Graetz zum Kommutieren eines Wechselstromes schematisch dargestellt. Beim Schema der Fig. 236 erhält man pulsierende Ströme von konstanter Richtung in den beiden Leitungen P und Q. Hier bedeutet M die Wechselstrommaschine, A und B zwei Batterien aus den oben beschriebenen Zellen, wobei der längere Strich eine Aluminiumplatte bezeichnet. Ströme von der Richtung MC können nur durch A gehen und haben daher die Richtung $MCAQDM$; Ströme von entgegengesetzter Richtung können nicht durch A gehen und schlagen daher die Richtung $MDPBCM$ ein. Im Schema der Fig. 237 entsteht ein Strom von konstanter Richtung im Leiter QP; hier sind vier Gruppen von Zellen A, B, C und D vorhanden. Wie durch Pfeile angedeutet ist, geht einer der Ströme in der

Fig. 237.



Richtung *MEAQPCFM*, der andere in der Richtung *MFDQPBEM*. Beide Ströme durchfließen *QP* in der gleichen Richtung. Die Graetzsche Methode ist von Campetti, Norden, Mayrhoffer, Lecher, Bartorelli, Cook (1905), Charters (1905) u. a. näher studiert worden. Norden fand, daß sich an der Aluminiumelektrode $Al_2(OH)_6$ bildet, das in Gegenwart von H_2SO_4 in $Al_2O_3(SO_3)_3$ übergeht.

W. Mitkiewicz (1901) hat den Graetzschen „Stromrichter" mit Aluminiumanode verbessert. Er wählte statt der Alaunlösung eine Lösung von doppeltkohlensaurer Soda, welche den Vorzug hatte, daß eine Zelle, die nach dem Schema Blei—Soda—Aluminium gebaut ist, einen Strom von 150 Volt zu kommutieren vermag.

Mitkiewicz hat auch eine Theorie des Stromrichters aus Aluminium entworfen, in der er die Prozesse an der Aluminiumanode mit denjenigen identifiziert, die sich an der Anode eines Voltabogens abspielen. Er schloß aus seinen Beobachtungen, daß der Strom aus der Flüssigkeit auf die entblößten Stellen des Aluminiums in Form kleiner Lichtbögen übergeht, weshalb auch die Erscheinung selbst viel Ähnlichkeit mit derjenigen des Voltabogens hat. Die von ihm in Vorschlag gebrachten Schemata zur vollständigen Kommutierung eines Wechselstromes werden in der Lehre vom Wechselstrome mitgeteilt werden. Elektroden von Magnesium, besonders aber von Tantal können ebenfalls zur Gleichrichtung von Wechselströmen dienen.

Die Elektrolyse von Doppelsalzen besitzt, wie wir später sehen werden, ein außerordentlich großes theoretisches Interesse, da die Frage, in welche Ionen Doppelsalze zerfallen, bei der Wahl zwischen verschiedenen Theorien der Elektrolyse eine entscheidende Bedeutung gewinnen kann. Diese Frage ist zuerst von Hittorf erörtert worden, der hierbei zeigte, daß man drei verschiedene Fälle von Elektrolyse der Doppelsalze voneinander zu trennen habe.

1. Es gibt Doppelsalze, welche Mischungen aus zwei Salzen darstellen. Diese geben bei der Elektrolyse an der Kathode beide Metalle. Hierher gehören $KAl(SO_4)_2$, $K_2Mg(SO_4)_2$, $K_2Zn(SO_4)_2$ u. a. Hiermit stimmt vollkommen die Tatsache überein, daß bei der Diffusion dieser Salze durch poröse Scheidewände jeder der Bestandteile einzeln diffundiert, und seinen eigenen Diffusionskoeffizienten besitzt.

2. Typische Doppelsalze werden derart zerlegt, daß als Kation das eine der beiden Metalle auftritt, das Alkali- oder Alkalierdemetall, während alles andere, d. h. das andere Metall und der Säurerest, die Stelle des Anions vertritt. Man findet, daß die Doppelsalze gerade in diese Teile bei Doppelreaktionen mit anderen Salzen zerfallen, vgl. S. 585. So gibt z. B. das Salz $KAg(CN)_2$ zunächst an der Kathode K, an der Anode $Ag(CN)_2 = AgCN + CN$ und erst durch die sekundären Reaktionen wird an der Kathode das Silber verdrängt; das Salz Na_2PtCl_6 zerfällt in das Kation Na_2 und

das Anion $PtCl_6 = PtCl_4 + Cl_2$; das Salz $NaAuCl_4$ gibt das Kation Na, das Anion $AuCl_4$ usw. Interessant ist, daß die Salze $K_4Fe(CN)_6$ und $K_3Fe(CN)_6$ an der Kathode K_4 und K_3 geben, an der Anode aber dieselbe Gruppe $Fe(CN)_6$, die im ersten Falle vierwertig, im zweiten Falle aber dreiwertig ist. Diese Zerlegung der Doppelsalze führte Ostwald zu der Annahme, daß es Säuren wie $HAg(CN)_2$, H_2PtCl_6, $H_4Fe(CN)_6$ usw. gebe.

3. Ein dritter Typus bildet Salze, die gleichsam eine Zwischenstellung zwischen den Salzen der beiden ersten Typen einnehmen. Hierher gehören die Salze $KAuCl_4$, $KHgCl_3$, K_2CdJ. In konzentrierten Lösungen ist K das Kation, das indes das Schwermetall aus dem Salze verdrängt, so daß auf der Kathode Au, Hg oder Cd erscheinen. In verdünnten Lösungen zerfällt das Doppelsalz und bloß das Kaliumsalz unterliegt der Elektrolyse, an der Anode erscheint die das Schwermetall enthaltende Gruppe gar nicht.

Eine sehr bemerkenswerte Erscheinung bietet die Elektrolyse des Jodcadmiums, CdJ_2. An der Kathode scheidet sich das Cadmium aus, an der Anode aber tritt nicht nur der Überschuß des Jods, sondern auch Cadmium auf. Man wird zu der Annahme gezwungen, daß sich in der Lösung etwas von der Art eines Doppelsalzes bildet, — das Polymer Cd_2J_4, dessen Ionen Cd und CdJ_4 sind. In Lösungen von Jodcadmium in Äthyl- und Amylalkohol bildet sich sogar Cd_3J_6, dessen Ionen Cd und Cd_2J_6 sind. Nach Hittorf hat Lenz die Elektrolyse der Cadmiumsalze studiert. Die Hittorfsche Erklärung der Elektrolyse der Doppelsalze hat eine glänzende Bestätigung durch die Untersuchungen von Kistiakowski über die Erniedrigung der Erstarrungstemperatur und die Erhöhung des Siedepunktes der Lösungen dieser Salze gefunden.

Es gibt Elektrolyte, die man auf zweierlei Art in Ionen zerlegen kann; Bredig nannte sie amphotere Elektrolyte. Hierher gehört beispielsweise $Pb(OH)_2$, welches das Kation Pb und das Anion 2 OH oder das Kation 2 H und das Anion PbO_2 geben kann. Die Theorie der amphoteren Elektrolyte ist von Walker (1905) entwickelt worden: untersucht wurden sie von Lundèn (1906) u. a.

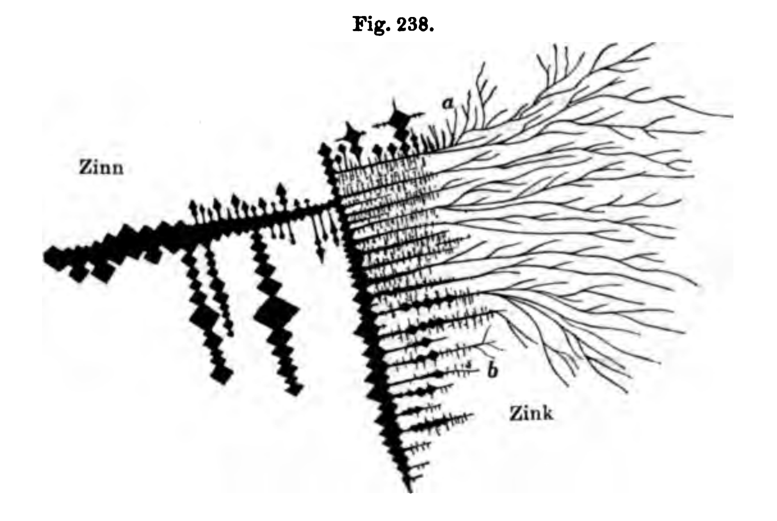
In neuester Zeit sind viele Arbeiten erschienen, die sich mit der Elektrolyse organischer Verbindungen beschäftigen, auf dieses Gebiet können wir jedoch nicht übergehen, ohne die Grenzen zu überschreiten, die diesem Lehrbuche gesteckt sind.

Die Elektrolyse von Lösungen mehrerer Elektrolyten, d. h. von Gemischen, haben zahlreiche Forscher untersucht. Sind in einer Lösung zwei Salze ein und derselben Säure enthalten, so scheidet sich bei schwachen Strömen nur eines der Metalle ab; das zweite erscheint erst bei größerer Stromdichte. In der Reihe der Metalle Au, Ag, Bi, Cu, Sn, Pb, Cd, Zn scheidet sich jedes vorhergehende früher

aus als das nachfolgende. In ähnlicher Weise scheidet sich von zwei Anionen bei geringer Stromstärke nur das eine aus, z. B. aus einer Mischung von KCl und KJ scheidet sich nur das Jod aus. Hittorf hat gezeigt, daß es sich hier um eine sekundäre Reaktion handelt; auf der Elektrode erscheinen die Ionen beider Salze, das eine verdrängt aber das andere aus seinem Salze. Eine große Rolle spielen hierbei außer der Stromdichte auch die Beimengungen. So scheidet sich z. B. aus einer Lösung von Kupfer- und Zinksalzen nur das Kupfer aus. Fügt man jedoch der Lösung KCN bei, so setzen sich an der Kathode beide Metalle ab, d. h. Messing.

Interessante Erscheinungen hat O. Lehmann unter dem Mikroskope beobachtet. Aus einer Lösung von chlorsaurem Zinn und Zink

Fig. 238.



scheiden sich an der Kathode Ketten aus tetragonalen Zinnkristallen aus, als deren Fortsätze unregelmäßig verlaufende Fäden (Dendriten) aus Zink erscheinen, Fig. 238. Mit der Frage nach der Elektrolyse von Gemischen haben sich Buff, Paalzow, Arrhenius und in neuester Zeit Chassy, Schrader, Hopfgarten und Wolf beschäftigt.

Auf die Erscheinungen, welche man in den Fällen beobachtet, wo mehrere einander berührende Elektrolyte hintereinander in den Stromkreis eingeschaltet werden, wollen wir nicht eingehen, da sich diese Erscheinungen größtenteils leicht erklären lassen und kein besonderes Interesse besitzen. Ausführlich behandelt sind sie in G. Wiedemanns Lehre von der Elektrizität, Bd. II, S. 593 bis 608, 1894. Eine neue Untersuchung einiger hierher gehöriger Erscheinungen haben Nernst und Riesenfeld ausgeführt.

Zum Schlusse erwähnen wir noch eine seltsame Erscheinung, die man bisweilen bei der Elektrolyse beobachtet: feste Ionen üben, wenn sie sich auf der Elektrode ausscheiden, auf dieselbe einen Druck aus, der bisweilen einen sehr hohen Betrag erreicht, bisweilen aber auch negativ wird. Mills (1877) brachte das versilberte Kügelchen eines Thermometers in eine Kupfersulfatlösung und machte es zur Kathode. Als sich das Kupfer auf dem Kügelchen niederschlug, begann das Thermometer eine Temperatur anzuzeigen, die höher als die wirklich vorhandene war, doch verschwand diese Erscheinung, nachdem das Kupfer durch Auflösen entfernt war. Der im vorliegenden Falle vom Kupfer ausgeübte Druck übertraf 100 Atmosphären. Bei schwachem Strome beobachtet man einen negativen Druck; das sich fest ansetzende Metall übt auf das Thermometergefäß gleichsam einen Zug aus. Bouty hat diese Erscheinung eingehend verfolgt und folgende Erklärung für sie gefunden. Die Temperatur des sich niederschlagenden Metalles kann von der mittleren Temperatur der Flüssigkeit an der Thermometeroberfläche verschieden sein. Ist die erste höher als die zweite, so drückt der Niederschlag, indem er sich abkühlt, das Reservoir zusammen; ist sie niedriger, so erfolgt eine Dehnung des Reservoirs seitens der an ihm innig haftenden Metallschicht.

Die Elektrolyse findet zahlreiche praktische Anwendungen, deren Betrachtung uns hier zu weit führen würde. Hierher gehört die Galvanoplastik, d. h. die Kunst, von Gegenständen mit Relief (Münzen, Medaillen, typographischen Klischees usw.) genaue metallische Kopien zu erhalten.

Die Galvanoplastik ist vom Akademiker Jacobi in Petersburg und fast gleichzeitig von Spencer in England erfunden worden. Einen besonderen Teil der Galvanoplastik bildet die Galvanostegie, d. h. die Kunst, Gegenstände mit einer dünnen Schicht aus irgend einem Metall zu überziehen; hierher gehört das galvanische Vergolden, Versilbern, Vernickeln usw. In allen diesen Fällen bringt man den Körper, auf dem man den betreffenden Metallniederschlag zu erhalten wünscht, in eine Lösung des entsprechenden Metalles, das sich während der Elektrolyse auf dem als Kathode dienenden Körper niederschlägt. Hierher gehört auch das Reinigen von Metallen, z. B. von Kupfer. Man bringt das Kupfer in Stücken in eine Kupfersulfatlösung und macht sie zur Anode. Das Kupfer löst sich alsdann auf und setzt sich in reinem Zustande an der Kathode ab. Ferner gehört hierher die elektrische Bearbeitung von Erzen, die den Gegenstand der Elektrometallurgie bildet, sowie vieles andere.

§ 3. Leitfähigkeit der Elektrolyte. Die heutige Entwickelung der Lehre von der Elektrolyse hat zur Aufhellung des innigen Zusammenhanges geführt, der zwischen der Leitfähigkeit der Elektro-

lyte und gewissen Größen besteht, welche eine besonders wichtige Rolle bei der Erscheinung der Elektrolyse selbst spielen. Wir halten es daher für notwendig, schon an dieser Stelle über die Messungsergebnisse der Leitfähigkeit von Elektrolyten zu sprechen, obgleich wir die Meßmethoden erst später betrachten werden.

Die Leitfähigkeit eines Elektrolyten, der eine Lösung darstellt, hängt von der gelösten Substanz, der Konzentration der Lösung, der Temperatur, sowie endlich vom Lösungsmittel ab, wobei wir als zum letzteren gehörig auch fremde in ihm gelöste Stoffe ansehen.

Wenden wir uns der Gruppe von Arbeiten zu, die zu dem Zwecke ausgeführt worden sind, einen Zusammenhang zwischen der Leitfähigkeit von Lösungen und ihren sonstigen physikalischen Eigenschaften, vor allem der inneren Reibung der Lösungen zu, finden. Daß ein solcher Zusammenhang möglich sei, darauf hat zuerst Hankel (1846) hingewiesen, sowie später G. Wiedemann (1856), der sich, gestützt auf seine eigenen sorgfältigen Untersuchungen, bereits sehr bestimmt hierüber ausgesprochen hat.

Die Überlegungen, welche einen Zusammenhang zwischen der Leitfähigkeit und der inneren Reibung oder Viskosität (Bd. I) einer Lösung postulieren, stützen sich auf das Folgende. Welcher Ansicht man auch über den inneren Mechanismus der Elektrolyse sein mag, es steht jedenfalls fest, daß man es hierbei mit einer Bewegung der Materie (Ionen) im Innern der Lösung in der Richtung zu den Elektroden hin zu tun hat. Dieser Bewegung wirkt die Reibung der sich bewegenden Teilchen an den Teilchen der Lösung entgegen; je größer diese Reibung ist, eine um so größere elektrische Kraft ist erforderlich, um die Ionen zu den Elektroden hin zu bewegen, d. h. um so größer muß die Potentialdifferenz an den Elektroden oder einfacher das Potentialgefälle innerhalb des Elektrolyten bei gegebener Stromstärke in der Kette sein. Dies aber heißt, daß zugleich mit der Größe dieser Reibung auch der Widerstand der Lösung wachsen muß. Die Reibung jedoch, welche die Ionen bei ihrer Bewegung innerhalb der Lösung erfahren und die innere Reibung der Lösung selbst, wie sie nach einer der in Bd. I angegebenen Methoden ermittelt wird, sind nicht dasselbe, wenn man auch annehmen kann, daß zwischen ihnen ein Zusammenhang besteht, ja daß sie vielleicht in manchen Fällen einander direkt proportional sind. Je größer die Viskosität einer Flüssigkeit ist, um so größer ist auch der Widerstand, den Körper, die sich in ihr bewegen, also auch die Ionen, erfahren.

Somit haben wir in der Tat ein Recht, einen gewissen Zusammenhang zwischen dem Widerstand und der Viskosität einer Lösung zu erwarten, keineswegs aber darf man erwarten, daß diese beiden Größen einander streng proportional sind.

Die Untersuchungen von G. Wiedemann, Grotrian, R. Lenz, Stephan, E. Wiedemann, Arrhenius, Bouty, Walden u. a. haben in vielen Fällen die Existenz eines solchen Zusammenhanges bestätigt oder wenigstens eine Analogie zwischen der Abhängigkeit des Widerstandes und derjenigen der Viskosität von verschiedenen Faktoren festgestellt. Eine Übersicht über alle hierher gehörigen Arbeiten hat Gouré de Villemontée (1901) gegeben. Die wichtigsten Resultate dieser Arbeiten sind die folgenden.

G. Wiedemann (1856) hat die Lösungen von $CuSO_4$, $Cu(NO_3)_2$, $AgNO_3$ und KHO untersucht und dabei gefunden, daß für jede derselben im einzelnen die Leitfähigkeit k proportional der Konzentration p und indirekt proportional der Viskosität η der Lösung ist. Grotrian (1876) hat die Lösungen von KCl, NaCl, $CaCl_2$, $MgCl_2$, $BaCl_2$, $MgSO_4$ und $ZnSO_4$ untersucht; er fand, daß die Leitfähigkeit k indirekt proportional der $n$ten Potenz der Viskosität η ist, wobei n für verschiedene Lösungen zwischen 0,7513 und 0,4554 variiert. R. Lenz zog aus seinen Messungen den Schluß, daß der Widerstand w und η sich in analoger Weise mit der Konzentration p verändert; man kann $w = a(1 - bp^m)$, $\eta = a_1(1 - b_1 p^m)$ setzen, wobei indes b nicht gleich b_1 ist.

Die Versuche von Foussereau (1885) und L. Poincaré (1890) haben gezeigt, daß für die geschmolzenen Salze $NaNO_3$, KNO_3, NH_4NO_3 das Verhältnis der Größen w und η sich nur wenig ändert, wenn die Temperatur zwischen 162 und 360° variiert. Grotrian und Kohlrausch haben die Abhängigkeit der Größen w und η von der Temperatur für Lösungen untersucht und hierbei für Salz-, Salpeter-, Schwefelsäure und Soda eine fast vollkommene Analogie im Zusammenhange beider Temperaturkoeffizienten (bei 18°) mit der Konzentration gefunden. So haben z. B. beide Koeffizienten für Schwefelsäurelösungen Maxima bei ein und demselben Konzentrationsgrade. Bouty findet sogar, daß für sehr verdünnte Lösungen einiger Salze die Temperaturkoeffizienten der Größen w und η einander gleich sind. E. Wiedemann, Arrhenius, C. Stephan, Massoulier, Holland u. a. haben einen Zusammenhang für den Einfluß von Beimengungen (Glycerin, Spiritus, Gelatine) auf die Größen w und η gefunden. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, beschränken wir uns auf den Hinweis, daß die Versuche, wie man auf Grund des obigen erwarten konnte, die Existenz eines Zusammenhanges zwischen den Änderungen der Größen w und η bestätigen, daß man aber weder von einer Gleichheit noch auch von einer Proportionalität der in jedem gegebenen Falle charakteristischen Größen reden kann. Die Untersuchungen von Walden werden wir weiter unten erwähnen.

Man hat ferner Grund, einen Zusammenhang zwischen der Elektrizitätsleitung von Lösungen und dem Diffusionskoeffizienten

der gelösten Substanz zu erwarten, da die Erscheinung der Diffusion selbst sehr viel Gemeinsames mit der Ionenbewegung innerhalb der Lösungen hat. Auf die Möglichkeit eines derartigen Zusammenhanges hat zuerst G. Wiedemann hingewiesen (1858). Die Versuche von Long (1880) haben gezeigt, daß diejenigen Salze, welche im Wasser am schnellsten diffundieren, wässerige Lösungen liefern, welche das größte Leitvermögen besitzen. R. Lenz hat die alkoholischen Lösungen von KJ, NaJ und CdJ_2 untersucht. Er fand, daß für die Lösungen von KJ und NaJ die Leitfähigkeit und Diffusionsgeschwindigkeit sich in ganz gleicher Weise bei Änderung des Prozentgehaltes an Alkohol und der Konzentration der Lösung ändern; für CdJ_2 fand sich eine derartige Übereinstimmung nicht. Hinzufügung einer gewissen Menge Petroleums zur alkoholischen Lösung von KJ (73 Proz. Alkohol), vermindert in gleicher Weise das Leitvermögen wie die Diffusionsgeschwindigkeit.

Bevor wir uns der Frage nach der Leitfähigkeit von Lösungen und deren Abhängigkeit von der Konzentration, Temperatur und dem Lösungsmittel zuwenden, haben wir uns mit den Einheiten bekannt zu machen, deren man sich jetzt, dank den Arbeiten von F. Kohlrausch, fast stets bedient, wenn man die Messungsresultate für das Leitvermögen von Flüssigkeiten behandelt. Außer diesen hat man noch eine Gruppe von Einheiten zu erwähnen, deren sich früher viele Autoren, wie z. B. Ostwald, bedient haben. Wir haben es hier mit zwei Hauptgrößen zu tun, sowie mit einer dritten, welche das Verhältnis der beiden ersten darstellt. Die beiden Hauptgrößen sind das Leitvermögen und die Konzentration.

Das Leitvermögen wird oder wurde früher durch folgende Größen gemessen:

1. Als Einheit gilt das Leitvermögen des Quecksilbers bei 0°. Den Zahlenwert der so gemessenen Leitfähigkeit bezeichnen wir mit k. Für viele Metalle ist $k > 1$; für Lösungen ist k stets ein kleiner Bruch.

2. Als Einheit des Leitvermögens gilt das Leitvermögen einer Substanz, von welcher ein Cubikcentimeter einen Widerstand von einem Ohm hat (Kohlrausch). Die entsprechenden Zahlenwerte pflegt man mit $\varkappa$ zu bezeichnen. Die Lösungen einiger Säuren besitzen angenähert ein derartiges Leitvermögen. Aus der Definition des Ohms (106,3 cm Hg-Säule, 1 qmm Querschnitt, 0°) folgt, daß ein Cubikcentimeter Quecksilber einen Widerstand von $\frac{1}{106,3 \times 100} = \frac{1}{10630}$ Ohm hat. Hieraus ergibt sich für Quecksilber $\varkappa = 10630$; es ist also die Einheit von Kohlrausch 10630mal kleiner als die alte Quecksilbereinheit, bei welcher für Quecksilber $k = 1$ war. Offenbar ist

$$\varkappa = 10630\,k \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

3. Ostwald wählte als Einheit des Leitvermögens dasjenige einer solchen Substanz, von welcher ein Cubikcentimeter einen Widerstand

gleich der Siemenseinheit (100 cm Hg-Säule, 1 qmm Querschnitt, 0°) besitzt. Die Zahlenwerte der entsprechenden Leitfähigkeiten wollen wir mit $\varkappa'$ bezeichnen. Offenbar ist die Ostwaldsche Einheit gleich dem 1,063 fachen der Einheit von Kohlrausch, es ist daher

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= 1{,}063\,\varkappa' \\ \varkappa' &= 10\,000\,k \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4, a)$$

Gehen wir jetzt zur „Konzentration" der Lösungen über.

Früher wurde die Konzentration durch die prozentuale Gewichtsmenge der Substanz in der Lösung gemessen.

Kohlrausch wendet zwei Methoden an, die Konzentration einer Lösung numerisch auszudrücken, nämlich:

1. (Kohlrausch.) Die Konzentration wird durch die Anzahl η der Grammäquivalente der Substanz bestimmt, welche in einem Cubikcentimeter der Lösung enthalten sind. Kohlrausch nennt η die äquivalente Konzentration. Der reziproke Wert hiervon

$$\varphi = \frac{1}{\eta} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

ist das Maß für den Verdünnungsgrad der Lösung; er ist numerisch gleich dem (in Cubikcentimetern ausgedrückten) Volumen der Lösung, welches ein Grammäquivalent der gelösten Substanz enthält. Offenbar kann η nur ein kleiner Bruch sein.

2. (Kohlrausch.) Die Konzentration wird durch die Anzahl m der Grammäquivalente der Substanz bestimmt, die in einem Liter der Lösung enthalten sind; auch diese Zahl heißt die äquivalente Konzentration. Der reziproke Wert hiervon

$$v = \frac{1}{m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5, a)$$

ist das Volumen (in Litern) der Lösung, welches ein Grammäquivalent der gelösten Substanz enthält. Sind in 1 ccm der Lösung η Grammäquivalente enthalten, so befinden sich offenbar im Liter $1000\,\eta$ Grammäquivalente; hieraus folgt somit

$$\left.\begin{aligned} m &= 1000\,\eta \\ v &= 0{,}001\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5, b)$$

3. Als Einheit der Konzentration gilt die Konzentration einer Normallösung (vgl. Bd. I), welche ein Grammolekül der Substanz in einem Liter der Lösung enthält. Den numerischen Wert der Konzentration wollen wir mit m' bezeichnen. Sei s die Valenzzahl der gelösten Substanz (für NaCl ist beispielsweise $s = 1$, für H_2SO_4, $CuSO_4$ ist $s = 2$). Das Grammolekül enthält s Grammäquivalente, somit ist unsere dritte Einheit $s$mal größer als die zweite. Es ist also

$$m' = \frac{m}{s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5,c)$$

4. Wählt man anstatt eines Liters wieder einen Cubikcentimeter, so erhält man die Größe

$$\eta' = \frac{\eta}{s} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5,d)$$

Nehmen wir an, wir hätten eine H_2SO_4-Lösung; das Molekulargewicht derselben ist gleich 98,08, die Valenzzahl $s = 2$, das Äquivalentgewicht 49,04; das Grammolekül enthält 98,08 g, das Grammäquivalent ist gleich 49,04 g. Sind dann in einem Cubikcentimeter der Lösung 0,4904 g H_2SO_4 enthalten, so ist $\eta = 0{,}01$, $m = 10$, $m' = 5$, $\eta' = 0{,}005$.

Das Verhältnis des Leitvermögens zur Konzentration liefert uns folgende Größen:

1. Die Größe

$$\Lambda = \frac{\varkappa}{\eta} = \varkappa\varphi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

nennt Kohlrausch das äquivalente Leitvermögen.

2. In früheren Arbeiten bezeichnete Kohlrausch als äquivalentes Leitvermögen die Größe

$$\lambda = \frac{k}{m} = kv \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6,a)$$

Da nach den Formeln (4) und (5, b) $\varkappa = 10630\,k$ und $\eta = 0{,}001\,m$ ist, so erhält man nach (6) und (6, a)

$$\Lambda = 1{,}063 \,.\, 10^7 \lambda \quad \ldots \ldots \quad (6,b)$$

3. Führt man die Konzentration η' ein und drückt nach Ostwald die Leitfähigkeit durch $\varkappa'$ aus, so heißt das Verhältnis

$$\mu = \frac{\varkappa'}{\eta'} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6,c)$$

das molekulare Leitvermögen.

Setzt man $\varkappa' = 10\,000\,k$ und $\eta' = \frac{\eta}{s} = \frac{0{,}001\,m}{s}$ ein, so erhält man

$$\mu = \frac{10^7}{s} \cdot \frac{k}{m} = \frac{10^7}{s}\lambda \quad \ldots \ldots \quad (6,d)$$

$$\Lambda = 1{,}063\,s\mu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6,e)$$

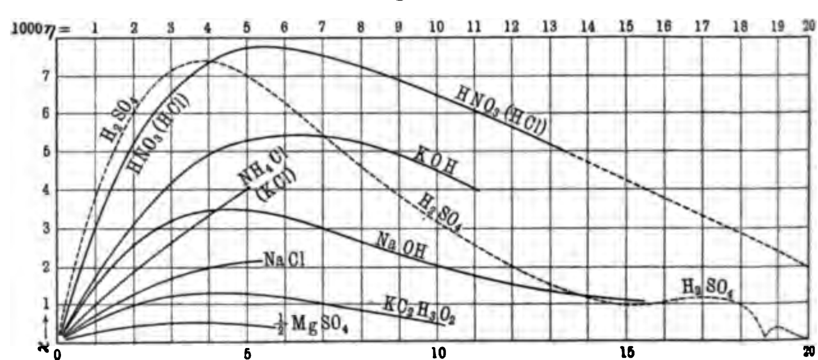
Im folgenden werden wir es vorzugsweise mit den Größen k, $\varkappa$, η, m, Λ und λ zu tun haben.

Es existiert eine sehr umfangreiche Literatur über den Widerstand der Elektrolyte und in ihr ist ein überaus großes Zahlenmaterial angesammelt. Eine vollständige Literaturübersicht bis zum

Jahre 1898 findet man im Werke von F. Kohlrausch und L. Holborn: Das Leitvermögen der Elektrolyte, Leipzig 1898, S. 137 bis 143. Tabellen mit den Messungsresultaten finden sich in demselben Werke S. 145 bis 201; ferner in den Werken: W. Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie, Bd. II, 1 (Chemische Energie), 2. Aufl., S. 721 bis 772. Leipzig 1893; Whetham: Solution and Electrolysis, 1895; Landolt und Börnstein: Physikalisch-chemische Tabellen; eine ausführliche Literaturübersicht und Angabe der Messungsresultate findet sich auch bei G. Wiedemann: Die Lehre von der Elektrizität, Bd. II, S. 567 bis 665, Braunschweig 1894. Wir beschränken uns auf Angabe weniger, besonders interessanter Resultate.

Man hat zwischen den Messungsresultaten, welche sich für Lösungen von mittlerem oder hohem Konzentrationsgrade ergeben haben und den-

Fig. 239.



jenigen für die elektrische Leitfähigkeit sehr verdünnter Lösungen zu unterscheiden. Wie wir sehen werden, besitzen gerade die Arbeiten, die sich auf sehr verdünnte Lösungen beziehen, das größte theoretische Interesse.

Für nicht verdünnte Lösungen hat man keinerlei einfache Gesetze oder Beziehungen gefunden.

Mit Zunahme der Konzentration nimmt das elektrische Leitvermögen k wässeriger Lösungen im allgemeinen zunächst zu, erreicht ein gewisses Maximum und nimmt darauf wieder ab. Man hat bei Angabe der Konzentration durch den prozentualen Gewichtsgehalt p der gelösten Substanz die Abhängigkeit zwischen k und p durch empirische Formeln von der Gestalt $k = \alpha p - \beta p^2$ dargestellt, wobei man k für das Lösungsmittel selbst ($p = 0$) gleich Null setzte. Beetz (1862) hat die kompliziertere Formel $k = a + bp - cp^2 + dp^3$ benutzt und die Zahlenwerte der in ihr vorkommenden Koeffizienten für Lösungen von $ZnSO_4$ bestimmt.

Eine anschaulichere Vorstellung vom Zusammenhange zwischen der elektrischen Leitfähigkeit von Lösungen und ihrer Konzentration erhält man durch graphische Darstellung dieses Zusammenhanges. In Fig. 239, welche wir mit liebenswürdiger Genehmigung von Prof. F. Kohlrausch und des Herrn Verlegers Teubner aus dem oben zitierten Werke von F. Kohlrausch und L. Holborn entnehmen, sind die von F. Kohlrausch angegebenen Kurven dargestellt. Als Abszissen sind die Größen $1000\,\eta = m$, vgl. (5, b), gewählt, d. h. die Grammäquivalente pro Liter der Lösung, als Ordinaten die Leitfähigkeiten $\varkappa$. Wir führen die Zahlen an, welche von Kohlrausch (1876) für den prozentualen Gewichtsgehalt p einiger Säuren gefunden worden sind, bei dem das Leitvermögen $10^4\varkappa$ ein Maximum ist; gleichzeitig sind hier auch diese Maximalwerte, sowie die Dichte δ der Lösungen angegeben.

	p Proz.	$10^4\varkappa$	δ
Salpetersäure	29,7	7793	1,185
Salzsäure	18,3	7626	1,092
Schwefelsäure	30,4	7350	1,224
Phosphorsäure	46,8	2086	1,307
Oxalsäure	9,4	835	1,045
Weinsäure	22,4	100	1,107
Essigsäure	16,6	16,1	1,022

Von besonderem Interesse sind die Lösungen der Schwefelsäure. Ihr Leitvermögen hat drei Maxima und zwei Minima, wie dies aus unserer Fig. 239 ersichtlich ist. Das erste Maximum entspricht $m = 1000\,\eta = 3{,}9$ (30,4 Proz. H_2SO_4), ferner folgt das erste Minimum bei $m = 15{,}25$ ($H_2SO_4 + H_2O$), dann das zweite Maximum bei $m = 17{,}2$, das zweite Minimum für reine H_2SO_4. Im weiteren hat man bereits eine Lösung des Anhydrids SO_3 in H_2SO_4; das Leitvermögen steigt zunächst stark und wird darauf fast gleich Null für das reine Anhydrid SO_3.

Einige Gruppen von Elektrolyten besitzen, während sich ihre Konzentration in weiten Grenzen ändert, eine fast konstante äquivalente Leitfähigkeit. Hierher gehören die einwertigen Säuren: HCl, HBr, HJ, HNO_3; ferner die Haloidsalze von K und NH_4, die schwefelsauren Salze von K und NH_4, die Chloride von Ba, Sr und Ca, die schwefelsauren Salze von Mg, Zn und Cu.

Für ein und dasselbe Anion verringert sich das Leitvermögen der Reihe nach für die Salze von K, NH_4, Na, Li. Für dasselbe Kation ergeben die Anionen der Salze von J, Br, Cl, Fl, NO_3, $C_2H_3O_2$ eine absteigende Reihe der Leitvermögens.

Bei Erhöhung der Temperatur nimmt die Größe k schnell zu. Die Temperaturkoeffizienten (bei 20°) schwanken zwischen 0,0087 und 0,072. Die letztgenannte Zahl (7 Proz. für 1°) gilt für eine 43 proz. Lösung von NaHO. Für neutrale Salze sind die Grenzwerte dieser

Koeffizienten 0,0141 und 0,0412. Die Temperaturkoffizienten des Leitvermögens k der Salzlösungen einbasischer Säuren nehmen zunächst mit Zunahme der Konzentration ab; für die Säuren selbst aber hängen die Koeffizienten von der Konzentration fast gar nicht ab.

Bei Änderung der Temperatur ändert sich der Konzentrationsgrad p, für den k ein Maximum wird. So ist z. B. für Schwefelsäure bei 0° $p = 30{,}2$, bei 70° aber bereits $p = 35{,}4$.

Im allgemeinen findet man, daß die Temperaturkoeffizienten um so größer sind, je kleiner das Leitvermögen der Lösungen ist, so daß sich in dieser Beziehung der Unterschied in den Eigenschaften verschiedener Substanzen mit Zunahme der Temperatur vermindert. Diese Regel gilt jedoch weder für schlecht leitende, noch für sehr konzentrierte Lösungen.

Arrhenius (1889) hat auf Grund von theoretischen Erwägungen, auf die wir noch zurückkommen werden, vorausgesehen, daß es Lösungen geben kann, für welche der Temperaturkoeffizient negativ ist, so daß sich also das Leitvermögen k derselben mit Zunahme der Temperatur vermindert. Solche Lösungen sind die Normallösungen der Phosphorsäure (H_3PO_4) und der unterphosphorigen Säure (H_3PO_2). Für erstere hat k ein Maximum bei 72°, für die zweite bei 54°; die letztere hat bei 25 und 90° das gleiche Leitvermögen.

Noyes und Coolidge (1903) haben in einer bemerkenswerten Arbeit das Leitvermögen wässeriger Lösungen von NaCl und KCl bis zur Temperatur von 306° untersucht.

Wir wenden uns jetzt dem Leitvermögen von verdünnten Lösungen zu. Mit dieser Frage hat sich am eingehendsten F. Kohlrausch beschäftigt; er ging bis zu Lösungen, die nicht mehr als 10^{-5} Grammoleküle der Substanz in einem Liter der Lösung enthielten, so daß η bis zu 10^{-8} und kleineren Werten reichte. F. Kohlrausch hat Tabellen der äquivalenten Leitfähigkeit, d. h. der Größe $\Lambda = \frac{\varkappa}{\eta} = \frac{\varkappa}{0{,}001\, m}$, vgl. (6) und (5, b), für verschiedene Werte von η oder m berechnet. Auch graphisch hat er die Größe Λ als Funktion von $1000\,\eta = m$ dargestellt. Er fand, daß das äquivalente Leitvermögen mit steigender Verdünnung der Lösung zunimmt und für unendlich verdünnte Lösungen einem gewissen Grenzwerte zustrebt, den wir mit Λ_0 bezeichnen wollen. Die Abhängigkeit des äquivalenten Leitvermögens von der Konzentration η wird für die verdünntesten Lösungen durch eine empirische Formel von der Gestalt

$$\Lambda = \Lambda_0 - a\eta^{\frac{1}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

angegeben; Λ erscheint als lineare Funktion der Größe $\eta^{\frac{1}{3}}$, die man wiederum als lineare Funktion der Konzentration ansehen kann. Be-

stimmt man Λ für die kleinsten Werte von η, so kann man die Größe Λ_0 durch Rechnung finden. So hat Kohlrausch beispielsweise für die Lösungen von KCl und NaCl folgende Werte von Λ gefunden:

$1000\,\eta = m$:	0,0001	0,0002	0,0005	0,001	0,002
KCl:	129,5	129,1	128,3	127,6	126,6
NaCl:	109,7	109,2	108,5	107,8	106,7

$1000\,\eta = m$:	0,005	0,01	0,05,	0,1
KCl:	124,6	122,5	115,9	111,9
NaCl:	104,8	102,8	95,9	92,5

Für beide Salze erhält man als Wert von a ungefähr 400 und ferner für KCl den Wert $\Lambda_0 = 131$, für NaCl aber $\Lambda_0 = 111$. Wir wollen die Werte von Λ anführen, die für $1000\,\eta = m = 0{,}0001$ gefunden worden sind, d. h. für die am stärksten verdünnten Lösungen:

$\Lambda = \frac{\varkappa}{\eta}$ bei $1000\,\eta = m = 0{,}0001$ (Grammäquivalent pro Liter).

KCl	NaCl	LiCl	NH_4Cl	KJ	KNO_3	$NaNO_3$	$AgNO_3$
129,5	109,7	100,7	129,2	130,3	124,7	103,7	115,5

$KClO_3$	$KC_2H_3O_2$	$NaC_2H_3O_2$	$\frac{1}{2}K_2SO_4$	$\frac{1}{2}Na_2SO_4$	$\frac{1}{2}LiSO_4$
120,2	100,0	76,8	133,5	110,5	100,9

$\frac{1}{2}BaCl_2$	$\frac{1}{2}ZnCl_2$	$\frac{1}{2}BaN_2O_6$	$\frac{1}{2}ZnSO_4$	$\frac{1}{2}CuSO_4$
120,5	110	117,2	109,3	113,3

$\Lambda = \frac{\varkappa}{\eta}$ bei $1000\,\eta = m = 0{,}001$.

KOH	NaOH	HCl	HNO_3	$\frac{1}{2}H_2SO_4$	$\frac{1}{3}H_3PO_3$
234	208	377	375	361	106

Ein Blick auf diese Zahlen zeigt, daß sich in ihnen Regeln aussprechen, deren Einfachheit in hohem Grade bemerkenswert ist.

1. Für jedes Paar von Kationen ist die Differenz der Werte von Λ angenähert die gleiche, welches auch immer die Anionen sein mögen.

2. Für jedes Paar von Anionen ist die Differenz der Werte von Λ angenähert die gleiche, welches auch immer die Kationen sein mögen.

Wählen wir einige Beispiele.

1. Differenz für die Kationen.

	K — Na	Na — Li
Cl . . .	19,8	9,0
NO_3 . . .	21,0	—
$C_2H_3O_2$.	23,2	—
SO_4 . . .	23,0	9,6

2. Differenz für die Anionen.

	Cl — NO_3	Cl — $C_2H_3O_2$	$\frac{1}{2}SO_4$ — Cl
K . .	4,8	29,5	4,0
Na . .	6,0	32,9	0,8
Li . .	—	—	0,2
Zn . .	—	—	0,7

Man muß beachten, daß die Werte für Λ zu bestimmen sehr schwierig ist, weshalb dieselben nicht ganz genau sein können; ferner hatten wir die Werte für Λ statt deren für die Grenzwerte Λ_0 gewählt, für welche man schon viel eher einfache Gesetze und Beziehungen erwarten könnte. Läßt man obige Regeln auch für die Werte Λ_0 gelten, so kann man sie offenbar durch folgendes eine Gesetz ersetzen.

Der Grenzwert Λ_0 des äquivalenten Leitvermögens einer Lösung ist gleich der Summe zweier Größen, welche für die zwei Teile (Kation und Anion) des Elektrolyten charakteristisch sind, d. h. für jeden der beiden Teile ist diese Größe vom anderen Teile unabhängig. Diese Größen repräsentieren somit gewissermaßen die äquivalenten Leitvermögen der Bestandteile des Elektrolyten, d. h. des Kations und Anions. Bezeichnet man den Elektrolyten symbolisch mit KA, das Kation mit K, das Anion mit A, so wird obiges Gesetz durch folgende leicht verständliche Formel ausgedrückt:

$$\Lambda_0 = \Lambda_0(K) + \Lambda_0(A) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Der Grenzwert des äquivalenten Leitvermögens einer Lösung repräsentiert eine additive (Bd. I) Eigenschaft. Wir werden die wahre physikalische Bedeutung der Größen $\Lambda_0(K)$ und $\Lambda_0(A)$ weiter unten kennen lernen, wollen jedoch vorläufig einige Zahlenwerte anführen, die Kohlrausch im Jahre 1902 angegeben hat.

	H	K	Na	NH_4	Ag	$\frac{1}{2}$ Ba	$\frac{1}{2}$ Mg	$\frac{1}{2}$ Zn
$\Lambda^0(K) =$	318	64,7	43,5	64,4	54,0	56,3	46,0	43,6

	HO	Cl	J	NO_3	$\frac{1}{2}SO_4$	$\frac{1}{2}CO_3$
$\Lambda_0(A) =$	174	65,4	66,4	61,8	68,7	70

Aus obigen Zahlen erhält man durch einfache Addition die Leitfähigkeiten Λ_0 der Lösungen der entsprechenden Verbindungen.

Der Einfluß der Temperatur auf das elektrische Leitvermögen verdünnter Lösungen ist ebenfalls einfacher, als für nicht verdünnte Lösungen. Der Temperaturkoeffizient ist für alle verdünnten Lösungen von Salzen fast der gleiche. Er ist im Mittel gleich 0,025 und schwankt zwischen 0,0216 und 0,0265. Für Lösungen starker Säuren (HNO_3, H_2SO_4, HCl) sind die Koeffizienten ebenfalls fast gleich untereinander, erreichen aber nur den Wert 0,016; für Alkalien haben sie mittlere Werte, z. B. 0,0194 für KHO und 0,0174 für NaHO. Wächst die Konzentration bis zu einem gewissen Grenzwerte (vgl. S. 611), so nehmen die Temperaturkoeffizienten ab. Für verdünnte Lösungen bestätigt sich in noch höherem Grade als für konzentriertere Lösungen die Regel, daß der Temperaturkoeffizient um so größer ist, je kleiner die elektrische Leitfähigkeit der

Lösung ist. Déguisne (1895) hat gefunden, daß man für Werte von $m = 0{,}0001$ bis $0{,}05$ (Grammäquivalent pro Liter) setzen kann:

$$\varkappa_t = \varkappa_{18}[1 + \alpha(t - 18) + \beta(t - 18)^2] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Kohlrausch (1901) fand, daß diese Formel sehr gut den Zusammenhang zwischen der elektrischen Leitfähigkeit und der Temperatur darstellt: ferner fand er die bemerkenswerte Relation

$$\beta = 0{,}0163\,(\alpha - 0{,}0174).$$

Für Temperaturen zwischen -35 und -41^0 ist $\varkappa = 0$. Später (1903) fand er, daß auch die innere Reibung η des Wassers durch eine analoge Formel dargestellt wird, aus welcher sich $\eta = 0$ bei -34^0 ergibt. Das elektrische Leitvermögen geschmolzener Salze haben Braun, Foussereau, W. Kohlrausch (1882), Bouty und Poincaré, Grätz, Coldridge, Brown, Bogorodski, Arndt (1906), Goodwin und Wentworth (1907), Lorenz und Kalmus (1907) u. a. bestimmt. Eine ausführliche Übersicht findet man im zitierten Werke von Bogorodski (vgl. § 2).

Das elektrische Leitvermögen K von Gemischen aus zwei Elektrolyten haben Paalzow, Bouchotte, Bender, Bouty, Chruschtschow und Paschkow, Klein, Arrhenius u. a. gemessen. Hier besteht das Hauptinteresse darin, Lösungen zu finden, für deren Gemische K nach der Formel $(V_1 + V_2)K = V_1K_1 + V_2K_2$, wo V_1 und V_2 die Volumina, K_1 und K_2 die Leitvermögen der Bestandteile sind, berechnet werden kann. Chruschtschow und Paschkow fanden, daß die Mischungen $\frac{1}{2}KCl + ZnCl_2$, $K_2SO_4 + MgSO_4$ u. a. zu solchen Lösungen gehören. Arrhenius, der die Säurelösungen untersucht hat, nannte solche Lösungen isohydrisch. Er fand, daß zwei Lösungen, welche bei gleichen Volumina isohydrisch sind, es auch bei allen Volumina sind, und daß ferner zwei Lösungen, die einzeln mit einer dritten isohydrisch sind, es auch untereinander sind. Für jedes Paar Säuren lassen sich isohydrische Lösungen finden; solche Lösungen haben angenähert gleiche Werte für k_1 und k_2.

Chemisch reine Flüssigkeiten besitzen im allgemeinen einen außerordentlich großen Widerstand. Dieser Umstand ist in theoretischer Beziehung sehr wichtig.

Wenden wir uns zunächst der Frage nach der elektrischen Leitfähigkeit des reinen Wassers zu. Die Lösung dieser Frage ist überaus schwierig, da es äußerst schwer ist, wirklich reines Wasser darzustellen. Vor Kohlrausch hatte man u. a. folgende Werte für $10^{10}k$ gefunden, wo für Hg, wie früher, $k = 1$ gesetzt ist:

Pouillet	80	Rossetti.	4,5
Becquerel.	70	Quincke	2,16
Oberbeck	15	Magnus	1,33

In seinen ersten Arbeiten über diesen Gegenstand hatte Kohlrausch (1878) gezeigt, daß es durch Destillation an freier Luft nicht möglich sei, Wasser zu erhalten, dessen elektrisches Leitvermögen kleiner als $\varkappa = 0{,}7 \cdot 10^{-6}$ oder $k = 0{,}7 \cdot 10^{-10}$ (Hg) sei; diese Zahl ist nur halb so groß wie die von Magnus. In einer folgenden Arbeit (1885) hatte er die Destillation des Wassers im Vakuum ausgeführt und hierbei eine ganze Reihe von Vorsichtsmaßregeln angewandt. Auf diese Weise gelang es ihm, bis zu dem Werte $\varkappa = 0{,}26 \cdot 10^{-6}$ für 18^0 zu gelangen. Endlich gelang es ihm, in der letzten in Gemeinschaft mit Heydweiller (1894) ausgeführten Arbeit, Wasser vom höchsten Grade der Reinheit, wie es wohl jemals dargestellt worden ist, zu erhalten. Für solches Wasser ist bei einer Temperatur von 18^0

$$\varkappa = 0{,}043 \cdot 10^{-6}; \quad k = 0{,}040 \cdot 10^{-10} \text{(Hg)}.$$

Durch Rechnung findet Kohlrausch hieraus für das Leitvermögen absolut reinen Wassers (bei 18^0) die Werte

$$\varkappa = 0{,}040 \cdot 10^{-6}, \quad k = 0{,}036 \cdot 10^{-10} \text{(Hg)}.$$

Der Temperaturkoeffizient des elektrischen Leitvermögens von reinem Wasser ist sehr groß, man erhält bei

$$0^0 \ldots \varkappa = 0{,}01 \cdot 10^{-6}, \qquad 18^0 \ldots \varkappa = 0{,}04 \cdot 10^{-6},$$
$$50^0 \ldots \varkappa = 0{,}17 \cdot 10^{-6}.$$

Bei Ermittelung von $\varkappa$ für verdünnte wässerige Lösungen hat man das Leitvermögen des Wassers in Betracht zu ziehen, falls die Konzentration m sehr klein ist, nämlich für Säuren und Basen $m < 0{,}001$ oder für neutrale Salze $m < 0{,}0001$ ist.

Außer dem Wasser leiten auch viele andere Elektrolyte in chemisch reinem Zustande den Strom sehr schlecht oder auch gar nicht. Hierauf hat zuerst F. Kohlrausch (1876) hingewiesen. Noch früher hat Gore bemerkt, daß die flüssigen, wasserfreien Säuren HCl und HFl den Strom nicht leiten. Danach haben dies Bleekrode (1878), Hittorf (1878) u. a. für folgende Flüssigkeiten bestätigt: die wasserfreien Säuren HCl, HBr, HJ, HFl, H_2S und H_3As; die Anhydride SO_2, CO_2, B_2O_3, CrO_3, As_2O_3, SO_3; die organischen, wasserfreien Säuren, wie z. B. Essigsäure, Benzoesäure, Apfelsäure, Buttersäure usw.; ferner für flüssiges CN, CS_2, C_2Cl_4, C_2Cl_6, CCl_4. Zu den sehr schlechten Leitern gehören ferner viele metallisch-organische Verbindungen, Kohlenwasserstoffe, fette und ätherische Öle, Alkohole, Äther usw.

Obgleich bisher von Lösungen kurzweg die Rede war, haben wir bis jetzt doch bloß die wässerigen Lösungen im Auge gehabt. Von nicht geringem theoretischen Interesse ist jedoch das Leitvermögen von Lösungen der Elektrolyte in anderen Lösungsmitteln. In dieser Beziehung sind sehr viele Flüssigkeiten untersucht worden; die wichtigsten der hierher gehörigen Arbeiten sind in Rußland ausgeführt worden,

es haben sich bei uns Kablukow, R. Lenz, Walden, Centnerszwer, Selinski und Krapiwin, Plotnikow u. a. mit dieser Frage beschäftigt; von anderen Forschern sind zu nennen Franklin und Kraus, Carrara, Hartwig, di Ciommo, Vicentini, Fitzpatrik, Stephan u. a. Wir wollen zunächst einige allgemeine Bemerkungen vorausschicken. Die wässerigen Lösungen von Elektrolyten besitzen im allgemeinen ein größeres elektrisches Leitvermögen als die Lösungen in anderen Flüssigkeiten. Es gibt aber auch Ausnahmen hiervon. So haben z. B. Franklin und Kraus gefunden, daß einige Salzlösungen in Aceton, Acetonitril und flüssigem NH_3 ein größeres Leitvermögen besitzen als die Lösungen derselben Salze in Wasser. Wir geben eine kleine Übersicht über die Grenzwerte des äquivalenten Leitvermögens.

	Aceton	Acetonitril	NH_3 (— 34°)	Wasser
NaJ	140	160	—	121
KJ	154	—	340	143
KBr	—	—	340	144
NH_4Cl	—	—	304	144
$AgNO_3$	—	160	280	121

Walden und Centnerszwer (1901) haben gefunden, daß das elektrische Leitvermögen der gelösten Salze von $N(CH_3)_4J$ und $N(C_2H_5)_4J$ in flüssigem SO_2 bis zum dreifachen Betrage der Leitfähigkeit im Wasser geht. Das gleiche Resultat fand Centnerszwer (1902) für die Lösungen vieler Salze in flüssigem HCy.

Ferner hat sich gezeigt, daß die einfachen Gesetze, welche von Kohlrausch für wässerige Lösungen gefunden worden sind, für Lösungen in anderen Flüssigkeiten ihre Geltung verlieren. So hat z. B. Kablukow gefunden, daß das äquivalente Leitvermögen der Lösungen von HCl in Äther mit Abnahme der Konzentration abnimmt, im Isoamylalkohol jedoch zunächst wächst und hierauf abnimmt. Ferner nimmt die äquivalente Leitfähigkeit von NaJ und NaBr in Benzonitril, von $AgNO_3$ in Pyridin und von $FeCl_3$ in Pyridin und Benzaldehyd ebenfalls zugleich mit der Konzentration ab. Für viele Lösungen in Aceton und flüssigem SO_2 nimmt sie zwar mit Abnahme der Konzentration zu, doch ist nicht ersichtlich, daß sie einem bestimmten Grenzwerte zustrebt.

Wie wir gesehen haben, ist der Temperaturkoeffizient des elektrischen Leitvermögens für wässerige Lösungen fast immer positiv. Für nicht wässerige Lösungen wird ein negativer Koeffizient viel häufiger beobachtet und für Lösungen in flüssigem SO_2 bildet er, wie Walden und Centnerszwer gefunden haben, von einer gewissen Temperatur an die Regel. So nimmt z. B. das Leitvermögen einer Lösung von KJ in SO_2 von — 78° (Erstarrungstemperatur von SO_2) bis — 20° zu, darauf aber bis zur kritischen Temperatur des SO_2 (+ 157°), bei

welcher es praktisch gleich Null ist, beständig ab. Ferner hat das Leitvermögen einer Lösung von NH_4CNS in SO_2 seinen Maximalwert bei -48^0, einer Lösung von $S(CH_3)_3J$ bei $+5^0$ usw. Ähnliches findet man auch an einer Lösung in flüssigem NH_3.

Cattaneo hat gezeigt, daß man Gemische aus Alkohol und Äther herstellen kann, in denen das Leitvermögen der Lösungen gewisser Salze ($FeCl_3$, $AuCl_3$ u. a.) von der Temperatur unabhängig ist. Dieses ist z. B. für eine Lösung von 1,019 Proz. $FeCl_3$ in einem Gemische aus 100 Tln. Äther und 66,5 Tln. Alkohol der Fall.

Die Lösungen von Salzen in Alkoholen (R. Lenz, Kablukow, Carrara u. a.) besitzen ein geringeres Leitvermögen als die wässerigen Lösungen und ist auch die Reihenfolge, in welche sie sich für dasselbe (der Größe nach) anordnen, eine andere. Das äquivalente Leitvermögen nimmt in vielen Fällen mit Verminderung der Konzentration ab. Walden hat gefunden, daß Lösungen in BCl_3, PCl_3, PBr_3, $SbCl_5$, $SiCl_4$, $SnCl_4$, SO_3 und Br_2 kein merkliches Leitvermögen besitzen. Folgende Lösungsmittel liefern Lösungen, deren Leitfähigkeit in der angegebenen Reihenfolge anwächst: S_2Cl_2, SO_2, Cl_2, $SOCl_2$, $POCl_3$, $AsCl_3$, $SbCl_3$. Ciommo (1901) hat das Leitvermögen der Lösungen von KOH und NaOH in 96 Proz. Glycerin untersucht. Er findet für dasselbe Maxima (5 Proz. KOH, 7,03 Proz. NaOH) ähnlich wie bei wässerigen Lösungen. Der Temperaturkoeffizient ist hierbei außerordentlich groß: 0,21 für NaOH und 0,17 für KOH.

Die umfangreichsten Untersuchungen über das Leitvermögen von nichtwässerigen Lösungen hat Walden in den Jahren 1900 bis 1907 ausgeführt. Er untersuchte zunächst (1903) unorganische Lösungsmittel und ging sodann zur Untersuchung einer großen Reihe von organischen Lösungsmitteln über. Leider überschreiten diese bemerkenswerten Untersuchungen die Grenzen dessen, was in ein Lehrbuch der Physik hineingehört und müssen wir uns daher auf einige wenige Worte über sie beschränken. In flüssigem SO_2 (bei -10^0) erweisen sich zahlreiche Substanzen als Elektrolyte, die man unter keinen Umständen als Salze oder Säuren ansehen kann. Hierher gehören einige Elemente, z. B. die Haloide, Verbindungen der Haloide untereinander und mit P, Sb und Sn; ferner NOCl, $POCl_3$, $SOCl_2$, SO_2Cl_2 usw. In einer ganzen Reihe umfangreicher Arbeiten (1903 bis 1906) hat Walden (1903) die Lösungen in 50 organischen Flüssigkeiten untersucht, wobei zum Vergleich der Lösungsmittel untereinander als gelöste Substanz $N(C_2H_5)_4J$ diente. Walden hat das Leitvermögen dieses Salzes in verschiedenen Lösungsmitteln und hieraus seinen Dissoziationsgrad (s. u.) bestimmt. Ferner hat Walden (1906) die Koeffizienten der Viskosität der reinen Lösungsmittel bestimmt. Er findet, daß für ein und denselben Elektrolyten, $N(C_2H_5)_4J$, das Produkt aus der Viskosität des Lösungsmittels und dem Grenz-

werte Λ_0 eine Größe ist, welche für alle untersuchten Lösungsmittel denselben Wert hat und von der Temperatur unabhängig ist.

Plotnikow hat ebenfalls das elektrische Leitvermögen bei verschiedenen Lösungsmitteln untersucht (Brom, Äther u. a.). Ein besonderes Interesse beanspruchen die Lösungen in Brom. Es gibt eine ganze Reihe von Substanzen, deren Lösungen in Brom den Strom leiten; besonders gutleitend ist die Lösung von PBr_5; ihr Leitvermögen hat ein Maximum bei der Konzentration $PBr_5 + 20\,Br$. Das spezifische Leitvermögen konzentrierter Lösungen ist im allgemeinen ungewöhnlich groß; es übertrifft das spezifische Leitvermögen verdünnter Lösungen bis um das 1000fache.

Lewis und Wheeler (1906) fanden, daß konzentrierte Lösungen von KJ in flüssigem Jod zwischen 120 und 160° ebenso gut leiten, wie die besten wässerigen Lösungen. In verdünnten Lösungen wächst die molekulare Leitfähigkeit linear mit der Konzentration bis zu einem Maximum, um dann wieder zu fallen.

Zahlreiche Abhandlungen über die Leitfähigkeit und innere Reibung von Lösungen verschiedener Salze in Gemischen mehrerer Lösungsmittel veröffentlichten H. C. Jones und seine Mitarbeiter Lindsay, Carroll, Bingham und Mc Master in den Jahren 1902—1906.

Steele, Mc Intosh und Archibald (1905) haben die Elektrolyse in den verflüssigten Gasen HCl, HBr, HJ, SH_2 und PH_3 als Lösungsmittel untersucht; von den genannten Körpern besitzt PH_3 kein Ionisationsvermögen. Vom Zusammenhange, welcher zwischen der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels und dem elektrischen Leitvermögen einer Substanz besteht, wird später die Rede sein.

Das Leitvermögen von wässerigen Lösungen, denen schlechtleitende Substanzen beigefügt waren, haben E. Wiedemann (Glycerin), Lüdeking (Gelatine), Arrhenius (Alkohole, Äther, Aceton) u. a. untersucht. Arrhenius fand, daß das Leitvermögen k einer solchen Lösung durch die Formel $k = k_0(1 - ax)^2$ dargestellt wird, wo k_0 sich auf die wässerige Lösung bezieht, x der Volumgehalt der Beimengung ist. Nichols und Merritt (1904) haben gefunden, daß sich das Leitvermögen der Alkohollösungen einiger fluoreszierender Substanzen (Eosin u. a.) vermindert, wenn man sie belichtet, wodurch Fluoreszenz hervorgerufen wird.

Indem wir dies Kapitel über das Leitvermögen von Lösungen der Elektrolyte abschließen, verweisen wir noch auf einige Anwendungen des Dargelegten.

1. Kistiakowski (1890) hat gezeigt, daß man durch Messung der Leitfähigkeit der Lösung eines Doppelsalzes finden kann, ob das Salz zu den Gemengen (Alaun) oder zu den typischen Doppelsalzen in der Art von $K_3Fe(CN)_6$ gehört, vgl. S. 601. Zu diesem Zwecke wird

der Grenzwert Λ_0 des äquivalenten Leitvermögens der Lösung bestimmt, der, wie aus den Tabellen ersichtlich, für verschiedene Salze im allgemeinen zwischen den Zahlen 100 und 135 bei 18° schwankt. Liegt Λ_0 zwischen diesen Grenzen, so ist Grund zu der Annahme vorhanden, daß das Salz ein typisches Doppelsalz ist, ist dagegen Λ_0 nahezu gleich der Summe der Größen Λ_0' und Λ_0'', die für die Bestandteile des Salzes gelten, so ist dieses Salz ein Gemenge.

2. Kohlrausch und Rose (1893), sowie Hollemann (1893) haben gezeigt, wie man aus Beobachtungen der Leitfähigkeit die Löslichkeit schwer lösbarer Substanzen bestimmen kann, wie z. B. von $AgCl$, $AgBr$, AgJ, $BaSO_4$, BaC_2O_4, verschiedener Silikate usw. Wir hatten bereits die Formel $\Lambda = \varkappa : \eta$, vgl. (6), S. 608, hieraus folgt

$$\eta = \frac{\Lambda}{\varkappa}.$$

Die Größe Λ kann nach der Formel (8), die auch für sehr verdünnte Lösungen gilt, berechnet werden; $\varkappa$ wird auf experimentellem Wege bestimmt, indem man von dem beobachteten Leitvermögen der Lösung das Leitvermögen des Wassers subtrahiert. So geben z. B. für $AgCl$ die Zahlen der Tabelle auf S. 614 $\Lambda(AgCl) = \Lambda(Ag) + \Lambda(Cl) = 54{,}0 + 65{,}4 = 119{,}4$. Die Messung gab $1000\,\eta = 0{,}00001$ Grammäquivalent pro Liter = 0,01 Milligrammäquivalent pro Liter = 1,46 Milligramm pro Liter.

Die Löslichkeit schwer löslicher Substanzen haben J. Kohlrausch und Dolezalek (1901) für $AgBr$ und AgJ nach dieser Methode bestimmt. Ferner erschienen 1903 zwei umfangreiche Untersuchungen, eine von F. Kohlrausch (unter Mitwirkung von F. Rose und Dolezalek), der 41 Lösungen untersucht hatte, die andere von Böttger, der über 31 Lösungen studiert hatte. Endlich haben auch Gardner und Gerassimow (1904) nach eben dieser Methode die Löslichkeit einiger Salze schwacher Säuren bestimmt.

3. Hat man Tabellen oder Kurven für das elektrische Leitvermögen $\varkappa$ der Lösung einer bestimmten Substanz bei verschiedenen Konzentrationsgraden, so kann man natürlich durch Messung von $\varkappa$ den Konzentrationsgrad finden, falls dieser unbekannt ist. Ist eine Lösung gegeben, die zwei Elektrolyte enthält, so kann man, wie Erdmann (1897) gezeigt hat, ebenfalls in vielen Fällen die Konzentration der Bestandteile des gelösten Gemenges bestimmen.

4. Eine angenäherte Vorstellung von der Menge der in Wasser gelösten unbekannten Salze kann man nach folgender Regel erhalten: das Leitvermögen $\varkappa$ bei Zimmertemperatur multipliziert mit 10 000 ist angenähert gleich der Anzahl Milligrammäquivalente im Liter der Lösung. Man kann sich leicht von der Richtigkeit dieser Regel überzeugen, wenn man annimmt, es sei $\Lambda = 100$. Befinden sich

in der Lösung nur Salze der Säuren HCl, H_2SO_4 und H_2CO_3 und zwar Salze unedler Metalle, so schwankt das Äquivalentgewicht zwischen 60 und 90. Setzt man es gleich 75, so erhält man folgende Regel: Die Zahl $0{,}75 . \varkappa . 10^6$ ist angenähert gleich der Anzahl Milligramme der Salze, die in einem Liter Wasser gelöst sind.

§ 4. Theorie der Elektrolyse. Untersuchungen, die vor F. Kohlrausch ausgeführt worden waren.

Eine Theorie der Elektrolyse muß auf zwei Fragen Antwort geben:

1. Worin besteht der Mechanismus der Elektrolyse, d. h. auf welche Weise erfolgt das Auftreten von Ionen an den Elektroden, die sich in sehr großem Abstande voneinander befinden können? In der Lösung befindet sich je ein Elektrolyt, der eine chemische Verbindung der Ionen darstellt. Es fragt sich daher, an welcher Stelle der Zerfall des Elektrolyten erfolgt und weshalb sich die Ionen nur an den Elektroden bemerkbar machen.

2. Welche Rolle spielt der elektrische Strom, in dessen Kreis der Elektrolyt eingeführt sein muß? Was hat hierbei die Elektrizität überhaupt zu verrichten? Es sei bemerkt, daß ungefähr bis zum Jahre 1888, d. h. bis zum Erscheinen der Arbeiten von Arrhenius, allen theoretischen Untersuchungen eine Vorstellung zugrunde lag, die man durch den Satz: „der Strom zerlegt den Elektrolyten“ kurz zum Ausdruck bringen könnte. Die „Zerlegung durch den Strom“ galt als offenbare Tatsache, die keinem Zweifel unterliegen konnte; die Forscher suchten bloß nach einer Erklärung dafür, weshalb und auf welche Weise der Strom den Elektrolyten zerlege.

Wir wollen die allmähliche Entwickelung der theoretischen Vorstellungen, die man sich über die Elektrolyse gebildet, in historischer Reihenfolge betrachten.

Eine chemische Wirkung der Elektrizität, nämlich Zerlegung des Wassers, haben zuerst Paetz von Troostwyk und Deimann (1789) beim Durchgang der Entladung einer Leidener Flasche durch Wasser beobachtet. Ritter (1799) war der erste, der Wasser mit Hilfe des galvanischen Stromes zerlegte; unabhängig von ihm, doch sicher später, haben Nicholson und Carlisle (1800) dieselbe Erscheinung entdeckt. Hierauf wurden dann durch die Arbeiten zahlreicher Forscher, insbesondere die Arbeiten von Davy, die Grunderscheinungen der Elektrolyse gefunden. Grothus (1805) hat die erste Erklärung für den Mechanismus der Elektrolyse und die Bedeutung der hierbei wirkenden elektrischen Kräfte gegeben.

Seine Theorie besteht im folgenden. Die Bestandteile des Moleküls eines jeden Elektrolyten sind an gleiche ungleichnamige Elektrizitätsladungen gebunden; so ist z. B. im Molekül $NaCl$ das Na-Atom an die Ladung $+ e$ gebunden, das Cl-Atom an die Ladung $- e$. Führt man

die Lösung in den Stromkreis ein, so ordnen sich alle Moleküle derart an, daß alle Na sich der Kathode, alle Cl der Anode zukehren. Hierauf zerfallen sämtliche Moleküle, wobei sich das Na-Atom des ersten Moleküls samt seiner Ladung an der Kathode ausscheidet, das Cl des ersten Moleküls verbindet sich mit dem Na des zweiten, das Cl des zweiten mit dem Na des dritten usw., endlich scheidet sich das Cl-Atom des letzten Moleküls samt seiner Ladung an der Anode aus. Die neu gebildeten NaCl-Moleküle drehen sich sogleich um 180°, so daß wiederum alle Na der Kathode, alle Cl der Anode zugewandt sind. Hierauf zerfallen alle diese Moleküle; die zu äußerst gelegenen Na- und Cl-Atome samt ihren Ladungen scheiden sich an den Elektroden aus, die anderen verbinden sich paarweise zu neuen NaCl-Molekülen, die ihrerseits sich um 180° drehen, zerfallen usw. Auf diese Weise ist der Umstand, daß die Ionen nur an den Elektroden auftreten, innerhalb des Elektrolyten aber sich nicht bemerkbar machen, vollkommen erklärt. Sehr interessant ist, daß bereits diese älteste Theorie der Elektrolyse zu der Vorstellung von einer Ionenströmung führt, bei welcher sich die Ionen in zwei entgegengesetzten Richtungen nach den Elektroden hin bewegen. Besonders charakteristisch ist die Annahme des ununterbrochenen Zerfalls und der Neubildung von Molekülen aus diesen sich bewegenden Ionen.

Die Theorie von Grothus hat im Verlaufe der ganzen ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts allgemeine Anerkennung gefunden. Während dieser Zeit ist noch eine ganze Reihe von anderen Theorien in Vorschlag gebracht worden, welche in der einen oder anderen Weise die Grothussche Theorie zu ergänzen suchten. Wir wollen uns auf eine ganz kurze Übersicht über diese Theorien beschränken.

Es gehört hierher zunächst die berühmte elektrochemische Theorie von Berzelius (1812), die in der Folge durch Fechner eine gewisse Modifikation erfahren hat. Die wesentlichsten Punkte sind hierbei die folgenden: jedes Atom ist an zwei Ladungen ungleichnamiger Elektrizitäten gebunden; treten zwei Atome miteinander in Verbindung, so trennt sich von jedem Atom vollständig oder teilweise eine der Ladungen, so daß in der entstandenen Verbindung jedes Atom einen Überschuß an einer der beiden Ladungen hat. Die losgetrennten beiden Ladungen bleiben nach Berzelius frei, nach Fechner vereinigen sie sich miteinander.

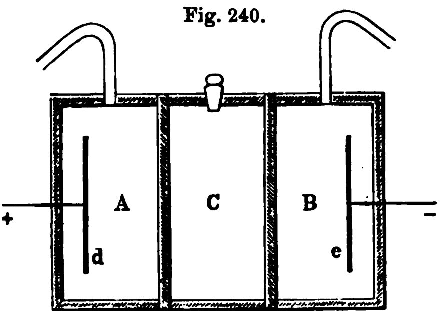
De la Rive (1856) nimmt an, daß auch im Molekül, z. B. im KCl-Molekül, jedes der beiden Atome mit zwei ungleichnamigen Ladungen verbunden ist, wobei sich die positive Ladung des Chlors und die negative Ladung des Kaliums auf denjenigen Seiten der Atome befinden, die einander zugekehrt sind, die negative Ladung des Chlors aber und die positive Ladung des Kaliums gleichsam auf den Außenseiten des Moleküls.

Ampère (1821) nimmt an, daß jedes Atom eine ihm eigentümliche Ladung besitzt, weshalb es von einer ebenso großen ungleichnamigen Ladung des umgebenden Raumes umgrenzt ist. Verbinden sich zwei Atome miteinander, so werden diese induzierten Ladungen „frei", d. h. sie gehen in den umgebenden Raum über.

Auf die recht komplizierten Theorien von Schönbein (1857) und Magnus (1857), die sich auf Einzelheiten im Mechanismus der Elektrolyse beziehen, werden wir nicht näher zu sprechen kommen. Es ist auffallend, daß Faraday, der doch die Gesetze der Elektrolyse entdeckt hat, über den mechanischen Vorgang bei dieser Erscheinung fast nichts neues gebracht hat. In der fünften Serie (§§ 158, 524, 826 bis 832) seiner „Experimentaluntersuchungen" sagt er, daß die chemischen Kräfte unter der Einwirkung des Stromes einer solchen Änderung unterliegen, daß sie in der einen Richtung stärker wirken als in der entgegengesetzten, weshalb die Ionen gewissermaßen in bestimmter Richtung vorwärts gestoßen werden, in der sie sich denn auch bewegen, während sie sich fortwährend vereinigen und zerlegen.

Eine neue Ära in der Geschichte der theoretischen Untersuchungen über die Erscheinungen der Elektrolyse begann in den fünfziger Jahren des verflossenen Jahrhunderts. Sie wird durch zwei Reihen von klassischen Arbeiten gekennzeichnet, von denen die eine experimentellen, die andere theoretischen Charakters ist.

Fig. 240.



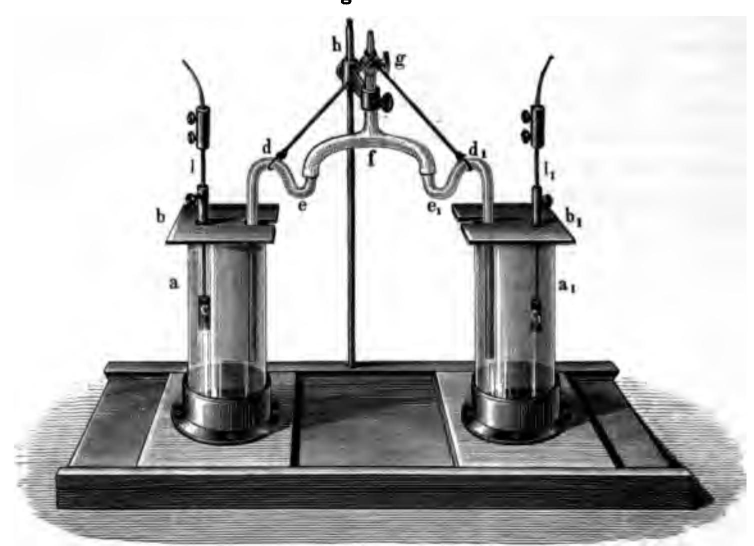
An die erste Reihe dieser Arbeiten, nämlich die experimentellen, knüpfen sich die Namen von Daniell und Miller (1839, 1844), G. Wiedemann (1856), Hittorf (1853 bis 1859), F. Kohlrausch (1876) und Ostwald (1888). Die zweite Reihe umfaßt theoretische Untersuchungen und begegnet man in ihr den Namen von Clausius (1857), Helmholtz (1880), Arrhenius (1888) und Ostwald (1888).

Experiment und Theorie gingen somit einander parallel und brachten, indem sie einander ergänzten, die gegenwärtige Theorie der Elektrolyse zustande. Wir werden uns an den historischen Entwickelungsgang halten und die Arbeiten in derjenigen Reihenfolge betrachten, in der sie erschienen sind.

Die Experimentaluntersuchungen, deren Betrachtung wir uns zunächst zuwenden, hatten vorwiegend den Zweck, zu erforschen, welche Änderungen während der Elektrolyse in der Verteilung des Elektrolyten innerhalb der Lösung vor sich gehen. Gmelin (1838)

und Pouillet (1845) beobachteten, daß die Entfärbung der Lösungen während der Elektrolyse vorzugsweise an der Kathode erfolgt. Die ersten genaueren Untersuchungen aber wurden von Daniell und Miller ausgeführt. Sie bedienten sich eines Apparates, in welchem man verschiedene Schichten der Lösung des Elektrolyten gesondert untersuchen konnte, nachdem dieselbe eine Zeitlang der Elektrolyse unterworfen worden war. Fig. 240 (a. v. S.) zeigt einen derartigen Apparat; er besteht aus drei aneinander grenzenden Gefäßen, die voneinander durch poröse Scheidewände getrennt sind; in den beiden äußersten Gefäßen befinden sich die Elektroden. Eine Unvollkommenheit des Apparates besteht darin, daß die Scheidewände die Diffusion der Substanz nicht verhindern, infolgedessen waren auch die Resultate,


Fig. 241.



welche Daniell und Miller erhielten, nur ungenau. Als sie den Inhalt der drei Gefäße nach erfolgter Elektrolyse untersuchten, fanden sie beispielsweise, daß bei der Elektrolyse von $CuSO_4$, $ZnSO_4$ und NH_4Cl die Gesamtmengen von Cu und Zn in dem Gefäße, welches die Kathode enthielt, sowie die Gesamtmenge des Cl in dem die Anode enthaltenden Gefäße ungeändert geblieben waren. Hieraus zogen sie den Schluß, daß bei der Elektrolyse beispielsweise die Ionen Cu und Zn unbeweglich bleiben, während sich die Ionen SO_4 an ihnen vorbei bewegen.

Einen zweckmäßigeren Apparat benutzte G. Wiedemann (1856) und sein Schüler Kirmis (1878). Zwei Gefäße a und a_1 (Fig. 241), welche die Elektroden enthalten, sind miteinander durch die mit einem

Hahn g versehene Röhre dfd_1 verbunden. Beide Gefäße, sowie die Verbindungsröhre enthalten den Elektrolyten. Die Resultate, welche G. Wiedemann erhielt, stimmen gut mit denen von Hittorf überein, zu dessen in den Jahren 1853 bis 1859 ausgeführten Arbeiten wir jetzt übergehen. Durch diese hervorragenden Arbeiten ist die Frage nach der sogenannten Ionenwanderung bei der Elektrolyse völlig geklärt worden. Um ein möglichst klares Bild davon zu erhalten, wie sich die Verteilung des Elektrolyten ändert, teilte



Fig. 242. Fig. 243.

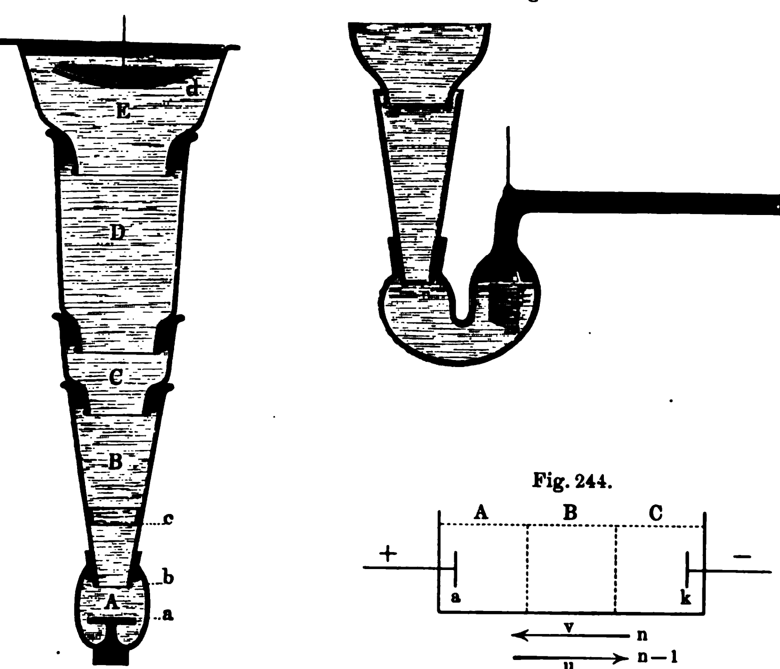


Fig. 244.

Hittorf die ganze Flüssigkeitssäule in Schichten, zwischen denen eine Diffusion kaum auftreten konnte und die man zudem leicht voneinander sondern konnte. In Fig. 242 ist einer der von ihm benutzten Apparate abgebildet; er besteht aus einer Reihe von ineinander gestellten Gefäßen; der Boden eines jeden von diesen Gefäßen besteht aus einer Membran (Pergamentpapier, Tierblase) oder einer dünnen, porösen Tonplatte. Nach Beendigung der Elektrolyse konnte man den Apparat auseinandernehmen und jede der Schichten des Elektrolyten einzeln untersuchen; A und E sind die Elektroden. In Fig. 243 ist der untere Teil eines der Apparate dargestellt, die in dem Falle verwandt wurden, daß sich an der unteren Elektrode ein Gas ausschied.

Um die Bedeutung der Größen zu verstehen, die Hittorf als Überführungszahlen der Ionen bezeichnet und mit n und $1 - n$ bezeichnet, wollen wir uns der das Gefäß mit dem gelösten Elektrolyten darstellenden Fig. 244 zuwenden; k bedeutet hier die Kathode, a die Anode. Denken wir uns die ganze Flüssigkeitssäule in drei Teile A, B und C geteilt, von denen die äußeren A und C den Elektroden anliegen. Nehmen wir an, es seien durch das Gefäß F, d. h. 96 540 Coulomb Elektrizität hindurchgeströmt, vgl. (1), S. 587. In diesem Falle hat sich auf k und auf a je ein Grammäquivalent (g-äqu.) des Kations und Anions abgeschieden. Dieselben haben sich innerhalb der Lösung in zwei entgegengesetzten Richtungen zu den Elektroden hin bewegt. Es tritt uns jetzt die Frage entgegen: woher stammen die ausgeschiedenen Grammäquivalente der Ionen, d. h. an welchen Orten in der Lösung haben sie sich vor der Elektrolyse befunden, als sie noch die Bestandteile der Moleküle des Elektrolyten bildeten oder uns wenigstens als solche erschienen? Wir wollen annehmen, daß sich während der Elektrolyse die Konzentration der Lösung in dem Bezirk B nicht geändert habe, die Breite dieses Raumteiles wird in unseren weiteren Überlegungen keine Rolle spielen, so daß sie auch gleich Null gesetzt werden kann.

Die Geschwindigkeiten, mit denen sich die Ionen bewegen, hängen erstens von den elektrischen Kräften ab, die auf sie einwirken. Denkt man sich, daß die Ionenwanderung den Charakter einer Bewegung von sehr kleinen Körpern in einem widerstehenden Mittel habe, so muß man annehmen, daß die Geschwindigkeiten, nicht aber die Beschleunigungen proportional den wirkenden Kräften sind. Zweitens müssen die Geschwindigkeiten der Ionen von den Ionen selbst abhängen, d. h. von ihrer Fähigkeit, sich innerhalb einer Lösung, welche gegebene Eigenschaften besitzt, fortzubewegen. Diese Fähigkeit werden wir durch eine besondere Größe charakterisieren, welche die Beweglichkeit der Ionen genannt werden soll; die Beweglichkeit des Kations sei mit u bezeichnet, die Beweglichkeit des Anions mit v. Diese Größen sind proportional den wahren Geschwindigkeiten der Ionenwanderung unter Einwirkung einer beliebigen gegebenen, für alle Ionen natürlich gleichen elektrischen Kraft (gleiches Potentialgefälle).

Bezeichnen wir mit p_a und p_k die Anzahl der Grammäquivalente des Elektrolyten, also auch eines jeden der Ionen, welche aus den Bezirken a und k verschwunden sind. Offenbar muß

$$p_a + p_k = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

sein, da aus der gesamten Lösung 1 g-äqu. des Elektrolyten und jedes der Ionen verschwunden ist, während durch die Lösung F Coulomb Elektrizität geströmt sind.

Nehmen wir zunächst an, es sei $u = v$, d. h. es besitzen beide Ionen die gleiche Beweglichkeit, also auch die gleiche Geschwindigkeit.

In diesem Falle ist dieselbe Anzahl n von Grammäquivalenten des Anions von C nach A zur Anode a übergegangen, wie Kationen von A nach C zur Kathode k gelangt sind. Wie man leicht einsieht, ist in diesem Falle $n = \frac{1}{2}$. Es sind nämlich von A n g-äqu. des Kations fortgewandert, es sind also n g-äqu. des Anions an der Anode frei geworden; ferner sind weitere n g-äqu. des Anions von C zur Anode gelangt, an welcher $2n$ g-äqu. des Anions aufgetreten sind. Wir wissen aber, daß auf der Anode ein g-äqu. des Anions aufgetreten ist, es ist also $2n = 1$ oder $n = \frac{1}{2}$. Hieraus folgt, daß in diesem Falle durch einen beliebigen Querschnitt in B je $\frac{1}{2}$ g-äqu. eines jeden der Ionen hindurchgelangt sind. Gleichzeitig sind in A und C je $\frac{1}{2}$ g-äqu. des Elektrolyten verschwunden, so daß $p_a = p_k = \frac{1}{2}$ ist. Die Abnahme der Konzentration der Lösung in A und C, d. h. in der Umgebung beider Elektroden, ist die gleiche, wenn die Beweglichkeiten u und v der Ionen die gleichen sind.

Nehmen wir jetzt an, es seien die Beweglichkeiten u und v einander nicht gleich; es ist dann auch die Anzahl n_k der Grammäquivalente des Kations, welche von A nach C gelangt ist, nicht gleich der Anzahl n_a der Grammäquivalente des Anions, welche von C nach A gelangt ist. Vor allen Dingen sieht man ein, daß die Zahlen n_k und n_a den Geschwindigkeiten proportional sein müssen, also auch den Beweglichkeiten u und v der Ionen, so daß

$$\frac{n_a}{n_k} = \frac{v}{u} \qquad (11)$$

ist. Ferner ist offenbar $n_k + n_a = 1$. Es sind nämlich von A n_k g-äqu. des Kations fortgewandert, sind also n_k g-äqu. des Anions frei geworden, die sich an der Anode abgeschieden haben; außerdem sind n_a g-äqu. des Anions von C zur Anode gewandert, so daß sich an der Anode im ganzen $(n_k + n_a)$ g-äqu. des Anions abgeschieden haben, diese Zahl aber muß, wie wir wissen, 1 g-äqu. betragen. Wir wollen daher eine neue Bezeichnungsweise einführen und n anstatt n_a, $(1 - n)$ anstatt n_k schreiben. Es wandern dann durch B in entgegengesetzten Richtungen n g-äqu. des Anions und $(1 - n)$ g-äqu. des Kations. Diese Zahlen n und $(1 - n)$ sind es, die nach Hittorf die Überführungszahlen des Anions und Kations heißen. Anstatt der Gleichung (11) haben wir jetzt

$$\frac{n_a}{n_k} = \frac{n}{1 - n} = \frac{v}{u} \qquad (12)$$

hieraus folgt

$$n_a = n = \frac{v}{u + v} \qquad (12,\text{a})$$

$$n_k = 1 - n = \frac{u}{u + v} \qquad (12,\text{b})$$

Endlich überzeugt man sich leicht, daß n ($= n_a$) $= p_k$ und $1 - n$ ($= n_k$) $= p_a$ ist. Sind nämlich von C $n = (n_a)$ g-äqu. des Anions fortgewandert, so sind ebenso viele Grammäquivalente (p_k) des Elektrolyten aus C, d. h. aus der Umgebung der Kathode, verschwunden, denn es haben sich die entsprechenden n g-äqu. des Kations auf der Kathode ausgeschieden, die $(1 - n)$ g-äqu. des Kations aber, die von A her gekommen sind und sich ebenfalls auf der Kathode niederschlagen, haben auf die Konzentration der Lösung, welche in der Umgebung besteht, keinen Einfluß. Es ist sonach klar, daß $n = p_k$ ist und es läßt sich auf dieselbe Art leicht beweisen, daß $(1 - n)$ oder $n_k = p_a$ ist.

Hätte man durch die Lösung anstatt der F eine beliebige andere Anzahl Coulomb hindurchgesandt, so hätte man für die Abnahmen P_a und P_k der Konzentration in der Umgebung der Anode und der Kathode andere Werte erhalten; es wäre aber offenbar

$$P_k : P_a = p_k : p_a = n_a : n_k = n : (1 - n).$$

Es ist daher nach Formel (12)

$$\frac{n}{1-n} = \frac{v}{u} = \frac{P_k}{P_a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} n_a = n = \frac{P_k}{P_a + P_k} \\ n_k = 1 - n = \frac{P_a}{P_a + P_k} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

Die letzte Formel enthält den Hinweis auf eine Methode zur praktischen Bestimmung der Überführungszahlen der Ionen: Die Überführungszahl n des Anions ist gleich dem Verhältnisse der Konzentrationsänderung P_k an der Kathode zur gesamten Konzentrationsänderung $P_a + P_k$ der Lösung; die Überführungszahl $1 - n$ des Kations ist gleich dem Verhältnisse der Konzentrationsänderung P_a an der Anode zur Konzentrationsänderung $P_a + P_k$ der Lösung.

Besonders wichtig ist hierbei der Umstand, daß es genügt, die Konzentrationsänderung an einer der Elektroden zu untersuchen, um die Überführungszahlen der Ionen zu erhalten, da die totale Konzentrationsänderung $P_a + P_k$ unmittelbar durch die ihr äquivalente Menge des Ions bestimmt wird, das sich auf eben dieser Elektrode ausscheidet oder aber durch Rechnung gefunden werden kann, falls die Stromstärke und die Wirkungsdauer des Stromes, d. h. die Anzahl der hindurchgeströmten Coulomb bekannt sind, oder aber, falls nach irgend einer Methode die Mengen der freigewordenen Ionen oder des verschwundenen Elektrolyten bestimmt werden können. In der

Praxis wird durch chemische Analyse die Menge des einen der Ionen an einer der Elektroden bestimmt, so daß man über vier Methoden zur Bestimmung der Zahl n verfügt.

Das große Verdienst Hittorfs besteht darin, daß er den Begriff der Überführungszahlen n und $1 - n$ des Anions und Kations eingeführt und den Weg zur Bestimmung derselben angegeben hat.

Wir wollen einige Beispiele der Bestimmung von n und $1 - n$, die aus verschiedenen Arbeiten entlehnt sind, anführen.

Hittorf hat die Überführungszahlen der Ionen des Kupfersulfats bestimmt; er führte in dieselbe Kette ein Silbervoltameter ein, aus welchem sich 1,008 g Silber abschieden; ihnen sind 0,2955 g Cu äquivalent, die sich auf der in der $CuSO_4$-Lösung befindlichen Kathode abscheiden mußten. Diese Zahl 0,2955 entspricht der gesamten Konzentrationsänderung $P_a + P_k$, welche in Formel (14) vorkommt. Die Lösung in der Umgebung der Kathode verlor während der Elektrolyse 0,2112 g Kupfer, welche letztere Zahl als Maß für die Konzentrationsänderung P_k in der Umgebung der Kathode dient. Das Verhältnis

$$n = \frac{0{,}2112}{0{,}2955} = 0{,}715$$

liefert uns die Überführungszahl n des Anions SO_4. Hieraus ergibt sich für die Überführungszahl des Cu in der gegebenen Lösung der Wert $1 - 0{,}715 = 0{,}285$. Es kamen somit im gegebenen Falle auf 0,715 g-äqu. des Anions SO_4, welche den mittleren Querschnitt des Gefäßes in der Richtung nach der Anode hin passiert hatten, 0,285 g-äqu. Cu, welche in der entgegengesetzten Richtung hindurchgewandert waren. Formel (12) gibt

$$\frac{v}{u} = \frac{\text{Geschwindigkeit von } SO_4}{\text{Geschwindigkeit von Cu}} = \frac{0{,}715}{0{,}285} = 2{,}5.$$

Somit bewegt sich das Anion SO_4 in der untersuchten Kupfersulfatlösung 2,5 mal so schnell wie das Cu-Kation.

Das folgende Beispiel stammt ebenfalls aus den Arbeiten von Hittorf. Der Elektrolyse unterworfen wurde eine 4 proz. Lösung von $AgNO_3$ bei 18,4°. An der Kathode schieden sich 0,3208 g Silber ab. Der Elektrolyt verlor während der Elektrolyse in der Umgebung der Kathode 0,1691 g Silber. Hieraus folgt, daß $0{,}1691 : 0{,}3208 = 0{,}527$ die Überführungszahl des Anions NO_3, $1 - 0{,}527 = 0{,}473$ aber die Überführungszahl des Ag ist. Man könnte auch folgende Überlegung anstellen: an der Kathode haben sich 0,3208 g Silber abgeschieden, jedoch sind in der Umgebung der Kathode nur 0,1691 g verschwunden, folglich sind $0{,}3208 - 0{,}1691 = 0{,}1517$ g Silber von der Lösung in der Umgebung der Anode auf die Kathode übergegangen. Es ist also offenbar $0{,}1517 : 0{,}3208 = 0{,}473$ die Überführungszahl des Silbers, $1 - 0{,}473 = 0{,}527$ die Überführungszahl des NO_3. Die Differenz der

Geschwindigkeiten u und v ist in diesem Falle gering; ihr Verhältnis ist gleich 1,11.

Bogdan führt ein Beispiel der Bestimmung von u für eine verdünnte KCl-Lösung an; als Anode diente eine Zinkplatte, so daß sich in der Lösung in der Umgebung der Anode $ZnCl_2$ bildete. Der Analyse unterworfen wurde die Anodenflüssigkeit, welche vor der Elektrolyse 0,084 011 g KCl auf 100 g der Lösung enthielt. Im Silbervoltameter schieden sich 0,2887 g Silber aus, was 0,2887 : 107,93 g-äqu. entspricht. Eine ebensolche Anzahl 0,2887 : 107,93 von g-äqu. des Kaliums gingen von der Anodenflüssigkeit zur Kathode über. Da sich im Voltameter 0,2887 g Silber ausschieden, so erschienen mithin an der Anode 0,094 831 g Chlor, welche 0,182 300 g $ZnCl_2$ lieferten. Der Analyse wurden 660,42 g Anodenflüssigkeit unterworfen; in 100 g dieser Flüssigkeit wurden 0,047 106 g Chlor gefunden, also in der gesamten Anodenflüssigkeit 0,3111 g Chlor; hiervon sind, wie wir gesehen haben, 0,094 83 g an das Zink gebunden, so daß 0,311 10 — 0,094 83 = 0,216 27 g Chlor an K gebunden sind, was 0,455 11 g KCl entspricht. Fügt man hierzu 0,182 30 g $ZnCl_2$, so sieht man, daß 660,42 g Anodenflüssigkeit 0,64 g Salze und 659,78 g H_2O enthalten. In einer solchen Gewichtsmenge Wasser waren vor der Elektrolyse

$$659{,}78 \frac{0{,}084\,011}{100 - 0{,}084\,011} = 0{,}55\,475 \text{ g KCl}$$

enthalten. Subtrahiert man hiervon 0,455 11 g, so findet man, daß 0,099 64 g KCl aus der Anodenflüssigkeit verschwunden waren, was 0,099 64 : 74,6 g-äqu. KCl entspricht. Eine ebenso große Anzahl von Grammäquivalenten des Kaliums war von der Anodenflüssigkeit zur Kathode übergegangen. Hieraus ergibt sich die Überführungszahl $1 - n$ des Kations K:

$$1 - n = \frac{0{,}099\,64}{74{,}6} : \frac{0{,}2887}{107{,}93} = 0{,}499.$$

Für die Überführungszahl n des Anions Cl erhält man 0,501. Beide Ionen bewegen sich mit nahezu gleicher Geschwindigkeit.

Als Beispiel für sehr verschiedene Ionengeschwindigkeiten kann eine H_2SO_4-Lösung dienen (1 g H_2SO_4 auf 5,415 g H_2O), für welche

$$n = 0{,}174, \qquad 1 - n = 0{,}826$$

ist; das Kation H bewegt sich hier 5,4 mal so schnell, wie das Anion $SO_4 = SO_3 + O$. Für HBr erhält man $n = 0{,}178$, $1 - n = 0{,}822$. Für $(UO_2)Cl_2$ ist $n = 0{,}132$, $1 - n = 0{,}868$; das Kation Cl bewegt sich also fast 6,6 mal so schnell wie das Uranyl UO_2; endlich bewegt sich bei HJO_3 das Kation H fast 9 mal so schnell wie das Anion JO_3 ($n = 0{,}102$).

Bei Untersuchung der Doppelsalze hat Hittorf jene Spaltung derselben in Ionen entdeckt, von welcher bereits auf S. 601 die Rede war.

Bei der Untersuchung von konzentrierten CdJ_2-Lösungen fand Hittorf für Cd negative Werte, wie z. B. für eine Lösung von 1 g CdJ_2 in 1,8313 g H_2O die Werte $n = 1{,}258$, $1 - n = -0{,}258$; für eine Lösung von 1 g CdJ_2 in 3,179 g Amylalkohol sogar $n = 2{,}3$, $1 - n = -1{,}3$. Die negative Überführungszahl deutet an, daß aus der Kathodenflüssigkeit mehr Cadmium verschwand als sich an der Kathode ausgeschieden hatte. Hittorf erklärte diesen Umstand vollständig durch die Annahme, daß im gegebenen Falle durchaus nicht J und $\frac{1}{2}$Cd die Ionen seien; in der Lösung bildet sich $2\,CdJ_2$, als Anion erscheint $\frac{1}{2}$Cd, als Kation jedoch $\frac{1}{2}(CdJ_2 + J_2)$. Hiervon war bereits auf S. 602 die Rede. Eine weitere Untersuchung der Elektrolyse von Jodcadmiumsalzen ist von Mc Bain (1906) ausgeführt worden.

Man darf nicht vergessen, daß eine Bestimmung der Zahlen n durch Untersuchung der Konzentration in der Umgebung der Anode oder Kathode nur dann möglich ist, wenn eine neutrale Schicht vorhanden ist, deren Konzentration sich während der Elektrolyse nicht ändert.

Hittorf hat auch die Abhängigkeit der Überführungszahlen von der Stärke des Stromes in der Kette, von der Temperatur und dem Konzentrationsgrade der Lösung untersucht. Er fand, daß n von der Stromstärke unabhängig ist, also nicht von der Größe des Potentialgefälles abhängt. Hieraus sieht man, daß das Verhältnis der Ionengeschwindigkeiten nicht von der Kraft abhängt, welche auf diese Ionen einwirkt. Ein solches Resultat hat man auch zu erwarten; es stimmt mit unserer Annahme, daß die absoluten Ionengeschwindigkeiten proportional den auf die Ionen einwirkenden Kräften sind.

Einen Einfluß der Temperatur auf die Überführungszahlen hat Hittorf (zwischen 4 und 21°) nicht gefunden. In späterer Zeit haben Loeb und Nernst (1888) und insbesondere Bein (1892) gefunden, daß sich mit Zunahme der Temperatur die Zahlen n ändern, wobei sie sich dem Werte 0,5 nähern. Diese Änderung ist jedoch eine sehr langsame; sie ist z. B. für $AgNO_3$, $CuSO_4$ und CdJ_2 unmerklich und geht bei einer Temperaturänderung um 70° nicht über 10 Proz. hinaus (für NaCl und $CaCl_2$).

Der Einfluß des Konzentrationsgrades der Lösung auf die Überführungszahlen ist sehr groß, wie bereits Hittorf beobachtet hat. Es ist dies nicht zu verwundern; die Konzentration der Lösung muß auf die Beweglichkeit der in ihr enthaltenen Ionen einwirken und da dieser Einfluß für beide Ionen nicht der gleiche zu sein braucht, so muß sich das Verhältnis der Beweglichkeiten, also auch die Überführungszahlen, zugleich mit dem Grade der Konzentration ändern. Wir wollen einige Beispiele hierfür anführen. $CuSO_4$ gibt in verdünnten Lösungen für die Überführungszahl $n_k = 1 - n$ des Kupfers 0,356, in konzentrierten Lösungen jedoch 0,276; die Beweglichkeit des

Kupfers vermindert sich im Verhältnis zur Beweglichkeit des Anions SO_4, wenn die Konzentration der Lösung zunimmt. Das umgekehrte Resultat erhält man für das Kation Ag in $AgNO_3$; hier ist für verdünnte Lösungen $n_k = 0{,}474$, für konzentrierte Lösungen dagegen $n_k = 0{,}532$. Besonders groß ist die Abhängigkeit der Überführungszahlen von der Konzentration für H_2SO_4. In konzentrierten Lösungen erhält man als Überführungszahl des Anions (SO_4) den Wert $n = 0{,}400$: bei fortschreitender Verdünnung der Lösung nimmt n zunächst bis auf 0,174 ab, um darauf bis auf 0,212 anzuwachsen. Umgekehrt ist z. B. für NaCl die Abhängigkeit der Zahl n von der Konzentration eine geringe: für verdünnte Lösungen ist $n = 0{,}622$, für konzentrierte gleich 0,648. Noch weniger scharf ist diese Abhängigkeit für KCl ausgesprochen; die Konzentration wirkt in fast gleichem Grade auf die Beweglichkeit beider Ionen ein. Für konzentrierte CdJ_2-Lösungen ist $n = 1{,}258$ (s. o.), für verdünnte $n = 0{,}613$. In diesem Falle aber ändern sich der Bestand und die Ionen selbst mit der Konzentration. Mit zunehmender Verdünnung der Lösung zerfallen die Doppelmoleküle $2\,CdJ_2$ und werden die Ionen $\frac{1}{2}Cd$ und $\frac{1}{2}(CdJ_2 + J_2)$ durch die Ionen $\frac{1}{2}Cd$ und J ersetzt.

§ 5. Theorie der Elektrolyse. Arbeiten von Kohlrausch. Nächst den Arbeiten von Hittorf bedeuten den wichtigsten Fortschritt diejenigen von F. Kohlrausch, der (1876) das Gesetz der unabhängigen Ionenwanderung entdeckt und auf den Zusammenhang zwischen der Beweglichkeit der Ionen des Elektrolyten und dem elektrischen Leitungsvermögen der Lösung hingewiesen hat.

Das erwähnte Gesetz lautet wie folgt: die Beweglichkeit eines bestimmten Ions in einer stark verdünnten Lösung hängt nicht von der Art des anderen Ions ab, oder hängt nicht von dem Elektrolyten ab, in welchem dieses Ion vorkommt. Ein jedes Anion besitzt eine bestimmte Beweglichkeit v, ein jedes Kation eine ihm spezifisch zukommende Beweglichkeit u. Es ist jedenfalls verständlich, daß sich dies Gesetz nur auf stark verdünnte Lösungen beziehen kann, in denen sich der Bewegung des Ions nur das Lösungsmittel, das man als rein ansehen kann, entgegenzustellen vermag. Aus dem Gesetze von Kohlrausch folgt offenbar nicht, daß auch die Überführungszahlen $n_a = n$ und $n_k = 1 - n$ für die gegebenen Ionen konstant sind, da diese Zahlen, wie aus den Formeln (12, a) und (12, b) hervorgeht, von u und v abhängen, so daß beispielsweise die Zahl n für ein und dasselbe Anion von demjenigen Kation abhängt, an welches es im Elektrolyten gebunden war.

F. Kohlrausch hat dieses Gesetz mit einem anderen in Zusammenhang gebracht, nach welchem die äquivalente Grenzleitungsfähig-

keit Λ_0 der Lösung eines Elektrolyten eine additive Eigenschaft, nämlich gleich der Summe der äquivalenten Grenzleitungsfähigkeiten des Anions und Kations ist (S. 613). Diese letzteren beiden Größen hängen einzeln nur von der Art des Anions oder Kations ab. Wir hatten dieses Gesetz bereits durch Formel (8) auf S. 613 ausgesprochen; nach Fortlassung der Indizes ist

$$\Lambda = \Lambda(K) + \Lambda(A) \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

Die Größe Λ wird durch Formel (6) bestimmt, in welcher $\varkappa$ die Leitfähigkeit der Lösung in Einheiten von Kohlrausch (S. 607) und η die Konzentration und zwar die Anzahl der Grammäquivalente in 1 ccm der Lösung ist (S. 608). Anstatt Λ könnte man auch die Größen $\lambda = k:m$, vgl. (6, a), S. 609, wählen, wo k das elektrische Leitungsvermögen im Vergleich zum Quecksilber (S. 607) ist und m die Konzentration, nämlich die Anzahl der Grammäquivalente in 1 Liter der Lösung (S. 608). In diesem Falle erhielte man anstatt der Formel (15) die symbolische Formel

$$\lambda = \lambda(k) + \lambda(A) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

Formel (6, b), S. 609, gibt

$$\left.\begin{aligned} \Lambda(K) &= 1{,}063 \,.\, 10^7 \lambda(K) \\ \Lambda(A) &= 1{,}063 \,.\, 10^7 \lambda(A) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Der Zusammenhang zwischen den Größen Λ oder λ einerseits und den Beweglichkeiten der Ionen andererseits wird von Kohlrausch auf Grund folgender Überlegungen gefunden. Denken wir aus der Lösung einen Teil von Würfelform herausgeschnitten, wobei die Würfelkante gleich der Längeneinheit ist. Ist das Leitungsvermögen der Lösung gleich k (im Vergleiche zu Hg bei 0°), so ist der Widerstand eines solchen Würfels gleich $1:k$. Denken wir uns ferner, es sei die Konzentration der Lösung gleich m und es seien an zwei einander gegenüberliegenden Seitenflächen des Würfels Elektroden angebracht, deren Potentialdifferenz der Einheit gleich sei. Nach dem Ohmschen Gesetze erhält man in diesem Falle für die Stromstärke J den Ausdruck $J = k$. Die Stromstärke jedoch ist gleich der Summe der Elektrizitätsmengen, welche in der Zeiteinheit von den Kationen und Anionen in entgegengesetzten Richtungen durch den Querschnitt der Lösung hindurch transportiert werden. Die Elektrizitätsmenge, welche von den Kationen transportiert wird, ist proportional dem Konzentrationsgrade m und der Beweglichkeit u der Kationen, so daß man sie gleich Cmu setzen kann, wo C ein Proportionalitätsfaktor ist, welcher von der Wahl der Einheit der Beweglichkeit abhängt; die Anionen übertragen die Elektrizitätsmenge Cmv, so daß die Stromstärke gleich $J = Cm(u + v)$ ist; es ist aber $J = k$, also $k = Cm(u + v)$. Dividiert man beide Seiten durch m und beachtet, daß $\lambda = k:m$ ist, so findet man

$$\lambda = C(u + v) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Die äquivalente Leitfähigkeit λ besteht aus zwei Teilen, welche den Beweglichkeiten der Ionen proportional sind. Vergleicht man (18) mit (16), so findet man, daß

$$\left.\begin{array}{l}\lambda(K) = Cu \\ \lambda(A) = Cv\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

gesetzt werden kann. Die äquivalente Grenzleitungsfähigkeit des Ions wird durch dessen Beweglichkeit gemessen. Setzt man $C = 1$, so erhält man

$$\lambda = u + v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

$$\lambda(K) = u; \quad \lambda(A) = v \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Nimmt man als Einheit der Beweglichkeit die Beweglichkeit eines Ions an, dessen äquivalente Grenzleitungsfähigkeit gleich Eins ist, so erhält man folgendes Resultat: der Grenzwert der äquivalenten Leitungsfähigeit eines Ions ist numerisch gleich seiner Beweglichkeit; die äquivalente Grenzleitungsfähigkeit der Lösung eines Elektrolyten ist gleich der Summe der Beweglichkeiten, welche die Ionen dieses Elektrolyten besitzen.

Die Formeln (20) und (21) sind für die Praxis ungeeignet, da k (die Leitfähigkeit der Lösung im Vergleiche zum Hg) eine sehr kleine Größe ist; dasselbe gilt auch von λ, u und v. Nach dem Vorgange von F. Kohlrausch werden wir uns der Größen $\Lambda = k : \eta$, $\Lambda(A)$ und $\Lambda(K)$ bedienen, welche $1{,}063 \cdot 10^7$ mal so groß wie die Größen $\lambda = k : m$, $\lambda(A)$ und $\lambda(K)$ sind. Dementsprechend werden wir eine neue Einheit für die Beweglichkeit einführen, die ihrerseits nur den $1{,}063 \cdot 10^7$ten Teil der Einheit bildet, welche uns die numerischen Werte u und v der Beweglichkeiten lieferte. Die Zahlenwerte der Beweglichkeiten, ausgedrückt in dieser neuen Einheit, bezeichnen wir mit l_a und l_k, so daß

$$\left.\begin{array}{l}l_a = 1{,}063 \cdot 10^7 v \\ l_k = 1{,}063 \cdot 10^7 u\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

ist. Anstatt (20) und (21) haben wir jetzt

$$\Lambda = l_a + l_k \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

$$\Lambda(K) = l_k; \qquad \Lambda(A) = l_a \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Anstatt (12), (12, a) und (12, b) haben wir

$$\frac{n_a}{n_k} = \frac{n}{n-1} = \frac{l_a}{l_k} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

$$\left.\begin{array}{l}n_a = n = \dfrac{l_a}{l_a + l_k} \\[2ex] n_k = 1 - n = \dfrac{l_k}{l_a + l_k}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25, a)$$

Bedient man sich der Formeln (23) und (24), so erhält man jetzt

$$n_a = n = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda} = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda(A) + \Lambda(K)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$n_k = 1 - n = \frac{\Lambda(K)}{\Lambda} = \frac{\Lambda(K)}{\Lambda(A) + \Lambda(K)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

$$\frac{n_a}{n_k} = \frac{n}{1-n} = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda(K)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Diese bemerkenswerten Formeln geben den Zusammenhang zwischen zwei Größen, die auf den ersten Blick völlig verschieden sind, nämlich zwischen den Überführungszahlen, welche durch die Konzentrationsänderung an den Elektroden gemessen, und jenen Grenzwerten für die äquivalente Leitfähigkeit der Ionen, welche durch Messung der Leitfähigkeit der Lösungen ermittelt werden. Besonders scharf wird dieser Zusammenhang durch Formel (28) ausgedrückt. Die Versuche liefern unmittelbar die Überführungszahlen n_a und n_k und die Leitfähigkeit $\varkappa$ der Lösung. Aus diesen drei Größen lassen sich die Beweglichkeiten l_a und l_k der Ionen oder die Grenzwerte ihrer äquivalenten Leitfähigkeit $\Lambda(A)$ und $\Lambda(K)$ berechnen; die Formeln (25, a) und (23) geben

$$\left.\begin{aligned} l_a &= \Lambda(A) = n_a \frac{\varkappa}{\eta} \\ l_k &= \Lambda(K) = n_k \frac{\varkappa}{\eta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Hier bedeutet η die Konzentration der Lösung. Auf S. 614 hatten wir bereits einige Zahlenwerte für die äquivalenten Grenzleitfähigkeiten der Ionen angeführt. Jetzt ist es klar, daß diese Zahlen uns auch die Beweglichkeiten derselben Ionen ergeben. In der umstehenden Tabelle sind die Werte für die Beweglichkeiten l der verschiedenen Ionen bei 18° angeführt; diese Zahlenwerte stammen von Kohlrausch. Da derselbe seine Daten wiederholt korrigiert hat, fügen wir das Jahr der Publikation den einzelnen Angaben bei.

Bredig (1894) hat die Beweglichkeiten von verschiedenen organischen Ionen bestimmt. Aus der obigen Tabelle ersieht man, daß die größte Beweglichkeit dem Kation H zukommt, hierauf folgt das Anion OH, dessen Beweglichkeit fast halb so groß ist; alle übrigen Ionen bewegen sich viel langsamer. Die Zahlen unserer Tabelle entsprechen den Grenzwerten der Beweglichkeit für unendlich verdünnte Lösungen. Bildet man die Summe je zweier Zahlen, so erhält man die äquivalente Leitfähigkeit des entsprechenden Elektrolyten: beispielsweise erhält man für NaCl den Wert $\Lambda = 43{,}55 + 65{,}44 = 108{,}99$. Für Lösungen von endlichem Verdünnungsgrade erhält

	l	Jahr		l	Jahr
Li	33,44	1902	JO_4	47,7	1902
Na	43,55	„	MnO_4	53,4	„
K	64,67	„	CHO_2	46,7	„
Rb	67,6	„	$C_2H_3O_2$	35,0	„
Cs	68,2	„	$C_3H_5O_2$	31,0	„
NH_4	64,4	„	$C_4H_7O_2$	27,6	„
Tl	66,00	„	$C_5H_9O_2$	25,7	„
Ag	54,02	„	$C_6H_{11}O_2$	24,3	„
Fl	46,64	„	$^1/_2$ Zn	45,6	„
Cl	65,44	„	$^1/_2$ Mg	46,0	„
Br	67,63	„	$^1/_2$ Ba	56,3	„
J	66,40	„	$^1/_2$ Pb	61,5	„
SCN	56,63	„	$^1/_2 SO_4$	68,7	„
NO_3	61,78	„	H	318	1901
ClO_3	55,03	„	OH	174	„
JO_3	33,87	„	$^1/_2$ Sr	53,0	„
BrO_3	46,2	„	$^1/_2$ Cu	49,0	„
ClO_4	64,7	„	$^1/_2$ Ca	53,0	1898

man kleinere Werte der Beweglichkeiten l. Wir wollen einige Beispiele aus den von Kohlrausch (1898) veröffentlichten Daten herausheben. In der ersten Zeile sind die Konzentrationsgrade angeführt, die Temperatur beträgt 18°.

$m = 1000\,\eta$:	0	0,00001	0,001	0,01	0,05	0,1
H:	318	316	314	310	302	296
HO:	174	172	171	167	161	157
$\frac{1}{2}$ Zn:	47,5	45,1	42,3	35,9	27,9	24,0
$\frac{1}{2}$ Ca:	53,0	50,6	47,8	41,4	33,4	29,4
$\frac{1}{2}$ Sr:	54,0	51,7	48,9	42,4	34,4	30,5
$\frac{1}{2} SO_4$:	69,7	67,2	64,0	56,1	46,1	41,9

Noyes und Sammet (1902) fanden für H bei 18° den Grenzwert 329,8.

Kennt man die Größen l_a und l_k, so kann man auch die absoluten Geschwindigkeiten der Ionen bei gegebenem Potentialgefälle bestimmen. Wir wollen mit U und V die absoluten Geschwindigkeiten des Kations und Anions, ausgedrückt in Centimetern pro Sekunde, für den Fall bezeichnen, daß das Potentialgefälle 1 Volt pro Centimeter beträgt. Denken wir uns 1 ccm der Lösung, an dessen gegenüberliegenden Seitenflächen eine Potentialdifferenz von 1 Volt angebracht ist. Nehmen wir an, es seien im Cubikcentimeter der Lösung η g-äqu. des Elektrolyten enthalten. Ist die Leitfähigkeit der Lösung in Ein-

heiten von Kohlrausch gleich $\varkappa$, so beträgt der Widerstand eines Cubikcentimeters $\frac{1}{\varkappa}$ Ohm. Nach dem Ohmschen Gesetz ist die Stromstärke J gleich $1:\frac{1}{\varkappa} = \varkappa$ Amp., folglich gelangen in der Sekunde $\varkappa$ Coulomb durch den Querschnitt. In einer Sekunde gelangen durch den Querschnitt alle Kationen, die sich in einer Schicht von der Dicke U befinden. Das Volumen dieser Schicht ist gleich U ccm; es sind in demselben $U\eta$ g-äqu. des Kations, gebunden an $U\eta F$ Coulomb, enthalten, wobei $F = 96540$ ist. In ähnlicher Weise findet man, daß die Anionen in einer Sekunde $V\eta F$ Coulomb übertragen. Es muß daher

$$\varkappa = (U + V)\eta F$$

sein und hieraus ist

$$U + V = \frac{\varkappa}{\eta} \cdot \frac{1}{F} = \frac{\Lambda}{F} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

Die Geschwindigkeiten der Ionen sind aber deren Beweglichkeiten l_k und l_a proportional, somit ist, vgl. (24) und (25)

$$\frac{V}{U} = \frac{l_a}{l_k} = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda(K)} = \frac{n_a}{n_k} \quad \ldots \ldots \quad (30,\mathrm{a})$$

Da $\Lambda = \Lambda(A) + \Lambda(K) = l_a + l_k$ ist, so ist offenbar

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{l_a}{F} = \frac{l_a}{96540} = 0{,}00001036\, l_a \\ U &= \frac{l_k}{F} = \frac{l_k}{96540} = 0{,}00001036\, l_k \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (30,\mathrm{b})$$

Die absoluten Ionengeschwindigkeiten in $\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$ bei einem Potentialgefälle von $\frac{1\ \mathrm{Volt}}{1\ \mathrm{cm}}$ erhält man, wenn man die Beweglichkeiten oder die äquivalenten Leitfähigkeiten l_a und l_k durch $F = 96540$ dividiert oder mit dem elektrochemischen Äquivalent des Wasserstoffs, das in Grammen angegeben ist, multipliziert, vgl. (3, c), S. 590. Die Versuche liefern die Leitfähigkeit Λ der Lösung und die Überführungszahlen $n_a = n$ und $n_k = 1 - n$. Drückt man V und U in diesen Größen aus, so findet man

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{n_a \Lambda}{96540} = 0{,}00001036\, n\Lambda \\ U &= \frac{n_k \Lambda}{96540} = 0{,}00001036\,(1 - n)\Lambda \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (30,\mathrm{c})$$

Die Formeln (30, b) und die auf S. 636 angeführten Werte von l_a und l_k geben für die absoluten Ionengeschwindigkeiten bei 18^0 und einem Potentialgefälle von $\frac{1\ \mathrm{Volt}}{1\ \mathrm{cm}}$ folgende Zahlen:

	U		V
K	0,000676 $\frac{cm}{sec}$	Cl	0,000683 $\frac{cm}{sec}$
Na	0,000460	NO_3	0,000630
Li	0,000368	ClO_3	0,000582
NH_4	0,000665	OH.	0,001802
Ag	0,000577		
H	0,003294		

Die größte Geschwindigkeit $U = 0{,}033 \frac{mm}{sec}$ hat das Kation H. Mit Zunahme der Temperatur nehmen die Ionengeschwindigkeiten zu.

Kohlrausch (1879) hat gezeigt, daß man, falls die Geschwindigkeiten U und V bekannt sind, die Größe der Kraft f berechnen kann, welche auf eine bestimmte Anzahl von Ionen, z. B. auf 1 g-äqu. einwirken muß, um dieselben mit einer gegebenen Geschwindigkeit, beispielsweise mit einer Geschwindigkeit von 1 cm pro Sekunde, fortzubewegen. Wir wissen, daß ein Volt-Coulomb gleich einem Joule oder gleich 0,102 mkg = 10,2 cmkg ist. Das heißt aber, daß bei einem Potentialgefälle von 1 Volt pro Centimeter eine Arbeit von 10,2 cmkg geleistet werden muß, um 1 Coulomb auf 1 cm Entfernung zu transportieren. Hieraus folgt, daß gerade unter den Bedingungen, unter welchen wir die Geschwindigkeiten U und V erhalten haben, auf jedes Coulomb Elektrizität eine Kraft von 10,2 kg einwirkt. Das Grammäquivalent des Ions enthält aber $F = 96\,540$ Coulomb, es wirkt daher auf 1 g-äqu. des Ions eine Kraft von $96\,540 \times 10{,}2 = 984\,700$ kg. Unter der Einwirkung dieser Kraft bewegt sich das Grammäquivalent mit einer Geschwindigkeit von U oder $V \frac{cm}{sec}$. Die Kraft f_k oder f_a, welche auf 1 g-äqu. des Kations oder Anions einwirken muß, um dasselbe innerhalb der Lösung mit einer Geschwindigkeit von 1 cm pro Sekunde zu bewegen, ist offenbar gleich

$$\left.\begin{aligned} f_k &= \frac{984\,700}{U}\,\text{kg} \\ f_a &= \frac{984\,700}{V}\,\text{kg} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (31)$$

wo U und V in $\frac{cm}{sec}$ ausgedrückt sein müssen. Für sehr verdünnte Lösungen erhält man bei 18° folgende (abgerundete) Werte der Kraft f, welche ein Grammäquivalent des Ions mit einer Geschwindigkeit von 1 cm pro Sekunde fortbewegt:

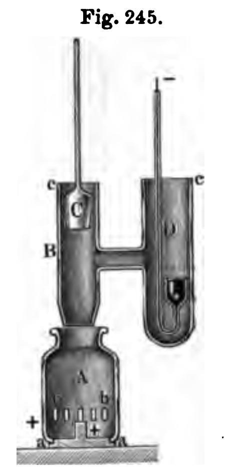
	f		f
K	$1470 \cdot 10^6$ kg	Ag	$1720 \cdot 10^6$ kg
Na	$2180 \cdot 10^6$ „	Cl	$1450 \cdot 10^6$ „
Li	$2830 \cdot 10^6$ „	J	$1430 \cdot 10^6$ „
NH_4	$1490 \cdot 10^6$ „	NO_3	$1540 \cdot 10^6$ „
H	$300 \cdot 10^6$ „	OH	$552 \cdot 10^6$ „

Die gesuchte Kraft beträgt demnach im allgemeinen einige Milliarden Kilogramm! Sie wird zur Überwindung der inneren Reibung in der Flüssigkeit verbraucht, die ihrerseits der Ionenbewegung entgegenwirkt. Daß diese Kraft so ungeheuer groß ist, darf uns nicht wundernehmen. In Bd. III (Kap. 14, § 6) hatten wir die Nernstsche Formel hergeleitet, welche diejenige Kraft K bestimmt, die auf ein Grammolekül einer Substanz einwirken muß, damit sich dasselbe in der Lösung mit einer Geschwindigkeit von 1 cm pro Sekunde bewegt. Für 1 g-Mol. Harnstoff hatten wir $K = 2500 \,.\, 10^6$ kg, d. h. eine Größe von derselben Ordnung erhalten, wie sie den eben angeführten Werten von f entspricht. Mit Zunahme der Temperatur nehmen die Kräfte f ab, was sich leicht durch Abnahme der inneren Reibung bei der Ionenbewegung in der Lösung erklärt.

Wir haben recht ausführlich die Arbeiten von Hittorf besprochen, der den Begriff der Überführungszahlen eingeführt hat, sowie diejenigen von Kohlrausch, der den Zusammenhang zwischen der Ionenbeweglichkeit und der Leitfähigkeit der Lösung gefunden und das Gesetz der unabhängigen Ionenwanderung entdeckt hat. Nach diesen grundlegenden Arbeiten ist eine sehr große Zahl von Untersuchungen verschiedener Forscher über die Überführungszahlen und die Ionengeschwindigkeiten erschienen. Wir wollen einige von diesen Arbeiten ganz kurz erwähnen. Die Untersuchung von G. Wiedemann ist bereits auf S. 624 genannt worden. Eine Übersicht über alle experimentellen Bestimmungen der Überführungszahlen, die bis zum Jahre 1893 ausgeführt worden sind, ist von Fitzpatrik zusammengestellt und in Whethams Solution and Electrolysis, 1895, abgedruckt worden.

Auf die Arbeiten von Weiske, Bourgoin, Kuschel, Lussana u. a. werden wir nicht näher eingehen.

Fig. 245.



R. Lenz (1882) hat die Überführungszahlen für verschiedene Lösungen in Alkohol bestimmt. Der von ihm benutzte Apparat ist in Fig. 245 abgebildet. Die Anode bb (ein Gitter) befindet sich im Gefäße A, die Kathode (Quecksilber) im Gefäße D; C ist ein Glasstöpsel, mit dem das Gefäß A nach erfolgter Elektrolyse verschlossen wird; durch ihn wurden die während der Elektrolyse in der Umgebung der Elektroden geänderten Flüssigkeiten voneinander getrennt. Für eine CdJ_2-Lösung fand Lenz, daß die Überführungszahl mit zunehmendem Alkoholgehalt zunächst abnimmt, hierauf aber wieder zunimmt.

Ostwald (1888) hat die Überführungszahlen für eine große Zahl von organischen Anionen bestimmt und hierbei eine Reihe von Ge-

setzmäßigkeiten gefunden. Zunächst hat er gezeigt, daß isomere Anionen die gleiche Beweglichkeit besitzen. Ferner zeigte es sich, daß die Beweglichkeit des Anions um so geringer ist, je komplizierter sein Bau ist, d. h. je mehr Atome dasselbe bilden. Ist die Zahl der Atome gering, so hängt die Beweglichkeit des Anions von der Art dieser Atome ab, beträgt jedoch die Zahl der Atome mehr als 12, so wird die Beweglichkeit vollständig durch die Zahl der Atome bestimmt. Bredig (1892) hat die Arbeit von Ostwald weitergeführt und die Beweglichkeit von organischen Kationen studiert. Er fand, daß isomere Kationen ebenfalls gleiche Beweglichkeit haben und daß die Beweglichkeit im allgemeinen mit Zunahme der Anzahl der Atome abnimmt; außerdem fand er eine ganze Reihe von Regeln, die sich auf den Fall beziehen, daß CH_2, H, CN_2 hinzugefügt wird, daß der Wasserstoff durch Chlor, Brom oder die Amidgruppe ersetzt wird usw. Walden fand, daß auch für die Anionen von Säuren der Fettreihe die Beweglichkeit mit Zunahme der Anzahl Atome abnimmt.

Fig. 246.

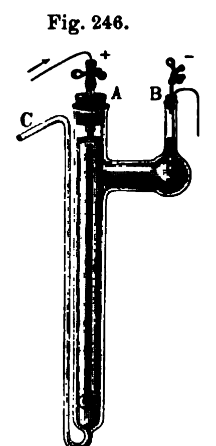
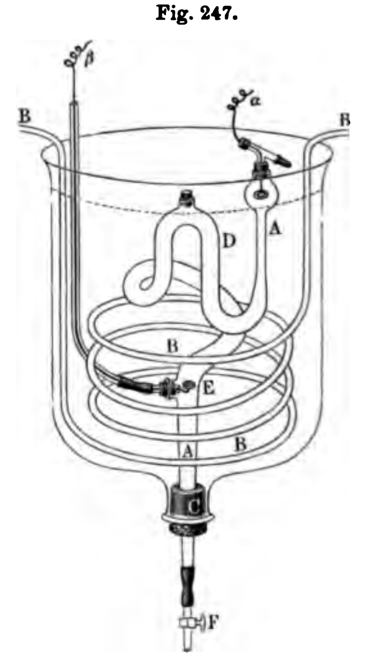


Fig. 247.



Loeb und Nernst (1888) haben sich des in Fig. 246 abgebildeten Apparates bedient. In der seitlich angebrachten Kugel befand sich die Kathode (aus Silber), im unteren Teile der langen Röhre die Anode. Bläst man nach erfolgter Elektrolyse Luft in *B* hinein, so kann man durch das Ansatzrohr *C* beliebige Schichten der Flüssigkeitssäule, beginnend von der niedrigsten, herausblasen und der Analyse unterziehen. Die obersten Schichten müssen selbstverständlich ungeändert bleiben. Beide Beobachter haben sich davon überzeugt, daß eine Mischung der Lösung weder durch Diffusion

noch durch Konvektion stattfindet. Sie maßen die Überführungszahlen für acht Silbersalze und bestimmten auf diese Weise mit großer Genauigkeit die Beweglichkeit des Kations Ag.

Kistjakowski (1890) und Bein (1892) wandten Apparate an, die im Prinzip dem soeben beschriebenen ähnlich sind. Kistjakowski war der Erste, der einen Apparat konstruiert hat, in welchem die Entnahme von Schichten der Flüssigkeitssäule unmittelbar durch einen am unteren Ende derselben befindlichen Hahn bewerkstelligt wurde. Er hat vorzugsweise die komplexen Salze (S. 601) untersucht und hierbei gezeigt, daß auch für sie das Gesetz von Kohlrausch Geltung hat, falls man sehr verdünnte Lösungen wählt. Im Apparate von Bein (Fig. 247) füllt die zu untersuchende Lösung eine mehrmals umgebogene Röhre $ADEF$, die Kathode befindet sich in A, die Anode in B; durch den Hahn F wird die Flüssigkeit in Proben entnommen und hierauf analysiert. Die ganze Röhre befindet sich in einem Gefäß mit Wasser, dessen Temperatur durch einen kontinuierlichen Strom von kaltem Wasser oder von Wasserdampf, der durch die Röhre BB hindurchströmt, konstant erhalten wird.

Fernere Bestimmungen der Überführungszahlen und der Ionenbeweglichkeiten haben Kümmel, insbesondere jedoch Jahn und dessen Schüler Hopfgartner, Metelka, Bogdan u. a. ausgeführt. Von den Arbeiten von Abegg und Steele wird weiter unten die Rede sein. Hittorf (1902) hat die Resultate der neuesten Arbeiten mit seinen eigenen, vor 40 Jahren gefundenen, verglichen und hierbei gezeigt, weshalb seine Werte nicht vollkommen genau sein konnten. F. Kohlrausch hat seine Untersuchungen in einer ganzen Reihe von Arbeiten bis in die neueste Zeit hinein fortgeführt.

§ 6. Theorie der Elektrolyse. Clausius, Helmholtz und Arrhenius. Auf S. 623 war erwähnt worden, daß mit den Experimentaluntersuchungen eine Reihe von theoretischen Arbeiten parallel ging, die sich mit dem mechanischen Vorgange bei der Elektrolyse beschäftigten. An die Betrachtung dieser Arbeiten treten wir jetzt heran; sie haben zu jener Theorie der elektrolytischen Dissoziation geführt, von der im vorhergehenden bereits wiederholt die Rede gewesen ist.

Alle älteren Theorien gingen von der Vorstellung aus, daß die elektrischen Kräfte den Elektrolyten „zerlegen", d. h. die Ionen voneinander abspalten, indem sie die Kraft der chemischen Verwandtschaft überwinden. Clausius (1857) hat zuerst darauf hingewiesen, daß, falls diese Vorstellung richtig wäre, für jede chemische Verbindung eine bestimmte minimale elektrische Kraft erforderlich wäre, um die chemische Affinität zu überwinden. Je größer die Affinität ist, um so größer müßte jene Kraft sein. In Wirklichkeit ruft aber bereits die geringste elektro-

motorische Kraft Elektrolyse in jedem beliebigen Elektrolyten hervor. Clausius machte daher die Annahme, daß in jeder Lösung eines Elektrolyten ein Teil der Moleküle in Ionen dissoziiert sei. Der Zerfall der Moleküle erfolgt infolge von Zusammenstößen bei Begegnung derselben untereinander oder mit Molekülen des Lösungsmittels, vielleicht aber auch aus anderen Gründen. Ein solcher Zerfall geht ununterbrochen vor sich, dafür vereinigen sich aber die Ionen auch bei zufälliger Begegnung ebenfalls ununterbrochen von neuem. Auf diese Weise bildet sich in der Lösung ein Zustand beweglichen Gleichgewichts. Der Strom wirkt bloß auf die bereits vorhandenen Ionen, indem er sie nach entgegengesetzten Richtungen treibt. Übrigens hat schon vor Clausius Williamson (1851) den Gedanken bezüglich der selbständigen Dissoziation der Substanz in den Lösungen ausgesprochen. Er machte die Annahme, daß in der Salzsäure die HCl-Moleküle sämtlich in ununterbrochenem Zerfall und Neubildung begriffen sind. Den Vorstellungen von Clausius hat sich Hittorf (1858) sogleich angeschlossen und dazu noch darauf hingewiesen, daß die besten Elektrolyte gerade die Verbindungen solcher Substanzen seien, zwischen denen die chemische Affinität besonders groß ist.

Von Clausius stammt somit die Vorstellung, daß eine Dissoziation der Elektrolyte in den Lösungen existiert. Nach der Theorie von Clausius ist jedoch diese Dissoziation von äußerst geringer Dauer; die Ionen existieren gesondert nur sehr kurze Zeit. Es sei noch bemerkt, daß diese Dissoziation einen ganz anderen Charakter als jene hat, mit der wir in Bd. III bekannt geworden sind, die nämlich auftritt, wenn sich eine Substanz in dampfförmigem Zustande befindet. Es zerfallen beispielsweise die Dämpfe des Salmiaks bei geringem Druck gemäß der Formel $NH_4Cl = NH_3 + HCl$; in einer Salmiaklösung geht jedoch die Dissoziation der Ionen gemäß der Formel $NH_4Cl = NH_4 + Cl$ vor sich.

Die Weiterentwickelung der Clausiusschen Ideen stammt von Helmholtz (1880). Sein Hauptverdienst besteht darin, daß er die Rolle des elektrischen Stromes präzisiert und erklärt hat, wozu eigentlich die Stromenergie verbraucht wird, die bei der Elektrolyse offenbar verausgabt wird und die numerisch gleich der Energie ist, die bei der chemischen Vereinigung der Ionen, d. h. bei der Bildung des Elektrolyten aus diesen Ionen, frei wird. Gerade diese Gleichheit mußte auf den Gedanken führen, daß der Strom den Elektrolyten „zerlegt". Helmholtz geht von der Annahme aus, daß sich der Elektrolyt in der Lösung im Zustande vollständigen Dissoziiertseins in Ionen befindet, wobei jedes Ion an eine bestimmte Menge positiver oder negativer Elektrizität gebunden ist. In jedem kleinen Volumteile der Lösung befindet sich die gleiche Anzahl von Anionen und Kationen, so daß sich eine elektrische Wirkung nach außen durch nichts verrät. Die

Ionen sind vollständig frei und zwischen ihnen wirken außer den elektrischen Kräften keinerlei andere, z. B. keine chemische Kräfte. Unter der Einwirkung der geringsten elektrischen Kraft, die als Folge des Vorhandenseins einer Potentialdifferenz zwischen den Elektroden auftritt, beginnt die Wanderung der ungleichnamigen Ionen nach entgegengesetzten Richtungen. Die an die Ionen gebundene Elektrizität verleiht den letzteren Eigenschaften, welche von den Eigenschaften der gewöhnlichen Substanz verschieden sind. Das einfache Na kann sich nicht in Wasser befinden, ohne es zu zersetzen, das Na-Kation jedoch, d. h. $\mathrm{Na}\,.\,\overset{+}{e}$, stellt etwas von dem Na-Atom durchaus Verschiedenes dar und kann sich frei im Wasser bewegen. Ist das Kation bis an die Kathode herangelangt und hat derselben seine Ladung abgegeben, so verwandelt es sich gewissermaßen in gewöhnliche Substanz mit allen ihren Eigenschaften. Das seiner Ladung beraubte Na zerlegt das Wasser.

Die Stromenergie wird nicht zur Zerlegung des Elektrolyten verbraucht, sondern, wenn man so sagen darf, zur Ionenspaltung, d. h. zur Abtrennung der elektrischen Laduugen von den Ionen. Die Dissoziation selbst, d. h. der Zerfall des Elektrolyten in Ionen, erfolgt unter Einwirkung des Lösungsmittels und wird von einem gewissen Verbrauch von Arbeit begleitet. Eine derartige Theorie führt zu keinerlei Widersprüchen und befindet sich mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie in vollster Übereinstimmung. Nehmen wir z. B. den Elektrolyten NaCl. Wir haben da zunächst die thermochemische Gleichung (Bd. III, Kap. V)

$$\mathrm{Na} + \mathrm{Cl} = \mathrm{NaCl} + q \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

wo q die Energie ist, die bei der Bildung von NaCl aus Natrium und Chlor frei wird. Ferner kann der Zerfall des Elektrolyten in Ionen, welcher Zerfall mit dem Energieverbrauch q' erfolgt, durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$\mathrm{NaCl} + \overset{+}{e}\overset{-}{e} = \mathrm{Na}\,.\,\overset{+}{e} + \mathrm{Cl}\,.\,\overset{-}{e} - q' \quad \ldots\ldots \quad (32,\mathrm{a})$$

Hier ist q' klein im Vergleich zu q. Die Arbeit des Stromes› welcher die Ionen spaltet, verlangt einen Energieverbrauch $q - q'$ und wird durch die Formel

$$\mathrm{Na}\,.\,\overset{+}{e} + \mathrm{Cl}\,.\,\overset{-}{e} = \mathrm{Na} + \mathrm{Cl} + \overset{+}{e}\overset{-}{e} - (q - q') \quad \ldots \quad (32,\mathrm{b})$$

ausgedrückt. Obige drei Gleichungen stehen nicht nur in keinem Widerspruch miteinander, sondern es ist eine jede von ihnen die unmittelbare Folge der beiden anderen.

Die Theorie von Helmholtz, welcher annahm, daß in jeder Lösung eines Elektrolyten sämtliche Moleküle dissoziiert sind, hat keine Weiterentwickelung erfahren.

Den letzten Schritt hat Arrhenius getan, den man als den Begründer der modernen elektrolytischen Dissoziationstheorie,

von der bereits in Bd. I und III, sowie auch im vorliegenden Bande die Rede war, bezeichnen kann. Die Grundlagen seiner Theorie hat Arrhenius in den Jahren 1887 und 1888 geschaffen; sie bestehen, wie wir bereits gesehen haben, in folgenden Sätzen. In jeder Lösung eines Elektrolyten ist ein Teil der Moleküle des letzteren dissoziiert. Der Dissoziierungsgrad, d. h. das Verhältnis der Zahl der dissoziierten Moleküle zur Gesamtzahl der Moleküle der Lösung, hängt von der Konzentration der Lösung ab und nimmt mit Abnahme der Konzentration zu. Wir werden den Dissoziierungsgrad mit α bezeichnen. Bei einer gewissen, sehr geringen Konzentration, welche für die verschiedenen Elektrolyte verschieden ist, ist $\alpha = 1$, ist also die Dissoziierung eine vollständige und sind sämtliche Moleküle des Elektrolyten in Ionen zerlegt.

Jedes Grammäquivalent der Ionen ist an F (96 540) Coulomb Elektrizität gebunden. Wir wissen, daß das Grammolekül jeder Substanz die gleiche Anzahl N Moleküle oder Atome enthält. Hieraus folgt, daß jedes einwertige Ion (H, K, Na, Cl, Br, OH, NO_3 usw.) an die Elektrizitätsmenge $F:N$ gebunden ist, die ein Elektron bildet: ein zweiwertiges Ion (Ba, SO_4 usw.) ist an zwei, ein dreiwertiges Ion an drei Elektronen gebunden usf. Die Ionen bewegen sich frei in der Lösung und wandern unter der Einwirkung elektrischer Kräfte zu den Elektroden hin. Weitere Einzelheiten sind bereits im ersten Abschnitt, Kap. 2, § 2 (S. 165 bis 169) erwähnt worden; es war dort die Theorie der elektrolytischen Dissoziation als etwas bereits Gegebenes, unabhängig von der Geschichte ihrer Entstehung auf Grund der Erscheinungen der Elektrolyse, betrachtet worden. Wie wir gesehen haben, ist ein Elektron angenähert gleich $6{,}6 \cdot 10^{-10}$ el.-st. C. G. S.-Einheiten der Elektrizitätsmenge. Kennt man die angenäherten Dimensionen der Atome und macht die Annahme, daß sie von Kugelgestalt sind, so kann man wenigstens die Größenordnung des Potentials eines Atoms berechnen. Lodge (1885) hat zuerst eine solche Berechnung ausgeführt; es erweist sich, daß dieses Potential nicht groß ist und nur wenige Volt beträgt.

Die Theorie der elektrolytischen Dissoziation sagt sich vollständig los von der Vorstellung, daß es einen Strom gibt, welcher durch den Elektrolyten hindurchgeht und hierbei die Substanz zerlegt. Im Elektrolyten erfolgt ausschließlich Bewegung von Ionen, die bereits frei existieren; der elektrische Strom innerhalb der Lösung eines Elektrolyten besteht nur in der Bewegung der Elektrizitäten, welche von den Ionen transportiert werden.

Arrhenius hat sich keineswegs darauf beschränkt, die Anschauungen von Clausius weiter zu entwickeln. Sein großes Verdienst besteht darin, daß er es verstanden hat, auf experimentellem Wege eine Reihe von Folgerungen zu bestätigen, die sich aus dem Grundprinzip seiner Theorie ergeben, nach welchem der Dissoziierungsgrad α von

der Konzentration der Lösung abhängt; gleichzeitig hat er auf den Zusammenhang hingewiesen, welcher zwischen so verschiedenartigen Größen wie Leitfähigkeit einer Lösung einerseits, Gefrierpunkt, Siedetemperatur, Dampfspannung und osmotischer Druck andererseits besteht.

In Bd. I und eingehender in Bd. III haben wir gesehen, daß für Lösungen von Nichtelektrolyten (beispielsweise von Zucker) die Formel $pv = RT$ gilt, in welcher p den osmotischen Druck, R die sogenannte Gaskonstante bedeuten. Für Elektrolyte jedoch muß diese Formel durch den Ausdruck $pv = iRT$ ersetzt werden, in dem i eine Zahl ist, welche angibt, um wievielmal sich die Anzahl der Moleküle der gelösten Substanz infolge der Dissoziation vergrößert hat. Derselbe Faktor i kommt auch in den Formeln vor, welche die Erniedrigung des Gefrierpunktes, die Erhöhung des Siedepunktes und die Verminderung der Dampfspannung definieren. Somit gibt es eine ganze Reihe von Methoden zur experimentellen Bestimmung des Faktors i. Der Zusammenhang zwischen der Größe i und dem Dissoziierungsgrade α läßt sich leicht bestimmen. Es sei N die Anzahl der Moleküle des Elektrolyten in irgend einem Volumteile der Lösung; ein Teil α derselben ist dissoziiert, wobei jedes in p Ionen zerfallen ist. Es ist beispielsweise $p = 2$ für KCl, $p = 3$ für H_2SO_4, $Ba(NO_3)_2$, $CuCl_2$, $p = 5$ für $FeCy_6K_4$. Die dissoziierten Moleküle haben dann $pN\alpha$ aktive Moleküle geliefert, welche zusammen mit $N(1-\alpha)$ nicht dissoziierten im ganzen $N(1-\alpha) + pN\alpha = N\{1 + (p-1)\alpha\}$ Moleküle ergeben. Hieraus folgt

$$i = 1 + (p-1)\alpha \quad \ldots \ldots \quad (33)$$

Ist aber die Arrheniussche Theorie richtig, wird wirklich der Elektrizitätstransport in Lösungen durch die freien Ionen bewerkstelligt, so muß die äquivalente Leitfähigkeit λ oder Λ, wenigstens für verdünnte Lösungen, offenbar zugleich mit der Zahl der aktiven Moleküle, d. h. der Ionenzahl $pN\alpha$, anwachsen. Somit erklärt die Arrheniussche Theorie es vollkommen, weshalb die äquivalente Leitfähigkeit bei fortgesetzter Verdünnung schwacher Lösungen anwächst. Für verdünnte Lösungen kann man die Annahme machen, daß λ proportional der Anzahl $pN\alpha$ der Ionen ist, d. h. daß die äquivalente Leitfähigkeit proportional dem Dissoziationsgrade α ist. Bezeichnet man den Grenzwert (für $\alpha = 1$) der äquivalenten Leitfähigkeit mit λ_0, so erhält man

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \alpha \quad \ldots \ldots \quad (33,\text{a})$$

Substituiert man α in (33), so erhält man den Ausdruck

$$i = 1 + (p-1)\frac{\lambda}{\lambda_0} \quad \ldots \ldots \quad (34)$$

Durch diesen bemerkenswerten Ausdruck ist der oben erwähnte Zusammenhang zwischen der Leitfähigkeit der Lösung und den vier miteinander verknüpften Größen, dem osmotischen Drucke, der Verminderung der Dampfspannung, der Erniedrigung des Gefrierpunktes und der Erhöhung des Siedepunktes gegeben. Arrhenius hat die Formel (34) geprüft und in zwei bemerkenswerten Arbeiten (1887, 1888) ihre Richtigkeit für eine sehr große Zahl von Lösungen erwiesen. Er hat die Größe i erstens nach Formel (34) aus Beobachtungen über die Leitfähigkeit von Lösungen bestimmt und zweitens aus kryoskopischen Beobachtungen, d. h. durch Bestimmung des Gefrierpunktes einer Lösung gefunden. Die auf diesen Fall bezüglichen Formeln hatten wir in Bd. III, Kap. 14, § 10 hergeleitet. Eine weitere Bestätigung der Formel (34) haben die Untersuchungen von van't Hoff und Reicher (1889) geliefert. Es hat sich übrigens gezeigt, daß für manche Lösungen der nach Formel (34) berechnete Wert von i von dem auf kryoskopischem Wege unmittelbar gefundenen bedeutend abweicht; dies gilt insbesondere von den Lösungen von $CaCl_2$, $MgCl_2$, $CuCl_2$, $SrCl_2$. Der Grund für die bedeutenden Abweichungen, die man bei diesen Lösungen beobachtet, ist bisher noch nicht bekannt. Es ist möglich, daß ein Teil der Moleküle von $CaCl_2$ nicht in $Ca + Cl + Cl$ zerfällt, sondern die Ionen $CaCl + Cl$ gibt. Übrigens ist auch eine Ursache vorhanden, weshalb die Größe i, wie sie nach Formel (34) sich ergibt, kleiner ausfallen muß, als ihr wahrer Wert ist. Es hat uns nämlich das Gesetz von Kohlrausch von der unabhängigen Ionenwanderung zur Formel (18), S. 633, geführt, nach welcher λ proportional der Summe $u + v$ der Ionenbeweglichkeiten ist. Die Arrheniussche Theorie läßt uns annehmen, daß λ ferner proportional dem Dissoziationsgrade α ist. Man erhält daher bei entsprechender Wahl der Einheit für die Beweglichkeiten anstatt der Formel (20) den Ausdruck

$$\lambda = \alpha(u + v) \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

Im Grenzfalle, für $\alpha = 1$, ist $\lambda = \lambda_0$; es sind aber dann auch die Beweglichkeiten u_0 und v_0, so daß

$$\lambda_0 = u_0 + v_0 \quad \ldots \ldots \quad (35, a)$$

ist. Es ist nun ganz sicher $u_0 + v_0 > u + v$, denn die Beweglichkeit nimmt mit fortschreitender Verdünnung der Lösung zu; hieraus folgt, daß $\alpha > \frac{\lambda}{\lambda_0}$ ist, es ist daher der wahre Wert von i, wie ihn die Formel (33) liefert, größer als der auf Grund von Formel (34) gefundene. Abegg (1892) hat auf diesen Umstand Rücksicht genommen und versucht eine entsprechende Korrektur einzuführen; er hat auch in der Tat eine noch bessere Übereinstimmung der Theorie mit den Versuchsergebnissen gefunden. Es ist hier nicht der Ort, auf die Resultate näher einzugehen, die man bei Bestimmung des Zusammenhanges des

Dissoziationsgrades α und der Konzentration m für verschiedene Lösungen gefunden hat. Wir beschränken uns auf den Hinweis, daß für sehr schwache Konzentrationen, wenn beispielsweise $m = 0{,}0001$ ist, die Größe α nahe an Eins liegt für Lösungen von Salzen, starken Säuren und starken Basen; umgekehrt ist der Wert von α klein für schwache Säuren und Basen. Selbstverständlich ist für sämtliche Lösungen von Nichtelektrolyten $\alpha = 0$.

Mit Zunahme der Temperatur nimmt die Ionenbeweglichkeit zu; der Dissoziationsgrad aber nimmt für viele Säuren und Salze mit Steigerung der Temperatur ab, wie dies Arrhenius (1892, s. u.) gezeigt hat. Hieraus ist ersichtlich, daß die Leitfähigkeit, die der Ionenbeweglichkeit und dem Dissoziationsgrade proportional ist, mit Zunahme der Temperatur bisweilen auch abnehmen kann, wie dies zuerst Arrhenius (S. 661) vorhergesehen hat.

Einen wichtigen weiteren Schritt in der Theorie der elektrischen Dissoziation haben (1888) Ostwald und gleichzeitig Planck getan. Die genannten Forscher haben eine Formel abgeleitet, welche das Verdünnungsgesetz der Lösungen darstellt, d. h. das Gesetz, welches den Zusammenhang zwischen der äquivalenten Leitfähigkeit λ einer Lösung und der Konzentration m (Anzahl der Grammoleküle pro Liter der Lösung) bei gegebener Temperatur t und gegebenem Druck p bestimmt. In Bd. III, Kap. 14 war eine Formel hergeleitet worden, welche sich auf den Zerfall einer in der Lösung befindlichen Substanz (AB) in ihre beiden Bestandteile A und B bezieht. Wir hatten dort mit n_1 die Anzahl der Grammmoleküle der Substanz (AB) bezeichnet, d. h. der nicht dissoziierten Substanz, mit n_2 die Anzahl der Grammoleküle der Substanzen A und B, welche sich infolge der Dissoziation gebildet hatten und endlich mit n_0 die Anzahl der Grammoleküle des Lösungsmittels. Führt man die Größe $n = n_0 + n_1 + n_2 + n_2$ ein, so erhält man die „Konzentrationen“ $h_1 = n_1 : n$ und $h_2 = n_2 : n$. Gestützt auf allgemeine Formeln von Planck hatten wir den Ausdruck

$$\frac{h_2^2}{h_1} = K(p, t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

abgeleitet, in welchem die rechte Seite eine Funktion von p und t darstellt; sind p und t gegeben, so ist dies eine konstante Größe. Die „Konzentrationen“ h_1 und h_2 bestimmen die relativen Mengen der Substanzen (AB), A und B, welche in dem Gemisch dieser drei Substanzen und des Lösungsmittels selbst enthalten sind. Es lassen sich α und m leicht durch die Größen n_0, n_1 und n_2 bestimmen. Die Dissoziation α für einen binären Elektrolyten ist offenbar gleich

$$\alpha = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36, a)$$

denn die Zahl der Moleküle des Elektrolyten wäre gleich $n_1 + n_2$, falls gar keine Dissoziation vorhanden wäre. Ferner sind n_0 Grammoleküle des Lösungsmittels vorhanden; nehmen wir an, es habe ein Grammmolekül ein Volumen von ω Litern (für Wasser ist $\omega = 0{,}018$). Es sind dann $(n_1 + n_2)$ Grammoleküle des Elektrolyten in ωn_0 Litern des Lösungsmittels gelöst; hieraus folgt, daß man die Anzahl m der Grammoleküle, welche in einem Liter der Lösung enthalten sind, für genügend verdünnte Lösungen gleich

$$m = \frac{n_1 + n_2}{\omega n_0} \quad \ldots \ldots \quad (36,\mathrm{b})$$

setzen kann. Substituiert man in Formel (36) die Werte von h_1 und h_2, so erhält man

$$\frac{h_2^2}{h_1} = \frac{n_2^2}{n_1(n_0 + n_1 + 2n_2)} = \frac{n_2^2}{n_1 n_0} = K(p,t) \quad . \; . \quad (36,\mathrm{c})$$

da man die Größe $n_1 + 2n_2$ vernachlässigen kann. Ferner erhält man aus (36, a) und (36, b) die Ausdrücke

$$n_2 = (n_1 + n_2)\alpha, \quad n_1 = (n_1 + n_2)(1 - \alpha); \quad n_0 = (n_1 + n_2) : \omega m.$$

Setzt man diese drei Größen in Formel (36, c) ein und schafft den Faktor ω in den Funktionsausdruck $K(p,t)$, so erhält man

$$\frac{\alpha^2 m}{1 - \alpha} = K(p,t) \quad \ldots \ldots \quad (36,\mathrm{d})$$

Diese Gleichung zeigt uns, in welcher Weise sich bei unveränderten p und t die Dissoziation α im Zusammenhange mit der Konzentration m ändert. Sie bietet uns offenbar nichts neues, da sie nur eine Umformung der Gleichung (36) ist. Setzt man jedoch an Stelle von α seinen Wert $\lambda : \lambda_0$, vgl. (33, a), so erhält man die Ostwaldsche Gleichung

$$\frac{\lambda^2 m}{\lambda_0(\lambda_0 - \lambda)} = K(p,t) \quad \ldots \ldots \quad (37)$$

welche die Abhängigkeit der äquivalenten Leitfähigkeit λ der Lösung eines binären Elektrolyten von ihrer Konzentration bei unveränderlichem p und t angibt. Die ersten Beobachtungen von Ostwald selbst, sowie von van't Hoff und Reicher (1888) gaben eine vorzügliche Bestätigung dieser Formel für Lösungen von neun organischen Säuren. Die weiteren Untersuchungen haben jedoch gezeigt, daß nur schwache Säuren und Basen das Ostwaldsche Gesetz befolgen. Für Lösungen von Salzen, starken Säuren und Basen jedoch verliert die Formel (37) ihre Geltung. Im Jahre 1889 hat Ostwald den Wert von K für mehr als 200 organische Säuren bestimmt. Die wichtigen Schlüsse, die sich aus diesem Materiale ergeben, besitzen vorzugsweise chemisches Interesse und können wir hier auf weitere Einzelheiten nicht eingehen.

Für Lösungen, für welche die Formel (37) keine Geltung hat, sind verschiedene empirische Formeln in Vorschlag gebracht worden; hierher gehört die Formel von Rudolphi

$$\frac{\lambda^2 \sqrt{m}}{\lambda_0 (\lambda_0 - \lambda)} = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (37, a)$$

und die van't Hoffsche Formel

$$\frac{\lambda^3 m}{\lambda_0 (\lambda_0 - \lambda)^2} = Const \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (37, b)$$

Andere Formeln sind von Storch, Bancroft, Barmwater und im besonderen von Jahn und Kohlrausch in Vorschlag gebracht worden. Der letztgenannte Autor hat eine ganze Reihe von mustergültigen Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen der Leitfähigkeit und der Konzentration von verdünnten Lösungen angestellt.

Einen wichtigen weiteren Schritt in der Theorie der elektrolytischen Erscheinungen hat Arrhenius getan (1889). In Bd. III, Kap. 14 ist die Formel

$$\frac{\partial lg K}{\partial t} = \frac{q}{HT^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (37, c)$$

abgeleitet worden, in welcher q die latente Dissoziationswärme eines Grammoleküls des Elektrolyten, T die absolute Temperatur, H die Konstante der Formel $pv = HT$, bezogen auf das Grammolekül der Substanz ist. Arrhenius konnte aus Werten von K für zwei Temperaturen die latente Wärme der elektrolytischen Dissoziation q für acht Säuren, unter anderem für die Phosphorsäure, unterphosphorige Säure, Essigsäure, Propionsäure, Fluorwasserstoffsäure und Bernsteinsäure bestimmen. Für sieben untersuchte Säuren war $q < 0$ und nur für die Bernsteinsäure war $q > 0$. Ist $q < 0$, so besagt dies, daß die elektrolytische Dissoziation in vielen Fällen ein exothermischer Vorgang ist, d. h. ein Vorgang, der mit Wärmeentwickelung verbunden ist. Die Formel (36, d), die man bei geringer Dissoziation in der Gestalt $\alpha^2 m = K$ schreiben kann, sowie die Formel (37, c) zeigen, daß für $q < 0$ auch $\frac{\partial \alpha}{\partial t} < 0$ ist, d. h. für die genannten sehr schwachen Elektrolyten nimmt die Dissoziation mit Erhöhung der Temperatur ab. Hierdurch erklärt sich, wie bereits erwähnt war, daß die Leitfähigkeit der Lösungen von H_3PO_4 und H_3PO_2, beginnend von gewissen Temperaturen, mit Zunahme der Temperatur abnimmt.

Alles, was bisher über die Frage der elektrolytischen Dissoziation gesagt war, bezog sich lediglich auf wässerige Lösungen. Für nicht wässerige Lösungen werden viele von den gezogenen Schlüssen nur in geringem Umfange oder auch gar nicht bestätigt. Es

kommt dies daher, weil erstens andere Lösungsmittel eine viel geringere und in der Mehrzahl der Fälle eine nur ganz verschwindend geringe Dissoziation des gelösten Elektrolyten bewirken: ferner kann auch die Beweglichkeit der Ionen in verschiedenen Lösungsmitteln eine ungleiche sein. Nur das flüssige CyH besitzt eine noch größere Dissoziationsfähigkeit als das Wasser, wie dies Centnerszwer gezeigt hat. Ameisensäure, Methyl- und Äthylalkohol besitzen ebenfalls ein großes Dissoziationsvermögen. J. J. Thomson und Nernst haben gezeigt, daß die Dissoziationsfähigkeit des Lösungsmittels um so größer ist, je größer seine Dielektrizitätskonstante ist. Anilin, Chloroform, Benzol, Äther besitzen ein geringes Induktionsvermögen und es zeigt sich in der Tat, daß die in ihnen gelösten Elektrolyte sehr wenig dissoziiert sind und die Lösungen selbst eine geringe Leitfähigkeit besitzen. Timmermans (1906) bestätigte diese Regel; er fand auch, daß stark polymerisierte Körper eine große Dissoziationsfähigkeit besitzen. Bemerkenswert ist, daß einige in Ameisensäure gelöste Elektrolyte, wie beispielsweise HCl, eine geringe Leitfähigkeit haben. Umgekehrt besitzen einige Lösungen von Salzen in verflüssigtem NH_3, SO_2, Aceton, Acetonitril ein größeres Leitvermögen als die entsprechenden wässerigen Lösungen. Hier tritt offenbar der Einfluß der Ionenbeweglichkeit zutage, die in den genannten Lösungsmitteln größer ist als im Wasser.

Auf S. 618 hatten wir die Arbeiten von Walden (1903 bis 1907) erwähnt, der die Leitfähigkeit von 50 organischen Flüssigkeiten und ihre dissoziierende Wirkung untersucht hat. Er hat auch die Dielektrizitätskonstanten dieser Flüssigkeiten bestimmt, wobei sich zeigte, daß einer größeren Dielektrizitätskonstante auch ein größeres Dissoziationsvermögen entspricht. Besitzt eine Substanz in verschiedenen Lösungsmitteln den gleichen Dissoziationsgrad, so hat das Produkt aus der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels und der Cubikwurzel aus dem Verdünnungsgrade für alle Lösungen den gleichen Wert.

Die Theorie der elektrolytischen Dissoziation liefert uns eine Erklärung der Tatsache, daß die Auflösung sehr oft von einer Kontraktion begleitet ist; wir haben in Bd. I diese Erscheinung kennen gelernt. Drude und Nernst (1894) haben darauf aufmerksam gemacht, daß die Kontraktion gerade in Lösungen von Elektrolyten auftritt und haben sie durch eine besondere Art von Elektrostriktion erklärt, d. h. als das Resultat einer mechanischen Einwirkung der Ionenladungen auf das Lösungsmittel. Ist diese Erklärung richtig, so muß für sehr stark verdünnte wässerige Lösungen die Kontraktion eine additive Eigenschaft sein, d. h. sich aus zwei Größen zusammensetzen, welche von der Art der Ionen abhängen. Hiermit stimmt vollkommen überein, was in Bd. I über die Valsonsche Regel und seine „Moduli“ gesagt war. Carrara und Levi (1900) haben die Kontraktion beim

Auflösen in verschiedenen organischen Lösungsmitteln untersucht und hierbei gefunden, daß auch für sie, entsprechend der Theorie von Drude und Nernst, ein Zusammenhang zwischen der Kontraktion (Elektrostriktion) und der elektrolytischen Dissoziation in der Lösung existiert.

Es gibt eine ganze Reihe von Methoden zur unmittelbaren Messung der Ionengeschwindigkeiten. Als Erster hat Lodge mehrere solcher Methoden in Vorschlag gebracht. Zwei getrennte Gefäße A und B enthalten die Lösungen eines und desselben oder zweier verschiedener Elektrolyte; in dieselben taucht je eine von zwei Elektroden. Die Gefäße sind durch eine Röhre C verbunden, welche eine andere Lösung enthält, der in einigen Fällen Gelatine oder Agar-Agar beigefügt ist. Ließ man einen Strom durch ACB hindurchgehen, so konnte man direkt beobachten, wie das eine der Ionen (oder beide) aus den Gefäßen in die Röhre C gelangte. Lodge füllte beispielsweise A und B mit einer schwachen H_2SO_4-Lösung, die Röhre C aber mit Gelatine, welche NaCl und Phenolphthaleïn enthielt, das ganz schwach mit Natronlösung gefärbt war. Beim Stromdurchgang bildet das Ion H_2, indem es in die Röhre eindringt, HCl, wobei sich die Gelatine entfärbt. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Entfärbung ausbreitet, ist die gesuchte Geschwindigkeit des Ions. Bei einem anderen Versuche enthielten A und B eine $BaCl_2$-Lösung, die Röhre C aber Gelatine mit Essigsäure und Silbersulfat. Die sich hierbei bildenden Niederschläge von $BaSO_4$ und AgCl ergaben die Geschwindigkeiten der Ionen Ba und Cl. In anderen Fällen enthielten die Gefäße $CuSO_4$ und NaHO, die Röhre jedoch Gelatine mit NaCl und ungefärbtem Phenolphthaleïn. Das Ion HO zersetzte das NaCl und färbte hierbei das Phenolphthaleïn. Enthielten die Gefäße Na_2SO_4 und $BaCl_2$, so bildete sich an einer bestimmten Stelle der Röhre C, wo die Ionen SO_4 und Ba einander begegneten, eine Querlamelle aus $BaSO_4$. Aus der Lage der letzteren ließen sich die relativen Geschwindigkeiten der Ionen bestimmen.

Whetham (1892) hat die Methode von Lodge modifiziert. Er brachte in ein Gefäß übereinander Lösungen von zwei Elektrolyten (AC) und (BC), die dasselbe Ion C enthielten und verschiedene Färbung hatten. Sendet man einen Strom hindurch, so bewegt sich C in der einen Richtung, A und B in der entgegengesetzten, wobei sich die Trennungsfläche beider Flüssigkeiten verschiebt. Die Geschwindigkeit dieser Verschiebung wird durch die Geschwindigkeit desjenigen Ions bestimmt, von welchem die Färbung abhängt. Nernst (1897) brachte in die untere Hälfte einer U-förmigen Röhre eine konzentrierte, rotgefärbte Lösung von $KMnO_4$ und H_3BO_3 und über dieselbe in beide Schenkel Lösungen von KNO_3, welche die Elektroden enthielten. Läßt man einen Strom hindurchgehen, so bewegt sich das Ion MnO_4 zur Anode, wobei sich die Färbung in beiden Schenkeln mit der-

jenigen Geschwindigkeit verschiebt, mit welcher sich dieses Ion bewegt.

Andere Methoden sind von Masson (1889), Noyes und Blanchard u. a. in Vorschlag gebracht worden. Die genaueste und bequemste ist die Methode von Abegg und Steele (1901); sie repräsentiert eine Verbesserung der Methode von Whetham. Denken wir uns drei einander berührende Lösungen der Elektrolyte (AC), (BC) und (BD), von denen die beiden ersten das gemeinsame Anion A, die beiden letzten das gemeinsame Kation B enthalten. Nehmen wir an, die Anionen C und D bewegen sich in der Richtung von der ersten Lösung (AC) zur dritten (BD), welche die Anode enthält, die Kationen A und B jedoch in entgegengesetzter Richtung zur Kathode, die sich in der Lösung (AC) befindet. Es läßt sich theoretisch beweisen, daß die Grenzfläche beider Lösungen ganz scharf bleibt und leicht wahrzunehmen ist, auch wenn beide Lösungen farblos sind, falls das vordere der beiden Ionen eine größere Beweglichkeit hat; eine Diffusion der Lösungen ist nicht möglich. Die Geschwindigkeiten, mit welchen sich die beiden Trennungsflächen der Lösungen verschieben, verhalten sich zueinander wie die Beweglichkeiten der Ionen B und C des mittleren Elektrolyten. Diese bemerkenswerte Methode setzt somit in den Stand, das Verhältnis $u:v$ der Beweglichkeiten zweier Ionen unmittelbar zu bestimmen. Denison und Steele (1905) haben diese Methode angewandt.

Schlußbemerkung. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir recht eingehend die Theorie der elektrolytischen Dissoziation behandelt.

Wir haben gesehen, daß sie in den Stand setzt, sich in einer ganzen Reihe von Erscheinungen zurecht zu finden, die man an wässerigen Lösungen beobachtet. Das von uns gezeichnete Bild würde nun aber an großer Einseitigkeit leiden, wenn wir es verschweigen wollten, daß es eine ganze Gruppe von Forschern gibt, welche sich gegenüber der Lehre von der Dissoziation in Lösungen ablehnend verhält und wenn wir die schwachen Seiten dieser Theorie unerwähnt lassen wollten. In Rußland sind es Mendelejew, D. Konowalow, Flawizki, Chruschtschow, Bogorodski, von Forschern anderer Länder Armstrong, Crompton, Reichler, Helfenstein, Kahlenberg, Traube u. a., welche die Lehre von der elektrolytischen Dissoziation der Lösungen nicht anerkennen. Wie wir gesehen haben, stimmen die Ergebnisse der Theorie in vielen Einzelheiten nicht mit den Beobachtungen überein und ist die Theorie auf nichtwässerige Lösungen mehr oder weniger unanwendbar. Als Arbeitshypothese hat sie ganz sicher der Wissenschaft einen bedeutenden Nutzen gebracht; indes muß man glauben, daß sie mit der Zeit sehr bedeutende und vielleicht ganz umgestaltete Änderungen erfahren wird. Hierauf hat Bancroft in einer Rede hingewiesen, die er bei Niederlegung des Amtes eines Vizepräsidenten der

Abteilung für Chemie in Philadelphia 1904 gehalten hat, sowie Bogorodski (1905) im Vorworte zu seinem von uns wiederholt zitierten Werke über die Elektrolyse von geschmolzenen anorganischen Substanzen.

Von den Versuchen, die elektrolytische Dissoziationstheorie zu vervollkommnen, sei hier die Arbeit von Malmström (1905) erwähnt, der zum Ausgangspunkte seiner Betrachtungen die van der Waalssche Formel für Gemische (Bd. III) machte und die elektrische Energie der freien Ionen in Betracht zog. Indessen finden die von ihm hergeleiteten Formeln ebenfalls keine Bestätigung bei stark dissoziierten Elektrolyten. Brillouin (1906) hat eine theoretische Erklärung für den Zusammenhang zwischen der Größe der Dissoziation und der dielektrischen Fähigkeit des Lösungsmittels gegeben. Steele, McIntosh und Archibald (vgl. § 3) haben die Angriffe von Kahlenberg zu entkräften gesucht, indem sie die Annahme machten, daß in vielen Fällen die gelöste Substanz nur dann die Fähigkeit erhält, in Ionen zu zerfallen, wenn sie sich mit einem oder mehreren Molekülen des Lösungsmittels verbunden hat, wie man dies deutlich an der Substanz NH_3 sieht, welche bei Vereinigung mit einem Molekül H_2O die Ionen NH_4 und HO gibt.

M. Planck (1902) hat in einer sehr interessanten Arbeit gezeigt, welche Eigenschaften der Lösungen (hierbei auch solche, die sich auf die Elektrolyse beziehen), unabhängig von der Dissoziationstheorie, auf Grund der Prinzipien der Thermodynamik streng abgeleitet werden und daher nicht dem geringsten Zweifel unterliegen können.

Zu gunsten der Dissoziationstheorie sprechen die Versuche von Durrant (1907), welcher zeigte, daß auch bei der gewöhnlichen Diffusion die Ionen eine verschiedene Geschwindigkeit besitzen; allen voran bewegt sich das Wasserstoffion.

§ 7. Elektrolytische Polarisation. In § 7 des Kap. II von Teil I (S. 199) hatten wir bereits die Erscheinung der elektrolytischen Polarisation kurz beschrieben. Äußerlich genommen besteht diese Erscheinung im folgenden. Als Voltameter sei ein Gefäß bezeichnet, in welchem sich zwei Elektroden innerhalb einer Flüssigkeit oder innerhalb zweier verschiedener Flüssigkeiten befinden, die übereinander geschichtet oder durch eine poröse Scheidewand voneinander getrennt sind. Erteilt man den Elektroden des Voltameters eine gewisse Potentialdifferenz, indem man das Voltameter in den Stromkreis eines elektrischen Stromes einschaltet, so tritt im ersten Augenblicke in der Kette ein Strom auf, dessen Stärke J vollständig durch das Ohmsche Gesetz bestimmt ist, d. h. durch die außerhalb des Voltameters wirkende elektromotorische Kraft E, die innerhalb des Voltameters wirkende elektromotorische Kraft E' und durch den Widerstand r des Voltameters, sowie den Widerstand R der übrigen außerhalb des Voltameters befindlichen

Teile der Kette (die Größe E' war auf S. 199 mit E bezeichnet worden). Somit ist

$$J = \frac{E + E'}{R + r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38)$$

Im besonderen Falle, wo $E' = 0$ ist (gleiche Elektroden in einer Flüssigkeit), lautet der Ausdruck

$$J = \frac{E}{R + r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38,a)$$

Bezeichnet man in diesem Falle die Potentialdifferenz der Elektroden mit $V_1 - V_2$, so ist

$$J = \frac{V_1 - V_2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (38,b)$$

Es zeigt sich nun, daß in vielen Fällen eine solche Stromstärke nur im ersten Augenblick erhalten wird, daß sie aber sehr schnell abnimmt, bisweilen fast bis auf Null. In wenigen Ausnahmefällen nimmt J langsam zu.

Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, daß die Hauptursache für die Änderung der Stromstärke in jenen elektrolytischen Vorgängen zu suchen ist, welche im Voltameter auftreten, wenn es in den Stromkreis eingeschaltet wird. Die Wirkung dieser Vorgänge kann jedoch zweierlei Art sein: sie kann in einer Änderung des Widerstandes r des Voltameters oder aber im Auftreten einer neuen elektromotorischen Kraft bestehen.

Eine Widerstandsänderung des Voltameters erfolgt in folgenden Fällen:

1. Wenn die sich an den Elektroden ausscheidenden Ionen die Elektrizität sehr schlecht leiten; hierher gehört beispielsweise der Fall einer Ausscheidung von Schwefel.

2. Wenn die Ionen bei ihrer Einwirkung auf die Elektrode eine schlecht leitende Schicht, beispielsweise eine Oxydschicht, bilden. Hierher gehört der Fall, wo sich eine Aluminiumelektrode oxydiert (S. 599).

3. Wenn sich infolge der Elektrolyse in der Lösung selbst neue Substanzen bilden, deren Leitfähigkeit (d. h. Ionenbeweglichkeit) sich von der Leitfähigkeit des ursprünglich gegebenen Elektrolyten unterscheidet. Hierher gehören auch die seltenen Fälle, in denen die Stromstärke sich im Verlaufe der Zeit steigert. So bildet sich beispielsweise in einer $CuSO_4$-Lösung zwischen Pt-Elektroden H_2SO_4; da die Beweglichkeit des H größer ist als die Beweglichkeit des Cu, so nimmt der Widerstand r des Voltameters im Laufe der Zeit ab. Eine Konzentrationsänderung der Lösung, die sich als Resultat der Elektrolyse ergibt, kann ebenfalls eine Änderung des Widerstandes r zur Folge haben.

Abgesehen aber von der Änderung der Stromstärke J, die sich durch die soeben erwähnten Änderungen des Voltameterwiderstandes r

erklären läßt, beobachtet man in vielen Fällen noch eine andere Änderung der Stromstärke und zwar, wie bereits erwähnt, eine schnelle Verminderung derselben. Die Ursache für diese Erscheinung kann im Auftreten einer besonderen Widerstandsänderung im Voltameter liegen, die mit keiner der soeben angeführten identisch ist, oder aber im Auftreten einer besonderen elektromotorischen Kraft e innerhalb des Voltameters, in einer Richtung, die der elektromotorischen Kraft E oder der Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ entgegengesetzt ist. Lange Zeit hatte man tatsächlich angenommen, daß zwischen den Elektroden und der Flüssigkeit bei der Elektrolyse ein besonderer Übergangswiderstand auftritt. Man kann es jedoch gegenwärtig als erwiesen ansehen, daß kein Übergangswiderstand, wie man sich ihn früher dachte, existiert, sondern daß im Voltameter bei der Elektrolyse eine neue elektromotorische Kraft e auftritt, die man als elektromotorische Kraft der Polarisation oder schlechtweg als Polarisation bezeichnet.

Wir nehmen zunächst an, daß vor Einführung des Voltameters in die Kette in demselben keinerlei elektromotorische Kraft vorhanden war. Für diesen Fall gelten die Formeln (38, a) und (38, b). Ist die Polarisation e aufgetreten, so wird die Stromstärke J durch eine der folgenden Formeln ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{E - e}{R + r} \\ J &= \frac{V_1 - V_2 - e}{r} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

Schaltet man das Voltameter, nachdem in ihm die Polarisation e aufgetreten ist, aus dem Stromkreise aus und verbindet es unmittelbar darauf mit einem Galvanometer, so zeigt letzteres an, daß in der auf diese Weise gebildeten Kette ein Strom vorhanden ist, der im Voltameter die entgegengesetzte Richtung wie der Strom J hat. Die Stärke J dieses Stromes, welcher Polarisationsstrom heißt, wird im ersten Augenblick durch die Formel

$$J_p = -\frac{e}{r + R_1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (39, a)$$

gegeben, in welcher R_1 der Widerstand aller äußeren Bestandteile der Kette bedeutet. Die Stromstärke J_p sinkt schnell bis auf Null.

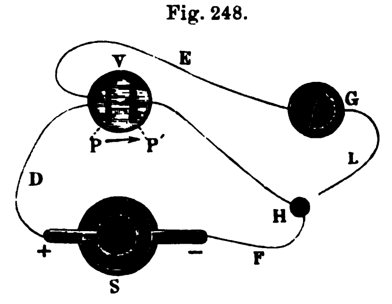
Das Auftreten der Polarisation e kann zweierlei Ursachen haben. Erstens können die ursprünglich gleichartigen Elektroden ungleichartig geworden sein und zwar infolge der Einwirkung der Ionen; in diesem Falle wird das Voltameter gewissermaßen zum galvanischen Elemente mit zwei verschiedenen Elektroden in einer Flüssigkeit. Hierher gehört z. B. der Fall, wo die Elektroden ursprünglich mit gleichartigen Schichten eines Metalloxyds, wie z. B. mit Bleiglätte, bedeckt sind und

in eine verdünnte Schwefelsäurelösung tauchen. Bei der Elektrolyse wird die eine Schicht (die anodische) oxydiert, wobei sich Superoxyd bildet, die andere (kathodische) Schicht wird zu niederen Oxydstufen desoxydiert oder es tritt eine Reduktion des Metalles selbst ein. Der Polarisationsstrom geht in dem auf diese Weise gebildeten Polarisationselemente (Akkumulator) in der Richtung von der desoxydierten Oberfläche zur oxydierten; die mit Superoxyd bedeckte Elektrode erweist sich als die positive.

Zweitens können die Ionen, ohne eine chemische Einwirkung auf die Elektroden auszuüben, durch ihr bloßes Erscheinen an der Oberfläche der letzteren bereits eine Polarisation hervorrufen. Dieser Fall ist der wichtigste und wenden wir uns ihm vor allem zu. Wir setzen zunächst voraus, die Ionen seien gasförmig. Ein typisches Beispiel hierfür ist das folgende: Das Voltameter enthält zwei Platinplatten, welche in eine Lösung von Schwefelsäure oder einen anderen Elektrolyten eintauchen, bei dessen Elektrolyse sich Wasserstoff und Sauerstoff ausscheiden. Diese durch den Wasserstoff und Sauerstoff bewirkte Polarisation wollen wir zunächst betrachten.

Die Erscheinung der Polarisation wurde wohl zuerst von Gautherot (1802) beobachtet; untersucht wurde sie zunächst von Ritter (1803), Marianini, de la Rive, Matteucci u. a.

Fig. 248.

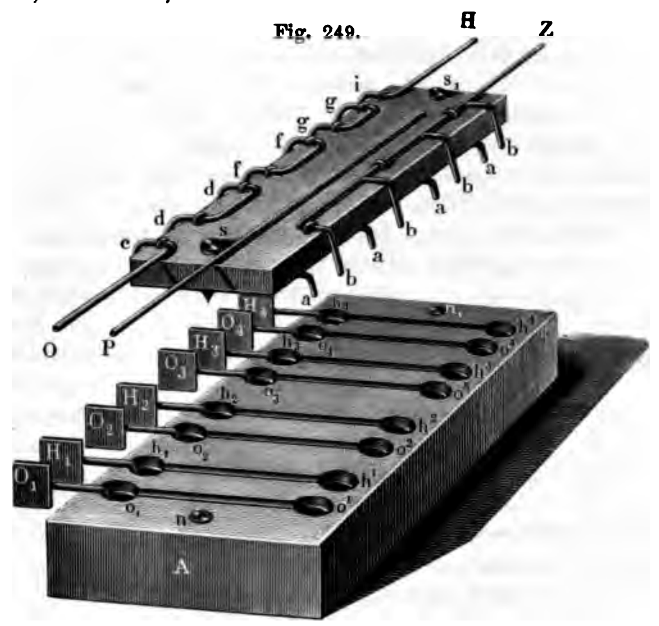


Um die Erscheinung der Polarisation zu demonstrieren, kann der in Fig. 248 schematisch abgebildete Apparat dienen. Hier ist S ein Element, V das Voltameter mit den Elektroden P und P', G ein Galvanoskop, H ein Quecksilbernäpfchen. Der Strom geht durch das Voltameter in der Richtung von P nach P'; nimmt man das Ende des Drahtes F aus dem Näpfchen H heraus und taucht in H das Ende des Drahtes L, so wird die Anwesenheit des Polarisationsstromes, welcher durch V in der Richtung von P' nach P geht, durch das Galvanoskop G angezeigt.

Poggendorff (1844) hat eine Wippe konstruiert, mit deren Hilfe man schnell und wiederholt vier parallel geschaltete Voltameter „laden" und darauf durch ein Galvanometer entladen konnte, wobei dann die hintereinander geschalteten Voltameter die vierfache elektromotorische Kraft lieferten. Der Apparat besteht aus einem Holzbrettchen A (Fig. 249), in welchem acht Paar Vertiefungen angebracht sind, welche Quecksilber enthalten. Die Öffnungen o_1 und o^1, h_1 und h^1 usw. sind untereinander durch Drähte verbunden; die Öffnungen o_1, h_1, o_2, h_2 usw. sind mit den Platten O_1, H_1, O_2, H_2 usw. verbunden.

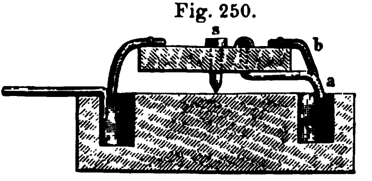
Auf das Brettchen *A* wird der gesondert dargestellte Deckel gesetzt, welcher mit den zugespitzten Enden zweier Schrauben *s* und *s'* auf die mit Vertiefungen versehenen Plättchen *n* und n_1 gesetzt wird. Auf dem Deckel sind, wie aus der Figur zu ersehen ist, Drähte befestigt; die Drähte *aa* ... sind mit dem Draht *P* verbunden. Die Drähte *P* und *Z* sind mit der polarisierenden Kette (einer hydroelektrischen Batterie) verbunden; *O* und *H* stehen mit der Polarisationskette in Ver-

Fig. 249.



bindung (Galvanometer oder andere Apparate). Kippt man den Deckel nach rechts, so tauchen die Drähte *a* und *b* in das Quecksilber in den Vertiefungen o^1, h^1 usw., wobei sämtliche Voltameter in die Kette parallel zueinander eingeschaltet werden; kippt man hierauf den Deckel nach links, so werden die Voltameter hintereinander geschaltet, da die Drähte *e*, *dd*, *ff* usw. in das Quecksilber der Vertiefungen o_1, h_1 usw. eintauchen. Schaukelt man den Deckel mit der Hand schnell hin und her, so erhält man einen kräftigen, freilich unterbrochenen Polarisationsstrom. In Fig. 250 ist ein Querschnitt der Wippe zu sehen. Die Drähte *a* und *b* befinden sich indes nicht in der Ebene eines und desselben Querschnittes. Andere, zu ähnlichen Zwecken bestimmte Apparate haben Siemens, J. Müller, Bohn u. a. konstruiert.

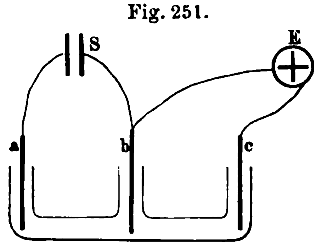
Fig. 250.



Die ersten sorgfältigeren Untersuchungen über die Polarisation haben Fechner (1831) und Poggendorff (1841) ausgeführt; wir werden auf diese Arbeiten nicht näher eingehen; sie hatten zum Zwecke, unter anderem jenen besonderen Übergangswiderstand zu bestimmen, der, wie spätere Untersuchungen gezeigt haben, nicht existiert.

Eine klassische Untersuchung der Polarisation stammt von E. Lenz (1843), der den Charakter dieser Erscheinung vollkommen klargelegt und die wichtigsten Gesetze derselben entdeckt hat. Er fand vor allen Dingen, daß die Polarisation, d. h. die Größe der elektromotorischen Kraft e, mit Zunahme der Intensität des polarisierenden Stromes oder, genauer gesagt, mit Zunahme der am Voltameter angreifenden elektromotorischen Kraft E anwächst. Dieses Anwachsen geht aber nur bis zu einer gewissen Grenze e_m; über diese Grenze geht die Polarisation nicht hinaus, wie sehr E und die Stromstärke J des durch das Voltameter hindurchgehenden Stromes auch zunehmen mögen. Der Maximalwert e_m hängt von der Elektrodensubstanz und der Gasart ab, welche sich an der Elektrodenoberfläche abscheidet.

Fig. 251.



Ferner hat Lenz gefunden, daß die Polarisation e aus zwei Teilen besteht, welche gesondert an den beiden Elektroden auftreten. Ersetzt man die eine der polarisierten Elektroden durch eine frische, unpolarisierte Elektrode, so fällt die Polarisation e_1 kleiner als e aus; das gleiche gilt von der Polarisation e_2, welche auftritt, falls man die andere Elektrode durch eine unpolarisierte ersetzt. Es ist $e = e_1 + e_2$. Nehmen wir des Beispiels halber an, es beständen die Elektroden aus Pt, die polarisierenden Gase aber seien O und H: die polarisierten Elektroden seien mit Pt_O und Pt_H bezeichnet. Es ist dann

$$Pt_O \,|\, Pt_H = Pt_O \,|\, Pt + Pt \,|\, Pt_H = + Pt_O \,|\, Pt - Pt_H \,|\, Pt.$$

Schließlich war E. Lenz auch der erste, welcher gezeigt hat, daß man keinen besonderen „Übergangswiderstand" zur Erklärung der Polarisationserscheinungen heranzuziehen braucht.

Auf S. 200 war bereits die Rede von unpolarisierbaren Elektroden; es sind das Metalle, welche sich in Lösungen ihrer Salze befinden, beispielsweise Cu in einer $CuSO_4$-Lösung, Zn in $ZnCl_2$-Lösung usw.

Auf die Methoden zur Messung der Polarisation e werden wir hier nicht näher eingehen. Diese Methoden fallen im allgemeinen mit jenen zusammen, die überhaupt zur Messung von elektromotorischen Kräften dienen und die wir später beschreiben werden. Hauptsächlich gehören hierher Kompensationsmethoden. Es sei an dieser

Stelle nur die Methode von Fuchs erwähnt, welche im besonderen zur Messung der Polarisation e bestimmt ist. Ohne auf Einzelheiten einzugehen, beschränken wir uns auf die Betrachtung der schematischen Fig. 251. Eine horizontale Röhre ist mit drei vertikalen Seitenröhren versehen, in denen sich die Elektroden a und b befinden, deren Polarisation man zu messen wünscht; c ist eine Extraelektrode, sie ist mit dem Elektrometer E verbunden; die andere Klemmschraube des Elektrometers wird mit einer der anderen Elektroden a oder b derart verbunden, daß seine Angaben der Potentialdifferenz zwischen c und der betreffenden Elektrode entsprechen. Nehmen wir an, es werde die Potentialdifferenz zwischen b und c gemessen. Verbindet man dann a und b mit der Batterie S, so ändert sich die Angabe des Elektrometers um einen Betrag, welcher gleich der Polarisation der Elektrode C ist. Man kann a, b und c in verschiedene durch Heber verbundene Gefäße setzen und an Stelle der Elektrode c amalgamiertes Zink wählen, welches in eine Lösung von Zinksulfat taucht; in diesem Falle ist die Elektrode c unpolarisierbar. F. E. Neumann, Föppl u. a. haben verschiedene spezielle Methoden zur Messung von e in Vorschlag gebracht. Eine kritische Untersuchung der verschiedenen Methoden hat Pirani vorgenommen.

Die Größe der Polarisation e steht mit der an den Elektroden angreifenden elektromotorischen Kraft und der Intensität J des durch das Voltameter gehenden Stromes in einem recht komplizierten Zusammenhange. Die Untersuchungen von Crova (1863) und F. Exner (1878) haben gezeigt, daß bei allmählichem Anwachsen der Größe E, anfangend vom Werte Null, anfangs e dem absoluten Betrage nach gleich E ist, jedoch natürlich die entgegengesetzte Richtung hat. Hierbei ist $J = 0$, es ist kein Strom vorhanden und tritt keine merkliche Gasentwickelung in Form von Bläschen auf. Anfangend von einem gewissen Werte $E = e'$ wird $e < E$ und gleichzeitig tritt ein Strom J auf und beginnt eine merkliche Elektrolyse. Von diesem Augenblicke an beginnt gleichsam ein neues Stadium; Crova hat für dasselbe die Abhängigkeit der Polarisation e von der Stromstärke J bestimmt. Er fand, daß e durch eine Formel von der Gestalt

$$e = A - Be^{-\alpha J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

dargestellt werden kann, in welcher A, B und α Konstante bedeuten. Für $J = 0$ ist $e = A - B$, für $J = \infty$ ist $e = A$. Für Platinelektroden findet Crova als Wert von A ungefähr 2,7 Volt, als Wert von B etwa 0,3 Volt. Somit ist bis zu $E = E' = 2,4$ Volt $e = E$ und $J = 0$. Ist $E > 2,4$ Volt, so erhält man $J > 0$ und e wächst noch weiter bis zu dem Grenzwerte 2,7 Volt. F. Exner erhält ein etwas anderes Resultat, nämlich daß $e = E$ ist, solange E nicht mehr als etwa 2 Volt beträgt, darauf nimmt e zu, erreicht seinen Maximal-

wert $e = 2{,}23$ Volt (2,3 Daniell) für $E = 2{,}5$ und nimmt dann, wie sehr auch E zunehmen mag, keinen höheren Wert mehr an.

Den Maximalwert der Polarisation für verschiedene Elektroden und Elektrolyten haben Buff, Raoult, Poggendorff, Fromme und im besonderen Sawinow (1891) bestimmt. Letzterer maß die Polarisation der Anode und Kathode für den Fall, daß beide Elektroden aus Platin bestehen; als Elektrolyte wurden verschiedene Substanzen gewählt, in allen Fällen aber wurde die Polarisation durch Wasserstoff und Sauerstoff, die sich bei der Elektrolyse an den Elektroden ausschieden, bewirkt. Sawinow fand folgende in Daniells angegebenen Werte für die Polarisation:

	H_2SO_4	NaHO	KHO	Na_2SO_4	K_2SO_4	$MgSO_4$
Maximale Polarisation an der Anode . . .	1,20	1,25	1,23	1,42	1,47	1,10
Maximale Polarisation an der Kathode .	1,11	1,46	1,42	1,47	1,46	1,44

Die Abhängigkeit der maximalen Polarisation von der Elektrodensubstanz haben Pirani, Streintz, Tafel (1905) u. a. untersucht. Hierbei zeigte sich, daß die Substanz eine überaus wichtige Rolle spielt. So übersteigt beispielsweise die Polarisation von Kupferelektroden in einer Schwefelsäurelösung nicht 0,5 Volt, während sie für andere Elektroden bis zu 2,5 und sogar bis zu 3 Volt gehen kann. Koch und Wüllner erhielten bei Platinelektroden sogar 3,5 Volt. Die Polarisation von platiniertem Platin ist um ungefähr 0,5 Volt geringer als die Polarisation von glattem Platin; diese Erscheinung ist in theoretischer Hinsicht von Interesse.

Eine sorgfältige Untersuchung über die Polarisation verschiedener Elektroden hat Reetz (1880) ausgeführt. Er hat die zum Teil bereits von E. Lenz gefundenen Resultate bestätigt gefunden. So fand er nach der Methode von Fuchs, daß die Polarisation einer Platinelektrode durch Wasserstoff oder Sauerstoff in einer H_2SO_4-Lösung davon unabhängig ist, woraus die andere Elektrode besteht und welches die sie umgebende Flüssigkeit ist; die gesamte Polarisation des Voltameters ist gleich der Summe der Polarisationen beider Elektroden. Die Größe der Polarisation hängt von den Dimensionen beider Elektroden ab; haben die Elektroden sehr verschiedene Dimensionen, so kann die Polarisation der kleineren Elektrode einen beträchtlichen Wert erreichen, während die Polarisation der größeren Elektrode sehr klein oder auch völlig unmerklich sein kann. Sind beide Elektroden sehr klein, so kann die Polarisation ebenfalls größere Werte erreichen als für Elektroden von großen Dimensionen.

Wird ein Stromkreis, welcher ein Voltameter enthält, geschlossen, so erreicht die Polarisation des letzteren nicht augenblicklich denjenigen

Wert e, welcher der an den Elektroden des Voltameters angreifenden Potentialdifferenz entspricht. F. Kohlrausch (1873) hat gefunden, daß die Polarisation e der Elektrizitätsmenge q, welche das Voltameter passiert hat, proportional ist, falls der Stromkreis auf sehr kurze Zeit geschlossen wird. Dies gilt aber nur für schwache polarisierende Ströme. Bartoli (1880) hat gefunden, daß e durch folgende Formel ausgedrückt werden kann:

$$e = \frac{B}{2}\left(1 - 10^{-\alpha \frac{q}{s}}\right) + \frac{B_1}{2}\left(1 - 10^{-\alpha_1 \frac{q}{s_1}}\right) \quad . \quad . \quad (40, a)$$

worin s und s_1 die Oberflächen der beiden Elektroden bedeuten, B, B_1, α und α_1 Konstante sind. Sind die Elektrodenoberflächen einander gleich, so gilt die Formel

$$e = B\left(1 - 10^{-\alpha \frac{q}{s}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40, b)$$

Kohlrausch hat die angenäherte Gasmenge bestimmt, die an den Elektroden auftreten muß, damit eine bestimmte Polarisation e erreicht wird. Er fand, daß für die Polarisation von Platin durch Wasserstoff und Sauerstoff $e = 1$ Daniell ist, wenn auf 1 qcm der einen Elektrodenfläche $15 . 10^{-8}$ mg H und dementsprechend auf 1 qcm der anderen Elektrodenfläche $12 . 10^{-7}$ mg O auftreten.

Das allmähliche Anwachsen der Polarisation e nach Schließung und die allmähliche Abnahme derselben nach Öffnung der Kette haben zahlreiche Beobachter untersucht. Edlund (1852) hat gezeigt, daß 0,02 Sek. nach Schließung der Kette die Polarisation des Pt in verdünnter Schwefelsäure ein Viertel ihres Endwertes erreicht. Im allgemeinen kann man sagen, daß die Polarisation sehr schnell auftritt. In den meisten Fällen aber sinkt sie sehr langsam, wenn man nach Öffnen der Kette das Voltameter geöffnet läßt. Selbst nach Ablauf eines Monats zeigt es noch Spuren der in ihm wachgerufenen elektromotorischen Kraft. Schließt man dagegen das Voltameter, so daß ein Polarisationsstrom entsteht, so vermindert sich die Polarisation, also auch die Intensität dieses Stromes, schnell, wenngleich langsamer als das Auftreten der Polarisation nach Schließung des polarisierenden Stromes erfolgt. Eingehender sind diese Erscheinungen von Fromme, Bernstein, Macaluso, Streintz, Helmholtz, Bouty, Salomon (1897) u. a. untersucht worden. Bouty findet, daß die Geschwindigkeit, mit welcher die Polarisation anwächst, für beide Elektroden nicht die gleiche ist: an der Anode erfolgt dieses Anwachsen langsamer als an der Kathode. Die Summe e der Polarisationen beider Elektroden ist etwas kleiner als E, d. h. als die polarisierende Kraft. Deshalb geht durch das Voltameter selbst bei den kleinsten Werten von E immer ein wenn auch sehr schwacher Strom hindurch. Diesen

Strom, dessen Vorhandensein schon früher beobachtet worden ist, nennt man den Reststrom.

Erschütterung der Elektroden ruft eine Verminderung der Polarisation hervor. Mit Zunahme der Temperatur vermindert sich die Polarisation, wie dies die Versuche von Crova, Poggendorff, Beetz u. a. gezeigt haben. Bei schwachen Strömen ist der Einfluß der Temperatur in höherem Grade auf der mit Wasserstoff bedeckten Elektrode bemerkbar, als auf der mit Sauerstoff bedeckten. Auf die Theorie dieser Frage werden wir später zurückkommen.

Druck übt keinen merklichen Einfluß auf die Polarisation aus; theoretisch läßt sich jedoch nachweisen, daß sich die Polarisation mit Zunahme des Druckes vergrößern muß.

Die Mehrzahl der Untersuchungen, die man über Polarisation, bewirkt durch gasförmige Ionen, angestellt hat, bezieht sich auf die Polarisation durch Sauerstoff und Wasserstoff. Es ist jedoch auch eine Reihe von Arbeiten vorhanden, welche sich mit der Frage nach der Polarisation durch andere Stoffe beschäftigen. Die ersten hierher gehörigen Untersuchungen sind von E. Lenz und Saweljew (1846) ausgeführt worden, nachher insbesondere von Beetz, Raoult u. a. Beetz hat die Polarisation von Platin durch Chlor, Brom und Jod untersucht und hierbei für Chlor den Wert 0,505 D, für Brom 0,33 D und für Jod 0,17 D gefunden, während die Polarisation durch Wasserstoff nach seinen Messungen gleich 0,9 D ist.

Nachdem wir uns mit dem Charakter der Polarisationserscheinung im allgemeinen bekannt gemacht haben, wenden wir uns jetzt der Frage zu, was denn eigentlich an der Elektrodenoberfläche bei der Polarisation vor sich geht. Wird ein Voltameter in den Stromkreis gebracht und bildet sich zwischen seinen Elektroden eine bestimmte Potentialdifferenz E aus, so beginnt auch sogleich die Wanderung der Ionen zu den Elektroden hin; gleichzeitig mit den Ionen bewegen sich auch ihre Ladungen. Haben die Ionen die Elektrodenoberflächen erreicht, so geben sie denselben noch nicht sogleich ihre Ladungen ab, sondern bilden zunächst eine Schicht längs diesen Oberflächen; um dem Ion seine Ladung zu nehmen, ist eine gewisse elektrische Kraft von bestimmter Größe erforderlich. Die Ladung der Ionen und die Ladung an der Elektrodenfläche bilden eine elektrische Doppelschicht (S. 97), d. h. etwas, was an einen geladenen Kondensator erinnert. Ein polarisiertes Voltameter kann als ein System aus zwei Kondensatoren angesehen werden; der Abstand der Oberflächen (Belegungen) ist in jedem derselben sehr gering, es ist daher die Kapazität jener beiden Kondensatoren, d. h. die Kapazität des polarisierten Voltameters, sehr groß.

Jeder Doppelschicht oder jedem Kondensator entspricht eine bestimmte Potentialdifferenz (Potentialsprung), welche von der Art der

Ionen oder ihrer Anzahl abhängt. Die beiden hierbei auftretenden Potentialdifferenzen e_1 und e_2 an den beiden Elektroden bilden das, was wir vorhin als Polarisation der Elektroden bezeichneten. Wird die Größe $e = e_1 + e_2$ ihrem Betrage nach gleich der Potentialdifferenz E der Elektroden, so muß sich offenbar in dem gesamten Stromkreise eine statische Verteilung der Ladungen ausbilden, die Summe der elektromotorischen Kräfte (der Potentialsprünge), welche in der gesamten geschlossenen Kette wirken, wird gleich Null und zugleich hiermit sinkt auch die Stromstärke der Kette bis auf Null.

Vergrößert man E und zugleich damit auch die Ladungen der Elektroden, so werden neue Ionenmengen von den Elektrodenoberflächen angezogen und die Ladungen der erwähnten beiden Elektroden werden sich so lange vergrößern, bis die Summe der Potentialsprünge, d. h. die Polarisation des Voltameters, abermals den Wert E erreicht hat. Zugleich mit dem Anwachsen der Ladungen, also auch mit der Zunahme der Potentialdifferenz zu beiden Seiten von jeder Doppelschicht, vergrößert sich auch jene elektrische Kraft F, welche zwischen der Ladung der Ionen und der Ladung der Elektrode wirkt und den Ionen ihre Ladung zu entziehen sucht, also auch eine sichtbare Auscheidung von Ionen, d. h. die Erscheinung der faktisch erfolgenden Elektrolyse hervorzurufen strebt. Man hat sich zu denken, daß die Ionen ihre Ladungen mit einer bestimmten Kraft festhalten, die man die Haftintensität nennen könnte. Sobald die elektrische Kraft F gleich dieser Haftintensität wird, beginnt eine merkbare Elektrolyse. Le Blanc, dessen Arbeiten für die Erklärung der Polarisationserscheinungen besonders förderlich gewesen sind, bestreitet die Existenz eines Maximums der Polarisation in dem früher erwähnten Sinne. Anstatt dessen führt er den Begriff des Zersetzungswertes ein, wobei er unter diesem Ausdruck denjenigen Wert der wirksamen elektromotorischen Kraft versteht, bei welchem eine sichtbare Ausscheidung von Ionen infolgedessen beginnt, daß auf beiden Elektroden die elektrische Kraft die Haftintensität der Ionen zu überwinden beginnt. Le Blanc hat die Zersetzungswerte und die Haftintensitäten für zahlreiche Elektrolyte bestimmt. Hierbei hat er unter anderem gefunden, daß die Haftintensität der Metallionen, die sich aus dem Salze eines gegebenen Metalls ausscheiden, also der Potentialsprung an der Kathode, bei dem eine ununterbrochene und regelmäßige Ausscheidung des Metalls beginnt, gerade gleich der elektromotorischen Kraft, d. h. gleich dem Potentialsprunge zwischen diesem Metalle und der Lösung seines Salzes ist. So gibt z. B. Cd in einer Lösung (Normallösung) von $CdSO_4$ die elektromotorische Kraft $+$ 0,16 Volt und beginnt bei der Elektrolyse dieser Lösung die Ausscheidung von Cd gerade dann, wenn die Polarisation der negativen Elektrode gleich 0,16 Volt wird. Es ist somit Le Blanc gelungen, die Nernstsche Theorie (S. 188) der elektro-

motorischen Kräfte mit der entgegengesetzten Erscheinung der Elektrolyse in Zusammenhang zu bringen.

Es sei noch bemerkt, daß Le Blanc, indem er von der Vorstellung der Haftintensität der Ionen ausging, eine neue Erklärung für die Tatsache gegeben hat, daß bei der Elektrolyse der Lösung eines Gemisches von verschiedenen Salzen die Metalle sich nicht alle gleichzeitig, sondern in einer bestimmten Reihenfolge ausscheiden. Seiner Ansicht nach scheiden sich die Ionen entsprechend der Größe ihrer Haftintensität aus: zuerst werden die Ladungen denjenigen Ionen entzogen, welche die geringste Haftintensität besitzen, wobei sich das entsprechende Metall auf der Elektrode niederschlägt, hierauf kommen diejenigen in der Lösung verbliebenen Ionen an die Reihe, welche die nächst kleinste Haftintensität besitzen usf.

Le Blanc fand, daß der Zersetzungswert für die Lösungen zahlreicher Säuren und Basen nahezu gleich 1,67 Volt war. Neuere Untersuchungen von Nernst (1897), Glaser und Bose (1898) ermöglichten eine genauere Bestimmung eines jeden von den beiden Teilen dieser Größe. Die genannten Forscher gaben der einen Elektrode eine möglichst große, der anderen eine möglichst kleine Oberfläche; die Polarisation der ersten konnte man gleich Null setzen. Sie fanden, daß die Kurve, welche die Intensität des durch das Voltameter gehenden Stromes (des oben erwähnten Reststromes) als Funktion von E darstellt, mehrere Absätze hat, bei denen die Geschwindigkeit, mit welcher die Stromstärke anwächst, plötzlich sich vergrößert. Dieser Umstand kann durch einen Zerfall des Elektrolyten in verschiedenartige Ionen erklärt werden, beispielsweise kann H_2O in H_2 und O oder in HO und H zerfallen, H_2SO_4 kann die Ionen H_2 und SO_4 oder H und HSO_4 geben.

Wie erwähnt, kann ein polarisiertes Voltameter als eine Vereinigung von zwei Kondensatoren angesehen werden; der Elektrolyt und beide Innenflächen befinden sich auf demselben Potential, wobei jedoch der Elektrolyt keineswegs als analog einem Leiter betrachtet werden kann, welcher die Oberflächen der beiden Kondensatoren verbindet. Dieses geht schon aus dem Umstande hervor, daß die Entladung des polarisierten Voltameters nicht plötzlich erfolgt, sondern relativ sehr langsam. Mit Untersuchung der Kapazität eines Voltameters haben sich vornehmlich beschäftigt Colley (1879), Blondlot, Oberbeck, Collin, Bouty, Lietzau, F. Kohlrausch, M. Wien, Gordon (1897), Sokolow (1896) und Krüger (1903). Colley hat bewiesen, daß das Voltameter keinesfalls als einfacher Kondensator betrachtet werden kann, wie man früher glaubte, sondern daß es, wie oben gesagt war, einem System von zwei Kondensatoren entspricht.

Es sei q die Kapazität des Kondensators, η seine Ladung, V die Potentialdifferenz der beiden Kondensatorflächen; im vorliegenden Falle

ist V nichts anderes als die elektromotorische Kraft e der Polarisation des Voltameters. Die Kapazität eines gewöhnlichen Kondensators ist eine konstante Größe und hängt, wie wir gesehen haben, nur von der Form und den Dimensionen des Kondensators ab; sie wird durch die Formel $q = \eta : V$ bestimmt. Für das Voltameter müßte $q = \eta : e$ sein. Mißt man aber für verschiedene Werte der Polarisation e diejenige Elektrizitätsmenge η, welche bei seiner Ladung in das Voltameter einströmt und bei der Entladung des Voltameters durch den Stromkreis des Polarisationsstromes hindurchgeht, so findet man, daß die Kapazität q des Voltameters keine konstante Größe ist, sondern von der Polarisation e abhängt. Man hat somit in diesem Falle von der Kapazität q des Voltameters bei der Polarisation e zu reden und sie gleich

$$q = \frac{d\eta}{de} = f(e) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

zu setzen. Blondlot (1881) hat zuerst die Abhängigkeit der Kapazität q von der Polarisation e untersucht. Er fand, daß die Kapazität zugleich mit der Polarisation e wächst und hat den Begriff der Kapazität q_0 bei unendlich kleinem e eingeführt, die er als die Anfangskapazität des Voltameters bezeichnete. Blondlot zog aus seinen Beobachtungen den Schluß, daß die Anfangskapazität q_0 bei Platinelektroden weder von der Richtung (dem Vorzeichen) der Polarisation, noch auch von der Natur des Elektrolyten, sondern nur von der Größe e abhängt. Dem absoluten Werte nach war die kleinste gemessene Kapazität eines Voltameters gleich der Kapazität eines ebenen Kondensators, dessen Oberflächen voneinander um ein Milliontel Millimeter abstehen. Oberbeck (1883) hat ein entgegengesetztes Resultat gefunden, nämlich, daß die Kapazität eines Voltameters sowohl vom Elektrolyten, als auch von der Elektrodensubstanz abhängt.

Die Kapazitätsänderung bei Zunahme der Polarisation, d. h. bei Zunahme der Zeitdauer, während welcher die angreifende elektromotorische Kraft E auf das Voltameter einwirkt, erklärt sich aus den sekundären Erscheinungen, welche die Polarisation begleiten: Hierher gehören: Absorption von Gasen durch die Elektrodensubstanz (Okklusion), Lösung und Diffusion von Gasen und in einigen Fällen Einwirkung von Gasen, welche im Elektrolyten gelöst sind (Sauerstoff der Luft oder Gase, die sich bei vorherigen Versuchen gelöst hatten) und endlich sekundäre chemische Prozesse, welche sich an der Elektrodenoberfläche abspielen. Als Endresultat aller genannten Erscheinungen ergibt sich eine mehr oder weniger ununterbrochene Depolarisation der Elektroden, diese aber zieht eine Zunahme jener Kapazität nach sich, welche durch den Strom gemessen wird, der das Voltameter ladet oder entladet. Wiedeburg (1894) hat auf theoretischem Wege den Einfluß von sekundären

Wirkungen auf die Polarisation betrachtet. Er gibt für die Kapazität des Voltameters den Ausdruck

$$q = \frac{c}{1 - \frac{e}{e_m}}$$

in welchem c eine Konstante bedeutet, e_m aber der Maximalwert der Polarisation ist, für welchen die Kapazität theoretisch genommen unendlich groß wird. M. Wien (1896), Sokolow (1897) und Gordon (1897) haben die Kapazität des Voltameters auf experimentellem Wege untersucht. Sokolow macht die Annahme, daß die wahre Kapazität der Polarisation, die nur von den sich an den Elektrodenoberflächen bildenden elektrischen Doppelschichten abhängt, bedeutend geringer ist als die Kapazitäten, welche durch Messung des ladenden oder entladenden Stromes ermittelt werden. Gordon maß die Kapazität mittels der Wheatstoneschen Brücke nach der Methode von Nernst, wobei er Wechselströme in Anwendung brachte. Er fand unter anderem, daß platiniertes Platin eine viel größere Kapazität als reines Platin gibt, was mit dem soeben Dargelegten übereinstimmt.

Der oben erwähnte Reststrom, der selbst bei den geringsten elektromotorischen Kräften das Voltameter durchsetzt, wird ebenfalls durch die sekundären Wirkungen erklärbar. Es kann z. B. gelöster Sauerstoff (nicht das Ion) von der Kathode negative Elektrizität erhalten, d. h. sich in das Ion verwandeln und mit den Wasserstoffionen zusammen Wasser bilden. Auch die übrigen oben erwähnten Erscheinungen können eine ununterbrochene Depolarisation, d. h. Abnahme der Polarisation hervorrufen, die dann ebenso kontinuierlich durch neue Ströme von Ionen, welche nach den Elektroden hinwandern, wieder hergestellt wird. Die Bewegung dieser Ionen stellt den Reststrom dar.

Welches die Rolle ist, die bei den Erscheinungen der Elektrolyse die im Elektrolyten gelösten oder von den Elektroden absorbierten, sowie von einer Elektrode zur anderen hin diffundierenden Gase spielen, hat Helmholtz klargelegt; er bezeichnete die Ströme, welche das Voltameter durchsetzen, während an demselben eine sehr geringe elektromotorische Kraft angreift, als Konvektionsströme. Speziell den Einfluß der Absorption des Wasserstoffs durch eine Platinelektrode hat Witkowski auf theoretischem und experimentellem Wege untersucht. Er findet, daß die Intensität J des Stromes, welcher das Voltameter durchfließt, nachdem die Zeit t seit der Stromschließung verstrichen ist, durch eine Formel von der Gestalt

$$J = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} + \beta$$

gegeben wird, wo α unter anderem von der Geschwindigkeit abhängt, mit welcher der Wasserstoff in das Platin eindringt. War der ladende

Stromkreis während der Zeit ϑ geschlossen und wird darauf der Stromkreis des Voltameters geschlossen, so wird die Intensität J' des Polarisationsstromes nach Ablauf der Zeit t seit seinem Auftreten durch eine Formel von der Gestalt

$$J' = \frac{\alpha}{\sqrt{t}} - \frac{\alpha}{\sqrt{t+\vartheta}} - \delta$$

gegeben. Die Versuche haben die Richtigkeit dieser Formeln, in denen β dem konstanten Reststrome entspricht und δ von den vorhergegangenen Ladungen des Voltameters abhängt, bestätigt.

Wenn man das Voltameter hermetisch abschließt, aus der Flüssigkeit und den Elektroden den Sauerstoff und Wasserstoff vollkommen entfernt und darauf das Voltameter in einen Stromkreis bringt, in welchem eine schwache elektromotorische Kraft wirkt, so geht die Stromstärke schnell bis auf Null herab; ein kontinuierlicher Reststrom kann, wie Helmholtz gezeigt hat, unter solchen Verhältnissen nicht mehr bestehen. Im nächstfolgenden Paragraphen werden wir sehen, zu welchen Resultaten Helmholtz gelangt ist, indem er die sich im Voltameter abspielenden Erscheinungen unter Heranziehung von thermodynamischen Betrachtungen theoretisch untersuchte. Weitere, tiefer eindringende Untersuchungen über dieses Gebiet hat Sokolow (1896) angestellt.

Ostwald hat, ausgehend von der elektrolytischen Dissoziationstheorie, den mechanischen Vorgang beim Auftreten der Polarisation eingehender verfolgt. Er unterscheidet mehrere besondere Fälle. Der einfachste Fall liegt vor, wenn sich ein Metall in der Lösung eines seiner Salze befindet. In diesem Falle ist eine Doppelschicht vorhanden, welche dem Unterschiede zwischen der Lösungstension (S. 196) und dem osmotischen Drucke das Gleichgewicht hält. Vergrößert man das Potential der Elektrode, so treten die positiven Kationen aus dieser Elektrode heraus; wenn man dagegen ihr Potential vermindert, so gehen die Kationen aus der Flüssigkeit auf die Elektrode über. Beide Wirkungen dauern so lange fort, bis die frühere Potentialdifferenz erreicht ist. Eine Polarisation, welche nach dem Stromdurchgange bestehen bleibt, kommt gar nicht zu stande. Sind jedoch im Elektrolyten gar keine Kationen aus der Elektrodensubstanz vorhanden (Kohle, Platin) und man verleiht dieser Elektrode irgend ein positives Potential, so bildet sich eine elektrische Doppelschicht, deren eine Seite aus Anionen besteht. Teilt man dagegen der Elektrode ein negatives Potential mit oder verringert man ihr positives Potential, so entfernt sich ein Teil der Anionen von der Elektrodenoberfläche. Auf diese Art entsteht eine neue Potentialdifferenz zwischen der Elektrode und dem Elektrolyten und hierin besteht die Erscheinung der Polarisation.

Nernst betrachtet das Polarisationsvoltameter als Konzentrationselement, wie bereits auf S. 201 erwähnt war. Die elektro-

motorische Kraft der Polarisation wird durch Formel (42), S. 196, gegeben. Salomon (1897) hat die Nernstsche Theorie weiter entwickelt und hierbei auf die innerhalb des Elektrolyten auftretende Diffusion Gewicht gelegt. Er hat für die Stärke des Reststromes eine Formel abgeleitet, deren unvollkommene Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen er durch die Annahme erklären zu können glaubt, daß die Elektrolyte ein gewisses, freilich sehr geringes metallisches Leitvermögen besitzen, das $2{,}4 . 10^{-5}$ ihrer elektrolytischen Leitfähigkeit nicht übertrifft. Experimentell und theoretisch hat auch Rothé (1894) die Polarisationserscheinungen studiert.

Wir wollen an dieser Stelle die sonderbare Erscheinung der Passivität einiger Metalle besprechen, die bis vor relativ kurzer Zeit ganz klar und einfach erschien und in einigen besonderen Formen in nächster Beziehung zu den Erscheinungen der Polarisation zu stehen schien. Die betreffende Erscheinung besteht darin, daß einige Metalle, namentlich Eisen, Nickel, Kobalt und Chrom, sich in zwei verschiedenen Zuständen befinden können, die man als den aktiven und passiven Zustand bezeichnet hat. Die Passivität ist zuerst am Eisen entdeckt und untersucht worden. Passives Eisen unterscheidet sich von gewöhnlichem Eisen hauptsächlich durch folgende beiden Eigenschaften: erstens erweist es sich, wenn es in einer Lösung von Schwefelsäure oder einer anderen Säure neben gewöhnliches (aktives) Eisen gebracht wird, als elektropositiv, so daß ein Strom erhalten werden kann, der außerhalb der Flüssigkeit vom passiven Eisen zum aktiven geht. Zweitens löst sich passives Eisen in verdünnter Salpetersäure, deren Dichte ungefähr gleich 1,3 ist und die eine sehr kräftige Wirkung auf aktives Eisen ausübt, nicht auf.

Die Umwandlung von aktivem Eisen in passives erfolgt, wenn man ersteres auf kurze Zeit in konzentrierte Salpetersäure taucht, ferner, wenn aktives Eisen die Rolle der Anode spielt, auf der sich Sauerstoff abscheidet; endlich, wenn man Eisen an freier Luft zum Glühen erhitzt. Alle diese Fälle machten, wie es schien, vollkommen klar, daß die Passivität durch eine dünne Oxydschicht hervorgerufen wird, die sich an der Metalloberfläche bildet. Diese Schicht schützt das Eisen vor der Einwirkung der Säure und nähert das Eisen den elektropositiven Stoffen, wie Platin, die Superoxyde usw. In vollem Einklange mit einer solchen Erklärung steht die Tatsache, daß die Passivität verschwindet, wenn passives Eisen auch nur kurze Zeit als Kathode im Voltameter gedient hat, so daß eine Desoxydation der Oberflächenschicht durch den sich abscheidenden Wasserstoff erfolgen konnte. Noch überzeugender schien das Verschwinden der Passivität beim Abschaben der oberflächlichen Schicht etwa mittels Schmirgelpapier oder beim Erhitzen von passivem Eisen in einem Wasserstoffgebläse zu sein.

Allein diese Erklärung der Passivität des Eisens und anderer Metalle läßt sich wohl kaum noch aufrecht erhalten, nachdem eine

ganze Reihe von Arbeiten, wie diejenigen von Hittorf, Finkelstein, Micheli, W. Müller, W. Müller und Königsberger, Ostwald u. a. über diese Frage erschienen ist. In seiner ersten Arbeit über inaktives (passives) Chrom hat Hittorf (1899) an einer ganzen Reihe von Versuchen gezeigt, daß die Aktivität und Passivität, welche das Chrom gewissermaßen in ein Edelmetall verwandelt, nicht durch die Anwesenheit einer Oberflächenschicht von oxydiertem Metall erklärt werden können. Er fand, daß gerade dann, wenn das Chrom mit einer Oxydschicht bedeckt ist, es aktiv erscheint. In einer zweiten Arbeit (1900) hat Hittorf das Eisen untersucht, seine Eigenschaften mit denen des Chroms verglichen und gezeigt, daß auch die Passivität des Eisens nicht durch eine oxydierte Oberflächenschicht bedingt sein kann. Man muß zu der Annahme greifen, daß sich die Moleküle beim passiven Metalle in einem gewissen Zwangszustande befinden, dessen Wesen noch durchaus nicht enträtselt ist. Die Versuche von Finkelstein (1901) haben die von Hittorf gefundenen Resultate vollauf bestätigt. Micheli hat durch optische Untersuchung des reflektierten Lichtes bewiesen, daß gerade das aktive Eisen mit einer Oxydschicht bedeckt ist. Fredenhagen (1903, 1905) hat die Vermutung ausgesprochen, daß die Passivität eine Folge der Absorption (Okklusion) des Sauerstoffs durch die Oberflächenschicht des Eisens ist. Zu demselben Resultate sind auch Muthmann und Fraunberger (1904) gelangt, welche fanden, daß außer dem Fe, Ni, Cr und Co auch Nb, V, Mo, W und Ru die Erscheinung der Passivität zeigen. Hollis (1904) hat gezeigt, daß es für jedes Metall eine Temperatur gibt, oberhalb welcher der passive Zustand durch eine Säure nicht hervorgerufen wird (für Fe 100°, Ni 80° usf.). Haber und Goldschmidt, sowie Gordon und Clark haben sich in neuester Zeit (1906) wiederum für die Theorie der Oxydschicht ausgesprochen. Auf die bemerkenswerten Ostwaldschen Untersuchungen der periodischen Erscheinungen, welche die Auflösung des Chroms in Säuren begleiten und mit den soeben betrachteten Erscheinungen in Beziehung stehen, werden wir nicht näher eingehen, da man, wie Ostwald gezeigt hat, die Ansicht, daß sie mit den elektrolytischen Erscheinungen in engem Zusammenhange stehen, aufgeben muß.

Zum Schluß sei noch daran erinnert, daß die Polarisation des Quecksilbers und die elektrokapillaren Erscheinungen ausführlich auf S. 201 bis 212 behandelt worden sind.

§ 8. Hydroelektrische (galvanische) Elemente. Normalelemente. Als wir die Berührung von Körpern als Quelle für das Auftreten eines elektrischen Feldes betrachteten, haben wir (S. 174) den Begriff des galvanischen oder, wie man es sonst nennt, des hydroelektrischen Elementes kennen gelernt. Wir gaben die Schemata (S. 174) der verschiedenen möglichen Kombinationen von Leitern erster und

zweiter Ordnung, welche ein galvanisches Element bilden können und sahen, in welcher veränderten Form sich auf mehrere verschiedenartige Elemente eine dem Voltaschen Gesetze analoge Gesetzmäßigkeit beziehen läßt (S. 175). Es sei hier noch bemerkt, daß die Leiter zweiter Ordnung, welche in den Elementen vorkommen, der Einfachheit halber gewöhnlich kurz als „Flüssigkeiten“ bezeichnet werden, so daß man z. B. zwischen Elementen mit einer und mit zwei Flüssigkeiten unterscheidet. Des Beispiels halber haben wir (S. 176) das Daniellsche Element beschrieben. Ferner haben wir gesehen, daß die elektromotorische Kraft E eines Elementes numerisch gleich der Potentialdifferenz an den Enden einer regelrecht offenen Kette, d. h. einer solchen Kette ist, an deren Enden sich gleichartige Substanzen (in der Praxis gewöhnlich Kupfer) befinden. Die Größe E ist gleich der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche an den Berührungsflächen der das Element bildenden ungleichartigen Stoffe wirken. Wie wir gesehen haben, ist die Frage nach dem relativen Werte dieser Teile von E bis jetzt noch nicht gelöst. Die Methoden zur Messung von E werden wir später kennen lernen. Ferner haben wir diejenigen Eigenschaften der Größe E betrachtet, welche sich aus ihrer Definition ergeben (S. 179), sowie diejenigen, welche auf thermodynamischem Wege gefunden werden können, wenn man voraussetzt, daß das Strömen der Elektrizität durch das Element nur von umkehrbaren Prozessen in demselben begleitet ist (S. 182—186).

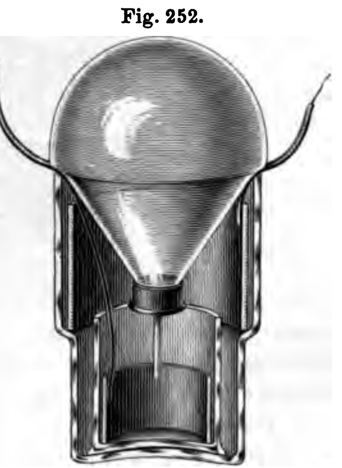
In den vorhergehenden Paragraphen dieses Kapitels haben wir uns eingehend mit den Erscheinungen der Elektrolyse bekannt gemacht. die man beobachtet, wenn ein Elektrolyt, d. h. ein Leiter zweiter Art, in den Stromkreis gebracht wird. Da bei geschlossener Kette, wo das Element die Stromquelle bildet, der Strom auch durch das Element selbst hindurchgehen muß, so müssen innerhalb des Elementes alle diejenigen Erscheinungen auftreten, welche als Begleiterscheinungen auftreten würden, falls man das Element als System von verschiedenartigen Substanzen in den Kreis irgend eines anderen Stromes einführen würde. Es müssen mit anderen Worten, während das Element in Wirkung ist, in demselben jene elektrolytischen Erscheinungen auftreten, die wir im Vorhergehenden betrachtet haben. Wie alle Körper. die in den Stromkreis gebracht sind, so besitzt auch das Element einen bestimmten Widerstand, und zwar bisweilen einen recht beträchtlichen. Innerhalb des Elementes können auch Polarisationserscheinungen auftreten, wie sie im vorhergehenden Paragraphen betrachtet worden sind. In Elementen mit einem Elektrolyten ist Polarisation, also auch Abnahme der elektromotorischen Kraft, fast unvermeidlich.

Heutzutage, wo man fast allerorten Ströme von Maschinen oder Akkumulatoren (s. u.) zur Verfügung hat, spielen Elemente nicht mehr die Rolle wie früher. Wir können uns daher auf einen kurzen Über-

blick über die interessantesten von ihnen beschränken; etwas näher werden wir auf die sogenannten Normalelemente und die photoelektrischen Elemente eingehen und schließlich noch in Kürze auf die Akkumulatoren zu sprechen kommen.

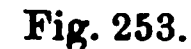
Das Daniellelement. Auf S. 176 haben wir bereits auf die Bestandteile (Cu—$CuSO_4$—$ZnSO_4$—Zn—Cu) dieses Elementes hingewiesen. Das Zink wird in diesem, wie auch in anderen Elementen mit Vorteil amalgamiert. An genanntem Orte haben wir eine der gebräuchlichen Formen dieses Elementes beschrieben und abgebildet (Fig. 77); ist es in Tätigkeit, so wird das $CuSO_4$ zerlegt, wobei das Cu auf dem Kupferzylinder abgeschieden wird; SO_4 geht zum Zink über, das sich auflöst, wobei sich $ZnSO_4$ bildet. Die elektromotorische Kraft des Daniellelementes beträgt etwas über 1 Volt.

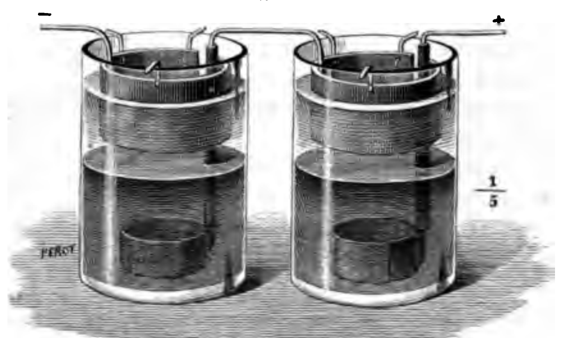
Fig. 252.



Es gibt eine große Anzahl von Modifikationen des Daniellelementes, von denen einige im Telegraphenwesen in Gebrauch sind. Meist wird die poröse Zelle fortgelassen: die schwerere Kupfersulfatlösung wird in den unteren Teil des Gefäßes gefüllt und unmittelbar darüber eine Lösung von Schwefelsäure oder Zinksulfat gebracht. Zu den genannten Modifikationen gehört auch das Meidingersche Element, das besonders in Rußland verbreitet ist. Fig. 252 stellt dasselbe im Querschnitt dar. Es besteht aus einem Glasgefäß, dessen obere Hälfte einen größeren Durchmesser hat als die untere; in den unteren Teil ist ein kleines Glas gestellt, welches eine $CuSO_4$-Lösung und einen Kupferzylinder enthält, von welchem ein isolierter Kupferdraht nach außen führt. Auf den oberen Rand des größeren Glasgefäßes stützt sich ein Glasballon, in welchem Wasser und eine größere Menge von $CuSO_4$-Kristallen enthalten sind; die gesättigte $CuSO_4$-Lösung fließt durch eine Röhre in das innere Glasgefäß in dem Maße herab, wie die Lösung in diesem Gefäße zersetzt wird. Das große Gefäß wird mit Bittersalzlösung gefüllt; der Zinkzylinder stützt sich auf den inneren vorspringenden Rand des großen Glasgefäßes. Andere Modifikationen des Daniell-Elementes sind die Elemente von Buff, Kramer, Carré, W. Thomson, Siemens u. Halske, Varley, Minotto, Trouvé, Callaud, Krüger u. a. Das überaus einfache Element von Callaud, das in Frankreich verbreitet ist, ist in Fig. 253 (a. f. S.) abgebildet; das Glasgefäß enthält in seinem unteren Teile eine $CuSO_4$-Lösung und eine Kupferplatte, von der ein durch Guttapercha isolierter Draht ausgeht; im oberen Teile

des Glasgefäßes hängt ein Zinkring in verdünnter $ZnSO_4$-Lösung. Von Interesse ist auch das alte **Buff**sche Element (Fig. 254); in seinem unteren Teile enthält dasselbe Quecksilber, in welches ein durch eine Glasröhre *d* hindurchgehender Zinkstab hineinragt; über dem Queck-


Fig. 253.



silber befindet sich $ZnSO_4$-Lösung. Die weite Röhre *c*, die unten mit Tierblase bespannt ist, enthält $CuSO_4$-Lösung und ein Stäbchen aus Kupfer; die Röhre *b* ist beiderseits offen.

Das **Leclanchéelement** ist in Frankreich sehr verbreitet: es wird in zwei Formen verfertigt. Seine Bestandteile sind: Zink, umgeben von

Fig. 254.

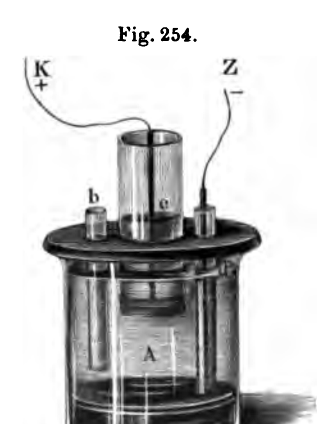


Fig. 255.



einer Salmiaklösung und Kohle, die mit Mangansuperoxyd in Berührung steht. In Fig. 255 ist ein Leclanchéelement der ersten Form abgebildet, es besteht aus einer Tonzelle, in der sich ein Kohleprisma und ein Gemenge aus Kohle und Braunstein befinden; im äußeren

Glasgefäße befindet sich Salmiaklösung und ein Zinkstab. In den Elementen des zweiten Typus mit „Agglomerat“, ohne poröse Zelle, befinden sich die Kohle sowie der Zinkstab in einer Salmiaklösung; die Kohle ist umgeben von einer Masse aus Braunstein, Kohle (oder Graphit) und Schellack, die bei 250° gepreßt ist. Bisweilen werden Platten aus dieser Substanz an dem Kohlestab mittels Gummiringen befestigt.

Bei Wirkung des Leclanchéelementes wird $2\,NH_4Cl$ zersetzt, wobei sich Cl_2 auf dem Zink ausscheidet und sich $ZnCl_2$ bildet; $2\,NH_4$ zerfällt in $2\,NH_3$, das in Lösung bleibt, und H_2, welches das MnO_2 desoxydiert, wobei sich Wasser und MnO bilden. Als Depolarisator wirkt demnach MnO_2. Die elektromotorische Kraft des Leclanchéelementes beträgt ungefähr 1,6 Volt.

Das Element von Lalande und Chaperon besteht aus einem großen, aber niedrigen Gefäße aus Eisenblech, das als positiver Pol dient. Auf dem Gefäßboden befindet sich eine Schicht von schwarzem Kupferoxyd (CuO), das als Depolarisator wirkt. Das Gefäß ist mit KHO-Lösung gefüllt und enthält in seinem oberen Teile eine horizontale Zinkplatte, die sich auf die in den Ecken des Gefäßes befindlichen Isolatoren aus Fayence stützt. Es gibt verschiedenartige Modifikationen dieses Elementes. Ist es in Tätigkeit, so spielt sich in ihm folgender Vorgang ab:

$$Zn + 2\,KHO + CuO = K_2O_2Zn + H_2O + Cu,$$

d. h. das Kupferoxyd wird reduziert, das Zink aber verwandelt sich in die leicht lösliche Verbindung K_2O_2Zn. Die elektromotorische Kraft beträgt ungefähr 1 Volt. Man kann dieses Element als Akkumulator (s. u.) benutzen: ist alles CuO reduziert, so kann man abermals CuO erzeugen und Zink niederschlagen, wenn man durch das Element einen Strom einer anderen Stromquelle in der Richtung vom Eisen zum Zink sendet.

Warren de la Rue und Müller haben ein Element gebaut, in dem als Depolarisator $AgCl$ dient. Es besteht aus einem kleinen Glasgefäße mit $NaCl$-Lösung; in diese tauchen ein Zinkstab und ein Silberdraht, dessen unteres Ende von einem Stäbchen (von 54 mm Länge und 7,6 mm Dicke) aus angeschmolzenem Chlorsilber umgeben ist. Warren de la Rue und Müller haben eine Batterie aus 11000 derartigen Elementen hergestellt. Ist das Element in Tätigkeit, so wird $2\,NaCl$ zerlegt, wobei sich $2\,Cl$ zum Zink begibt und $ZnCl_2$ bildet, während $2\,Na$ mit Wasser $2\,NaHO$ bildet; die nachgebliebenen $2\,H$ geben mit $2\,AgCl$ Salzsäure und das Silber wird frei. HCl und $NaHO$ bilden abermals Wasser und $NaCl$. Vielleicht wirkt auch das sich ausscheidende Na unmittelbar auf das $AgCl$ ein, indem es $NaCl$ und Ag bildet. Die elektromotorische Kraft des Elementes beträgt ungefähr 1 Volt.

Das Grovesche Element enthält Zink in H_2SO_4-Lösung und Pt in Salpetersäure, die als Depolarisator wirkt. Der sich auf dem Pt ausscheidende Wasserstoff desoxydiert die Salpetersäure, wobei sich N_2O_4, das sich in der übrigen Säure auflöst, und andere Oxyde des Stickstoffs bilden. Poggendorff hat dies Element etwas modifiziert; seine elektromotorische Kraft beträgt 1,6 Volt.

Im Bunsenelemente ist das teuere Platin durch einen Zylinder aus Preßkohle ersetzt.

In den Elementen „mit Chromsäure" dient als Depolarisator Chromsäure, die jedoch in reinem Zustande nicht gebraucht wird, sondern durch verschiedene Lösungen von Kaliumbichromat und Schwefelsäure ersetzt wird, wobei das Gewichtsverhältnis dieser beiden Substanzen ein verschiedenes sein kann. Bunsen empfiehlt 3 Tle. $K_2Cr_2O_7$ und 4 Tle. $H_2SO_4 + H_2O$ auf 18 Tle. Wasser zu nehmen; andere empfehlen 12 Tle. Salz und 25 Tle. Säure auf 100 Tle. Wasser zu nehmen. Bunsen hat Elemente mit zwei Flüssigkeiten hergestellt; Zn in H_2SO_4-Lösung und Kohle in Chromlösung. Beim Betriebe dieses Elementes können sehr verschiedene Reaktionen auftreten, je nach der Zusammensetzung der Chromflüssigkeit und vielleicht auch je nach der Stromstärke. Als Depolarisator wirkt hier die Chromsäure, die sich aus dem $K_2Cr_2O_7$ entwickelt, wobei sich Chromsalze und bisweilen auch Chromalaun bildet. Von den verschiedenen Reaktionen, deren Auftreten man mehr oder weniger sicher vermutet, nennen wir die beiden folgenden:

$$3\,Zn + K_2Cr_2O_7 + 6\,H_2SO_4$$
$$= 3\,ZnSO_4 + Cr_2S_2O_9 + K_2SO_4 + 6\,H_2O,$$
$$3\,Zn + K_2Cr_2O_7 + 7\,H_2SO_4$$
$$= 3\,ZnSO_4 + Cr_2S_3O_{12} + K_2SO_4 + 7\,H_2O.$$

Sehr verbreitet ist das Element von Grenet mit einer Flüssigkeit: es besteht aus einer Flasche (Fig. 256), in welcher die Chromlösung enthalten ist. An den Hartgummideckel sind zwei Kohleplatten KK angeschraubt; die Zinkplatte Z ist an einem Stabe befestigt, den man so in die Höhe ziehen kann, daß sich das Zink oberhalb der Flüssigkeit befindet, wenn das Element außer Tätigkeit gesetzt ist. Senkt man die Zinkplatte, so gibt das Element eine bedeutende elektromotorische Kraft (bis zu 2 Volt), die jedoch sehr bald sinkt; dieses Element wendet man vorteilhaft dann an, wenn es sich darum handelt, einen starken Strom auf kurze Zeit zu erhalten.

Warren hat ein Element gebaut, das eine elektromotorische Kraft von 3 Volt besitzt (Zink, borhaltige Kohle und Mangansalzlösung).

Jablotschkoff hat eine ganze Reihe von Elementen konstruiert, die freilich für die Praxis unbrauchbar sind, dafür aber theoretisches Interesse bieten. So hat er z. B. ein Element aus aufeinander gelegten

Platten von C und Na zusammengestellt, das durch die Luftfeuchtigkeit zur Wirkung kam und 4 Volt gab. Ferner schmolz er $NaNO_3$ in einem Topfe aus Gußeisen und senkte in denselben ein Kohlestäbchen hinein. Hierbei oxydierte sich die Kohle auf Kosten des Salpetersauerstoffs und bildete, während das Element in Betrieb war, den negativen Pol, wogegen das Gußeisen sich als positiv erwies. Ein ähnliches Element (Pt, KNO_3, C) hatte A. Becquerel bereits 1855 konstruiert.

Fig. 256.



Andere Erfinder haben die unmittelbare Oxydation der Kohle bei gewöhnlicher Temperatur zu benutzen gesucht. So hat z. B. Tommasi (1904) ein Element gebaut, in welchem der positive Pol aus Kohle besteht, die von Bleisuperoxyd umgeben ist, der negative aber ebenfalls aus Kohle, umgeben von einer konzentrierten NaCl-Lösung. Ist die Kette geschlossen, so zersetzt die Kohle das Wasser ($C + 2H_2O = CO_2 + 4H$), der Wasserstoff aber desoxydiert das Superoxyd ($PbO_2 + 4H = Pb + 2H_2O$). Dieses Element gibt ungefähr 0,7 Volt. Ein Element mit Kohle, das bei hoher Temperatur wirkt, hat Jone (1905) konstruiert.

Bei den Gaselementen werden wir uns nicht aufhalten, da von diesen bereits auf S. 239 und 240 das Wesentlichste mitgeteilt worden ist. Wir wollen nur hinzufügen, daß neuere Messungen von Lewis (1906) für die elektromotorische Kraft des $O_2 - H_2$-Elementes in beliebigem Elektrolyte den Wert 1,217 Volt ergeben haben, welcher bedeutend größer ist, als der bisher angenommene (1,07 Volt nach Smale); er stimmt aber ausgezeichnet mit dem von Nernst (1905) theoretisch gefundenen 1,23 Volt.

Außerordentlich verbreitet, namentlich im Hausgebrauche, sind die sogenannten Trockenelemente, die man übrigens mit mehr Recht als feuchte Elemente bezeichnen könnte; der Elektrolyt besteht in ihnen aus einer pulverförmigen, bisweilen indifferenten Masse, die von der betreffenden Flüssigkeit durchtränkt ist.

Vom Gravitationselemente des russischen Physikers Colley wird im späteren die Rede sein.

Wenden wir uns jetzt der sehr wichtigen Frage nach den Normalelementen zu; eine eingehende Beschreibung derselben kann man im Werke von Jäger, „Die Normalelemente", Halle 1902, finden; hier, sowie in der Abhandlung von Gouy (s. die Literatur) ist eine ausführliche Übersicht über die von diesen Elementen handelnden Arbeiten enthalten.

Als Normalelemente bezeichnet man solche Elemente, die als Etalons der elektromotorischen Kraft dienen können. Man sieht leicht ein, welchen Bedingungen sie genügen müssen. Zunächst muß es möglich sein sie nach einem bestimmten, genau festgesetzten Schema herzustellen; hierher gehören genaue Angaben darüber, auf welche Art die Substanzen hergestellt sein müssen, aus denen das Element besteht. Ein auf diese Weise hergestelltes Element muß eine ganz bestimmte und genau festgesetzte (in Volt) elektromotorische Kraft haben, deren Abhängigkeit von der Temperatur mit möglichster Genauigkeit bestimmt sein muß und sich nicht ändern darf, wenn durch das Element in der einen oder anderen Richtung ein Strom fließt, dessen Stärke einen festgesetzten Maximalwert nicht übersteigt.

Die letztere Bedingung kann nur dann erfüllt werden, wenn die Zusammensetzung des Elementes während des Stromdurchganges keinerlei Änderungen unterliegt, weder chemischen, noch auch physikalischen, wozu beispielsweise eine Konzentrationsänderung gehört. Das Element muß vollkommen umkehrbar sein, es muß also ein im stabilen Gleichgewichte befindliches System (Bd. III) repräsentieren, dessen Phasen sich während des Stromdurchganges nur quantitativ ändern.

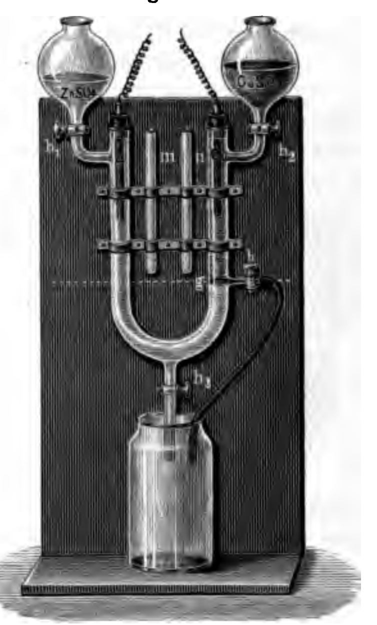
Den genannten Bedingungen genügt in gewissem Grade das Daniellelement, wenn das Zink von gesättigter $ZnSO_4$-Lösung umgeben ist und im Überflusse $CuSO_4$- und $ZnSO_4$-Kristalle vorhanden sind (für den Fall, daß der Strom durch das Element vom Cu zum Zn fließt). Hier bildet aber einen Mangel die leichte Löslichkeit des Depolarisators ($CuSO_4$), weshalb man es mit zwei einander berührenden Flüssigkeiten zu tun haben muß, zwischen welchen gegenseitige Diffusion unvermeidlich ist, die ihrerseits offenbar eine Änderung in der Zusammensetzung des Elementes zur Folge hat. Hieraus folgt, daß als Depolarisator ein fester, wenig löslicher, den Strom leitender Körper dienen muß. $AgCl$ (Warren de la Rue) und Hg_2Cl_2 (Helmholtz) sind wenig geeignet, da diese Substanzen den Strom schlecht leiten, weshalb auch nur eine geringe Menge gelöster Substanz die Rolle des Depolarisators spielt. Das große Verdienst von Latimer Clark besteht darin, daß er auf das Hg_2SO_4 als einen Depolarisator hingewiesen hat, welcher in der Tat sämtlichen Anforderungen genügt. Bezeichnet man mit M irgend ein Metall, so erhält man folgendes Schema für ein Normalelement, welches Hg_2SO_4 enthält:

$$M - MSO_4 - Hg_2SO_4 - Hg.$$

Im Elemente von Latimer Clark ist M Zink, im Elemente von Weston Cadmium; wie wir sehen werden, sind diese beiden Elemente die einzigen, welche gegenwärtig als Normalelemente bezeichnet zu werden verdienen, wobei das Westonsche Element besondere Vorzüge besitzt. Wir wollen jedoch in Kürze auch einige andere Elemente betrachten, welche früher als Normalelemente gebraucht worden sind.

Daniellelement könnte, wie wir gesehen haben, als Normal- dienen, wenn es gelänge, die gegenseitige Diffusion der Flüssig- ›llständig zu beseitigen. In dem Bestreben, sie nach Möglich- verringern, haben Raoult, Kittler, Lodge, Crova und Fleming u. a. Normalelemente gebaut. Besonders verbreitet Zeitlang das Element von Fleming (Fig. 257); dasselbe be- s einer U-förmigen Röhre, ıker Schenkel vollständig, hter unterhalb *g* mit $ZnSO_4$- 'von der Dichte 1,3) gefüllt ırend der rechte Schenkel *g* $CuSO_4$-Lösung (Dichte hält. Läßt man Flüssig- ·ch die Seitenröhre *h* ab- so kann man hierdurch die gsfläche zwischen den bei- ıigkeiten vollkommen scharf Ist das Element außer so entfernt man die Zink- ıpferstäbchen *Z* und *Cu* ıgt sie in die Röhrchen *m*

Fig. 257.



Helmholtzsche Calomel- besteht aus Quecksilber, chem sich eine Schicht von :migem Hg_2Cl_2 und eine)prozentige) $ZnCl_2$-Lösung in welche ein Zinkstab Die elektromotorische Kraft ;t hier 1,041 Volt. Negbauer hat diesem Elemente eine be- zweckentsprechende Form gegeben; Richards (1897) hat den turkoeffizienten der Größe *E* bestimmt; Ostwald und Schoop ejenige Konzentration der $ZnCl_2$-Lösung bestimmt, für welche die elektromotorische Kraft $E = 1$ Volt wird.

ı Element von Gouy enthält Hg, HgO, das als Depolarisator ;nSO$_4$ und Zn; *E* beträgt hier 1,4 Volt. Dieses Element ist ıkehrbar, da sich in ihm die neue Substanz Hg_2SO_4 bildet.

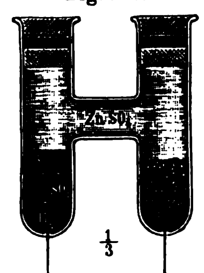
uri (1898) hat ein Element konstruiert, das am Boden eines Glasgefäßes Quecksilber enthält, von welchem ein isolierter ıht ausgeht; innerhalb des Glasgefäßes befindet sich in einer Höhe ein kleineres Glasgefäß, das eine Zinkplatte enthält; von eht ein isolierter Zinkdraht aus. Über dem Quecksilber be- ch ein Gemenge aus Quecksilber und Zinksalzen, im kleinen ße jedoch das gleiche Zinksalz, mit dessen gesättigter Lösung

das Element gefüllt ist. Wählt man essigsaure Salze, so ist $E = 1{,}327$ Volt; der Temperaturkoeffizient von E ist überaus klein.

Wir wenden uns nun den beiden wichtigsten Normalelementen zu, nämlich den Elementen von Latimer Clark und von Weston.

Die Bestandteile des Clarkschen Elementes hatten wir bereits genannt, es sind Hg, Hg_2SO_4, $ZnSO_4$ und Zn. Es existieren mehrere verschiedene Typen dieses Elementes. Die ursprüngliche, von Clark in Vorschlag gebrachte Form, welche in England die Board of Trade angenommen hat, bestand aus einem zylinderförmigen Glase, auf dessen Boden sich Quecksilber befand; über diesem lag eine Paste, die durch Zerreiben eines Gemenges von Hg_2SO_4, $ZnSO_4$ und Quecksilber erhalten worden war. Hierüber befand sich gesättigte $ZnSO_4$-Lösung mit überschüssigen Kristallen von Zinksulfat, eine Paraffinschicht und ein Korkverschluß, durch welchen ein in die $ZnSO_4$-Lösung eintauchender Zinkstab reichte. Vom Quecksilber ging ein isolierter Platindraht nach oben. Eine andere sehr bequeme Form stammt von Rayleigh. Das Element (Fig. 258) hat die Form eines H. In einem der Schenkel befindet sich reines Quecksilber, und über demselben die Paste, im anderen Zinkamalgam (nach Kahle 10 Proz. Zn). Das Gefäß ist mit gesättigter $ZnSO_4$-Lösung gefüllt, deren Kristalle sich außerdem in beiden Schenkeln befinden, wo sie zwei Schichten oberhalb der Paste und des Amalgams bilden. Fernere Modifikationen sind von Kahle, Feussner, Negbauer, Carhard, Callendar und Barnes, Perot und Fabry u. a. in Vorschlag gebracht worden.

Fig. 258.



Mit sorgfältiger Prüfung der Eigenschaften des Clarkschen Elementes haben sich insbesondere M. Iwanow, Kahle, Lindeck, Jäger, Callendar und Barnes, Alder Wright, Glazebrook und Skinner, Marek, Guthe und v. Ende (1907) u. a. beschäftigt. Diese Untersuchungen bezogen sich auf den Grad der Konstanz des Elementes, auf die Größe E und ihre Abhängigkeit von der Temperatur usw. Wir wollen uns bei den älteren Arbeiten nicht aufhalten, sondern bloß die neuesten Resultate mitteilen. Kahle hat gefunden, daß sich das Clarksche Element leicht regenerieren läßt und daß E bis auf 0,01 Proz. konstant ist. Jäger und Kahle (Reichsanstalt) geben für E folgenden Ausdruck (in Volt) an:

$$E_t = 1{,}4328 - 0{,}00119\,(t - 15) - 0{,}000\,007\,(t - 15)^2,$$

wobei die Annahme gemacht ist, daß 1 Amp. 1,118 mg Silber pro Sekunde ausscheidet. Callendar und Barnes fanden

$$E_t - E_{15} = -0{,}001\,200\,(t - 15) - 0{,}000\,006\,2\,(t - 15)^2.$$

M. Iwanow gibt die Formel

$$E_t = 1{,}43289 - 0{,}001\,197\,5\,(t - 15) - 0{,}000\,005\,85\,(t - 15)^2.$$

Bei 0^0 ist $E_0 = 1,4493$ Volt. Guthe und v. Ende (1907) fanden $E = 1,4204$ Volt bei 25^0.

Bei 39^0 verwandelt sich $ZnSO_4 + 7H_2O$ in das leichter lösliche Hydrat $ZnSO_4 + 6H_2O$. Wird das Element dauernd auf einer Temperatur von 40^0 gehalten, so bleibt es auch nach der Temperaturabnahme anormal; der Unterschied in der Größe E beträgt 0,7 Proz. bei 20^0 und 1 Proz. bei 0^0. Durch Kristalle des normalen Hydrats kann man das Element regenerieren.

Wulf findet, daß der innere Widerstand des Clarkschen Elementes sehr beträchtlich von der Temperatur abhängt.

Wenden wir uns jetzt dem sogenannten Cadmiumelemente von Weston zu; seinen Bestandteilen nach unterscheidet es sich von dem Clarkschen Elemente dadurch, daß hier das Zinkamalgam und $ZnSO_4$ durch Cadmiumamalgam und $CdSO_4$ ersetzt sind. Man hat zwischen den Weston-C° und den gewöhnlichen Elementen zu unterscheiden. Diese und jene haben die in Fig. 258 dargestellte Form der Clarkschen Elemente. Das Weston-C°-Element enthält bei 4^0 gesättigte $CdSO_4$-Lösung, so daß die Lösung bei gewöhnlicher Temperatur nicht voll gesättigt ist; außerdem befinden sich innerhalb des Elementes Scheidewände aus Asbest und kanelliertem Porzellan, die einen Transport des Elementes möglich machen. In den gewöhnlichen Elementen ist, ebenso wie in den Clarkschen Elementen, die Lösung gesättigt und ist ein Überschuß von $CdSO_4$-Kristallen vorhanden. Das Cadmiumamalgam muß 10 bis 13 Proz. Cd enthalten, jedoch nicht mehr. Es versteht sich von selbst, daß auch die Paste $CdSO_4$ anstatt des $ZnSO_4$ enthalten muß. Das Weston-Element ist von zahlreichen Forschern untersucht worden, von denen hier Dearlove, Kohnstamm und Cohen, Taylor, Blondin, Henderson, Marek, Cohen, Barnes, Jäger, Wind, Hulett (1907) genannt sein mögen; eine besonders sorgfältige Untersuchung haben Jäger und Lindeck in der Physikalischen Reichsanstalt (Charlottenburg) ausgeführt. Es sei bemerkt, daß bereits Czapski im Jahre 1884 ein Cadmiumelement konstruiert hat, erst Weston aber hat ihm (1892) die Einrichtung gegeben, die für ein Normalelement die geeignete ist.

Cohen hat auf einige Unregelmäßigkeiten hingewiesen, die das Cadmiumelement aufweist; die Untersuchungen von Jäger und Lindeck aber haben ergeben, daß man gegenwärtig dieses Element als dasjenige anzusehen hat, welches den Anforderungen, die man an ein Normalelement stellen muß, am meisten genügt, und daß es zwischen 0 und 40^0 tadellos funktioniert. Der Wert von E liegt für dasselbe nahe bei einem Volt, was ebenfalls von einigem Vorteil ist. Die Abhängigkeit der Größe E von der Temperatur wird für Elemente mit einem Überschusse von $CdSO_4$ durch die Formel

$$E_t = 1,0186 - 0,000038\,(t - 20^0) - 0,00000065\,(t - 20)^2 \text{ Volt}$$

gegeben. Der Temperaturkoeffizient bei 20° ist ungefähr $^1/_{20}$ von demjenigen des Clarkschen Elementes. Für das Weston-C°-Element kann man die Annahme machen, daß E von der Temperatur innerhalb der in der Praxis vorkommenden Grenzen unabhängig ist, und zwar ist

$$E = 1{,}0190 \text{ Volt.}$$

Klemenčič hat gezeigt, daß auch der innere Widerstand des Westonelementes eine bemerkenswerte Konstanz besitzt. Die internationale Konferenz, welche im Oktober 1905 in Berlin getagt hat (leider waren zu ihr nicht Vertreter aller Staaten eingeladen), hat sich zu gunsten des Cadmiumelementes mit überschüssigem $CdSO_4$ ausgesprochen, als des besten gegenwärtig existierenden Normalelementes. Auch in England hat (1904) eine besondere Kommission ausführliche Regeln zur Herstellung der Bestandteile des Cadmiumelementes und seiner besten Einrichtung ausgearbeitet.

Das Verhältnis der elektromotorischen Kräfte des Clarkschen und Westonschen Elementes ist wiederholt bestimmt worden. Die wahrscheinlichsten Werte hierfür sind die folgenden:

$$\frac{\text{Clark } 0^0}{\text{Weston } 20^0} = 1{,}4228; \qquad \frac{\text{Clark } 15^0}{\text{Weston } 20^0} = 1{,}4067.$$

Die letztgenannte Zahl haben unabhängig voneinander einerseits Jäger und Lindeck, andererseits Barnes und Lucas gefunden.

§ 9. Photoelektrische Elemente. Akkumulatoren. Zwei gleichartige Körper (Elektroden), die sich in einem Elektrolyten unter gleichen Bedingungen befinden, können keine Potentialdifferenz aufweisen; für das aus ihnen bestehende Element ist die elektromotorische Kraft $E = 0$; schließt man eine solche Kette, so erhält man überhaupt keinen Strom, es ist also auch $J = 0$. Befinden sich aber die Elektroden unter ungleichen physikalischen Bedingungen, so können E und J von Null verschieden werden. Hierher gehört beispielsweise Kompression einer der Elektroden, sowie Bestrahlung derselben mit einem Strome von strahlender Energie, unter dessen Einwirkung die Elektrodenoberfläche eine Veränderung erfährt, wobei sich auf den Elektroden eine Potentialdifferenz ausbildet und bei Schließung des Stromkreises ein elektrischer Strom auftritt. Ein solches Element heißt ein photoelektrisches. Hört die Bestrahlung der Elektrode auf, so sinkt die in ihm wirkende elektromotorische Kraft E schnell herab, insbesondere, wenn das Element geschlossen ist.

Die ersten umfangreichen Untersuchungen auf diesem Gebiete hat E. Becquerel ausgeführt. Er bedeckte Silberplatten mit einem dünnen Überzug von $AgCl$ und brachte sie in eine schwache H_2SO_4-Lösung; bei Bestrahlung einer derselben trat ein Strom auf, wobei sich am wirksamsten die Strahlen des Sonnenspektrums zwischen den Linien D

und *E* erwiesen. Jegorow hat aus zwei derartigen Elementen ein Differentialphotometer konstruiert; beschrieben und abgebildet ist dasselbe in Bd. II, Kap. 9. Borgmann hat einen sehr bequemen Vorlesungsapparat konstruiert; derselbe besteht aus sieben U-förmigen Röhren, welche einander parallel in einem innen geschwärzten Holzkasten untergebracht sind. Zwischen den Schenkeln der Röhren befindet sich ein Kartonblatt. Die Röhren werden mit einer (2 proz.) H_2SO_4-Lösung gefüllt; als Elektroden dienen jodierte Silberplatten. Schiebt man die Seitenwand des Kastens in die Höhe und bestrahlt die dieser Wand zugekehrten Elektroden, so erhält man am Galvanometer einen Ausschlag.

Ganz reine Metalle sind nicht lichtempfindlich, wie Minchin, G. C. Schmidt, Pellat u. a. gezeigt haben. G. C. Schmidt hat gefunden, daß absolut reines Zn, Cu und Pb nicht lichtempfindlich sind. Sind dagegen die Metalloberflächen vorher chemisch verändert worden, so sind sie im allgemeinen auch lichtempfindlich. Das Gesagte bezieht sich nicht nur auf Metalle, die der Wirkung von Haloiden ausgesetzt worden sind, sondern auch auf Metalle, welche oxydiert worden sind, sich mit Schwefel verbunden haben usw. In diesem Falle können die Platten auch ungleichartig sein; durch die Belichtung einer von ihnen ändert sich die elektromotorische Kraft und zugleich hiermit auch die Stromstärke. Bei intermittierender Belichtung hört man in einem in die Kette eingeschalteten Telephon einen Ton, dessen Höhe der Zahl der Intermittenzen entspricht. Auf dieser Erscheinung beruht das Radiophon von Chaperon und Mercadier; dieselben brachten in angesäuertes Wasser zwei Silberplatten, von welchen die eine rein, die andere mit einer Schicht von Schwefelsilber bedeckt war. Gouy und Rigollot verwandten reines Kupfer und solches, das in einer Salzsäurelösung angesäuert war.

G. C. Schmidt hat die Einwirkung der Belichtung auf Elektroden aus Kupferoxyd in einer NaHO- oder KHO-Lösung sehr sorgfältig studiert. Er fand, daß die Einwirkung sowohl an Größe, als auch ihrem Vorzeichen nach von dem Potential der Platte (in bezug auf die Flüssigkeit) und von der Wellenlänge der einfallenden Strahlen abhängt. Ähnliche Untersuchungen haben Hankel, Rigollot, Allegretti u. a. angestellt. Interessant ist, daß auch eine Goldplatte, welche bei der Elektrolyse des Wassers als Anode gedient und sich mit einem braunen Überzug, wahrscheinlich einer Oxydschicht, versehen hat, lichtempfindlich wird; diese Erscheinung haben Bose und Kochan untersucht; die stärkste Wirkung üben Strahlen aus, deren Wellenlänge zwischen 410 und 478 $\mu\mu$ liegt.

Sabine fand, daß kristallisches Selen im Wasser ebenfalls lichtempfindlich ist; die Potentialdifferenz zwischen der unbelichteten und der belichteten Platte reicht bis zu 0,1 Volt.

Die Abhängigkeit der photochemischen Wirkung von der Wellenlänge ist für verschiedene Stoffe sehr verschieden. So findet z. B. Rigollot die geringste Wirkung für Schwefelsilber in den infraroten, für Jodkupfer aber in den ultravioletten Strahlen.

Eine Theorie der photoelektrischen Elemente haben bereits E. Becquerel und später Griveaux, Luggin, G. C. Schmidt u. a. entworfen. Besonders eingehend hat H. Scholl (1905) die photoelektrischen Erscheinungen am feuchten Jodsilber studiert; er findet, daß beim Belichten mehrere Prozesse sich abspielen, von denen je nach den Umständen der eine oder andere besonders hervortreten kann und zwar findet einerseits ein Dissoziationsvorgang statt, bei welchem außer den Ionen des Jodsilbers wahrscheinlich negative Elektronen entstehen, andererseits bildet sich ein neuer, photoelektrisch erregbarer unbeständiger Körper, der sich leicht in die Ausgangssubstanz umwandelt. Theoretische Untersuchungen, die sich auf die neuere Lehre von den Elementen stützen, hat ferner Wildermann (1905—1907) ausgeführt. Er findet, daß es auch unter den photoelektrischen Elementen konstante und unbeständige, umkehrbare und nicht umkehrbare gibt. Für die verschiedenen möglichen Fälle hat er Formeln der elektromotorischen Kraft E abgeleitet. Ferner hat er theoretisch und durch das Experiment diejenigen Perioden der Variation von E untersucht, welche zu Beginn der Belichtung (Induktionsperiode) und nach Aufhören der Belichtung (Deduktionsperiode) vorhanden sind.

Die photoelektrischen Elemente und die Akkumulatoren oder Polarisationselemente, zu denen wir jetzt übergehen, besitzen einige Eigenschaften, die zwischen ihnen eine gewisse Verwandtschaft erkennen lassen. Sowohl diese als jene befinden sich in inaktivem Zustande, wenn die beiden Platten möglichst gleichartig sind oder eine nur geringe Potentialdifferenz E besitzen. Von außen kommende Energie macht die Platten in solchem Maße ungleich, daß das Element eine bedeutende elektromotorische Kraft erhält. Ein Vorrat an derartiger Energie wird gleichsam in Form chemischer Energie aufgespeichert (akkumuliert) und bei Wirksamkeit des Elementes verausgabt. Bei den photoelektrischen Elementen ist diese äußere Energie die strahlende, bei den Akkumulatoren — die elektrische Energie.

In § 7 haben wir gesehen, daß ein polarisiertes Voltameter eine elektromotorische Kraft E besitzt und einen (Polarisations-) Strom zu liefern vermag; ein solches Voltameter stellt in einfachster Form einen Akkumulator dar. Aber sein Wert für E ist überaus unbeständig und zur Erzeugung von dauernden Strömen ist das Voltameter nicht geeignet. Die Bezeichnung Akkumulator wird gegenwärtig nur für solche Elemente gebraucht, welche, wenn sie geladen, d. h. durch Stromdurchgang polarisiert sind, im Verlauf eines beträchtlichen Zeitraumes einen

selbständigen Strom zu geben imstande sind, wobei sich die Größe E möglichst lange konstant erhalten muß.

Gegenwärtig spielen die Akkumulatoren eine sehr wichtige Rolle, sowohl in der Elektrotechnik, als auch in der Praxis der physikalischen Laboratorien, da sie die bequemste und zuverlässigste Quelle für konstante und zugleich, wenn erforderlich, sehr starke Ströme bilden. Es sei bemerkt, daß bei den gegenwärtig üblichen Akkumulatoren der Wert von E nahe an 2 Volt liegt; der innere Widerstand beträgt im allgemeinen einige Tausendstel Ohm und geht nur selten über 0,01 Ohm hinaus. Somit ist der innere Widerstand einer Akkumulatorenbatterie, die hintereinander geschaltet ist, im allgemeinen sehr gering im Vergleich zu einer ebensolchen aus gewöhnlichen Elementen bestehenden Batterie.

Es gibt gegenwärtig eine große Zahl von Fabriken, welche die Herstellung von Akkumulatoren besorgen; letztere unterscheiden sich voneinander durch ihre innere Einrichtung, die Substanzen, aus denen sie gefertigt werden und durch die Methode der technischen Bearbeitung dieser Substanzen. In vielen Fällen bilden die spezielleren Einzelheiten ein Geheimnis der Fabrikanten. Die Lehre von den Akkumulatoren und den Methoden, wie man sie zu den verschiedenen Zwecken gebraucht, bildet ein wichtiges Kapitel der Elektrotechnik; in einem Lehrbuche der Physik müssen wir uns auf ganz kurze Andeutungen beschränken. Einzelheiten kann man in allgemeinen Lehrbüchern der Elektrotechnik finden, sowie in Werken, die speziell den Akkumulatoren gewidmet sind; einige solcher Werke sind in der Literaturübersicht angegeben.

Mit wenigen Ausnahmen, deren technische Bedeutung gegenwärtig (1907) noch nicht klargestellt ist, sind alle in der Praxis üblichen Akkumulatoren Bleiakkumulatoren. Sie bestehen aus zwei Platten von bisweilen sehr kompliziertem Bau, deren Bestandteil Blei bildet. Nach erfolgter Ladung, d. h. nachdem ein hinreichender Strom in der gehörigen Richtung hindurchgegangen ist, besteht die Oberfläche der einen Platte, der negativen, aus lockerer, schwammiger Bleimasse, die Oberfläche der anderen jedoch, der positiven, aus einem hohen Oxyd des Bleies, vorzugsweise aus Bleisuperoxyd (PbO_2). Als Flüssigkeit dient eine wässerige Lösung von Schwefelsäure.

Die Geschichte der Akkumulatoren ist in wenigen Worten die folgende. Die ersten Akkumulatoren hat Gaston Planté im Jahre 1860 konstruiert; er wählte als Ausgangsmaterial bloß Blei, d. h. zwei glatte Bleiplatten, die er durch einen komplizierten, sehr lange dauernden Formierungsprozeß (hierüber weiter unten) in einen solchen Zustand brachte, daß sie sich nach der Ladung mit den oben beschriebenen Oberflächenschichten aus Bleischwamm und Bleisuperoxyd bedeckten. Im Jahre 1881 hat Faure zuerst den Vorschlag gemacht,

die Bleiplatten mit einer breiigen Masse (Paste) zu überziehen, die aus Bleioxyden bestand und sich dann beim Laden auf der einen Platte in Bleischwamm, auf der anderen in PbO_2 verwandeln sollte. Die Faure-sche Erfindung hat zahllose Änderungen und Verbesserungen erfahren. Sehr interessant ist, daß in neuester Zeit viele Fabriken die Anwendung der Paste aufgegeben haben und sich von neuem der Plantéschen Methode zuwenden, wobei sie die Art und Weise des „Formierens" der Bleiplatten wesentlich verändert haben. Die ersten Arbeiten in dieser Richtung sind 1891 erschienen (Epstein); jedoch datieren erfolgreiche Resultate erst seit dem Jahre 1897.

Das ursprüngliche Plantésche Element besteht aus zwei Bleiplatten (von 0,6 m Länge, 0,2 m Breite und 1 mm Dicke), die voneinander durch Kautschukstreifen getrennt und darauf spiralig (Fig. 259) zusammengerollt sind; an jede der Platten ist ein Bleistreifen angelötet. Der auf diese Weise hergestellte Zylinder wird in ein Glasgefäß mit Schwefelsäurelösung gebracht. Das sogenannte Formieren wird auf folgende Art bewerkstelligt. Durch das Element wird ein Strom hindurchgesandt, der auf einer der Platten PbO_2 erzeugt und die andere von Oxydspuren befreit. Hierauf wird das Element entladen, wobei PbO_2 sich in PbO verwandelt, das sich auch auf der anderen Platte bildet. Darauf wird abermals ein Strom hindurchgeleitet, wobei sich auf der negativen Platte durch Reduktion des PbO eine dünne Schicht von lockerem Blei bildet. Bei der hierauf folgenden Entladung dringt die Oxydation weiter in die Tiefe der Platte ein und es liefert daher ein nachfolgendes Laden eine noch dickere Schicht von lockerem Blei. Gleichzeitig ruft auch auf der anderen Platte jedes neue Laden ein Dickerwerden der Bleisuperoxydschicht hervor. Wiederholt man das Laden und Entladen viele Male, so erhält man schließlich auf den Platten nach dem Laden dicke Schichten von Bleischwamm bzw. Bleisuperoxyd. Das Formieren muß mehrere Monate lang fortgesetzt werden, bevor der Akkumulator fertiggestellt, d. h. imstande ist, im Verlauf eines genügend langen Zeitraumes einen konstanten Strom zu liefern. Hierin liegt natürlich ein wesentlicher Übelstand.

Fig. 259.



Im Jahre 1881 hat Faure in Paris zuerst damit begonnen, Bleiplatten mit Mennige zu überziehen, die dann nach relativ kurzdauernder Formierung (etwa 100 Stunden) in PbO_2 und Bleischwamm verwandelt werden konnte. Sehr interessant ist es übrigens, daß bereits im Jahre 1861 Charles Kirchhoff in Newyork ein Privilegium auf ein Sekundärelement erhalten hat, das im Prinzip den heutigen Akkumulatoren ähnlich ist. Die ersten Elemente Faures waren sehr unvoll-

kommen, da die aktive Masse leicht abbröckelte. Die ersten Verbesserungen haben Chotinski und hierauf Sellon und Volckmar eingeführt; die Arbeiten der beiden Letztgenannten veranlaßten die Bildung der Akkumulatorengesellschaft Electrical Power Storage Company. Hierauf wurde, wie bereits oben erwähnt war, eine große Zahl von Akkumulatorentypen konstruiert, von denen wir die Systeme von Tudor, Pollack, Oerlikon usw. erwähnen. Das Bleigerüst ist entweder zentral, so daß sich die Masse auf ihm zu beiden Seiten hält, oder doppelt, so daß es von zwei Seiten, beispielsweise in der Gestalt zweier Netze, die aktive Masse trägt. Die Form des Gerüstes pflegt sehr verschieden zu sein und ist sie bisweilen sehr kompliziert. Das Gerüst der positiven Platte wird aus reinem Blei hergestellt, demjenigen der negativen werden 2 Proz. Antimon hinzugefügt. Die aktive Masse wird ebenfalls in verschiedener Weise hergestellt; ihr Hauptbestandteil ist Mennige, bisweilen aber auch Bleiglätte mit verschiedenen Beimengungen.

Die vielen Mängel, welche den Akkumulatoren vom Faureschen Typus anhaften, haben die Konstrukteure veranlaßt, sich wiederum den Elementen vom Plantéschen Typus zuzuwenden, wobei sie jedoch die Form der Bleiplatten verändert und insbesondere den Formierungsprozeß vereinfacht und verkürzt haben. Hierher gehören die Akkumulatoren der Systeme Hagen, Battery Company (London), Franke, Blot (Paris), Monobloc (Brüssel), Bary usw. Wesentlich erscheint hier die komplizierte, beispielsweise die lamellenartige Form der Bleimassen, die ihnen eine möglichst große Oberfläche verleiht, und ferner das Formieren mit Hilfe eines Elektrolyten, dem ätzende Substanzen, welche das Lockerwerden des Bleies begünstigen, beigegeben sind.

Die in den Akkumulatoren vor sich gehenden chemischen Prozesse kann man als vollkommen geklärt ansehen. Im geladenen Elemente hat man auf der einen Platte PbO_2, auf der anderen Pb. Bei der Entladung wird das PbO_2 reduziert, das Pb oxydiert, wobei die H_2SO_4 in Reaktion tritt, so daß sich auf beiden Platten $PbSO_4$ bildet. Somit hat man folgende Reaktionen:

Beim Laden:

An der Anode: $PbSO_4 + SO_4 + 2\,H_2O = PbO_2 + 2\,H_2SO_4$

An der Kathode: $PbSO_4 + H_2 = Pb + H_2SO_4$

Beim Entladen:

An der Anode: $PbO_2 + H_2 + H_2SO_4 = PbSO_4 + 2\,H_2O$

An der Kathode: $Pb + SO_4 = PbSO_4$.

Den ganzen Prozeß kann man kurz in folgender symbolischer Weise darstellen:

$$PbO_2 + Pb + 2\,H_2SO_4 \rightleftarrows 2\,PbSO_4 + 2\,H_2O.$$

Die Pfeile sollen die vollständige Umkehrbarkeit des Prozesses andeuten. Die angeführten Gleichungen deuten nur in allgemeinen Umrissen die in Reaktion tretenden Substanzen und die Endprodukte der Reaktion an, sagen jedoch nichts über die Details aus, d. h. über die Ionen, die nach der Theorie der elektrolytischen Dissoziation sich beim Laden des Akkumulators beteiligen müssen, wenn als Elektrolyt das $PbSO_4$ auftritt. Liebenow, Le Blanc, Elbs, Streintz, Dolezalek u. a. haben sich mit dieser Frage befaßt. Liebenow ist der Ansicht, daß sich die Ionen entsprechend der Formel

$$2\,PbSO_4 + 2\,H_2O = \overset{+}{Pb} + 4\,\overset{+}{H} + \overline{Pb\overline{O}_2} + 2\,\overline{S\overline{O}_4}$$

bilden, d. h. daß als Anion u. a. das PbO_2 auftritt, welches sich auch an der Anode ausscheidet. Dieser Ansicht hat sich auch Dolezalek angeschlossen.

Die elektromotorische Kraft E eines geladenen Akkumulators beträgt 2,3 bis 2,4 Volt; beim Entladen sinkt E ziemlich schnell bis auf 2 Volt herab und bleibt dann im Laufe einer gewissen Zeit konstant. Dann beginnt E abermals langsam zu sinken; man muß die Tätigkeit des Elementes abbrechen, sobald E unter 1,9 bis 1,8 Volt gesunken ist.

Charakteristisch für einen Akkumulator ist vor allem der Koeffizient seines Nutzeffekts, d. h. das Verhältnis der beim Laden empfangenen elektrischen Energie zu derjenigen, welche beim Entladen des Akkumulators verbraucht wird; das Verhältnis dieser Energien wird durch das Produkt aus der Voltzahl und der vollen Anzahl der Amperestunden gemessen und schwankt im allgemeinen zwischen 0,70 und 0,80. Einen anderen Wert hat das Verhältnis der Elektrizitätsmenge (Anzahl der Amperestunden), welche vom Akkumulator geliefert wird, zu derjenigen, welche ihn beim Laden durchströmt hat. Dieses Verhältnis ist ungefähr gleich 0,9. Endlich ist noch von besonderer Bedeutung die Kapazität des Akkumulators, welche durch die Elektrizitätsmenge bestimmt wird, die von ihm aufgespeichert werden kann, oder aber durch die Anzahl der Amperestunden pro Kilogramm seines Gewichtes. Letztere Größe schwankt für verschiedene Akkumulatorentypen zwischen weiten Grenzen.

Wir haben ausschließlich Bleiakkumulatoren betrachtet, deren bedeutendes Gewicht einen ihrer Mängel darstellt. Man hat wiederholt versucht, Akkumulatoren auch aus anderen Stoffen herzustellen. Von derartigen Versuchen ist auf den Edisonschen Akkumulator hinzuweisen; die Idee zu demselben ist bereits vor Edison von Jungner angegeben worden. Im Edisonschen Akkumulator enthält die negative Platte ein Gemenge aus Eisenoxydul und Graphit, die positive besteht aus $Ni(HO)_4$. Beim Laden wird das Eisen reduziert und bildet sich ein höheres Oxyd des Nickels. Als Flüssigkeit dient KHO- oder

NaOH-Lösung. Zedner fand, daß auf der Anode Ni_2O_3 entsteht und zwar das Hydrat $Ni_2O_3 . 3H_2O$ oder $Ni(OH)_3$; die elektromotorische Kraft ist gleich 1,305 Volt.

§ 10. Theorie der hydroelektrischen Elemente. Gemäß der von uns gewählten Einteilung des Materials haben wir uns im Vorhergehenden bereits mit den Grundlagen der Theorie der hydroelektrischen Elemente bekannt gemacht. Es bleiben uns noch übrig eine systematische Zusammenfassung, eine erweiterte Prüfung gewisser Fragen und die Betrachtung einer Reihe von experimentellen Untersuchungen, die im obigen noch nicht berührt wurden. Vor allen Dingen aber wollen wir uns darüber klar werden, was man von einer solchen Theorie zu erwarten hat, auf welche Fragen sie Antwort geben muß. Es zeigt sich, daß man an die Theorie des Elementes von drei verschiedenen Seiten herantreten kann oder daß man, mit anderen Worten, je nach der Fragestellung drei verschiedene Arten von Theorien erhalten kann.

Erstens kann man ein geschlossenes Element als ein System betrachten, in welchem eine Energiewandlung vor sich geht und von der Theorie verlangen, daß sie die quantitativen Gesetze erläutert, welche diese Umwandlung regeln, wobei dann die Frage nach dem mechanischen Vorgange bei den Erscheinungen, die sich innerhalb des Elementes abspielen, beiseite gelassen wird. Eine solche Theorie muß, da sie sich auf die Prinzipien der Thermodynamik stützt, zu Resultaten führen, welche von keinerlei hypothetischen Vorstellungen, die den Bau der Materie, das Wesen der Elektrolyse usw. betreffen, abhängig sind.

Zweitens kann man unter der „Theorie des Elementes" eine Theorie verstehen, welche den Mechanismus der Erscheinungen innerhalb des Elementes zu erklären und die Quelle der elektrischen Ladungen anzugeben hat.

Drittens kann man als Aufgabe der Theorie die Lösung von noch tiefer gehenden Fragen nach dem Wesen des elektrischen Stromes in Leitern selbst ansehen. Theorien dieser Art, die sich in gleicher Weise auf jegliche Art von elektrischen Strömen in Leitern beziehen, welcher Art auch die Quelle dieser Ströme sein mag, werden wir hier noch nicht betrachten.

Wir wenden uns zuerst der Theorie zu, welche die im Elemente erfolgende Energieumwandlung erläutert.

Während ein Element in Wirksamkeit ist, verschwindet in ihm eine gewisse Menge von potentieller chemischer Energie; an Stelle derselben tritt unter anderem offenbar die kinetische Energie des elektrischen Stromes, die in Wärmeenergie übergeht, wofern sie nicht zur Leistung solcher Arbeit verbraucht wird, die zu ihrem Er-

gebnisse andere Energieformen hat. Auf S. 182 haben wir mit q die in Joules (0,24 Grammkalorien) ausgedrückte Wärmemenge bezeichnet, welche den im Elemente erfolgenden chemischen Reaktionen entspricht, während durch dasselbe ein Coulomb Elektrizität hindurchströmt. Strömen durch eine geschlossene Kette, in welcher eine elektromotorische Kraft von E Volt wirkt, Q Coulomb, so ist die Arbeit der elektrischen Kräfte gleich QE Joules, denn die Summe der Potentialgefälle in der geschlossenen Kette ist gleich E. Ist $Q = 1$ Coulomb, so erhält man die elektrische Energie E. Nimmt man an, es verwandle sich die gesamte chemische Energie in elektrische, so erhält man die Gleichung

$$E = q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (42)$$

vgl. (25, a), S. 184, welche die sogenannte Thomsonsche Regel (1851) ausdrückt, die zuerst auch von Helmholtz (1847) für richtig gehalten worden ist. Übrigens hat noch früher E. Becquerel (1843) die Gleichung (42) klar formuliert. Auf S. 185 haben wir ein Beispiel der Berechnung von E für das Daniellelement angeführt, das ein durchaus befriedigendes Resultat gab. Man findet, daß Formel (42) auch für einige andere Elemente Resultate liefert, die mit der Wirklichkeit übereinstimmen.

Experimentelle Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen der im geschlossenen Stromkreise frei werdenden Wärme und der Wärme, welche den im Elemente sich abspielenden chemischen Reaktionen entspricht, hat zuerst Favre ausgeführt. Er brachte ein Element zusammen mit den stromschließenden Leitern ins Innere seines Quecksilberkalorimeters (Bd. III) und überzeugte sich, daß die Gesamtmenge Q der sich in der ganzen Kette ausscheidenden Wärmemenge der Wärme der im Elemente erfolgenden chemischen Prozesse vollkommen gleich ist. Mit anderen Worten heißt das, Q hängt nicht davon ab, ob diese Reaktionen bei geöffnetem oder bei geschlossenem Stromkreise erfolgen und spielt auch der Gesamtwiderstand desselben keine Rolle. Als Favre jedoch die Joulesche Erwärmung der Kette durch den Strom gesondert bestimmte, fand er, daß sie kleiner als Q ist, daß also im Elemente mehr Wärme frei wird, als seinem relativen Widerstande entspricht. Hieraus folgt, daß nicht die gesamte chemische Energie in elektrische Energie übergeht. Versuche von Raoult, Moser und Edlund haben im allgemeinen zu denselben Resultaten geführt.

Ferner haben zahlreiche Untersuchungen von Braun gezeigt, daß E nicht nur kleiner, sondern auch größer als q sein kann, d. h. daß die in der Kette auftretende elektrische Energie größer sein kann als die verbrauchte chemische Energie, was offenbar nur in dem Falle möglich ist, daß im Elemente neben der Jouleschen Erwärmung auch eine Abkühlung erfolgt, d. h. eine Absorption von Wärmeenergie

und Verwandlung derselben in elektrische Energie. Braun hat auch die thermodynamische Erklärung für diese Erscheinung gegeben. Wir wollen einen der Fälle, die von ihm untersucht worden sind, anführen; es ist das Element Cd — $CdSO_4$ — $FeSO_4$ — Fe. Setzt man für das Daniellelement $E = 100$, so gibt Formel (42) den Wert $E = 7{,}2$, wobei Fe den negativen Pol bilden, d. h. der Strom im Innern des Elementes vom Fe zum Cd gehen muß; es findet sich jedoch $E = -9{,}3$, d. h. der Strom hat sogar die entgegengesetzte Richtung. Alder Wright und C. Thomson, Herroun, Pagliani u. a. haben ebenfalls Fälle angegeben, wo Formel (42) zu Resultaten führt, die mit der Wirklichkeit durchaus nicht stimmen. Diese Nichtübereinstimmung haben Chaperon u. a. auf theoretischem Wege zu erklären gesucht.

Eine vollständige Lösung der Frage haben Gibbs und Helmholtz geliefert. Die Formeln, zu denen die thermodynamische Theorie führt, haben wir bereits auf S. 183 und 185 abgeleitet. Sie beziehen sich ausschließlich auf das umkehrbare Element. Wir haben zwei Formeln abgeleitet, und dabei einen offenen Stromkreis betrachtet (Fig. 81, S. 181); da sich aber E bei Schließung der Kette nicht ändert, so gelten offenbar diese Formeln auch für die im geschlossenen Kreise wirkende elektromotorische Kraft E. Die erste dieser Formeln, vgl. (25), S. 183, bestimmt den wahren Zusammenhang zwischen E und q und tritt an Stelle des ungenauen Ausdrucks (42). Sie hat folgende Gestalt

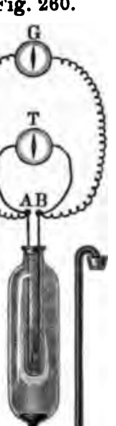
$$E = q + T\frac{\partial E}{\partial T} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (43)$$

wenn man an Stelle von t auch im Differentialquotienten T schreibt. Je nach dem Vorzeichen von $\frac{\partial E}{\partial T}$ kann E größer oder kleiner als q sein. Einige weitere Folgerungen sind auf S. 183 angegeben worden.

Wenden wir uns den Arbeiten zu, die zur Prüfung von Formel (43) unternommen worden sind. Die ersten Untersuchungen haben Czapski (1884) und Gockel (1885) ausgeführt; sie fanden eine qualitative Bestätigung dieser Formel, d. h. daß die Größen $E - q$ und $\frac{\partial E}{\partial T}$ das gleiche Vorzeichen haben; die quantitative Übereinstimmung konnte keine befriedigende sein, da zur Berechnung der Größen q keine genauen Daten vorlagen. Die ersten eingehenderen Untersuchungen hat Jahn ausgeführt, der die Gesamtmenge der Wärme Q maß, die sich in der ganzen geschlossenen Kette bei der Stromstärke J während der Zeit t ausscheidet; nach dem Prinzipe von der Erhaltung der Energie muß Q gleich der Wärme sein, die den chemischen Reaktionen im Elemente entspricht, wie dies auch durch die Versuche von Favre (S. 688) bestätigt worden ist. Wird Q in Joules ausgedrückt, J in Amperes und t in Sekunden, so ist $Q = qJt$. Ferner hat Jahn die Größe E be-

stimmt und die elektrische Energie Q' berechnet, die während der Zeit t auftrat und sich in Joulesche Wärme verwandelte; es ist offenbar $Q' = EJt$. Die Differenz $Q' - Q = (E - q) Jt$ muß nach Formel (43) gleich $T \frac{\partial E}{\partial T} Jt$ sein; um letztere Größe zu finden, muß der thermische Koeffizient α der Größe E bekannt sein. In Fig. 260 ist die Anordnung der Jahnschen Apparate schematisch dargestellt. Das zu untersuchende Element wurde in das Reservoir eines Bunsenschen Eiskalorimeters (Bd. III) eingeführt; von demselben führten Verbindungsdrähte (vom Widerstande ϱ) bis zu den Punkten A und B, an welche ein Galvanometer T von geringem Widerstande und ein Voltmeter G (von 200 000 Ohm Widerstand) angeschlossen waren; letzteres ermöglichte eine Messung der Potentialdifferenz e zwischen den Punkten A und B (von den Voltmetern wird weiter unten die Rede sein). Es sei W die Wärme, die während der Zeit t im Kalorimeter frei geworden ist. Man sieht dann leicht ein, daß die gesamte Wärme Q durch die Formel

Fig. 260.



$$Q = W + J^2 \varrho t + Jet$$

gegeben wird. Die Wärme, die im Stromkreise AGB frei wird, konnte vernachlässigt werden. Für Q' hatten wir den Ausdruck $Q' = JEt$. Die Stromstärke J wurde mittels T gemessen, die Größe e mittels G, die Größe E ebenfalls mittels G bei offenem Stromkreise ATB. Der thermische Koeffizient α wurde durch Vergleichung der Größe E an zwei Elementen, die verschiedene Temperaturen hatten, bestimmt. Somit waren alle Größen bekannt, die in der Helmholtzschen Formel, die hier folgende Gestalt hat:

$$JEt = W + J^2 \varrho t + Jet + T \frac{\partial E}{\partial T} Jt,$$

vorkommen. Setzt man

$$T \frac{\partial E}{\partial T} Jt = Q_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

so ist

$$Q' - Q = Q_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (45)$$

Jahn hat die Größen J, E, e, t (3600 sec), W, ϱ (0,1 Ohm) und α experimentell bestimmt; hierauf berechnete er Q_0 nach den beiden Formeln (44) und (45). Für sechs von ihm untersuchte Elemente erhielt er eine durchaus befriedigende quantitative Übereinstimmung. In vier Fällen war Q_0 negativ ($E < q$), in zwei Fällen positiv ($E > q$). Zu den letzteren gehört das Daniellelement, in welchem also die elektrische Energie die chemische übertrifft, so daß sich in ihm weniger

Wärme ausscheiden muß, als dem Gesetze von Joule entspricht. Weitere Messungen zur Prüfung der Formel (43) haben Bugarszky Chruschtschow und Sitnikow, Lovén, Klein, Zuppinger u. a. ausgeführt; Czepinsky und V. H. Weber haben Elemente mit geschmolzenen Elektrolyten studiert.

Gans (1901) hat die Helmholtzsche Theorie etwas verallgemeinert und gezeigt, daß die Formel (43) durch folgenden Ausdruck

$$E = q + T\frac{\partial E}{\partial T} - ET\frac{\partial \log k}{\partial T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

ersetzt werden muß, in welchem k eine Größe bedeutet, die von der Überführungszahl (S. 625) abhängt; so ist z. B. für das Konzentrationselement (S. 192) $k = n$, wo n die Überführungszahl des Anions bedeutet; für alle übrigen oben betrachteten Elemente ist $k = 1$ und kommt daher das dritte Glied des Ausdruckes in Fortfall.

Denizot (1904) hat aus der Formel (43) eine Reihe von interessanten Schlüssen gezogen; unter anderem hat er gezeigt, daß die Beobachtungen am umkehrbaren Elemente zum Entwerfen einer Skala der absoluten Temperaturen dienen können.

Aus der Lehre von der freien Energie ergibt sich für das umkehrbare Element, wie wir früher sahen, die Formel (31), S. 186:

$$\frac{\partial E}{\partial p} = A(v_1 - v_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

die sich auf die isothermische Kompression des Elementes bezieht. Hier ist p der äußere Druck, $v_2 - v_1$ die Volumänderung, die im Elemente vor sich geht, wenn durch dasselbe ein Coulomb hindurchströmt. Wenn sich beispielsweise das Volumen vergrößert ($v_2 > v_1$), so nimmt E mit Zunahme des äußeren Druckes ab. Die Formel (47) ist zuerst von Duhem abgeleitet worden; Gans hat auch diese Formel verallgemeinert. Gilbaut (1891) hat für verschiedene Elemente die Änderung ΔE bei Zunahme von p bis zu 100 Atmosphären gemessen. Für das Daniellelement ergab sich $\Delta E = 5 \, . \, 10^{-5}$ Volt, für den Akkumulator $\Delta E = 12 \, . \, 10^{-5}$ Volt, für das Bunsenelement $\Delta E = -405 \, . \, 10^{-5}$ Volt, für das Gaselement $\Delta E = +845 \, . \, 10^{-5}$ Volt. Neuere Messungen hat R. Ramsey (1901) ausgeführt, der einem Drucke bis zu 310 Atm. die Elemente von Weston, Clark, Helmholtz, Daniell und Warren de la Rue unterworfen hat. Für die beiden ersten ergab sich ein regelmäßiges Anwachsen der Größe E, für das dritte verzögerte sich das Anwachsen bei großen Drucken; das Daniellelement hat einen sehr kleinen negativen Druckkoeffizienten; für das fünfte ergaben sich verschiedene Resultate, je nach der Beschaffenheit des AgCl.

Man kann die Formeln (43) und (47) als rein thermodynamische bezeichnen; bei ihrer Herleitung sind wir bloß von der Tatsache aus-

gegangen, daß im Elemente chemische Reaktionen auftreten und daß in der Kette elektrische Energie erscheint. Wir gehen jetzt zu solchen Theorien der Elemente über, bei denen außer den Prinzipien der Thermodynamik die Vorstellung von der Ionenwanderung in zwei entgegengesetzten Richtungen eine wichtige Rolle spielt, d. h. also eine Hypothese über den mechanischen Vorgang bei der Elektrolyse mit berücksichtigt ist. Hierher gehört die Theorie des Gravitationselementes. Denken wir uns eine vertikale Säule eines Elektrolyten mit gleichartigen Elektroden oben und unten, z. B. eine $AgNO_3$-Lösung zwischen Silberelektroden. Läßt man durch eine solche Säule den Strom von irgend einem Elemente hindurchgehen, so wandert das Kation Ag nach oben, falls sich oben die Kathode befindet, das Anion NO_3 nach unten. Hierbei ist das Kation Ag = 106 schwerer als das Anion $NO_2 = 62$ und es muß daher ein Teil der Stromenergie zur Arbeitsleitung verbraucht werden, die zum Heben der Gewichtsunterschiede erforderlich ist. Dies muß die Stromstärke J vermindern, d. h. es muß J kleiner ausfallen, als bei horizontaler Lage der Säule. Die Erscheinung ist analog der Polarisation und kann als Folge des Auftretens einer besonderen elektromotorischen Kraft e der Gravitation aufgefaßt werden. Kehrt man die Säule um oder läßt man den Strom in entgegengesetzter Richtung hindurchgehen, so leistet die Schwerkraft eine Arbeit, deren Resultat eine Zunahme der Stromstärke oder das Auftreten einer elektromotorischen Kraft e sein muß, welche die gleiche Richtung hat, wie die im Stromkreise bereits vorhandene.

Aus diesem Grunde hat die Säule den Namen „Gravitationselement" erhalten. Maxwell hat 1873 (Treatise I, p. 317) in wenigen Zeilen darauf hingewiesen, daß eine solche Erscheinung existieren muß. Colley in Moskau hat selbständig und in eingehender Weise die Theorie des Gravitationselementes entwickelt und bereits im Jahre 1872 mit der experimentellen Prüfung derselben begonnen. Im Druck aber ist seine erste Arbeit erst im Jahre 1875 erschienen. Er hat gezeigt, wie man die Größe e zu berechnen hat, wobei man nicht nur die Differenz der Gewichte des Anions und Kations, sondern auch die Überführungszahlen (S. 625) zu berücksichtigen hat, von denen die Wege, die von diesem oder jenem Ion durchwandert werden, abhängen. Nimmt J zu, so sieht man e als positiv an. Offenbar ist für das $AgNO_3$ die Größe e positiv, falls der Strom von oben nach unten fließt. Die Versuche von Colley haben dieses Resultat in qualitativer Hinsicht bestätigt, nicht aber in quantitativer. Für Lösungen von ZnJ_2 und CdJ_2 muß die Richtung von e die entgegengesetzte sein (siehe S. 630 über die Elektrolyse dieser Salze); dies wurde ebenfalls durch den Versuch bestätigt, wobei sich auch eine quantitative Übereinstimmung mit der Theorie ergab. Weitere Untersuchungen haben Pirani, Des Coudres (CdJ_2) und R. Ramsey ($ZnSO_4$ und $CdSO_4$) angestellt.

Ein anderes Beispiel einer Theorie, die sich nicht nur auf thermodynamische Betrachtungen beschränkt, sondern auch die Tatsache der Ionenwanderung im Elektrolyten mitberücksichtigt, ist die Theorie des Konzentrationselementes, die von Helmholtz stammt und von uns auf S. 198 erwähnt worden ist. Wir haben bereits gesehen, daß das Konzentrationselement aus zwei gleichartigen Metallen besteht, die in zwei verschieden konzentrierte Lösungen desselben Elektrolyten eintauchen. Es ist die elektromotorische Kraft E eines solchen Elementes zu bestimmen. Wir wollen nicht die ganze Helmholtzsche Ableitung geben, sondern uns darauf beschränken, den allgemeinen Gang dieser Ableitung anzudeuten. Nehmen wir an, es kämen in der ersten Lösung m_1, in der zweiten m_2 Äquivalente Wasser auf ein Äquivalent des gelösten Elektrolyten; diese Größen charakterisieren die Konzentration der Lösungen. Schließt man das Element, so beginnt durch dasselbe ein Strom hindurchzugehen. Nehmen wir an, es ströme ein Coulomb Elektrizität hindurch; hierbei erfolgt eine Wanderung des Anions in der einen, des Kations in der entgegengesetzten Richtung. Nimmt man ferner an, daß die Stromstärke sehr gering ist, so kann man die Joulesche Wärme, die in der Kette frei wird, außer acht lassen und voraussetzen, daß die einzige Arbeit, welche im Stromkreise beim Übergange eines Coulombs von der einen Elektrode zur anderen geleistet wird, gleich E Joules ist. Die Ionenwanderung bewirkt eine Konzentrationsänderung beider Lösungen, die sich durch nichts von der Änderung unterscheidet, welche durch den Transport einer gewissen Menge reinen Wassers von einer der Lösungen zur anderen bewirkt würde, da sich die Gesamtmenge des gelösten Salzes nicht geändert hat. Man kann umgekehrt diese Wassermenge aus der Lösung mit verminderter Konzentration in die Lösung hinüberschaffen, deren Konzentration sich vermehrt hat. Möge die erste von ihnen die Konzentration m_1 besessen haben; mit m wollen wir die variable, zwischen den Werten m_1 und m_2 befindliche Größe der Konzentration bezeichnen, mit p_1, p_2 und p die Spannungen der gesättigten Dämpfe über den Lösungen m_1, m_2 und m (Bd. III). Wir lassen nun aus der Lösung m_1 die erforderliche Wassermenge isothermisch verdampfen, wodurch wir sie in gesättigten Dampf von der Spannung p_1 verwandeln. Trennen wir ihn von der Lösung, wodurch er offenbar aufhört gesättigt zu sein. Hierauf komprimieren oder expandieren wir ihn (vorläufig ist dies noch unbekannt) bis auf die Spannung p_2, bringen ihn in Berührung mit der Lösung m_2, wodurch er abermals gesättigt wird und bringen ihn dann durch Kompression in den flüssigen Zustand. Es läßt sich leicht einsehen, daß die Arbeit, welche bei diesem Transport geleistet werden muß, gleich der Arbeit ist, die bei der Spannungsänderung des Dampfes von p_1 auf p_2 geleistet worden ist. Da das ganze System zu seinem ursprünglichen Zustande zurückgekehrt ist, so

muß offenbar die gesamte Arbeit des Systems gleich Null sein. Hieraus gelangt Helmholtz zu der Formel:

$$V_1 - V_2 = E = p_0 v_0 \int_{p_1}^{p_2} m(1-n) \frac{dp}{p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Hier sind V_1 und V_2 die Potentiale der Elektroden, die sich in den Lösungen m_1 bzw. m_2 befinden; p_0 ist die Spannung des über dem reinen Wasser befindlichen Dampfes, v_0 das Volumen der Gewichtseinheit dieses Dampfes und n die Überführungszahl des Kations, die von der Konzentration m oder von der Dampfspannung p abhängt. Zwecks der Berechnung von E macht Helmholtz die Annahme, daß der Unterschied der Konzentration gering ist und daß man $1 - n = Const$ setzen kann. Ferner wendet er die Wüllnersche Formel

$$p_0 - p = \frac{b}{m}$$

an, in welcher b eine konstante Zahl bedeutet. Setzt man $b : p_0 = m_0$, so erhält man

$$V_1 - V_2 = E = b v_0 (1-n) \lg \frac{m_2 - m_0}{m_1 - m_0} \quad . \quad . \quad (48,a)$$

Sind p_1 und p_2 im allgemeinen nur wenig von p verschieden, so kann man die Größe m_0 vernachlässigen und

$$V_1 - V_2 = E = b v_0 (1-n) \lg \frac{m_2}{m_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

setzen. Wie man sieht, ist $V_1 > V_2$ für $m_2 > m_1$; hieraus folgt, daß diejenige Elektrode zur positiven wird, die sich in der konzentrierteren Lösung m_1 befindet; der Strom fließt innerhalb des Elementes von der schwächeren zur konzentrierteren Lösung. Die Versuche von Moser haben dieses Resultat durchaus bestätigt.

Wir hatten (S. 198) das Element erwähnt, welches aus einer homogenen Flüssigkeit und zwei nur durch ihre Konzentration unterschiedenen Amalgamen besteht. Während des Druckes erschien eine umfangreiche Untersuchung von Richards und Forbes (1907) über diese Elemente. Sie enthält eine ausführliche historische Darstellung, aus welcher hervorgeht, daß die Theorie dieser Elemente zuerst von v. Türin (St. Petersburg) entwickelt wurde.

Weitere Beispiele von theoretischen Arbeiten, welche sich vorzugsweise auf thermodynamische Betrachtungen stützen, findet man in den hervorragenden Untersuchungen von Helmholtz über die elektromotorische Kraft im Falle der Polarisation im gewöhnlichen Voltameter (Wasserzersetzung) und für den Fall von zwei umkehrbaren Elementen, welche hintereinander geschaltet sind, jedoch gegeneinander wirken und sich nur durch die Konzentration der Lösung des Elek-

trolyten unterscheiden. Wir beschränken uns auf Angabe einer Formel für die Abhängigkeit der elektromotorischen Kraft der Polarisation E vom Drucke p (in Atmosphären) des Knallgases, das sich oberhalb der Flüssigkeitsoberfläche ansammelt:

$$E = E_a + \frac{10^{-7} cTR}{6} \, lgp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Hier bedeutet c das elektrochemische Äquivalent, R die Gaskonstante für den Wasserstoff, E_a den Wert von E für $p = 1$ Atm. Helmholtz meint, daß $E_a = 1{,}6447$ Volt ist. Sokolow hat aus seinen umfangreichen Versuchen geschlossen, daß E_a in Formel (50) keine konstante Größe ist, sondern vom Drucke abhängt. Für den Fall, daß der Druck sehr gering ist, hat Sokolow den Wert $E_a = 0{,}745$ Volt gefunden; er glaubt jedoch, daß noch kleinere Werte möglich sind.

In engem Zusammenhange mit den theoretischen Arbeiten von Helmholtz befinden sich die Untersuchungen von Streintz, Dolezalek, Förster u. a., die sich auf die Theorie des (gewöhnlichen) Bleiakkumulators beziehen.

Streintz hat die Akkumulatoren vom Systeme Tudor untersucht und gezeigt, daß E zugleich mit der Konzentration der Schwefelsäurelösung wächst. Bei einer Konzentration von $c = 86{,}3$ g pro Liter ist $E = 1{,}900$ Volt; bei $c = 684{,}2$ g reicht E bis zu 2,235 Volt. Ferner hat er die Abhängigkeit der Größe E von der Temperatur t untersucht. Er fand, daß $dE:dt$ von der Konzentration der Lösung abhängt, also auch von E. War $E = 1{,}9223$ Volt, so war $dE:dt = 140 \cdot 10^{-6}$; wächst E bis zu 2,0031 Volt, so wächst die Größe $dE:dt$ bis zu $335 \cdot 10^{-6}$; hierauf nimmt $dE:dt$ bis zu $73 \cdot 10^{-6}$ bei $E = 2{,}2070$ Volt ab. Endlich hat Streintz noch für den Akkumulator die Helmholtzsche Formel (43) geprüft, wobei er sich ebenso wie Jahn des Eiskalorimeters bediente, doch hat er die Teile seines Apparates in ganz anderer Weise angeordnet. Er fand, daß die Helmholtzsche Formel die Beobachtungsresultate sehr gut darstellt, welche $E > q$ gaben.

Dolezalek hat nach zwei Methoden auf theoretischem Wege die Abhängigkeit des E von der Temperatur bestimmt. Denken wir uns zwei Akkumulatoren, wobei in einem derselben auf 1 Grammolekül Säure n_1 g Wasser, im anderen n_2 g Wasser kommen. Verbindet man dieselben mit den gleichnamigen Polen, so erhält man einen Strom, welcher eine Zunahme der Konzentration in dem einen, eine Abnahme der Konzentration in dem anderen Akkumulator bewirkt. Durch isothermische Destillation kann man den ursprünglichen Zustand wieder herstellen. Eine Berechnung der hierbei geleisteten Arbeit setzt in den Stand, die Differenz ΔE der elektromotorischen Kräfte beider Akkumulatoren zu bestimmen. Es seien p_1, p_2 und p die Spannungen

des Wasserdampfes oberhalb der Lösungen n_1, n_2 und n. Dann ist

$$\varDelta E = 0{,}110 . 10^{-4} T \left\{ n_2 lg p_2 - n_1 lg p_1 + 18 lg \frac{p_2}{p_1} - \int_{n_1}^{n_2} log\, p\, dn \right\} \quad . \quad (51)$$

wo *log* das Zeichen für den Briggschen Logarithmus bedeutet.

Eine zweite Methode der Berechnung stützt sich auf Formel (43), welche hier die Form

$$\varDelta E = q + T \frac{\partial \varDelta E}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

hat, wo q aus dem Wärmeeffekt bei der Konzentrationsänderung berechnet wird, das letzte Glied aber aus der von Streintz gefundenen Abhängigkeit des Temperaturkoeffizienten der Größe E von der Konzentration. Die Formeln (51) und (52) haben Resultate ergeben, welche miteinander und mit den Beobachtungen in vollstem Einklange stehen.

Einen ganz anderen Charakter, als alle bisher betrachteten Theorien, hat die Nernstsche Theorie des Elementes. Die Grundlagen dieser Theorie, sowie die Formeln, zu denen sie in den verschiedenen Fällen führt, haben wir bereits eingehend auf S. 188 bis 199 betrachtet. Wir beschränken uns darauf, auf die Formeln (40), (43), (44), (45) und (46) auf den bezeichneten Seiten hinzuweisen. Planck hat die Nernstsche Theorie verallgemeinert; noch mehr erweitert hat sie Johnson (1904).

Für das Konzentrationselement hatten wir die Formel (44), S. 197, erhalten. Jetzt jedoch haben wir eine andere von Helmholtz stammende Formel (49) für dasselbe Element angeführt. Man findet, daß für verdünnte Lösungen beide Formeln identisch werden. Gegen die Nernstsche Theorie ist eine Reihe von Einwürfen erhoben worden, welche in den letzten Jahren (seit 1900) zu einer anhaltenden Kontroverse geführt haben; an derselben haben sich Arrhenius, Jahn, Nernst, Sand, Kahlenberg u. a. beteiligt. Dieser Streit steht im Zusammenhange mit dem Zweifel, welcher in letzter Zeit über die Richtigkeit der elektrolytischen Dissoziationstheorie geäußert worden ist und von dem auf S. 652 die Rede war. Auf weitere Anwendungen der Nernstschen Theorie, z. B. auf das Polarisationselement, das Gaselement usw., wollen wir nicht weiter eingehen.

Literatur.

Zu § 1.

Faraday (Gesetze der Elektrolyse): Exper. Res. Ser. 3, § 377; 7, § 732, 783, 821 u. a., 1833; deutsche Ausgabe von Kalischer 1, 177 u. f.
Buff: Ann. d. Chem. u. Pharm. 85, 1, 1853; 96, 257, 1855.
Ostwald u. Nernst: Phys. Chem. 3, 120, 1889.
A. P. Sokolow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 28, 129, 1896.
Ritter: Gilb. Ann. 2, 154, 1799.

Riess: Reibungselektr. **2**, § 610; Abhandl. **1**, 105; Berl. Ber. 1860, S. 5; P. A. **67**, 135, 1846; **69**, 31, 1849.
Andrews: Rep. Brit. Assoc. **2**, 46, 1855; P. A. **99**, 493, 1856.
Davy: Gilb. Ann. **28**, 158, 1808; Phil. Trans. 1806.
Armstrong: P. A. **60**, 354, 1843.
Rayleigh: Phil. Trans. **2**, 458, 1884.
Gray: Phil. Mag. (5) **22**, 389, 1886; **25**, 179, 1888.
Shaw: Phil. Mag. (6) **23**, 138, 1887.
Mascart: Journ. d. phys. (2) **1**, 109, 1882; **3**, 283, 1884.
F. u. W. Kohlrausch: W. A. **27**, 1, 1886.
Rayleigh and Mrs. Sidgwick: Phil. Trans. **2**, 411, 1884.
Potier et Pellat: Journ. d. phys. (2) **9**, 381, 1890.
Patterson and Guthe: Phys. Rev. **7**, 251, 1898.
Kahle: Instr. **18**, 229, 1898; W. A. **67**, 1, 1899.
Leduc: Rapp. prés. au Congr. internat. de phys. **2**, 440, 1900.
Guthe: Phys. Ztschr. **1**, 235, 1900; Annal. d. Phys. (4) **20**, 429, 1906; **21**, 913, 1906; Phys. Rev. **22**, 117, 1906; Bull. Bur. of Standarts **2**, 33, 1906.
Richards and Heimrod: Phys. Chem. **41**, 302, 1902.
Pellat et Leduc: Compt. rend. **136**, 1649, 1903.
Dijk u. Kunst: Ann. d. Phys. (4) **14**, 569, 1904.
Dijk: Arch. Néerland. (2) **9**, 442; **10**, 277, 1905; Ann. d. Phys. (4) **19**, 249, 1906.

Zu § 2.

E. Wiedemann: P. A. **154**, 318, 1874.
Warburg: W. A. **21**, 622, 1884.
Warburg u. Tegetmeyer: W. A. **32**, 442, 1887; **35**, 455, 1888.
F. M. Exner: Verh. d. deutsch. phys. Ges. **3**, 26, 1901.
Bose: Ann. d. Phys. (4) **9**, 164, 1902; Gött. Nachr. 1902, S. 1.
Soret: P. A. **118**, 623, 1863.
Richarz: W. A. **24**, 183, 1885; **31**, 912, 1887.
Helfenstein: Inaug.-Diss. Zürich 1900.
Engelhardt: Die Elektrolyse des Wassers. Halle a. S. 1902.
Bunsen: Lieb. Ann. **82**, 137, 1852; **94**, 107, 1855.
Bogorodski: Materialien zur Elektrochemie der anorganischen Verbindungen im sogenannten feuerflüssigen Zustande (russ.). T. I. Kasan 1905.
R. Lorenz: Die Elektrolyse geschmolzener Salze. 2 Teile, Halle a. S. 1905.
Obach: P. A. Ergbd. **7**, 280, 1876.
Elsässer: W. A. **8**, 455, 1879.
Jenkins: Rep. R. Soc. 1891 (Cardiff), p. 613; Chem. News **64**, 157.
Davy: Phil. Trans. 1808, p. 1; Gilb. Ann. **30**, 369, 1808; **31**, 113, 1809.
Seebeck: Gilb. Ann. **28**, 367, 1808.
Moissan (Fl.): Compt. rend. **102**, 1543, 1886; **103**, 202, 256, 1886.
Förster u. Seidel: Ztschr. f. anorg. Chem. **14**, 106, 1897.
Houllevigne: Journ. d. Phys. (3) **6**, 246, 1897.
Geuther: Lieb. Ann. **109**, 129, 1859.
Warburg: P. A. **135**, 114, 1868.
Gehrcke: Verh. d. deutsch. phys. Ges. **5**, 263, 1903.
Beetz: P. A. **127**, 45, 1886; Ann. d. Phys. (4) **2**, 94, 1877.
Lecher: Wien. Ber. **107**, 740, 1898.
Grätz: W. A. **62**, 323, 1897.
Campetti: Atti R. Acc. d. Sc. Torino **34**, 90, 1899; **36**, 251, 1901.
Norden: Ztschr. f. Elektrochem. **6**, 159, 188, 1899.
Lecher: Wien. Ber. **107**, 739, 1838.

Cook: Phys. Rev. **18**, 23, 1904; **20**, 312, 1905.
Charters: Journ. phys. chem. **9**, 110, 1905.
Bartorelli: N. Cim. (5) **1**, 112, 1901; Phys. Ztschr. **2**, 469, 1901.
Mayrhofer: Elektrotechn. Ztschr. **21**, 913, 926, 1900.
Hittorf (Doppelsalze): P. A. **89**, 1, 1853; **103**, 1, 1858; **106**, 337, 513, 1859.
R. Lenz: Bull. de l'Acad. Imp. de St. Pétersb. **30**, No. 9, 34, 1882.
Kistiakowski: Phys. Chem. **6**, 97, 1890.
Bredig: Ztschr. f. Elektrochem. **6**, 33, 1899.
Walker: Phys. Chem. **49**, 82, 1904; **51**, 706, 1905.
Lundèn: Phys. Chem. **54**, 532, 1906.
Hittorf (Gemische): P. A. **103**, 48, 1858.
Lehmann: Phys. Chem. **4**, 525, 1889.
Buff: Lieb. Ann. **105**, 156, 1858.
Paalzow: P. A. **136**, 489, 1869.
Arrhenius: W. A. **30**, 51, 1887; Ztschr. f. phys. Chem. **2**, 284, 1888.
Chassy: Ann. d. chim. et phys. (6) **21**, 241, 1900; Journ. d. phys. (2) **9**. 305, 1890.
Schrader: Ztschr. f. Elektrochem. **3**, 498, 1897.
Hopfgartner: Phys. Chem. **25**, 115, 1898; Ztschr. f. Elektrochem. **4**, 445, 1898.
Wolf: Ztschr. f. phys. Chem. **40**, 222, 1902; Ztschr. f. Elektrochem. **8**, 117, 1902.
Nernst u. Riesenfeld: Gött. Nachr. 1901, S. 54.
Riesenfeld: Ztschr. f. Elektrochem. **7**, 645, 1901.
Bouty: Compt. rend. **88**, 714, 1879.
Mills: Proc. R. Soc. **26**, 504, 1877.

Zu § 3.

Kohlrausch u. Holborn: Leitvermögen d. Elektrolyte. Leipzig 1898.
Hankel: P. A. **69**, 263, 1846.
G. Wiedemann: P. A. **99**, 177, 228, 1856.
Grotrian: P. A. **157**, 130, 237, 1876; **160**, 238, 1877; W. A. **8**, 529, 1879.
R. Lenz: Mém. de l'Acad. Imp. d. St. Pétersb. (7) **26**, No. 3, 51, 1878.
C. Stephan: W. A. **17**, 673, 1882.
E. Wiedemann: W. A. **20**, 537, 1883.
Arrhenius: Phys. Chem. **9**, 487, 1892.
Bouty: Compt. rend. **98**, 362, 1884; Journ. d. phys. (2) **3**, 325, 1884; **6**, 14, 1887.
Gouré de Villemontée: Rapp. prés. au Congr. internat. d. phys. **4**, 84, 1901.
Foussereau: Ann. d. chim. et phys. (6) **5**, 359, 1885.
Poincaré: Ann. d. chim. et phys. (6) **21**, 315, 1890.
Massoulier: Compt. rend. **130**, 773, 1900.
Holland: W. A. **50**, 261, 1893.
Euler: W. A. **63**, 273, 1898; Phys. Chem. **25**, 536, 1898.
Grotrian (Reibung): P. A. **157**, 130, 1876; **160**, 238, 1877; W. A. **8**, 529, 1879.
G. Wiedemann (Diffusion): P. A. **104**, 170, 1858.
Long: W. A. **9**, 632, 1880.
R. Lenz (Diffusion): Mém. de l'Acad. Imp. de St. Pétersb. (7) **30**, 1882.
Beetz: P. A. **117**, 1, 1862.
F. Kohlrausch: P. A. **159**, 260, 1876.

Arrhenius: Phys. Chem. **1**, 96, 1889.
Noyes and Coolidge: Phys. Chem. **46**, 323, 1903; Amer. Chem. Soc. **26**, 134, 1904.
F. Kohlrausch: Berl. Ber. 1900, S. 1002; 1901, S. 1026; 1902, S. 574; Proc. R. Soc. **71**, 338, 1903.
Kohlrausch u. Grüneisen: Berl. Ber. 1904, S. 1215.
Déguisne: Diss. Straßburg 1895.
Braun: P. A. **154**, 161, 1875.
W. Kohlrausch: W. A. **17**, 642, 1882.
Bouty et Poincaré: Compt. rend. **107**, 88, 332, 1888; Ann. de chim. et phys. (6) **17**, 52, 1889.
Poincaré: Compt. rend. **108**, 138, 1889; **109**, 174, 1889; Journ. d. phys. (2) **9**, 473, 1896.
Grätz: W. A. **40**, 18, 1890.
Foussereau: Compt. rend. **98**, 1326, 1884.
Paalzow: P. A. **136**, 489, 1869.
Bouchotte: Compt. rend. **62**, 955, 1864.
Brender: W. A. **22**, 181, 1884; **31**, 872, 1887.
Chruschtschow u. Paschkow: Compt. rend. **108**, 1162, 1889.
Klein: W. A. **27**, 151, 1886.
Bouty: Compt. rend. **103**, 39, 1886; **104**, 1699, 1839, 1887; Ann. d. chim. et phys. (6) **14**, 74, 1888.
F. Kohlrausch (Wasser): P. A. Ergbd. **8**, 1, 1878; W. A. **24**, 48, 1885; **44**, 577, 1891.
Arrhenius: W. A. **30**, 51, 1887.
Magnus: W. A. **24**, 48, 1885.
Heydweiller: W. A. **53**, 209, 1894.
F. Kohlrausch u. Heydweiller (Wasser): W. A. **53**, 209, 1894.
Gore: Proc. R. Soc. **159**, 173, 256, 1869.
Bleekrode: W. A. **3**, 161, 1878.
Hittorf: W. A. **4**, 405, 1878.
Kablukow: Moderne Theorie der Lösungen (russ.). Moskau 1891; Phys. Chem. **4**, 429, 1889; Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **23**, 391, 1891.
R. Lenz: Mém. de l'Acad. Imp. d. St. Pétersb. (7) **30**, No. 9, 1882.
Walden u. Centnerszwer: Bull. d. l'Acad. Imp. d. St. Pétersb. 1901, Juni; Ztschr. f. anorg. Chem. **30**, 145, 1902; Phys. Chem. **39**, 813, 1902.
Centnerszwer: Phys. Chem. **39**, 217, 1902.
Walden: Ber. d. d. chem. Ges. **32**, 2862, 1899; Ztschr. f. anorg. Chem. **25**, 209, 1900; **29**, 371, 1901; Phys. Chem. **43**, 385, 1903; **46**, 163, 1903; **54**, 129, 1906; **55**, 207, 281, 683, 1906; **58**, 497, 1907; **59**, 192, 385, 1907; **60**, 87, 1907.
Lewis u. Wheeler: Phys. Chem. **56**, 179, 1906.
Jones, Lindsay, Caroll, Bingham, Mc Master: Amer. chem. J. **28**, 329, 1902; **32**, 321, 1904; **34**, 481, 1905; **36**, 1906; Phys. Chem. **56**, 129, 1906; **57**, 193, 257, 1906.
Plotnikow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **34**, 466, 1902; **35**, 794, 1903; **36**, 1282, 1904; **37**, 318, 1905; **38**, 1096, 1906; Phys. Chem. **48**, 220, 1904.
Steele, Mc Intosh and Archibald: Phil. Trans. **205**, 98, 120, 138, 148, 1905; Phys. Chem. **55**, 129, 1906.
Selinski u. Krapiwin: Phys. Chem. **21**, 35, 1896.
Franklin and Kraus: Amer. Chem. Journ. **23**, 277, 1900.
Carrara: Gaz. chim. ital. **26**, 119, 1896; **27**, 422, 1897.

Hartwig: W. A. **33**, 58, 1888; **43**, 839, 1891; Progr. Kreisrealschule, Nürnberg 1896.
Di Ciommo: N. Cim. (5) **2**, 81, 1901.
Vicentini: Mem. di Torino (2) **36**, 1884.
Fitzpatrick: Rep. Brit. Ass. 1886; Phil. Mag. (5) **24**, 377, 1887.
Stephan: W. A. **17**, 673, 1882.
E. Wiedemann: W. A. **20**, 537, 1883.
Lüdeking: W. A. **37**, 172, 1889.
Arrhenius: Öfvers. af k. Vetensk. Ak. Förhandl. 1885, p. 121.
Nichols and Meritt: Phys. Rev. **19**, 415, 1904.
Kistiakowski: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **20**, 411, 1890.
Kohlrausch u. Rose: Berl. Ber. 1893, S. 453; W. A. **50**, 127, 1893; Phys. Chem. **12**, 234, 1893.
Hollemann: Phys. Chem. **12**, 125, 1893.
Erdmann: Chem. Ber. **30**, 1175, 1897.
F. Kohlrausch u. Dolezalek: Berl. Ber. 1901, S. 1018.
F. Kohlrausch: Phys. Chem. **44**, 197, 1903.
Böttger: Phys. Chem. **41**, 521, 1903.
Gardner u. Gerasimow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **36**, Chem. T., 761, 1904.

Zu § 4.

Paetz van Troostwyk et Deimann: Journ. d. phys. **2**, 130, 1789.
Ritter: Gilb. Ann. **2**, 80, 1799.
Nicholson and Carlisle: Nicholsons Journ. **4**, 179, 1800; Gilb. Ann. **6**, 340, 1800.
Davy: Phil. Trans. 1806; Gilb. Ann. **28**, 158, 1808.
Grotthus: Phys.-chem. Forschungen 1820, S. 115; Gehlers Journ. **5**, 816, 1808; Ann. d. chim. et phys. **58**, 64, 1806; **63**, 20, 1808.
Berzelius: Gilb. Ann. **27**, 270, 1807; **42**, 45, 1812.
Fechner: P. A. **44**, 39, 1838.
De la Rive: Ann. d. chim. **28**, 190, 1825; Traité d'Électric. **2**, 814, 1856.
Ampère: Journ. d. phys. **93**, 450, 1821.
Schönbein: Verhandl. d. Naturf.-Ges. in Basel **1**, 32, 1857.
Magnus: P. A. **102**, 1, 1857; **104**, 567, 1858.
Gmelin: P. A. **44**, 30, 1838.
Pouillet: Compt. rend. **20**, 1544, 1845.
Daniell and Miller: Phil. Trans. **1**, 4, 1844; P. A. **64**, 18, 1845.
Daniell: Phil. Trans. **1**, 103, 1839; P. A. Ergbd. **1**, 565, 1842.
G. Wiedemann: P. A. **99**, 177, 1856.
Kirmis: W. A. **4**, 503, 1878.
Hittorf: P. A. **89**, 177, 1853; **98**, 1, 1856; **103**, 1, 466, 1858; **106**, 337, 513, 1859.
Mc Bain: Ztschr. f. Elektrochem. **11**, 961, 1905.
Jahn: Phys. Chem. **58**, 641, 1907.
Löb u. Nernst: Phys. Chem. **2**, 962, 1888.
Bein: W. A. **46**, 29, 1892; Diss. Berlin 1892.

Zu § 5.

F. Kohlrausch: Gött. Nachr. 1876, S. 213.
F. Kohlrausch (Beweglichkeiten *l*): Berl. Ber. 1901, S. 1026; 1902, S. 572.
Noyes and Sammet: Amer. Chem. Soc. **24**, 944, 1902; Phys. Chem. **43**, 49, 1903.

Bredig: Phys. Chem. **13**, 191, 1894.
Kohlrausch u. Steinwehr: Berl. Ber. 1902, S. 581.
G. Wiedemann: P. A. **99**, 177, 1856; **104**, 162, 1858.
Fitzpatrick: Rep. of Brit. Assoc. 1893.
Weiske: P. A. **103**, 466, 1858.
Bourgoin: Ann. d. chim. et phys. (4) **15**, 18, 1868.
Kuschel: W. A. **13**, 289, 1881.
Lussana: Atti Ist. Venet. (7) **3**, 1144, 1892.
R. Lenz: Mém. d. l'Acad. Imp. d. St. Pétersb. (7) **30**, 64, 1882.
Ostwald: Phys. Chem. **1**, 75, 1887; **2**, 840, 1888.
Bredig: Phys. Chem. **13**, 191, 289, 1894; Diss. Leipzig 1893.
Löb u. Nernst: Phys. Chem. **2**, 962, 1888.
Kistiakowski: Phys. Chem. **6**, 104, 1890.
Kümmel: W. A. **64**, 655, 1898.
Jahn: Phys. Chem. **37**, 673, 1901.
Bogdan: Diss. Berlin 1901.
Hittorf: Arch. Néerl. (2) **6**, 671, 1901; Phys. Chem. **39**, 613, 1902.
Hopfgartner: Phys. Chem. **25**, 119, 1898.

Zu § 6.

Clausius: P. A. **101**, 338, 1858.
Williamson: Lieb. Ann. **77**, 37, 1851.
Hittorf: P. A. **103**, 1, 1858; **106**, 513, 1859.
Helmholtz: W. A. **11**, 737, 1880; Abhandl. S. 898.
Arrhenius: Phys. Chem. **1**, 631, 1887; **2**, 491, 1888; **4**, 96, 1889; **9**, 339, 1892; Lum. électr. **35**, 401; **36**, 458; **37**, 513; **38**, 563; Bihang till Svenska Vetensk. Handl. **8**, No. 13, 14, 1884.
Lodge: Rep. Brit. Assoc. 1885.
Van't Hoff u. Reicher: Phys. Chem. **2**, 777, 1888; **3**, 198, 1889.
Abegg: Öfvers. Kgl. Sv. Ak. Förhandl. 1892, No. 10, p. 517.
Ostwald: Phys. Chem. **2**, 270, 1888; **3**, 170, 241, 369, 1889.
Planck: W. A. **34**, 147, 1888.
Rudolphi: Phys. Chem. **17**, 385, 1895.
Barmwater: Phys. Chem. **28**, 134, 428, 1899.
Storch: Phys. Chem. **19**, 13, 1896.
Bancroft: Phys. Chem. **31**, 188, 1899.
Jahn: Phys. Chem. **37**, 490, 1901; **41**, 265, 288, 1902.
Centnerszwer: Phys. Chem. **39**, 217, 1902.
J. J. Thomson: Phil. Mag. (5) **36**, 320, 1893.
Nernst (Dielektrizitätskonstante): Phys. Chem. **13**, 531, 1894.
Drude u. Nernst: Phys. Chem. **15**, 79, 1894.
Timmermans: Chem. Centralbl. **77**, II, 484, 1906.
Carrara e Levi: N. Cim. (4) **12**, 284, 1900; Gaz. chim. **30**, II, 197, 1900.
Lodge: Rep. Brit. Assoc. Birmingham 1886; Beibl. **11**, 466, 1887.
Whetham: Proc. R. Soc. **52**, 284, 1892; **58**, 182, 1895; Phys. Chem. **11**, 220, 1893.
Nernst: Ztschr. f. Elektrochem. **3**, 308, 1897.
Masson: Phil. Trans. 1899.
Noyes u. Blanchard: Phys. Chem. **36**, 1, 1901.
Abegg: Ztschr. f. Elektrochem. **7**, 618, 1011, 1901; Phys. Ztschr. **3**, 110, 124, 1901.
Abegg u. Gaus: Phys. Chem. **40**, 737, 1902.
Steele: Proc. R. Soc. **68**, 358, 1901; Ztschr. f. Elektrochem. **7**, 729, 1901; Phys. Chem. **40**, 689, 1902; Trans. Chem. Soc. **79**, 414, 1901.

Denison and Steele: Proc. R. Soc. **76**, 556, 1905; Phys. Chem. **57**, 110, 1907.
Denison: Phys. Chem. **44**, 575, 1903.
Kahlenberg: Phil. Mag. (6) **9**, 349, 1905.
Brillouin: Ann. d. chim. et phys. (8) **7**, 289, 1906.
Malmström: Ann. d. Phys. (4) **18**, 413, 1905.
Planck: Phys. Chem. **41**, 212, 1902.
Durrant: Proc. R. Soc. **78**, 342, 1907.

Zu § 7.

Gautherot vgl. Sue: Hist. du Galvanisme **1**, 204; Vogts Neues Magazin **4**, 832, 1802.
Ritter: Vogts Neues Magazin **6**, 104, 1803.
Marianini: Ann. d. chim. et phys. **36**, 113, 1826; Schweiggers Journ. **49**, 30, 1827.
De la Rive: Ann. d. chim. et phys. **27**, 190, 1825; **37**, 225, 1828; P. A. **10**, 190, 1827; **15**, 122, 1829; Bibl. Univers. **35**, 92, 1826.
Matteucci: Ann. d. chim. et phys. **63**, 256, 1836; **66**, 277, 1837.
Poggendorff: P. A. **61**, 586, 1844 (Wippe); **52**, 497, 1841.
J. Müller: Fortschr. d. Phys. 1849, S. 356.
Bohn: Instr. **7**, 301, 1887.
Fechner: Maßbestimmungen 1831, S. 34.
E. Lenz: P. A. **59**, 203, 407, 1843.
Fuchs: P. A. **156**, 158, 1875.
F. E. Neumann: vgl. Wild, Zürich, Vierteljahrsschr. **2**, 213, 1857.
Föppl: W. A. **27**, 189, 1886.
Pirani: W. A. **21**, 73, 1873.
Crova: Ann. d. chim. et phys. (3) **68**, 413, 1863.
F. Exner: W. A. **5**, 338, 1878; **6**, 388, 1879.
Buff: P. A. **130**, 342, 1867.
Raoult: Ann. d. chim. et phys. (4) **2**, 365, 1864.
Poggendorff: P. A. **73**, 301, 1848.
Fromme: W. A. **12**, 399, 1879; **29**, 497, 1886; **30**, 77, 320, 503, 1887.
Sawinow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **23**, 474, 1891.
Streintz: W. A. **13**, 659, 1881; **32**, 125, 1887; **33**, 465, 1888; **34**, 751, 1888.
Koch u. Wüllner: W. A. **45**, 475, 1892.
Tafel: Phys. Chem. **50**, 641, 1905.
Beetz: W. A. **10**, 348, 1880; **12**, 290, 1881.
F. Kohlrausch: P. A. **148**, 143, 1873.
Bartoli: N. Cim. **7**, 234, 1880.
Edlund: P. A. **85**, 209, 1852.
Bernstein: P. A. **155**, 177, 1875.
Macaluso: Math.-phys. Ber. d. K. sächs. Ges. d. Wiss. 1873, S. 306.
Helmholtz: W. A. **11**, 737, 1880; Berl. Ber. 11. März 1880.
Bouty: Journ. d. Phys. (1) **8**, 289, 1879; **10**, 241, 1881; (2) **1**, 346, 1882.
Poggendorff (Temperatur): P. A. **61**, 619, 1884; **70**, 198, 1847.
Beetz (Temperatur): P. A. **79**, 103, 1850; (andere Gase): P. A. **90**, 42, 1853.
E. Lenz u. Saweljew: P. A. **67**, 493, 1846.
Raoult: Ann. d. chim. et phys. (4) **2**, 370, 1864.
Le Blanc: Phys. Chem. **8**, 299, 1891; **12**, 333, 1892.
Nernst: Berl. Ber. **30**, 1547, 1897.

Glaser: Ztschr. f. Elektrochem. **4**, 355, 1898.
Bose: Ztschr. f. Elektrochem. **5**, 153, 1898.
Colley: W. A. **7**, 206, 1879.
Blondlot: Compt. rend. **89**, 148, 1879; Journ. d. phys. (1) **10**, 277, 333, 1881; Thèse de Doctorat No. 460, Paris 1881.
Oberbeck: W. A. **19**, 215, 1883.
Lietzau: W. A. **55**, 338, 1895.
Bouty: Compt. rend. **116**, 628, 691, 1893; **118**, 918, 1894; Journ. de phys. (3) **3**, 498, 1894; Ann. d. chim. et phys. (7) **3**, 145, 1894.
F. Kohlrausch: P. A. **148**, 143, 1873; Jubelbd. S. 296, 1874.
M. Wien: W. A. **58**, 37, 1896.
Gordon: W. A. **61**, 1, 1897.
Sokolow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **19**, 191, 1887; **28**, 129, 1896.
Krüger: Diss. Göttingen 1903.
Colin: Compt. rend. **117**, 459, 1894.
Wiedeburg: W. A. 51, 302, 1894.
Helmholtz: P. A. **150**, 486, 1873; W. A. **2**, 737, 1880; **34**, 737, 1888; Berl. Ber. 1873, S. 559, 587; 1883, S. 647; Proc. R. Soc. Edinb. 1880—1881, S. 202.
Witkowski: W. A. **11**, 759, 1880.
Ostwald: Allgem. Chem. II, **1**, 975, 1893.
Nernst: Theoret. Chem. 1900, S. 681.
Salomon: Phys. Chem. **24**, 55, 1897.
Rothé: Ann. d. chim. et phys. (8) **1**, 215, 289, 433, 1904; Journ. de phys. (4) **3**, 661, 1904; Thèse de doctorat, Paris 1904.
Hittorf: Phys. Ztschr. **2**, 229, 1901; Ztschr. f. Elektrochem. **6**, 6, 1899; **7**, 168, 1900; Phys. Chem. **25**, 729, 1898; **30**, 481, 1899; **34**, 385, 1900.
Micheli: Arch. d. sc. phys. et natur. (10) 1900.
Finkelstein: Phys. Chem. **39**, 91, 1901.
Fredenhagen: Phys. Chem. **43**, 1, 1903; Ztschr. f. Elektrochem. **11**, 857, 1905.
Ostwald (Passivität): Phys. Ztschr. **1**, 87, 1899; Abhandl. d. math.-phys. Klasse d. K. sächs. Ges. d. Wiss. **25**, 221, 1899; **26**, 27, 1900.
Muthmann u. Fraunberger: Münch Ber. 1904, S. 201.
W. Müller: Phys. Chem. **48**, 577, 1904; Ztschr. f. Elektrochem. **10**, 518, 1904; **11**, 823, 1905.
Haber u. Goldschmidt: Ztschr. f. Elektrochem. **12**, 49, 1906.
Gordon u. Clark: Ztschr. f. Elektrochem. **12**, 769, 1906.
W. Müller u. Königsberger: Phys. Ztschr. **5**, 413, 797, 1904; **6**, 847, 849, 1905; **7**, 796, 1906; Verh. d. d. phys. Ges. 1906, S. 545.
Hollis: Cambr. Proc. **12**, 452, 1904.

Zu § 8.

Daniell: Phil. Trans. **1**, 117, 1836; P. A. **42**, 272, 1837.
Meidinger: P. A. **108**, 602, 1859.
Calland: Cosmos **19**, 1861; **28**, 1862.
Siemens u. Halske: P. A. **108**, 608, 1859.
Buff: Lieb. Ann. **85**, 4, 1853.
Varley: Journ. Tel. Soc. **10**, 452, 1882.
Leclanché: Compt. rend. **83**, 54, 1876; **87**, 329, 1878; Les Mondes **16**, 532, 1868; Dingl. Journ. **186**, 270, 1867; **188**, 96, 1868.
De Lalande: Compt. rend. **97**, 164, 1883; **112**, 1243, 1891.
Warren de la Rue et Müller: Compt. rend. **77**, 794, 1868; **81**, 686, 746, 1875; P. A. **135**, 496, 1868; **157**, 290, 1876.

Grove: Phil. Mag. (3) **15**, 287, 1839; P. A. **48**, 300, 1839; **49**, 511, 1840; Compt. rend. **8**, 567, 1839.
Poggendorff: P. A. **54**, 425, 1840; **134**, 478, 1868.
Bunsen: P. A. **54**, 417, 1841; **55**, 265, 1842; Lieb. Ann. **38**, 311, 1841.
Warren: Chem. News **71**, 2, 1895.
Tommasi: Éclair. électr. **41**, Supplem., p. XC, 1904.
Nernst: Ztschr. f. Elektrochem. **11**, 835, 1905.
Lawis: Phys. Chem. **55**, 465, 1906.
Jone: Éclair. électr. **43**, 395, 1905.
A. Becquerel: Traité d'electricité et de magnétisme, 1855.
Jäger: Die Normalelemente. Halle 1902.
Gouy: Rapports prés. au congr. internat. de phys. **2**, 422, Paris, 1900.
Raoult: Ann. d. chim. et phys. (4) **2**, 345, 1864.
Kittler: W. A. **17**, 890, 1882.
Lodge: Phil. Mag. (5) **5**, 1, 1878.
Crova et Garbe: Journ. d. phys. (2) **3**, 299, 1884.
Fleming: Phil. Mag. (5) **26**, 120, 1888; Zentralbl. f. Elektrotechn. **8**, 711, 1886; **10**, 684, 1888.
Helmholtz: Berl. Ber. 1882, S. 834.
Negbauer: W. A. **44**, 767, 1891.
Ostwald: Phys. Chem. **1**, 403, 1887.
Richards: Phys. Chem. **24**, 39, 1897.
Schoop: Die Primärelemente. Halle 1895.
Gouy: Compt. rend. **104**, 781, 1887; Journ. d. phys. (2) **7**, 532, 1888; Phys. Chem. **2**, 978, 1888.
Mauri: Atti d. R. Ist. Lomb. di Scienze (2) **30**, 1897; N. Cim. (4) **7**, 197, 1898.
Latimer Clark: Proc. R. Soc. **20**, 144, 1872; Phil. Trans. **164**, 1, 1874; Journ. of the Soc. of Telegr. Engin. **7**, 53, 1878.
Lord Rayleigh: Phil. Trans. **175**, 412, 1884; **176**, 781, 1885; Electrician **24**, 295, 1890.
Kahle: W. A. **51**, 174, 203, 1894; **59**, 532, 1896; **64**, 92, 1898; **67**, 1, 1899; Instr. **12**, 117, 1892; **13**, 191, 293, 1893; **18**, 230, 1898.
Feussner: Samml. elektrotechn. Vorträge (Voit) **1**, Heft 3, 135, 1897.
Carhart: The Electro-Chimist and Metallurgist **1**, 37, 1901; Phil. Mag. (5) **28**, 420, 1889.
Callendar and Barnes: Electrician **39**, 638, 1897; Proc. R. Soc. **62**, 117, 1897.
Barnes: Phys. Rev. **10**, 268, 1900; Phys. Ztschr. **2**, 52, 1900.
Jäger u. Kahle (Clark and Weston): W. A. **65**, 926, 1898.
Jäger u. Lindeck (Clark): Ann. d. Phys. (4) **5**, 1, 1901.
Perot et Fabry: Ann. d. chim. et phys. (7) **13**, 1898.
Lindeck (Clark): Instr. **12**, 12, 1892.
Jäger (Clark): W. A. **63**, 354, 1897.
Marek (Clark and Weston): Ann. d. phys. (4) **1**, 617, 1900.
M. Iwanow (Clark): Wremennik Glawnoj palati mjer i wessow (russ.) **5**, 36, 1900.
Hulett: Phys. Rev. **22**, 321, 1906; **23**, 166, 1906; **25**, 16, 1907.
Guthe u. v. Ende: Phys. Rev. **24**, 214, 1907.
Alder Wright (Clark): Phil. Mag. (5) **16**, 25, 1883.
Glazebrook and Skinner: Phil. Trans. **183**, 567, 1892.
Wulf: Wien. Ber. **106**, 562, 1897.
Ayrton and Cooper: Proc. R. Soc. **59**, 368, 1896.

Luther: Ztschr. f. Elektrochem. 8, 493, 1902.
Weston: Electrician 30, 741, 1892; 31, 645, 1893; Elektrotechn. Ztschr. 13, 235, 1892.
Dearlove: Electrician 31, 645, 1893.
Jäger: Elektrotechn. Ztschr. 18, 647, 1897; Ann. d. phys. (4) 1901, S. 123; Instr. 20, 317, 1900.
Jäger u. Wachsmuth: Elektrotechn. Ztschr. 15, 507, 1894; W. A. 59, 575, 1896.
Kohnstamm u. Cohen: W. A. 65, 344, 1898.
Taylor: Phys. Rev. 7, 149, 1898.
Blondin: Eclair. électr. 20, 98, 239, 1899.
Henderson: Phil. Mag. 48, 152, 1899.
Cohen: Ann. d. phs. (4) 2, 863, 1900; Phys. Chem. 34, 621, 1901; Kgl. Akad. v. Wet. Amsterdam, 24. Nov. 1900.
Barnes: Phys. Rev. 10, 268, 1900.
Wind: Kgl. Akad. v. Wet. Amsterdam 1901, p. 595.
Jäger u. Lindeck: Ann. d. phys. (4) 3, 366, 1900; 5, 1, 1901; Phys. Chem. 35, 98, 1900; 37, 641, 1901; Instr. 21, 33, 65, 1901.
Czapski: W. A. 21, 235, 1884.
Klemenčič: Ann. d. Phys. (4) 2, 848, 1900.
Carhart, Hamilton, Rosa, Sharp, Arnold (Kommission): Chem. News 90, 225, 1904.
Verh. d. internat. Konferenz über elektr. Maßeinheiten. Berlin 1906.
Barnes and Lucas: Journ. Phys. Chem. 8, 196, 1904.

Zu § 9.

F. Becquerel: Compt. rend. 9, 145, 561, 1839; Thèse 1840; Ann. d. phys. et chim. (3) 9, 268, 1843; 32, 176, 1851; 36, 99, 1859; Bibl. univ. de Genève 35, 136, 1841; La lumière 2, 121, 1868.
N. Jegorow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 9, 33, 143, 1878; Journ. d. phys. (1) 5, 283, 1876.
J. Borgmann: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 14, 258, 1883.
Minchin: Phil. Mag. (5) 31, 207, 1891.
G. C. Schmidt: W. A. 67, 563, 1899.
Pellat: Compt. rend. 89, 227, 1879.
Chaperon et Mercadier: Compt. rend. 106, 1595, 1888.
Gouy et Rigollot: Compt. rend. 106, 1470, 1888.
Hankel: W. A. 1, 402, 1877; Ber. d. K. sächs. Ges. 27, 399, 1875.
Rigollot: Journ. d. phys. (3) 6, 520, 1897.
Allegretti: Phys. Ztschr. 2, 317, 1901; Nuov. Cim. (5) 1, 189, 1901.
Bose u. Kochan: Phys. Chem. 38, 18, 1901.
Kochan: Diss. Breslau 1902; Ztschr. f. Elektrochem. 9, 33, 61, 97, 1903; Jahrb. f. Radioakt. u. Elektronik 2, 186, 1905 (Übersicht).
Sabine: Nature (engl.) 17, 172, 1878; Phil. Mag. (6) 5, 401, 1879.
Griveaux: Compt. rend. 107, 837, 1888.
Luggin: Phys. Chem. 23, 577, 1897.
Scholl: Ann. d. Phys. [4] 16, 193, 417, 1905.
Wildermann: Phys. Chem. 52, 208, 1905; 59, 533, 703, 1907; 60, 70, 1907; Proc. R. Soc. 74, 369, 1905; 77, 274, 1906.
Planté: Recherches sur l'Electricité. Paris 1883 Übers. v. Wallentin, 1886.
Tamine: Recherches théor. et prat. sur les accumulateurs, Mons 1885.
Sack: Die Akkumulatoren. Wien 1892.
Jumeau: État actuel de l'Industrie des accumulateurs, in État actuel des Industries électriques, Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 93—140.

Hoppe: Die Akkumulatoren für Elektrizität, Berlin 1892.
Elbs: Die Akkumulatoren, Leipzig 1893.
Dolezalek: Die Theorie des Bleiakkumulators, Halle 1901.
Schoop: Handbuch der elektr. Akkumulatoren, Stuttgart 1898.
Zacharias: Die Akkumulatoren, Jena 1901.
Zacharias: Transportable Akkumulatoren, Berlin 1898.
Planté: Compt. rend. **49**, 402, 1859; **50**, 640, 1860; **95**, 418, 1882; Ann. d. chim. et phys. (4) **15**, 1868; P. A. **109**, 655, 1860.
Ch. Kirchhoff vgl. Zacharias: Die Akkumulatoren, Jena 1901, S. 7—10.
Liebenow: Ztschr. f. Elektrochem. **2**, 420, 1895/96.
Le Blanc: Lehrb. d. Elektrochem., 1. Aufl., S. 223, 1896; 2. Aufl., S. 251, 1900.
Elbs: Ztschr. f. Elektrochem. **6**, 46, 1899.
Dolezalek: W. A. **65**, 894, 1898; Ztschr. f. Elektrochem. **4**, 349, 1898.
Streintz: W. A. **38**, 344, 1889; **43**, 241, 1891; **46**, 449, 1892; **49**, 564, 1893.
Zedner: Ztschr. f. Elektrochem. **11**, 809, 1905; **12**, 463, 1906.

Zu § 10.

E. Becquerel: Ann. d. chim. et phys. (4) **9**, 21, 1843.
Helmholtz: Erhaltung der Kraft, 1847.
W. Thomson: Phil. Mag. (4) **1**, 177, 1851; **2**, 429, 551, 1881.
Favre: Compt. rend. **36**, 342, 1853; **39**, 1212, 1854; **45**, 56, 1857; **46**, 658, 1858; **47**, 599, 1848; Ann. d. chim. et phys. (3) **40**, 293, 1854.
Raoult: Ann. d. chim. et phys. (4) **4**, 392, 1865.
Edlund: P. A. **137**, 481, 1869; **159**, 420, 1876; W. A. **19**, 287, 1883.
Braun: W. A. **5**, 182, 1878; **16**, 561, 1882; **17**, 593, 1882; **33**, 337, 1888; Berl. Ber. 1885, S. 291.
Alder Wright and C. Thompson: Phil. Mag. (5) **19**, 1, 209, 1885.
Herroun: Phil. Mag. (5) **27**, 209, 1889.
Pagliani: Atti di Torino **25**, 509, 1890.
Chaperon: Compt. rend. **92**, 786, 1881; Bull. de la Soc. Internat. des Électriciens **3**, 377, 1886.
Moser: W. A. **14**, 62, 1881.
Helmholtz: Berl. Ber. 1882, S. 825; 1883, S. 647.
Gibbs: Trans. Ac. Connecticut 1878; Thermodynamische Studien, übersetzt v. Ostwald, Leipzig 1892, S. 388.
Czapski: W. A. **21**, 209, 1884.
Gockel: W. A. **24**, 618, 1885; **33**, 10, 1888; **40**, 450, 1890.
Jahn: W. A. **28**, 21, 491, 1886; **34**, 785, 1888.
Bugarszky: Ztschr. f. anorg. Chem. **14**, 145, 1897.
Chruschtschow u. Sitnikow: Compt. rend. **108**, 937, 1889.
Klein: Phys. Chem. **26**, 361, 1901.
Zuppinger: Diss. Straßburg 1900.
Czepinsky: Ztschr. f. anorg. Chem. **19**, 208, 1889.
O. H. Weber: Ztschr. f. anorg. Chem. **21**, 305, 1889.
Lovén: Phys. Chem. **20**, 456, 1896.
Gans: Ann. d. phys. (4) **6**, 315, 1901.
Duhem: Potentiel thermodynamique, Paris 1886, p. 117.
Gilbaut: Compt. rend. **113**, 465, 1891; Lum. électr. **42**, 7; **43**, 174.
R. Ramsey: Phys. Rev. **13**, 1, 1901; Phys. Ztschr. **3**, 177, 1902.
Colley: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **7**, 333, 1875; **8**, 182, 1876; P. A. **157**, 370, 624, 1876; W. A. **16**, 39, 1882; Phil. Mag. (5) **1**, 419, 1876 Nature **17**, 282, 1878.
Pirani (Brief an Maxwell): Nature **17**, 180, 1878.
Des Coudres: W. A. **57**, 232, 1896.

Helmholtz (Konzentrationselement): W. A. **3**, 201, 1878; Berl. Ber. 1877; Ges. Abh. **1**, 840.
Moser: W. A. **3**, 216, 1878; **14**, 62, 1881.
v. Türin: Phys. Chem. **5**, 340, 1890.
Richards u. Forbes: Phys. Chem. **58**, 683, 1907.
Helmholtz (Polarisation): Berl. Ber. 1883, S. 647; Ges. Abh. **3**, 92.
Helmholtz (Zwei entgegenges. Elem.): Berl. Ber. 1882, S. 825; Ges. Abh. **2**, 981.
Sokolow: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **28**, 167, 1896.
Dolezalek: W. A. **65**, 894, 1898; Ztschr. f. Elektrochem. **4**, 349, 1898.
Streintz: W. A. **38**, 344, 1889; **43**, 241, 1891; **46**, 449, 1892; **49**, 564, 1893.
Nernst: Phys. Chem. **2**, 613, 1888; **4**, 129, 1889; **36**, 596, 1901; **38**, 487, 1901.
Planck: W. A. **40**, 561, 1890; **44**, 385, 1891; Phys. Chem. **41**, 212, 1902.
Johnson: Ann. d. Phys. (4) **14**, 995, 1904.
Arrhenius: Phys. Chem. **37**, 315, 1901.
Sand: Phys. Chem. **36**, 499, 1901.
Jahn: Phys. Chem. **35**, 1, 1900; **36**, 453, 1901; **37**, 490, 1901; **38**, 125, 1901; **41**, 257, 1902.
Kahlenberg: Journ. of phys. Chem. **5**, 339, 1901.

Sechstes Kapitel.

Innerhalb der Kette auftretende Erscheinungen: Thermoelektrische Erscheinungen.

§ 1. Einleitung. Im zweiten Kapitel des ersten Abschnittes dieses Bandes (S. 161 bis 275) haben wir uns mit den Quellen des elektrischen Feldes bekannt gemacht, d. h. mit denjenigen Erscheinungen und Manipulationen, die vom Auftreten der Elektrisierung irgend welcher Körper begleitet sind. Nach eingehender Betrachtung dreier solcher Quellen, nämlich der elektrostatischen Induktion, des Kontaktes und der Reibung, wurde im § 15 desselben Kapitels (S. 247 bis 259) eine Zusammenstellung von 10 weiteren Elektrizitätsquellen gegeben. Im vorliegenden zweiten Abschnitte haben wir die Erscheinung des konstanten elektrischen Stromes kennen gelernt, welcher dort auftritt, wo eine kontinuierlich wirkende Elektrizitätsquelle vorhanden ist und eine die Elektrizität leitende geschlossene Kette existiert. Wir haben den hydroelektrischen Strom betrachtet, als dessen Quellen Kontakt oder chemische Wirkung gelten; erwähnt haben wir ferner im § 2 von Kap. IV (S. 577) die Kapillarströme, deren Quelle auf S. 257 unter VIII besprochen wurde.

Von den sonstigen Elektrizitätsquellen können einen elektrischen Strom noch die folgenden wachrufen: die elektrostatische Induktion, die Reibung, das veränderliche Magnetfeld (S. 259) und die thermoelektromotorische Kraft. Auf Reibung oder auf elektrostatischer Induktion beruht die Konstruktion der Elektrisiermaschinen (S. 259), die auf ihren Konduktoren ganz gewaltige, bis zu Hunderttausenden von

Volts gehende Potentialdifferenzen ergeben. Diese Maschinen liefern einen ununterbrochenen elektrischen Strom, wenn man die Konduktoren durch eine kontinuierliche Kette von Leitern miteinander verbindet. Hierbei entsteht zwar ein nur äußerst schwacher Strom, der aber immerhin alle im Früheren erwähnten Eigenschaften des hydroelektrischen Stromes besitzt: er ist von einem Magnetfelde umgeben, ruft die Erscheinung der Elektrolyse hervor usw. Der Unterschied zwischen einer Elektrisiermaschine und einer Batterie aus Elementen besteht darin, daß erstere große Potentiale an den Enden der offenen Kette, jedoch einen sehr schwachen Strom, d. h. sehr kleine Mengen hindurchströmender Elektrizität liefert, während die Elemente kleine Potentiale ergeben, dafür aber sehr große Elektrizitätsmengen. Denkt man sich, es sei in beiden Fällen eine geschlossene Kette vorhanden, so kann man im ersten Falle die Elektrisiermaschine als einen Teil der Kette ansehen, der einen außerordentlich großen Widerstand besitzt.

Die Ströme, welche durch ein veränderliches Magnetfeld, dessen Intensität oder Richtung Funktionen der Zeit sind, hervorgerufen werden, sollen erst in der zweiten Hälfte dieses Bandes betrachtet werden.

Es bleibt uns noch übrig, die Ströme zu untersuchen, die durch eine thermoelektromotorische Kraft hervorgerufen werden (S. 250); man bezeichnet sie als thermoelektrische Ströme. Ihr Auftreten steht in engem Zusammenhange mit zwei anderen Erscheinungen: mit dem Peltierschen Phänomen, auf das wir bereits einmal hinzuweisen Gelegenheit hatten (S. 187) und mit dem Thomson-Effekt, der in einer Änderung der Wärmeverteilung in einem ungleichmäßig erwärmten Leiter besteht, wenn durch diesen ein elektrischer Strom hindurchgeht. Im engeren Sinne des Wortes pflegt man als „thermoelektrisch" nur die Erscheinung des Auftretens eines thermoelektrischen Stromes zu bezeichnen. Ohne weiteres kann man jedoch in das Kapitel von der Thermoelektrizität auch das Peltiersche Phänomen und den Thomsoneffekt aufnehmen, indem man dann alle diejenigen in der Kette auftretenden Erscheinungen als thermoelektrische ansieht, bei denen sich der Zusammenhang zwischen Elektrizität und Wärme äußert, abgesehen jedoch von jenem Übergange von elektrischer Energie in Wärmeenergie, der im vierten Kapitel (S. 569) betrachtet worden ist und dem Lenz-Jouleschen Gesetze folgt.

§ 2. Thermoelektrische Ströme. Feste Körper. Thermoströmen sind wir bereits in Bd. II begegnet, als wir die Methoden zur Untersuchung der infraroten Strahlen behandelten, sowie in Bd. III bei Beschreibung der Methoden der Temperaturbestimmung, insbesondere der Bestimmung hoher Temperaturen (thermoelektrische Pyrometer). Eine historische Übersicht der Untersuchungen über die thermoelektrischen Erscheinungen findet man in den Abhandlungen von Streit.

Wenden wir uns den thermoelektrischen Erscheinungen zu, die in einer nur aus Metallen bestehenden Kette auftreten. Wie wir sahen, ist in einer geschlossenen Kette, die bloß aus Leitern erster Klasse besteht, die also keine Elektrolyte enthält, nach dem Voltaschen Gesetze (S. 172) die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich Null. Hierbei galt jedoch die Annahme, daß sich sämtliche Teile der Kette auf ein und derselben Temperatur befinden. Seebeck hat 1823 die Entdeckung gemacht, daß das Voltasche Gesetz seine Geltung verliert, falls sich die Lötstellen, d. h. die Stellen, an denen die verschiedenartigen Teile der Kette einander berühren, verschiedene Temperaturen haben. Nehmen wir den einfachsten Fall, wo die Kette nur aus zwei Metallen, beispielsweise einem Wismutstäbchen *ab* (Fig. 261) und einem Kupferdrahte *aedb* besteht, die bei *a* und *b* aneinander gelötet sind. Macht man die Temperatur t_2 der Lötstelle *b* höher als die Temperatur t_1 der Lötstelle *a*, so tritt in der geschlossenen Kette ein Strom auf, der durch die stärker erwärmte Lötstelle vom Wismut zum Kupfer geht. Dasjenige Metall, zu welchem der Strom durch die stärker erwärmte Lötstelle hindurch gelangt, werden wir das (thermoelektrisch) positive nennen, das andere jedoch das negative. Somit ist in dem Systeme Bi—Cu das Kupfer positiv, das Wismut negativ. Die Größe der thermoelektromotorischen Kraft E, welche in einer aus zwei Metallen bestehenden Kette wirkt, hängt von der Art dieser beiden Metalle, sowie von den Temperaturen t_1 und t_2 ihrer Lötstellen ab. Bezeichnen A und B zwei Metalle, so kann man symbolisch

$$E = A(t_1^0)\,B(t_2^0)\,A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

schreiben oder, falls die Temperaturen t_1 und t_2 gegeben sind, noch einfacher

$$E = (A, B) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo A das positive Metall ist, so daß $(A, B) = -(B, A)$ ist.

Ist in Formel (1) $t_2 > t_1$ und fließt der Strom durch die Lötstelle (t_2^0) von B nach A, so ist A das positive, B das negative Metall. Um das Auftreten von E zu verstehen, hat man anzunehmen, daß die elektromotorische Kraft $e = A \mid B$, vgl. (8), S. 171, eine Funktion der Temperatur t ist. Setzt man

$$e = A \mid B = f(t) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Fig. 261.

so ist offenbar

$$E(t_1, t_2) = e_2 - e_1 = f(t_2) - f(t_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die thermoelektrischen Erscheinungen sind nächst Seebeck von Becquerel eingehend studiert worden; letzterer hat unter anderem folgendes Gesetz gefunden: für zwei gegebene Metalle ist die Größe E bei den Temperaturen t_1 und t_2 der Lötstellen gleich der algebraischen Summe der beiden Größen E, von denen die erste den Temperaturen t_1

und t, die zweite den Temperaturen t und t_2 entspricht, wobei t irgend eine dritte Temperatur bedeutet. Symbolisch kann man

$$E(t_1, t_2) = E(t_1, t) + E(t, t_2)$$

schreiben, was sich, wie man sieht, unmittelbar aus Formel (4) ergibt. Selbstverständlich hat man bei der Summation auf die Vorzeichen der Größen E, d. h. auf die Richtung der Ströme, zu achten.

Eine Kombination aus zwei Metallen oder anderen Körpern (s. u.), die einen thermoelektrischen Strom liefert, heißt ein thermoelektrisches Element oder kurz ein Thermoelement.

In einer geschlossenen Kette, die nur ein Metall enthält, ist $E = 0$, welches auch immer die Temperaturverteilung längs der Kette sein mag. Dementsprechend findet man, daß in einer Kette aus zwei Metallen E nur von den Temperaturen t_1 und t_2 der Lötstellen abhängt, keineswegs aber von der Temperaturverteilung längs dieser Metalle. Auf diese Tatsache hat Magnus aufmerksam gemacht.

Seebeck hat durch Kombination verschiedener Metalle gefunden, daß man die Metalle in eine Reihe einordnen kann, die der Voltaschen Reihe (S. 173) analog ist. Stellt man je zwei Metalle dieser Reihe zusammen, so wird das vorhergehende immer negativ, das nachfolgende positiv. Nächst Seebeck haben noch Becquerel, Hankel, W. Thomson, Erhard, Bachmetjew u. a. ähnliche Reihen aufgestellt. So gibt z. B. Hankel folgende Reihe an: (—) Na, K, Bi, Ni, Co, Pd, Hg, Pt, Au, Cu, Sn, Al, Pb, Zn, Ag, Cd, Fe, Sb (+). W. Thomson hat folgende Reihe angegeben: (—) Bi, Pt_1, Al, Sn, Pb, Pt_2, Cu, Pt_3, Zn, Ag, Cd, Fe (+); hier sind Pt_1, Pt_2 und Pt_3 verschiedene Platinsorten, die Reihe selbst gilt für Temperaturen zwischen 10 und 32°. Die Nichtübereinstimmung obiger Reihen, wie sie von verschiedenen Beobachtern gefunden worden sind, erklärt sich dadurch, daß sich die Stellung eines Metalles in der Reihe je nach den Beimengungen, die es enthält und je nach der Art seiner Bearbeitung ändert. Sehr wichtig ist außerdem der Umstand, daß die Reihenfolge der Metalle, wie wir später sehen werden, auch von den Temperaturen t_1 und t_2 der Lötstellen abhängig ist.

Vergleicht man die Werte von E für verschiedene Kombinationen aus je zwei Metallen und wählt dabei die gleichen Temperaturen t_1 und t_2 der Lötstellen, so findet man, daß die Werte von E ein dem Voltaschen ähnliches Gesetz befolgen, welches durch Formel (15), S. 175, ausgedrückt war. Bedient man sich der symbolischen Ausdrucksweise der Formel (2), so kann man das Gesetz durch die analoge Formel

$$(A, B) + (B, C) = (A, C) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ausdrücken. Man kann dies Gesetz aus der Formel (4) ableiten. Es lassen sich nämlich folgende Gleichungen ohne weiteres verstehen:

$$(A, B) = A \,|\, B(t_2) - A \,|\, B(t_1)$$
$$(B, C) = B \,|\, C(t_2) - B \,|\, C(t_1)$$

Sind die Temperaturen t_2 und t_1 einander gleich, so ist

$$A \,|\, B + B \,|\, C = A \,|\, C$$

und man erhält daher durch Addition dieser beiden Gleichungen die Formel (5), da $A \,|\, C(t_2) - A \,|\, C(t_1) = (A, C)$ ist. Aus Formel (5) folgt, daß es genügt, bei gegebenen Werten von t_1 und t_2 die Werte von E zu kennen, welche den Kombinationen von verschiedenen Metallen mit einem willkürlich gewählten Metalle M entsprechen, um die Werte von E für alle möglichen Kombinationen der Metalle untereinander zu berechnen. Kennt man beispielsweise die Werte von (A, M) und (B, M), so findet man $(A, B) = (A, M) + (M, B) = (A, M) - (B, M)$.

Denken wir uns jetzt, wir hätten eine aus drei Metallen zusammengesetzte Kette. Es läßt sich leicht beweisen, daß E ungeändert bleibt, falls man zwischen die Metalle A und B, deren Lötstellen die Temperatur t_2 haben, das Metall C bringt, dessen beide Enden die Temperatur t_2 haben. Symbolisch läßt sich dies wie folgt ausdrücken:

$$A(t_1)\,B(t_2)\,A = A(t_1)\,B(t_2)\,C(t_2)\,A.$$

Dies ist wohl verständlich, da $B(t_2)\,C(t_2)\,A = B(t_2)\,A$ ist, oder einfacher, da bei der Temperatur t_2 offenbar $B \,|\, C + C \,|\, A = B \,|\, A$ ist. Anstatt eines Metalles C kann man zwischen B und A auch eine beliebige Anzahl von Metallen bringen, vorausgesetzt, daß alle Lötstellen zwischen B und A die gleiche Temperatur t_2 haben. Man kann dies auch durch folgende Überlegung finden. Es sei $E = A(t_1)\,B(t_2)\,C(t_2)\,D(t_2)\,F(t_2) \ldots (t_2)\,M(t_2)\,A$; diese Größe läßt sich auch wie folgt schreiben: $E = A \,|\, B(t_1) + B \,|\, C(t_2) + C \,|\, D(t_2) + D \,|\, F(t_2) + \cdots + M \,|\, A(t_2)$. Subtrahiert man hiervon die Gleichung $0 = A \,|\, B(t_2) + B \,|\, C(t_2) + C \,|\, D(t_2) + D \,|\, F(t_2) + \cdots + M \,|\, A(t_2)$, so erhält man $E = A \,|\, B(t_1) - A \,|\, B(t_2) = A \,|\, B(t_1) + B \,|\, A(t_2) = A(t_1)\,B(t_2)\,A$.

Fig. 262.

Becquerel stellte sich eine Kette aus verschiedenen, aneinander gelöteten Metallen (Fig. 262) her und fand dabei, daß, falls alle Lötstellen bis auf eine die Temperatur t_1^0 hatten, die eine Lötstelle aber zwischen den Metallen M und N die Temperatur t_2^0, sich der gleiche Wert für E ergab, wie in der Kette $M(t_1)\,N(t_2)\,M$.

Von den zahlreichen Untersuchungen über die Größe E erwähnen wir noch die Arbeiten von Matthiessen (1858), E. Becquerel (1864)

und Bachmetjew (1886 bis 1891). Von neueren Untersuchungen, die an möglichst reinen Metallen angestellt worden sind, hat man noch die überaus sorgfältigen Arbeiten von Holborn und Day (1899), sowie von Jäger und Diesselhorst (1900) zu erwähnen; diese beiden Arbeiten sind in der Physikalischen Reichsanstalt in Charlottenburg ausgeführt worden. Bachmetjew hat einen Zusammenhang zwischen der Richtung der Kraft E und der Verteilung der Elemente in der Reihe nach zunehmendem Atomgewichte gefunden. Bestimmt man die Richtung von E zwischen benachbarten Stoffen, so findet man einen regelmäßigen Wechsel der Richtungen, es hat nämlich E zweimal die eine Richtung, z. B. zur Substanz mit dem kleineren Atomgewichte hin und zweimal die entgegengesetzte Richtung, wie man dies aus folgendem Schema ersieht:

Cr ⟶ Mn ⟶ Fe ⟵ Co ⟵ Ni ⟶ Cu ⟶ Zn ⟵ Ga ⟵ Ge ⟶ As ⟶ Se.

Die thermoelektrischen Eigenschaften der Legierungen sind bereits von Seebeck studiert worden und zwar hat derselbe gefunden, daß in vielen Fällen eine Legierung aus zwei Metallen in der thermoelektrischen Reihe nicht zwischen die Metalle zu stehen kommt, aus denen sie besteht. Das gleiche Resultat ist durch zahlreiche Untersuchungen von Rollmann, E. Becquerel (1866), Matthiessen, Hutchins (1894) u. a. bestätigt worden. Die hierher gehörigen Amalgame sind von C. L. Weber (1884), des Coudres (1891), Bachmetjew (1891) und Englisch (1893) untersucht worden. Letzterer hat die Amalgame verschiedener Metalle mit Legierungen aus Blei und denselben Metallen verglichen und hierbei für die Amalgame die thermoelektrische Reihe: (—) Li, Na, K, Tl, Cu, Ag, Sb, Zn, Cd, Sn, Pb, Bi (+), für die Legierungen mit Blei die Reihe: (—) Sn, Tl, Sb, Zn, Cd, Bi (+) gefunden, wo die Reihenfolge der Metalle nicht die gleiche ist. Bachmetjew hat gefunden, daß sich die Amalgame der Metalle Zn, Sn, Pb, Cd, Cu usw. in der Reihe zwischen Hg und dem betreffenden Metalle befinden, während die Amalgame von Bi, Tl, Na und Mg nicht zwischen Hg und dem Metalle stehen. Auf weitere interessante Resultate, die er gefunden, können wir nicht näher eingehen.

Wasserstoff enthaltendes Palladium ist im Vergleich zum reinen Palladium thermoelektrisch positiv.

Braun hat gezeigt, daß auch zwischen geschmolzenen Metallen thermoelektrische Kräfte wirken.

Thermoelektrische Ketten können nicht bloß aus Metallen, sondern auch aus anderen festen Leitern hergestellt werden, namentlich aus gewissen Mineralien (Oxyden, Kiesen u. a.), die, mit Metallen kombiniert, bisweilen sehr bedeutende thermoelektromotorische Kräfte ergeben. Stefan, E. Becquerel, Groth u. a. haben derartige Kombinationen näher untersucht.

Lussana (1893) hat feste Salze untersucht, und zwar Kombinationen aus $NaNO_3$ und KNO_3, $KClO_3$, $ZnCl_2$, $HgCl_2$, NH_4NO_3; hierbei maß er die Potentialdifferenz an den Enden der geöffneten Kette, da man infolge der schlechten Leitfähigkeit der Salze in der geschlossenen Kette einen zu schwachen Strom erhält. Er fand recht bedeutende Werte für E; die Rolle der Temperatur war die gleiche wie für die Metalle (s. u.). Erleidet ein Salz Umwandlungen (NH_4NO_3 bei 35°, 86° und 125°, vgl. Bd. III), so tritt im Gange von E eine Diskontinuität auf.

In leitenden kristallischen Substanzen treten recht komplizierte thermoelektrische Erscheinungen auf; eine Theorie derselben hat W. Thomson gegeben. Er fand, daß in einachsigen Kristallen die Größe der elektromotorischen Kraft E in einer Richtung, welche mit der Achse den Winkel α einschließt, durch eine Formel von folgender Gestalt gegeben ist:

$$E = E_1 \cos^2 \alpha + E_2 \sin^2 \alpha \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

L. Perrot hat kristallisiertes Wismut untersucht, indem er aus demselben kleine Stäbchen herausschnitt, deren Achsen der optischen Achse ||, zu derselben ⊥ waren, oder aber mit ihr einen Winkel $\alpha = 40^0$ einschlossen. Der Kristall wurde zwischen zwei Kupferplatten gebracht und die Berührungsstellen auf den Temperaturen t_1 und t_2 erhalten. Im ersten Falle (||) war E bedeutend größer als im zweiten Falle (⊥). Es war beispielsweise bei $t_1 = 11^0$ und $t_2 = 30^0$ $E_{||} = 0{,}001\,90$ Volt, $E_{\perp} = 0{,}000\,84$ Volt. Das dritte Stäbchen ($\alpha = 40^0$) bestätigte vollkommen die Formel (6).

Der absolute Wert der thermoelektromotorischen Kraft E für Metalle ist im allgemeinen sehr klein im Vergleich zur elektromotorischen Kraft der hydroelektrischen Elemente. Wenn trotzdem die thermoelektrischen Elemente nicht allzu schwache Ströme liefern, so erklärt sich dies durch den sehr geringen Widerstand der thermoelektrischen Kette, die ja doch nur aus Metallen, d. h. aus guten Stromleitern, besteht. Als Beispiele wollen wir hier einige Zahlen anführen.

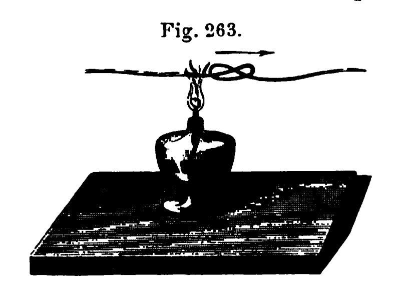
Das Element Bi—Cu gibt bei $t_1 = 0^0$ und $t_2 = 100^0$ den Wert $E = 0{,}003$ Volt, das Element Cu—Neusilber gibt $E = 0{,}001$ Volt. Nach den Untersuchungen von Chassagny und Abraham gibt unter den gleichen Bedingungen Fe—Cu den Wert $E = 0{,}001\,09$ Volt, Fe—Pt gibt $E = 0{,}001\,68$ Volt, für Cu—Pt ist $E = 0{,}000\,59$ Volt. Matthiessen hat E für eine große Zahl von Kombinationen aus Blei und anderen Metallen bei $t_1 = 19^0$ und $t_2 = 20^0$ bestimmt; er fand beispielsweise (Pb, Bi) = 0,000 097, (Sb, Pb) = 0,000 030 Volt; dies gibt (Sb, Bi) = 0,000 12 Volt. Elemente, welche gewisse Mineralien enthalten, geben viel größere Werte für E. Bunsen fand für einige Kupfererze, kombiniert mit Kupfer, den Wert $E = 0{,}07$ Volt bei $t_2 - t_1 = 100^0$. Stefan hat sogar den Wert $E = 0{,}17$ Volt erhalten; er gibt aber nicht die entsprechende Temperaturdifferenz $t_2 - t_1$ an.

Wir wenden uns jetzt den interessanten Fällen zu, wo ein thermoelektrischer Strom in einer chemisch homogenen Kette auftritt, deren sämtliche Teile aus einem und demselben Metalle bestehen und sich nur durch ihre physikalische Beschaffenheit unterscheiden. Wir werden hier fünf Fälle unterscheiden.

I. Die Teile der Kette unterscheiden sich voneinander durch ihre „Struktur", wie dieselbe durch die Art der Bearbeitung des Metalles bestimmt wird. Bereits Seebeck hat gefunden, daß gehärtete Metalle negativer sind als solche, die durch Anlassen weicher gemacht sind. Magnus (1851) nahm einen festen Messingdraht und härtete durch Glühen die eine Hälfte desselben; erwärmte er dann die Stelle, an welcher der gehärtete Teil in den weichen überging, so trat ein thermoelektrischer Strom auf. E. Becquerel (1864), Barus (1879), Oberbeck (1884), G. Wiedemann u. a. haben verschiedene spezielle Fälle untersucht. Barus hat die thermoelektrischen Eigenschaften des Stahls untersucht und hierbei die Wahrnehmung gemacht, daß gehärteter Stahl negativer ist als angelassener.

II. Durch rein mechanische Einwirkungen, wie z. B. durch Streckung, Kompression usw., ändert sich ebenfalls die Stellung, die ein Metall in der thermoelektrischen Reihe einnimmt. W. Thomson (1856) wickelte die Mitte eines weichen Eisendrahtes um einen horizontalen Holzstab und ließ das eine Drahtende frei herabhängen, während er das andere durch Gewichte spannte. Wurde dann der aufgewickelte Teil erwärmt, so trat eine thermoelektrische Kraft E auf, deren Richtung vom gestreckten zum nicht gestreckten Drahtende verlief. Ferner fand er, wenn ein Teil des Drahtes einem seitlichen Drucke ausgesetzt war, daß E die Richtung von den nicht komprimierten Teilen zu den komprimierten Teilen besaß. Verschiedene spezielle Fälle sind später von Le Roux (1867), Tunzelmann (1878), E. Cohn (1879), Ewing (1881), Bachmetjew (1889), Des Coudres (1890), G. S. Meyer (1896) u. a. untersucht worden. Schlingt man in einen Draht einen Knoten (Fig. 263) und erwärmt die dem Knoten anliegende Stelle, so erhält man ebenfalls einen thermoelektrischen Strom.

Fig. 263.



Le Roux fand, daß beim Dehnen der Strom die Richtung vom gedehnten Teile zum nicht gedehnten in Pd, Fe, Pt, Ag, Messing und Stahl hat, die entgegengesetzte aber in Zn und Cu. Tunzelmann hat gezeigt, daß für Fe, Cu und Stahl die Stromrichtung vom Grade der Spannung abhängt. Bachmetjew fand, daß es für Fe eine Spannung gibt, für welche E ein Maximum wird; bei eben dieser

Spannung ist die magnetische Suszeptibilität des Eisens ein Maximum. Des Coudres hat gezeigt, daß komprimiertes und nicht komprimiertes Quecksilber einen thermoelektrischen Strom geben können, wobei dann das gepreßte Quecksilber positiv ist. G. S. Meyer fand, daß bei Streckung von magnetischen Metallen die Änderung ihres magnetischen Zustandes von großer Bedeutung ist; der thermoelektrische Einfluß dieser Änderung (s. u., IV.) kann die Einwirkung der Spannung völlig überdecken.

III. Becquerel, Magnus, Le Roux, Gaugain, Rosing, Egg-Sieberg u. a. haben gezeigt, daß Berührung von gleichartigen Metallen, die verschiedene Temperatur haben, thermoelektrische Ströme hervorrufen kann. Der Versuch wird in der Weise angestellt, daß zwei gleich beschaffene Drähte mit einem Galvanometer verbunden werden. Das Ende eines von ihnen wird erwärmt; bringt man darauf dieses Ende in Berührung mit dem kalten Ende des anderen Drahtes, so tritt ein Strom auf. Es ist schwer zu entscheiden, ob nicht etwa in diesem Falle die Hauptrolle der durch die Erwärmung hervorgerufenen Strukturänderung zufällt, ähnlich der durch mechanische Einwirkung hervorgerufenen. Matteucci und Magnus haben gezeigt, daß bei Berührung von kaltem Quecksilber mit erhitztem ein thermoelektrischer Strom nicht erhalten wird. Rosing fand die interessante Tatsache, daß im Blei die genannte Erscheinung selbst bei Erwärmung bis zu 300° fast gar nicht wahrgenommen wird; in Au, Ag, Cu, Fe, Sn, Pt und in einer Legierung aus Pt und Ir geht der Strom vom kalten Ende zum erhitzten, im Pd und Neusilber ist seine Richtung die entgegengesetzte, während sie im Al vom Grade der Erwärmung abhängig ist. Es zeigt sich, daß die Metalle der ersten Gruppe eine positive (in bezug auf Blei) thermoelektrische Fähigkeit haben (s. u.), die Metalle der zweiten Gruppe eine negative, während beim Aluminium das Vorzeichen von der Temperatur abhängt.

IV. Das Einführen eines Metalles in ein Magnetfeld ändert seine Stellung in der thermoelektrischen Reihe; es ist z. B. magnetisiertes Eisen thermoelektrisch-positiv gegenüber unmagnetischem Eisen. Die hierher gehörigen Erscheinungen werden wir in dem Kapitel betrachten, welches vom Einfluß des Magnetfeldes auf die physikalischen Eigenschaften der Substanz handelt.

V. Borgmann (1877) hat gezeigt, daß auch der Stromdurchgang durch einen Eisendraht dessen Stellung in der thermoelektrischen Reihe verändert. Er konstruierte eine Wheatstonesche Brücke (S. 517), in welcher sämtliche vier Zweige sowie die Brücke selbst aus gleichartigem Eisendraht bestanden. War die bekannte Bedingung ($r_2 r_3 - r_1 r_4 = 0$) erfüllt, so floß durch die Zweige ein kräftiger Strom, während die Brücke selbst stromfrei war. Durch Erwärmung eines der Enden des Brückendrahtes konnte man sich davon überzeugen, daß an dieser Stelle eine neue elektromotorische Kraft auftrat. Wurde

nämlich die Stromrichtung im Hauptkreise (mittels Umschalters) gewechselt, so erhielt man auf der Brücke Abweichungen, die von entgegengesetztem Vorzeichen, jedoch von demselben Betrage waren; dies ist aber nur dann möglich, wenn in der Brücke selbst eine elektromotorische Kraft existiert.

§ 3. Die Rolle der Temperatur bei den thermoelektrischen Erscheinungen. Im vorhergehenden Paragraphen hatten wir angenommen, daß die elektromotorische Kraft der Berührung zweier Metalle eine gewisse Funktion der Temperatur t ist und hatten, vgl. (1), S. 709

$$e = A\,|\,B = f(t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

gesetzt. Sind t_1 und t_2 die Temperaturen der Lötstellen zweier Metalle A und B, welche die geschlossene Kette bilden, so wirkt in dieser Kette eine thermoelektromotorische Kraft $E = (A, B)$, die gleich

$$E = (A, B) = e_2 - e_1 = f(t_2) - f(t_1) \quad \ldots \quad (8)$$

ist. Es sei $t_2 > t_1$. Für die beiden gegebenen Metalle hängt E von t_2 und t_1 ab, wobei diese Abhängigkeit durch die Form der Funktion $e = f(t)$ bestimmt wird. Würde sich e gar nicht mit der Temperatur ändern, so hätte man $E = 0$. Die einfachste Form der Funktion $f(t)$ ist eine lineare:

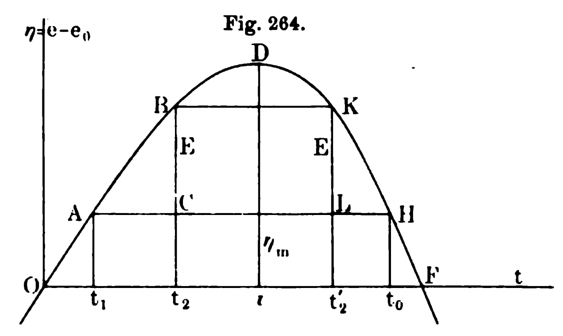
$$e = A\,|\,B = e_0 + at \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

dieselbe gibt

$$E = (A, B) = a(t_2 - t_1) \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

In diesem Falle wächst E proportional der Temperaturdifferenz der Lötstellen und ist vom absoluten Werte jener

Fig. 264.



Temperaturen unabhängig. Es gibt Metallpaare, für welche Formel (10) in recht weiten Grenzen bestätigt wird. Hierher gehören beispielsweise die Paare (Cu, Bi), (Ag, Cu), (Au, Cu) und (Pt, Fe), von denen das erste von Pouillet, Regnault und Gaugain, die folgenden beiden von Gaugain untersucht worden sind, der für (Au, Cu) zwischen $t_2 = t_1 = 20^0$ und $t_2 = 300^0$ fand, daß E proportional $(t_2 - t_1)$ war.

Für andere Paare ist die Beziehung zwischen E und den Temperaturen t_1 und t_2 eine weniger einfache. Läßt man t_1 ungeändert und steigert t_2 ganz allmählich, so wächst E nicht in demselben Verhältnisse wie $t_2 - t_1$; bisweilen wächst E schneller als diese Differenz, bisweilen langsamer. Manchmal beobachtet man ein Maximum von E bei einem bestimmten Werte $t_2 = T$; wird $t_2 > T$, so nimmt E ab, wird bisweilen gleich Null und wechselt darauf das Vorzeichen, d. h. der Strom ändert seine Richtung.

Wir wollen theoretisch untersuchen, welche Folgerungen sich ergeben, wenn die Formel (9) durch folgenden komplizierteren Ausdruck

$$e = A \mid B = e_0 + at + bt^2 \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

ersetzt wird. Es folgt hieraus

$$E = a\,(t_2 - t_1) + b\,(t_2^2 - t_1^2) \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

oder

$$E = a\,(t_2 - t_1)\left[1 + \frac{b}{a}\,(t_1 + t_2)\right] \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Hier sind zwei Fälle möglich: b kann positiv oder negativ sein. Zu den Paaren, für welche $b > 0$ ist, gehören beispielsweise (Pt, Zn), (Pt, Cu), (Pb, Cu), (Cu, Zn), (Cu, Neusilber), (Pt, Pd) u. a.

Becquerel fand, daß, wenn man für die Kombination (Pt, Pd) den Wert $E = 1$ bei $t_1 = 0^0$ und $t_2 = 100^0$ annimmt, man bei $t_1 = 0^0$ und $t_2 = 1400^0$ den Wert $E = 28{,}07$ erhält, anstatt des Wertes 14, wie es bei $b = 0$ wäre.

Die Größe $\eta = e - e_0 = at + bt^2$ wird, als Funktion von t, durch eine Parabel von der Form ODF (Fig. 264) dargestellt.

Der Scheitel D derselben hat die Abszisse

$$\tau = -\frac{a}{2b} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

und die Ordinate

$$\eta_m = -\frac{a^2}{4b} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Charakterisiert man das Thermoelement durch diese beiden Größen, so hat man an Stelle von a und b in sämtlichen Formeln die Werte

$$a = +\frac{2\eta_m}{\tau}; \qquad b = -\frac{\eta_m}{\tau^2} \quad \ldots\ldots \quad (15, a)$$

zu substituieren. Es ist dann

$$\eta = e - e_0 = +\frac{\eta_m}{\tau^2}\,t\,(2\tau - t) \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$E = +\frac{\eta}{\tau^2}\,(t_2 - t_1)\,[2\tau - (t_1 + t_2)] \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

Die Größe E ist in Fig. 264 graphisch dargestellt als Differenz der Ordinaten zweier Parabelpunkte, deren Abszissen t_1 und t_2 sind. Sind

diese Punkte A und B, so ist $E = BC$. Man sieht leicht ein, was eintreten wird, wenn man bei unverändertem t_1 (wobei man immer $t_1 < \tau$ rechnet) t_2 allmählich wachsen läßt. Die Größe E erreicht ein Maximum bei $t_2 = \tau$ und nimmt darauf ab. Bei einem gewissen Werte $t_2 = t_0$, welcher der Gleichung

$$t_0 - \tau = \tau - t_1 \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

genügt, wird $E = 0$. Offenbar ist ferner

$$t_1 - t_0 = 2(\tau - t_1) \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

$$t_0 + t_1 = 2\tau \quad \ldots \ldots \quad (20)$$

Bei $t_2 > t_0$ wechselt der Strom seine Richtung.

Die Temperatur τ wollen wir die Temperatur des neutralen Punktes nennen. Ferner wollen wir mit t_i die Summe der Temperaturen t_1 und t_2 der Lötstellen für den Fall bezeichnen, wo $E = 0$ ist (nicht für $t_2 = t_1$) und t_i die Inversionstemperatur nennen. Die vorhergehenden Ableitungen enthalten in sich eine ganze Reihe von Lehrsätzen:

Läßt man Formel (11) als richtig gelten, so haben wir folgende Sätze:

I. Für jeden Wert $t_1 < \tau$ erreicht die Größe E einen Maximalwert, wenn $t_2 = \tau = -a:2b$ ist, d. h. wenn t_2 gleich der Temperatur des neutralen Punktes ist.

II. Die Größe E wird gleich Null und der Strom ändert sein Vorzeichen bei einer Temperaturdifferenz der Lötstellen, welche doppelt so groß ist als die Temperaturdifferenz, bei der E sein Maximum erreicht.

III. Die Temperatursumme der Lötstellen, bei welcher E abermals gleich Null wird, d. h. die Inversionstemperatur t_i, hängt nicht von t_1 ab; es ist dies eine für ein gegebenes Metallpaar konstante Größe, die gleich der doppelten Temperatur des neutralen Punktes ist.

IV. Die Größe E hat die gleichen Werte bei zwei Temperaturen t_2 und t_2' der stärker erwärmten Lötstelle, welche von der Temperatur des neutralen Punktes gleich weit abstehen, so daß

$$t_2' - \tau = \tau - t_2$$

ist. Führt man die Größe t_i ein, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$t_1 + t_0 = t_i = Const \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

$$t_i = 2\tau \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

$$t_2 + t_2' = 2\tau = t_i = Const \quad \ldots \quad (23)$$

Wenden wir uns nunmehr den Resultaten der Experimentaluntersuchungen zu und fragen wir uns, inwieweit sie die Schlüsse bestätigen, die wir soeben unter der Voraussetzung, daß Formel (11) der Wirklichkeit entspricht, gezogen haben.

Daß zwischen E und $t_2 - t_1$ keine Proportionalität besteht, daß ein Maximum von E existiert, sowie daß sich E nach Erreichung jenes Maximums wieder bis auf Null vermindert und die Stromrichtung sich schließlich umkehrt, alles dieses ist von zahlreichen Forschern beobachtet worden; hierher gehören Cumming (1823), Becquerel (1826), Draper (1840), Hankel (1844), Regnault (1847) und insbesondere Gaugain (1862).

Das Verschwinden des Stromes hat zuerst W. Thomson (1856) untersucht, wobei er gezeigt hat, daß es für ein gegebenes Metallpaar immer bei ein und demselben mittleren Werte für die Temperaturen der Lötstellen erfolgt. Die umfangreichste Untersuchung jedoch hat zuerst Avenarius (in Kiew, 1863) ausgeführt, und zwar hat er gezeigt, daß für eine große Anzahl von verschiedenen Paaren die Größe E durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$E = (t_2 - t_1)\,[a + c\,(t_1 + t_2)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

in welchem a und c Konstanten sind; es ist dies die berühmte Avenariussche Gleichung. Wie man leicht einsieht, ist sie identisch mit den Formeln (13) und (17), woraus folgt, daß für alle Metallpaare, die der Avenariusschen Gleichung entsprechen, auch die aus Formel (11) folgende, in obigem dargelegte Theorie gilt. Avenarius hat eine ganze Reihe von Metallpaaren untersucht, für einige derselben, wie z. B. für (Pt, Pb), hatten a und b das gleiche Vorzeichen, für andere das entgegengesetzte. Der Ausdruck $\tau = -a:2c$ liefert die Temperatur des neutralen Punktes. Als Beispiel wollen wir den Ausdruck für das Paar (Ag, Fe) angeben:

$$E = (t_2 - t_1)\,[3{,}294\,24 - 0{,}007\,37\,(t_1 + t_2)].$$

Es ist $E = 0$ bei $(t_1 + t_2):2 = \tau = 223{,}5^0$. Avenarius fand ferner $\tau = 69{,}7^0$ für (Ag, Zn), $\tau = 275{,}8^0$ für (Cu, Fe) usw.

Mit Prüfung der Avenariusschen Gleichung haben sich sehr viele Forscher beschäftigt, unter ihnen Tait, Kohlrausch und Ammann, Knott, Mc Gregor, Tidblom, Naccari und Bellati, Noll u. a. Tait hat τ für eine große Anzahl von Kombinationen von Eisen mit anderen Metallen bestimmt. Er fand u. a. $\tau = 159^0$ für (Fe, Cd), $\tau = 199^0$ für (Fe, Zn), $\tau = 235^0$ für (Fe, Ag) usf. Tidblom hat die Werte der Konstanten a und c der Avenariusschen Gleichung (24) für 14 Paare aus Platin einerseits und Sn, Pb, Zn, Cd, Mg und verschiedenen Legierungen der drei Metalle Pb, Sn und Zn andererseits bestimmt. Naccari und Bellati fanden $\tau = 187{,}8^0$ für (Pb, Na), $\tau = 71{,}7^0$ für (Pb, K) und $\tau = 71{,}8^0$ für (Pt, K). Noll hat die Werte von a und c für viele Kombinationen aus möglichst reinen Metallen bestimmt.

Sehr genaue Untersuchungen sind in der Reichsanstalt ausgeführt worden. Jäger und Diesselhorst (1900) fanden, daß für das Thermo-

element (Cu, Konstantan) bei geringen Werten von $t_2 - t_1$ (nicht über 37°) die Avenariussche Gleichung durchaus anwendbar bleibt. Holborn und Day haben die Elemente aus Platin und Au, Ag, Rh, Ir, Pd, 90 Pt + 10 Ru, 90 Pt + 10 Pd und 10 Pt + 90 Pd untersucht, wobei sämtliche Metalle fast vollkommen chemisch rein waren. Für $t_1 = 0$ zeigte sich die Avenariussche Gleichung in sehr weiten Grenzen bestätigt. So gilt sie z. B. für (Ag, Pt) von $t_2 = 0°$ bis $t_2 = 950°$, für (Ir, Pt) von $t_2 = 100°$ bis $t_2 = 1200°$. Für (Pd, Pt) ist sie richtig von $t_2 = 0°$ bis $t_2 = 350°$ und bei Einführung anderer Werte für die Konstanten von $t_2 = 600°$ bis $t_2 = 1200°$; für (Au, Pt) von $t_2 = 300°$ bis $t_2 = 1000°$, dagegen erwies sie sich aber für $t_2 < 300°$ durchaus nicht als brauchbar.

Einen einfachen Apparat zur schnellen Bestimmung des neutralen Punktes von Thermoelementen hat Abt konstruiert.

Aus allem bisherigen folgt, daß für viele Thermoelemente die Formel (11) und die sich aus ihr ergebende Avenariussche Gleichung Geltung hat. Jedoch auch diese drückt nicht das wahre, genaue Gesetz aus; sie ist für gewisse Thermoelemente unbrauchbar und stimmt nicht mit den Beobachtungen überein, wenn man die Werte von t_2 von sehr kleinen Werten an bis zu sehr hohen Temperaturwerten ändert. Holborn und Day haben ihre Thermoelemente ($t_1 = 0°$) auch bei $t_2 = -80°$ und $t_2 = -185°$ untersucht, wobei sich dann verschiedenerlei Abweichungen zeigten und sich jedenfalls ergab, daß die Avenariussche Gleichung auch nicht für ein einziges Element von $t_2 = -185°$ bis $t_2 = +950°$ brauchbar blieb. Wir wollen einige von den Werten, welche Holborn und Day für E in Mikrovolts (10^{-6} Volts) gefunden haben, hier anführen; es war stets $t_1 = 0°$ und überall war das andere Metall Platin:

t_2	Au	Ag	Rh	Ir	Pd	$\frac{90\text{ Pd}}{10\text{ Ru}}$	$\frac{90\text{ Pt}}{10\text{ Pd}}$	$\frac{10\text{ Pt}}{90\text{ Pd}}$
+ 950°	15532	17484	12798	11688	10670	9814	4068	2566
+ 450°	5270	5320	4422	4146	3296	4102	1714	− 290
− 80°	− 307	− 302	− 312	− 320	− 392	− 388	− 87	+ 146
− 185°	− 130	− 160	− 235	− 283	− 774	− 534	− 106	+ 240

Jäger und Diesselhorst fanden, daß für (Fe, Konstantan) die Avenariussche Gleichung nicht anwendbar ist, wenn man bei $t_1 = 0°$ den Wert von t_2 zwischen 0° und 120° variiert; sie geben daher die Resultate ihrer Beobachtungen durch eine kompliziertere, empirische Formel wieder.

Die Abweichungen von der Avenariusschen Gleichung haben Tait (Fe + Ni, Cu, Legierung aus Pt und Ir), Chassagny und Abraham (Fe + Cu, Ag, Pt), Battelli (Ni + Pb), Harrison

(Cu + Ni, Fe + Cu), Barret (Fe + Nickelstahl) u. a. untersucht. Holman (1896) hat gezeigt, daß in vielen Fällen die Formel

$$E = m(T_1^n - T_2^n)$$

eine bessere Übereinstimmung mit den Beobachtungen zeigt; es sind hier T_1 und T_2 die absoluten Temperaturen der Lötstellen, m und n zwei Konstanten.

Rationeller wäre es vielleicht, wenn man zu der Formel (11) noch ein Glied von der Form ct^3 hinzufügen würde; in diesem Falle erhielte man anstatt der Formel (13) den Ausdruck

$$E = (t_2 - t_1)[a + b(t_1 + t_2) + c(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2)] \quad . \quad . \quad (25)$$

Die Erscheinungen bei sehr niedrigen Temperaturen haben Dewar und Fleming (1895), Holborn und Day (s. o.) und insbesondere De Metz (1904) untersucht. Letzterer fand, daß für eine ganze Reihe von Elementen die Gesetze II und III, also auch die Formeln (21) und (22), d. h. $t_1 + t_0 = t_i = Const$ und $t_i = 2\tau$ nicht erfüllt sind, wenn man für t_2 die Temperatur der flüsigen Luft, d. h. $-184{,}4^0$ wählt. Nur für (Pt, Zn) bestätigen sich beide Gesetze. Dagegen fand De Metz, daß sich für (Pt, Au), (Pt, Cu), (Pt, Pb), (Pt, Al), (Pt, Messing) und (Pt, Ag) die Summe $t_i = t_1 + t_0$ in dem Maße erhöht, wie t_1 sich erniedrigt (also t_0 größer wird); für (Ag, Zn) nimmt umgekehrt t_i ab, während t_1 abnimmt. Wir wollen eine kleine, recht interessante Tabelle angeben, in der alle Zahlen der drei letzten Vertikalreihen die Werte von $t_i = t_1 + t_0$ für die darüber stehenden Werte von t_1 bedeuten:

	2τ	$t_1 = 16{,}1^0$	$t_1 = -79{,}1^0$	$t_1 = -184{,}4^0$
Pt—Au	$-4{,}4^0$	$-5{,}1^0$	$-3{,}9^0$	$+17{,}3^0$
Pt—Cu	$-13{,}0$	$-12{,}5$	$-4{,}5$	$+21{,}7$
Pt—Messing	$+52{,}0$	$+51{,}5$	$+54{,}8$	$+70{,}2$
Pt—Pb	122,0	119,8	126,1	139,3
Pt—Al	167,4	167,4	188,2	237,6
Ag—Zn	81,0	80,0	72,5	26,4
Pt—Ag	$-106{,}8$	80,0	$-110{,}7$	$-89{,}9$

Selen gibt, mit Metallen kombiniert, eine außerordentlich große elektromotorische Kraft. Righi (1888) und Weidert (1906) haben das Element (Se, Pb) untersucht; letzterer fand, daß bei Belichtung des Selens die elektromotorische Kraft um etwa 5 Proz. kleiner wird.

Eine sehr interessante Erscheinung ist die thermoelektrische Hysteresis, die darin besteht, daß man bei unverändertem Werte von t_1 verschiedene Werte für E bei demselben t_2 erhält, je nachdem die Temperatur t_2 infolge von Erwärmung oder von Abkühlung erreicht war. Eine derartige Erscheinung ist von Bachmetjew (1897) für

(Cu, Zn), (Cu, Pb), (Cu, Ni), (Cu, Neusilber) und (Cu, Fe), sowie von Barrett (1900) für (Cu, Nickelstahl), (Pt, Stahl), (Pt, Fe) u. a. gefunden worden. In sämtlichen Fällen war E größer bei der Erwärmung. Bei den Versuchen von Barrett ergab sich bisweilen ein sehr bedeutender Unterschied.

Wir können uns jetzt mit dem Begriffe der thermoelektrischen Fähigkeit der Metalle, der von W. Thomson eingeführt worden ist, sowie mit der Methode von Tait, die Werte der thermoelektrischen Kräfte E für die verschiedensten Fälle graphisch darzustellen, bekannt machen. Wie wir gesehen haben, ist für ein gegebenes Paar (A, B) die Größe E eine Funktion von t_1 und t_2 und kann man

$$E = e_2 - e_1 = f(t_2) - f(t_1)$$

setzen, wo $e = f(t)$ ist. Setzt man $t_1 = t$ und $t_2 = t + \Delta t$, so erhält man für das sehr kleine Δe den Ausdruck:

$$\Delta e = f(t + \Delta t) - f(t) = \frac{df}{dt} \Delta t.$$

Im Grenzfalle erhält man, wenn man die neue Bezeichnung $\varphi(t)$ einführt:

$$\frac{de}{dt} = f'(t) = \varphi(t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Da $e = A|B$ ist, so kann man

$$\varphi(t) = f'(t) = \frac{de}{dt} = \frac{d(A|B)}{dt}$$

schreiben. Die von der Art der Metalle A und B abhängige Größe $\varphi(t)$ heißt die thermoelektrische Fähigkeit des Metallpaares (A, B). Symbolisch kann man dieselbe in folgender Gestalt darstellen:

$$\varphi(t) = \frac{d(A|B)}{dt} = [A, B].$$

Man pflegt $\frac{dE}{dt}$ anstatt $\frac{de}{dt}$ zu schreiben, indem man annimmt, es sei dE die thermoelektromotorische Kraft, wenn $t_1 = t$ und $t_2 = t + dt$ ist: eine solche Schreibweise kann jedoch einen Leser, der sich eben erst mit der Frage bekannt macht, leicht in Verwirrung bringen, da die Größe E ja eine Funktion von t_1 und t_2, nicht aber von t ist und deshalb ist es auch nicht wohl angebracht, von ihrer Ableitung nach t zu sprechen. Man kann aber folgende Überlegung anstellen: nehmen wir an, es sei $t_2 = t$, dann ist $E = f(t) - f(t_1)$ und E stellt dann bereits eine Funktion von t dar, deren Ableitung offenbar gleich der Ableitung von $e = f(t)$, also gleich $\varphi(t)$ ist. Verfolgt man diesen Gedankengang, so kann man wie folgt schreiben:

$$\varphi(t) = f'(t) = \frac{de}{dt} = \frac{dE}{dt} = \frac{d(A|B)}{dt} = [A, B] \quad . \quad . \quad (27)$$

Da $A \mid B = A \mid C + C \mid B$ oder $A \mid B = A \mid C - B \mid C$ ist, so ist offenbar auch

$$[A, B] = [A, C] - [B, C] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Die thermoelektrische Fähigkeit eines Metallpaares (A, B) bei t^0 ist gleich der Differenz der thermoelektrischen Fähigkeiten der Paare, die man erhält, wenn man jedes der Metalle A und B einzeln mit einem beliebigen dritten Metalle C bei denselben Temperaturen t^0 kombiniert.

Formel (27) und Gleichung $E = f(t_2) - f(t_1)$ zeigen uns, daß

$$E = (A, B) = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

ist. Die Formeln (28) und (29) führen zu folgender graphischen Darstellung. Nehmen wir an, es seien in Fig. 265 zwei Funktionen $\varphi(t)$ dargestellt, die $[A, C]$ und $[B, C]$ entsprechen. Ist $Ot = t$, so ist die Ordinatendifferenz DE der Punkte D und E beider Kurven gleich der thermoelektrischen Fähigkeit $[A, B]$ des aus den Metallen A und B bestehenden Elementes bei t_0. Der Punkt M bestimmt die Temperatur τ des neutralen Punktes, in welchem offenbar $de : dt = 0$ ist. Ist $t > \tau$, so wechselt $[A, B]$ sein Vorzeichen. Die Größe $E = (AB)$ bei den Temperaturen t_1 und t_2 der Lötstellen wird durch die Fläche $FGJH$ gemessen, vgl. (29). Läßt man bei unverändertem t_1 die Temperatur t_2 zunehmen, so nimmt E seinen Maximalwert FMH bei $t_2 = \tau$ an. Die Fläche rechts von M muß als negativ angesehen werden. Bei den Temperaturen t_1 und t_2' der Lötstellen, wo $t_2' - \tau = \tau - t_2$ ist, erhält man denselben Wert für E, wie bei den Temperaturen t_1 und t_2, da die Fläche $FMH + MNP$ gleich der Fläche $FGJH$ ist. Bei den Temperaturen t_1 und t_0, wo $t_0 - \tau = \tau - t_1$ ist, erhält man $E = 0$; ist endlich $t_2 > t_0$, so wird die Größe E negativ.

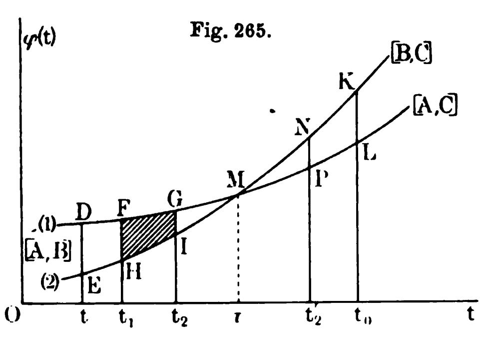


Fig. 265.

Außer dem Begriffe der thermoelektrischen Fähigkeit eines Paares $[A, C]$ kann man auch noch den Begriff der thermoelektrischen Fähigkeit eines einzelnen Metalles A einführen, die symbolisch durch $[A]$ bezeichnet werden soll. Es bedeutet diese Größe nichts anderes als die thermoelektrische Fähigkeit eines Metallpaares, das aus dem Metalle A und einem bestimmten Metalle C, mit dem wir alle

übrigen vergleichen, besteht. Aus Gründen, auf welche später hingewiesen werden soll, wählt man als Vergleichsmetall das **Blei**, d. h. man setzt

$$[A] = [A, Pb] \quad \text{. . . . . . .} \quad (29, a)$$

Die Formel (28) ergibt demnach

$$[A, B] = [A] - [B] \quad \text{. . . . . . .} \quad (30)$$

d. h. die thermoelektrische Fähigkeit $[A, B]$ eines Metallpaares ist gleich der Differenz der thermoelektrischen Fähigkeiten $[A]$ und $[B]$ dieser Metalle. Offenbar ist $[Pb] = 0$, d. h. die thermoelektrische Fähigkeit des Bleies ist gleich Null. Denkt man sich, daß in der Fig. 265 das Metall C Blei ist, so stellen die beiden Kurven die thermoelektrischen Fähigkeiten $[A]$ und $[B]$ dar, wobei alles, was bei Betrachtung jener Figur gesagt war, in Geltung verbleibt. Nimmt man an, es sei e eine quadratische Funktion von der Form (11), so muß die thermoelektrische Fähigkeit $\varphi(t)$ des Paares eine lineare Funktion der Temperatur t sein, nämlich

$$\varphi(t) = [A, B] = a + 2bt \quad \text{. . . . .} \quad (31)$$

Die Formeln (15), S. 717, geben

$$\varphi(t) = [A, B] = \frac{2\eta_m}{\tau^2}(\tau - t) \quad \text{. . . . .} \quad (32)$$

Es versteht sich von selbst, daß die thermoelektrischen Fähigkeiten der einzelnen Metalle ebenfalls lineare Funktionen von t sein müssen, denn es ist $[A] = [A, Pb]$. Tait (1873) hat die Funktionen $\varphi(t)$ für zahlreiche Metalle (in bezug auf Blei) ermittelt und hierbei gefunden, daß dieselben tatsächlich lineare Funktionen sind. Er hat die numerischen Werte der Konstanten a und $2b$ der Formel (31) bestimmt; Everett hat dieselben in el-mg. C. G. S.-Einheiten (10^{-8} Volt) gemessen. Hierbei fand er z. B. $[Fe] = 1734 - 4{,}87\,t$; $[Zn] = 234 + 2{,}40\,t$; $[Pd] = 625 - 3{,}59\,t$ usw. Auf graphischem Wege erhält man ein System von geraden Linien, wobei die Linie $[Pb] = 0$ mit der Abszissenachse zusammenfällt. In späterer Zeit haben Knott und McGregor (1878) die Konstanten der Funktion $\varphi(t)$ abermals bestimmt und hierbei etwas andere Zahlenwerte erhalten. Nimmt man an, daß die $\varphi(t)$ lineare Funktionen sind, so hat man die beiden Kurven der Fig. 265 durch gerade Linien zu ersetzen, wobei ihr Durchschnittspunkt die neutralen Punkte bestimmt, die Flächenräume aber die Werte von E, wie dies bereits im obigen auseinandergesetzt worden ist.

Wir wollen uns bei der Beschreibung von Thermosäulen und thermoelektrischen Batterien nicht aufhalten. In Bd. II, Kap. 1, § 10 haben wir die Einrichtung von verschiedenen Thermosäulen kennen gelernt, darunter auch diejenige der sehr empfindlichen Rubens-

schen Säule. Thermoelektrische Batterien sind solche Kombinationen aus Thermoelementen, bei denen eine Reihe von Lötstellen stark erwärmt werden kann und zwar mit Hilfe von Gasbrennern oder auch von brennender Kohle, wobei man einen so kräftigen Strom erhält, daß derselbe zu technischen Zwecken Verwendung finden kann. Die zu erwärmenden Lötstellen werden hierbei rings um die Wärmequelle angeordnet, während die dazwischen liegenden Lötstellen möglichst weit nach außen gerückt werden, wo sie durch die umgebende Luft gekühlt werden. Hierher gehören die Batterien von Noé (Neusilber und Legierung aus Zn und Sb), Clamond (Fe und Legierung aus Zn und Sb), Marcus (Zn-Cu-Legierung und Zn-Sb-Legierung). Die elektromotorische Kraft E dieser Batterien kann bis zu mehreren Volts gehen; man hat aber auch Batterien konstruiert, bei denen E bis 20 Volt reichte, während der innere Widerstand 4 Ohm betrug. Der Koeffizient des Nutzeffektes der Thermobatterien ist im allgemeinen gering. Im Apparat von Clamond geht er nicht über 0,002 hinaus. Hoffmann (1898) hat den Koeffizienten η des Nutzeffektes für mehrere einfache Thermoelemente bestimmt. Für das Element (Fe, Cu-Ni-Legierung) ist bei 500^0 $\eta = 0{,}000134$, für (Fe, Ni) bei 500^0 ist $\eta = 0{,}0000385$, für (Fe, Cu) bei 300^0 ist sogar $\eta = 0{,}00000304$.

§ 4. Thermoelektrische Erscheinungen in Flüssigkeiten. Beim Kontakt von Metallen mit Flüssigkeiten beobachtet man thermoelektrische Erscheinüngen. Unter dem Worte Flüssigkeiten verstehen wir hier Lösungen von Elektrolyten. Quecksilber und geschmolzene Metalle rechnen wir nicht hierzu. Quecksilber verhält sich wie alle übrigen Metalle und Noll hat die Werte von E für die Kombinationen (Au, Hg) und (Co, Hg) bestimmt. Braun und Burnie haben E für geschmolzene Metalle untersucht.

Die thermoelektrischen Erscheinungen, welche zwischen Metallen und Flüssigkeiten auftreten, können nach verschiedenen Methoden nachgewiesen werden.

Nobili, Walker, Gore u. a. haben Ströme beim Eintauchen einer kalten und einer erhitzten Platte aus dem gleichen Metalle in eine Flüssigkeit beobachtet. Faraday brachte die Flüssigkeit in eine U-förmige Röhre, erwärmte den einen Schenkel und führte in beide Schenkel gleichartige Elektroden ein. Ähnliche Versuche hat Bleekrode ausgeführt. Die Stromrichtung war dabei verschieden je nach der Flüssigkeit und dem Metalle, sowie der Größe der Temperaturdifferenz.

Bouty hat die Berührungsstellen einer Elektrode und der Flüssigkeit erwärmt und hierbei gefunden, daß in vielen Fällen die thermoelektromotorische Kraft E proportional der Temperaturdifferenz $t_2 - t_1$ der beiden Berührungsstellen und in weiten Grenzen von der Konzen-

tration der Lösung unabhängig ist. Weitere Untersuchungen haben Ebeling, Brandes, Hagenbach (1894), Bagard, Emery, Henderson (1906) u. a. ausgeführt. Sie fanden, daß bei Kombinationen aus Metallen mit Lösungen ihrer Salze E schneller als die Differenz $t_2 - t_1$ wächst und auch zum Teil von der Konzentration abhängig ist.

Geschmolzene Salze haben Andrews, Hankel und L. Poincaré untersucht. Letzterer hat gefunden, daß für Ag in $AgNO_3$ die stärker erhitzte Elektrode die negative ist, für Zn in $ZnCl_2$ jedoch die positive. Der Wert von E ist ungefähr der gleiche, wie ihn Bouty für Lösungen gefunden hat. Amalgame und Lösungen von Elektrolyten hat Hagenbach (1898) untersucht. Zwischen 0 und 70° ist E proportional $t_2 - t_1$, ausgenommen Bleiamalgam in $PbCl_2$, und nimmt zu mit der Konzentration der Lösung.

Thermoelektrische Erscheinungen zwischen Flüssigkeiten (Lösungen von Elektrolyten) hat bereits Nobili (1828) beobachtet Eine eingehende Untersuchung derselben haben zuerst Wild (1858) und E. Becquerel (1866) ausgeführt. Wild hat sich hierzu eines Apparates bedient, der dem in Fig. 96 auf S. 236 abgebildeten ähnlich ist, sich jedoch von ihm dadurch unterscheidet, daß eine der vertikalen Röhren an der Stelle, wo die verschiedenartigen Flüssigkeiten einander berühren, von einem ringförmigen, engen Gefäße umgeben war, durch welches Dämpfe von siedendem Wasser hindurchstrichen. Er fand, daß E angenähert proportional der Temperaturdifferenz ist; ferner fand er, daß bei Lösungen, die sich nur durch ihren Konzentrationsgrad unterscheiden, ebenfalls ein Strom auftritt, wobei die konzentriertere Lösung die thermoelektrisch positive ist. Lösungen, welche beim Kontakt das Voltasche Gesetz (S. 236) befolgen, können ebenso wie die Metalle (S. 710) in eine thermoelektrische Reihe eingeordnet werden; für die übrigen ist dies nicht möglich. Fernere Untersuchungen sind von Naccari und Battelli (1884), Donle (1886), Gockel (1890), Bagard (1892), Duane (1897) u. a. ausgeführt worden. Bagard hat hierbei einen Wechsel der Stromrichtung bei $t_1 = 0°$ und $t_2 = 70°$ für Lösungen von $CuSO_4$ und $ZnSO_4$ beobachtet.

Nernst hat seine Theorie der Konzentrationselemente auch auf den Fall einer thermoelektrischen Kette ausgedehnt, die nur aus Lösungen von verschiedenem Konzentrationsgrade besteht.

Auf S. 194 war die Formel (39) hergeleitet worden:

$$E = V_1 - V_2 = -\frac{u - v}{u + v} R T lg \frac{c_1}{c_2},$$

in welcher V_1 das Potential der konzentrierteren Lösung, V_2 dasjenige der weniger konzentrierten Lösung bedeutete, c_1 und c_2 die Konzentrationen waren und zwar $c_1 > c_2$, R die Gaskonstante, vgl. (34).

S. 190, T die absolute Temperatur, u und v die Geschwindigkeiten des Kations und Anions. Für eine thermoelektrische Kette erhält man hieraus:

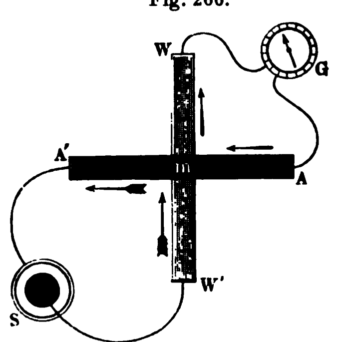
$$E = R\left[T_1 \frac{u_1 - v_1}{u_1 + v_1} - T_2 \frac{u_2 - v_2}{u_2 + v_2}\right] lg \frac{c_1}{c_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

wo u_1 und v_1 die Ionengeschwindigkeiten bei T_1^0, u_2 und v_2 aber bei T_2^0 sind. Auf verschiedene Lösungen von gleichem Konzentrationsgrade bezieht sich eine Formel von Planck (1890), die wir nicht anführen. Die Formel (33) ist von Duane (1897) geprüft worden und hat derselbe sie für eine ganze Reihe von verdünnten Lösungen (KCl, $NaCl$, HCl, HNO_3) vollauf bestätigt gefunden. Für zwei HCl-Lösungen (0,114 und 0,009 der Normallösung) erhielt er bei $t_1 = 13{,}5^0$ ein ausgesprochenes Maximum der Größe E, falls $t_2 = 50^0$ war; man findet, daß für diese Substanz auch die Formel (33) ein Maximum nahe bei derselben Temperatur anzeigt. Die Plancksche Formel fand sich für die untersuchten Paare: ($HCl + NaCl$, $KCl + NaHO$, $HCl + KCl$, $NaCl + NaHO$, $NaCl + HNO_3$) nicht bestätigt. Bucherer (1900) hat gezeigt, wie die Formeln für E auf rein thermodynamischem Wege abgeleitet werden können, wobei man auch eine der von Duane gefundenen Formeln erhält.

§ 5. Das Peltiersche Phänomen. Auf S. 187 haben wir bereits die von Peltier entdeckte Erscheinung kennen gelernt. Sie besteht darin, daß beim Durchgange eines Stromes durch die Lötstelle zweier Metalle an dieser Lötstelle außer der Erwärmung, welche der Strom gemäß dem Jouleschen Gesetze (S. 571) hervorruft, noch eine besondere Ausscheidung oder Absorption einer gewissen Wärmemenge erfolgt, je nachdem, welches die Stromrichtung ist. Eine Absorption einer gewissen Wärmemenge q erfolgt, wenn der Strom vom thermoelektrisch negativen zum positiven Metalle fließt, d. h. wenn er die Richtung eines thermoelektrischen Stromes hat, den man erhalten würde, falls diese Lötstelle die höhere Temperatur hätte. Bei entgegengesetzter Stromrichtung erfolgt an der Lötstelle Ausscheidung einer ebensolchen Wärmemenge q. So erhält man beispielsweise Wärmeabsorption, falls der Strom vom Bi zum Cu fließt und Freiwerden von Wärme, falls er vom Cu zum Bi fließt. Entsprechend dem Prinzip von Le Chatelier-Braun (Bd. III, Kap. 8, § 11) findet man, daß der Strom in den Lötstellen eine Wärmewirkung erzeugt, die einen Strom von entgegengesetzter Richtung hervorruft und daß umgekehrt jede thermische Einwirkung auf die Lötstelle einen Strom hervorruft, der diese Einwirkung herabmindert. In besonders anschaulicher Weise hat Peltier die Richtigkeit dieser Regel mit Hilfe seines „Kreuzes“ nachgewiesen. Zwei Stäbe (Fig. 266, a. f. S.) WW' aus Wismut und AA' aus Antimon sind mit ihren Mitten aufeinander gelötet: ihre

Enden sind einerseits mit einem Elemente S und andererseits mit einem Galvanometer G verbunden. Ging der Strom des Elementes S durch die Lötstelle vom Wismut (W') zum Antimon (A'), so zeigte das Galvanometer G einen Strom an, der vom Antimon (A) durch die Lötstelle zum Wismut (W) ging, wodurch die Abkühlung der Lötstelle erwiesen war. Floß der Strom von S in der Richtung $A'mW'$, so trat in der anderen Kette ein Strom in der Richtung WmA auf. Lenz brachte an der Lötstelle des Bi und Sb eine Vertiefung an, in die er Wasser goß und das Kügelchen eines Thermometers hineintauchte. Die Lötstelle selbst umgab er mit schmelzendem Eise, wobei das Thermometer 0° anzeigte. Indem er nun einen Strom vom Bi zum Sb gehen ließ, brachte er es dahin, daß das Thermometer bis auf — 3,5° sank, wobei das Wasser gefror. E. Becquerel (1847) hat gezeigt, daß der Wert von q um so größer ist, je weiter die Metalle in der thermoelektrischen Reihe (S. 710) voneinander abstehen.

Fig. 266.



Die Abhängigkeit der Wärmemenge q von der Stromstärke J haben Quintus Icilius (1853), Frankenheim (1854), Le Roux (1867), Edlund, Sundell, Waltenhofen u. a. untersucht. Die beiden Erstgenannten fanden fast gleichzeitig, daß die Wärmemenge q direkt proportional der Stromstärke J ist. Indem Frankenheim einen Strom J zuerst in der einen, darauf in der entgegengesetzten Richtung hindurchsandte, konnte er die gesamten Wärmemengen $Q_1 = q' + q$ und $Q_2 = q' - q$ messen, die in dem kleinen, die Lötstelle enthaltenden Teile des Stromkreises frei wurden; hier bedeutet q' die Joulesche Wärme. Durch Berechnung von $q' = (Q_1 + Q_2) : 2$ und $q = (Q_1 - Q_2) : 2$ fand er, daß q' proportional J^2 und q proportional J ist. Edlund hat ein Differentialthermometer angewandt (Bd. III), in dessen Behältern sich je eine der Lötstellen befand. Wie man leicht einsieht, waren hierbei die Thermometerangaben proportional $Q_1 - Q_2$, d. h. sie maßen gerade die Größe q. Le Roux hat die Lötstellen in zwei Kalorimeter eingeführt und einen Strom J während des gleichen Zeitraumes zuerst in der einen Richtung, hierauf in der entgegengesetzten Richtung durch die Kette hindurchgesandt. Es seien Q_1 und Q_2 die Wärmemengen, die man mit Hilfe der Kalorimeter im ersten Falle, Q_1' und Q_2' die man im zweiten Falle erhält. Nimmt man an, daß die Jouleschen Wärmen q_1' und q_2' nicht die gleichen sind, so erhält man die Gleichungen $Q_1 = q_1' + q$, $Q_2 = q_2' - q$, $Q_1' = q_1' - q$, $Q_2' = q_2' + q$. Hieraus folgt $Q_1 - Q_2 = q_1' - q_2' + 2q$, $Q_1' - Q_2'$

$= q'_1 - q'_2 - 2\,q$ und endlich $q = (Q_1 - Q_2 - Q'_1 + Q'_2) : 4$. Die Versuche von Edlund und Le Roux haben es bestätigt, daß q proportional J ist.

Die gesamte Wärmemenge Q, die in einem gewissen, die Lötstelle enthaltenden Teile der Kette frei wird, ist durch einen Ausdruck von folgender Gestalt bestimmt:

$$Q = \alpha J^2 \pm \beta J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Für den Fall, daß an der Lötstelle Wärmeabsorption eintritt, ist

$$Q = \alpha J^2 - \beta J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34, a)$$

Bei kleinen Werten von J ist diese Größe negativ, d. h. es erfolgt an der Lötstelle Abkühlung, ihr Maximum erreicht dieselbe für $J = \beta : 2\alpha$. Für $J = \beta : \alpha$ ist $Q = 0$, für $J > \beta : \alpha$ ist $Q > 0$, d. h. es tritt an der Lötstelle bereits Erwärmung auf.

Nehmen wir nunmehr an, es werde die Wärmemenge q an der Lötstelle ausgeschieden oder absorbiert, während durch dieselbe die Einheit der Elektrizitätsmenge hindurchfließt. Auf S. 227 hatten wir gesagt, daß es unrichtig wäre, q als die Energie aufzufassen, welche äquivalent dem Übergange der Elektrizität von einem Körper zum anderen ist, dessen Potential um den Betrag e höher oder niedriger ist. Wäre dies richtig, so hätten wir $q = \pm e$. Auf S. 188 hatten wir aber auf thermodynamischem Wege die Formel (33) abgeleitet:

$$q = \pm T \frac{de}{dT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

aus welcher folgt, daß nur dann

$$q = \pm e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35, a)$$

ist, wenn

$$e = a\,T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

d. h. wenn e proportional der absoluten Temperatur ist, die thermoelektromotorische Kraft E

$$E = a\,(T_2 - T_1) = a\,(t_2 - t_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36, a)$$

somit proportional der Temperaturdifferenz der Lötstellen wächst [vgl. (10), S. 716]. Hat beispielsweise e die Form

$$e = g\,T + h\,T^2 = T\,(g + h\,T) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

so ist

$$\pm q = g\,T + 2\,h\,T^2 = T\,(g + 2\,h\,T) \quad . \quad . \quad . \quad (37, a)$$

Ist $h < 0$, so erhält man den maximalen Wert $e = e_m = -g^2 : 4\,h$ für $T = T_m = -g : 2\,h$. Führt man die Größen T_m und e_m an Stelle von g und h ein, so erhält man:

$$e = \frac{e_m}{T_m^2}(2\,T_m - T)\,T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

$$q = \pm\,\frac{2\,e_m}{T_m^2}(T_m - T)\,T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38,\text{a})$$

Hier bedeutet T_m die absolute Temperatur des **neutralen Punktes**. Bleibt man bei dem Ausdruck (11), S. 717, $e = e_0 + at + bt^2$, so erhält man

$$q = \pm\,\frac{2\,\eta_m}{\tau^2}(\tau - t)\,T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38,\text{b})$$

Offenbar ist $\tau - t = T_m - T$, da $T = t + 273$ und $T_m = \tau + 273$ ist. Leicht überzeugt man sich auch davon, daß die Formeln (38, a) und (38, b) identisch werden, wenn man $gT + hT^2 = e_0 + at + bt^2$ setzt, d. h. $a = g + 2 . 273\,h$, $b = h$. Die Formeln (38, a) und (38, b) zeigen, daß q von der Temperatur der Lötstelle abhängen muß, daß bei der Temperatur des neutralen Punktes $q = 0$ ist und daß es sein Vorzeichen wechselt, d. h. daß die Wärmeabsorption in Wärmeausscheidung übergeht und umgekehrt.

Die Abhängigkeit des Peltierschen Phänomens von der Temperatur ist von vielen Forschern untersucht worden. Zunächst hat Le Roux (1867) gefunden, daß q von t abhängt; für das Thermoelement (Bi, Cu) fand er bei $t = 100^0$ den Wert von q gleich dem 1,28 fachen des Wertes bei $t = 25^0$. Ähnliches hat Gore (1886) beobachtet. Ferner hat Le Roux (1884) gefunden, daß für (Fe, Cu) bei hoher Temperatur q sein Vorzeichen wechselt. Skobelzin und Zinserling (1887) haben (Fe, Cu) näher untersucht und hierbei gefunden, daß sich q mit Erhöhung der Temperatur vermindert. Battelli (1887) war der erste, der das Verschwinden des Peltierschen Phänomens bei der Temperatur des neutralen Punktes den Lötstellen von Pb und den Legierungen $Sb_{10}Sn$ und $Sn_{18}Cd$ beobachtet hat. Ferner hat er für sieben Kombinationen gefunden, daß q durch eine Formel von der Form (38, a) ausgedrückt wird. Jahn (1888) hat gefunden, daß für Lötstellen von Cu und Ag, Fe, Pt, Zn, Cd und Ni die Formel (35) für die Größe q numerische Werte gibt, die mit den unmittelbar beobachteten in genügender Übereinstimmung stehen. Wir wollen bemerken, daß der Quotient $de : dt$ in Formel (35) nichts anderes ist als die Differenz der thermoelektrischen Fähigkeiten der beiden Metalle, vgl. (27) und (30). Bausenwein (1904) hat die Größen E und q für (Fe, Cu) und (Fe, Ag) von 20 bis 800° überaus sorgfältig geprüft. Es erwies sich, daß $q = 0$ bei der Temperatur des neutralen Punktes ist (von 330° für das erste, 310° für das zweite Paar), wie dies von der Theorie gefordert wird. Um 650° zeigen sich Abweichungen, wahrscheinlich infolge von Änderungen, die im Eisen auftreten. La Rosa (1904) fand, daß für (Zn, Fe) das Peltiersche Phänomen bei 36,5° verschwindet, während der

neutrale Punkt bei 36,6° liegt. Einige Forscher haben Zweifel an der Strenge der Herleitung der Formel (35) geäußert. Lecher (1905) glaubte anfangs, daß die Temperatur, bei welcher $q = 0$ wird, möglicherweise nicht genau mit der Temperatur des neutralen Punktes zusammenfalle. Später aber hat er selbst einen strengen Beweis dafür geliefert, daß diese Koinzidenz notwendig sei.

Das Peltiersche Phänomen wird auch an der Berührungsfläche von Metallen und Flüssigkeiten und von Flüssigkeiten miteinander wahrgenommen. Die erstere von diesen Erscheinungen haben Bouty (1880), Hoorweg, Jahn, Gill, Gockel u. a. beobachtet. Bouty und Gill fanden Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie, die vorhin dargelegt worden ist. An der Grenze zwischen zwei Elektrolyten läßt sich das Peltiersche Phänomen nicht leicht wahrnehmen. Dennoch haben Schulz-Sellack (1870) und Hoorweg (1880) diese Erscheinung beobachtet und Naccari und Battelli (1896), insbesondere aber Bagard, eine genaue Untersuchung derselben vorgenommen. Bagard hat gezeigt, daß auch in diesem Falle die Größe q bei der Temperatur des neutralen Punktes ihr Vorzeichen wechselt.

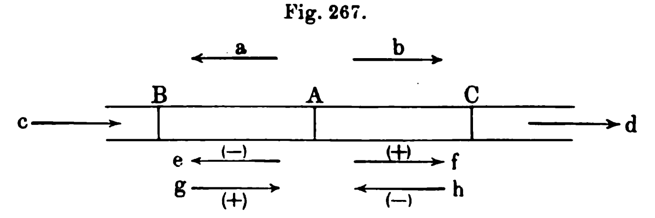
§ 6. Der Thomsoneffekt. Theoretische Erwägungen, auf die wir im folgenden Paragraphen zu sprechen kommen, haben W. Thomson (Lord Kelvin, 1856) auf den Gedanken geführt, daß eine Potentialdifferenz nicht bloß zwischen einander berührenden ungleichartigen Körpern, sondern auch zwischen den benachbarten Teilen eines und desselben Körpers auftreten muß, falls diese Teile ungleiche Temperatur haben. Demnach muß ein Potentialgefälle in denjenigen Teilen eines Leiters auftreten, in denen ein Temperaturgefälle existiert, wobei die Richtungen dieser beiden Gefälle die gleichen, oder einander entgegengesetzten sein können. In einer geschlossenen homogenen Kette ist die Summe der Potentialänderungen offenbar gleich Null und tritt ein Strom bei keiner Art der Temperaturverteilung auf. Ruft eine Temperaturdifferenz dt unendlich benachbarter Querschnitte in denselben eine Potentialdifferenz $dV = f(t)\,dt$ hervor, wo $f(t)$ vom Material abhängig ist, so muß offenbar die Potentialdifferenz $V_2 - V_1$ an den Leiterenden, welche sich auf den Temperaturen t_2 und t_2 befinden, gleich

$$V_2 - V_1 = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \varphi(t_2) - \varphi(t_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

sein. Sie ist offenbar von der Verteilung der Temperaturen am Leiter entlang nicht abhängig. Denken wir uns nun, es trete beim Stromdurchgang durch einen Teil des Leiters, in welchem ein Temperaturgefälle existiert, also auch ein Potentialgefälle vorhanden ist, das Peltiersche Phänomen auf, d. h. es erfolge unabhängig von der frei

werdenden Jouleschen Wärme auch eine Ausscheidung von Wärme in demjenigen Teile, in welchem der hindurchgehende Strom und das Potentialgefälle entgegengesetzte Richtungen haben. Sehen wir zu, was in diesem Falle eintreten muß, wenn man die Mitte A (Fig. 267) eines langen Stabes erwärmt und hierauf durch denselben einen Strom hindurchsendet. Es seien B und C zwei Querschnitte des Leiters; die Pfeile a und b zeigen die Richtung an, in welcher die Temperatur abfällt; den Strom sendet man in der Richtung der Pfeile c und d durch den Stab. Nehmen wir zunächst an, die Potentialgefälle haben die Richtung der Pfeile e und f; dann muß der Strom (abgesehen von der Jouleschen Wärmewirkung) im Teile BA eine Abkühlung (—), im Teile AC eine Erwärmung (+) hervorrufen. Das Resultat ist das gleiche, als wenn ein Teil der Wärme von BA nach AC gelangte, oder als wenn der Strom die Fähigkeit hätte, Wärme in der Richtung zu transportieren, in welcher er selbst fließt. Haben die Potentialgefälle die Richtungen der Ströme g und h, so muß in BA eine Ausscheidung, in AC dagegen eine Absorption der Wärme auftreten. Hier bringt der Strom gleichsam einen Wärmetransport in der seiner

Fig. 267.



eigenen entgegengesetzten Richtung hervor. Einen vom Strome bewirkten scheinbaren Wärmetransport hat nun W. Thomson auch in der Tat beobachtet. Man bezeichnet ihn als Thomsoneffekt. Diejenigen Substanzen, in denen der scheinbare Transport in der Stromrichtung erfolgt, heißen positiv, oder aber man sagt, daß in ihnen der Thomsoneffekt positiv sei; hat der Wärmetransport die entgegengesetzte Richtung, so nennt man die betreffenden Substanzen oder den Thomsoneffekt in ihnen negativ. W. Thomson hat Fe und Cu untersucht. Ein Bündel aus Eisenlamellen, die stellenweise divergierten, stellenweise aneinandergepreßt waren, wurde, wie aus Fig. 268 ersichtlich ist, angeordnet. Der Behälter K enthielt heißes Wasser, durch die Behälter J und L floß kaltes Wasser. Die Thermometer t_1 und t_2 zeigten eine gewisse zufällige, jedenfalls geringe Temperaturdifferenz an. Ließ man nun einen Strom zunächst in der einen und hierauf in der entgegengesetzten Richtung hindurchgehen, so erhielt man ungleiche Temperaturdifferenzen, ganz wie es einem scheinbaren Wärmetransport in der Richtung gegen den Strom entspricht; somit ist das Eisen eine negative Substanz. Für Cu erhielt man die

entgegengesetzte Erscheinung: die Wärme wurde in ihm gleichsam mit dem Strome transportiert; Kupfer ist also eine positive Substanz.

Le Roux (1867) hat eine große Zahl von reinen Metallen und Legierungen untersucht, wobei er sich einer scharfsinnigen Methode bediente. Zwei gleiche Stäbe, die wir mit AB und $A'B'$ bezeichnen wollen, liegen einander parallel; ihre Enden A und A' sind miteinander metallisch verbunden und befinden sich bei einer Temperatur von 100°: die anderen Enden B und B' befinden sich in einem Raume, dessen Temperatur 0° beträgt. Im mittleren Teile, der durch einen Schirm vor den erwähnten Enden geschützt ist, befindet sich zwischen den Stäben eine Thermosäule, deren beide Enden an die einander zugekehrten Seiten der Stäbe angedrückt sind, so daß die Säule ein Maß für die Temperaturdifferenz der Stabmitten gibt. Die Gleichartigkeit der Stäbe ermöglichte es, diese Differenz auf Null zu bringen. Nachdem nun aber die Enden B und B' mit einer Stromquelle verbunden

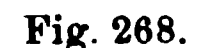
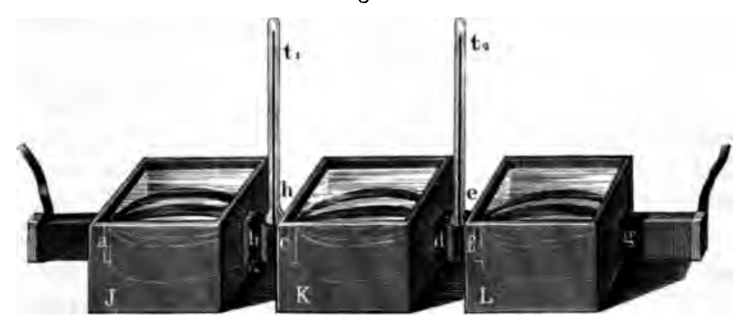


Fig. 268.



wurden, wobei der Strom an einem der Stäbe in der Richtung des Temperaturanstieges, an dem anderen in der Richtung des Temperaturabfalles floß, zeigte die Thermosäule eine Temperaturdifferenz an, deren Betrag und Vorzeichen den Thomsoneffekt für die Substanz bestimmten, aus welcher die Stäbe bestanden. Le Roux fand, daß der Thomsoneffekt proportional der Stromstärke ist; ferner fand er, daß Sb, Cd, Zn, Aluminiumbronze, Cu, Ag, Messing und die Legierung 10 Bi + 1 Sb positiv, Bi, Neusilber, Pt. Al, Sn, Fe und die Legierung 5 Sb + 5 Cd + 1 Bi negativ sind. Er hat auch die relativen Werte der Effekte bestimmt, die besonders groß in den beiden genannten Legierungen, in Bi, Neusilber, Pt, Cd, Fe und Sb sind. Im Blei fand Le Roux den Thomsoneffekt gleich Null. Hoorweg (1880), Trowbridge und Penrose (1882), sowie Bidwell (1884) haben weitere Untersuchungen an verschiedenen Metallen angestellt.

Die Wärmemenge q, welche im Verlauf einer Sekunde in einem Teile des Leiters verschwindet, an dessen Enden eine Temperatur-

differenz von 1^0 besteht, während durch diesen Teil ein Strom i in einer dem Wärmetransport entgegengesetzten Richtung fließt, ist gleich

$$q = \sigma i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Die Wärmemenge σ, welche von der Stromeinheit in der Zeiteinheit aus einem Teile fortgeschafft wird, in welchem das Temperaturgefälle 1^0 beträgt, ist von W. Thomson die spezifische Wärme der Elektrizität in der gegebenen Substanz genannt worden. Sie ist positiv, wenn das Metall positiv ist, d. h. wenn q bei Anwesenheit eines Stromes verschwindet, der von kälteren zu wärmeren Stellen fließt.

Battelli (1886) hat zuerst numerische Werte für die Größe σ angegeben und ihre Abhängigkeit von der Temperatur bestimmt. Er hat die Le Rouxsche Methode angewandt, sie jedoch dahin abgeändert, daß die mittleren Teile der beiden Stäbe (die mit Lack überzogen waren) durch zwei gleiche Quecksilberkalorimeter hindurchführten, die zur Messung der Mengen q der Thomsonschen Wärme dienten. Außerdem wurden mit Hilfe von Thermoelementen die Temperaturen der Stäbe zu beiden Seiten der Kalorimeter gemessen zwecks Bestimmung der mittleren Temperatur derjenigen Stabteile, die sich innerhalb der Kalorimeter befanden; auf diese Temperaturen bezog sich die Größe des Thomsoneffekts. Battelli fand aus seinen Versuchen, daß q der Stromstärke i proportional ist und, wenn man vom Eisen absieht, proportional der absoluten Temperatur T ist, so daß

$$q = a T i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40, a)$$

ist, wo a eine Konstante bedeutet, die von der Substanz abhängt. Er maß i in C. G. S.-Einheiten und q in Grammkalorien, wobei er folgende Werte für die Größe $10^8 a$ (Stromstärke = 10 Ampere) fand:

Cd	Sb	Bi	Pb	Neusilber	10 Bi + 1 Sb
3,678	7,081	— 3,909	0,0433	— 2,560	10,002

Wie man sieht, fand Battelli auch im Blei den Thomsoneffekt, wenn auch in sehr geringem Grade. Vergleicht man (40) mit (40, a), so findet man

$$\sigma = a T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40, b)$$

d. h. die spezifische Wärme der Elektrizität ist für eine gegebene Substanz proportional der absoluten Temperatur.

Haga (1887) hat den Thomsoneffekt in Pt, Pb und Hg untersucht. Für Pt fand sich die Formel (40, b) nicht bestätigt. Für Pb war σ negativ, falls das Metall rein war, positiv dagegen in dem im Handel erhältlichen Metall. Besonders bemerkenswert ist die Tatsache, daß der Thomsoneffekt auch im Quecksilber auftritt, in welchem das Auftreten einer Potentialdifferenz nicht etwa durch Strukturänderungen erklärt werden kann, die bei einer Änderung der Temperatur

auftreten. Die Größe σ war für das Quecksilber negativ und ungefähr gleich dem dritten Teile ihres Wertes für Bi.

Laws (1903) hat Legierungen aus Bi und Zn untersucht, wobei er fand, daß σ in ihnen schneller wächst, als es einer Proportionalität mit der absoluten Temperatur entsprechen müßte. Ohne auf die Untersuchungen von King (1898) und Hall (1905) einzugehen, wenden wir uns der wichtigen Arbeit von Lecher (1905) zu, welcher die Abhängigkeit bestimmt hat, die zwischen σ und der Temperatur für Fe, Cu, Ag und Konstantan besteht. Lecher hat in Formel (40) die Stromstärke in Ampere, die Wärmemenge in Grammkalorien ausgedrückt und hierbei folgende Zahlenwerte erhalten:

für Eisen zwischen 91° und 441°:

$$\sigma = -[1{,}860 + 0{,}020\,57\,t - 0{,}000\,051\,20\,t^2]\,10^{-6} \quad . \quad . \quad (41)$$

für Kupfer zwischen 252° und 678°:

$$\sigma = +[3{,}01 + 0{,}006\,62\,t]\,10^{-7} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41,\text{a})$$

für Silber zwischen 123° und 525°:

$$\sigma = +[7{,}363 + 0{,}008\,87\,t]\,10^{-7} \quad . \quad . \quad . \quad (41,\text{b})$$

für Konstantan zwischen 87° und 481°:

$$\sigma = -[4{,}73 + 6{,}10 \,.\, 10^{-3}\,t - 2{,}40 \,.\, 10^{-5}\,t^2]\,10^{-6} \quad . \quad . \quad (41,\text{c})$$

Für keine von obigen Substanzen bestätigt sich die Formel (40, b). Für Eisen nimmt der absolute Wert $(-\sigma \,.\, 10^6)$ mit Zunahme der Temperatur zunächst von 3,23 bis 3,92 zu, erreicht ein Maximum bei 185° und nimmt darauf ab bis zu 1,06 bei 440°; für Konstantan ist σ ebenfalls eine nicht lineare Funktion der Temperatur und mit Zunahme der Temperatur nimmt die Größe $-\sigma \,.\, 10^6$ ab. Für Kupfer und Silber ist σ eine lineare, zunehmende Funktion der Temperatur, doch erfolgt ihre Zunahme langsamer als es sein müßte, falls Proportionalität mit der absoluten Temperatur vorhanden wäre.

Den Thomsoneffekt in Flüssigkeiten hat Bagard (1893) untersucht; es gelang ihm, das Vorhandensein dieses Effekts in den Lösungen von $CuSO_4$, $ZnSO_4$ und $ZnCl_2$ nachzuweisen, welche sämtlich positiv sind.

§ 7. Theorie der thermoelektrischen Erscheinungen. Es existieren zahlreiche theoretische Untersuchungen, welche die thermoelektrischen Erscheinungen zum Gegenstande haben. Ausgehend von gewissen Hypothesen über die Entstehungsursache der Potentialdifferenz in einer ungleich erwärmten, inhomogenen Kette, die aus Leitern, namentlich aus Leitern erster Klasse, besteht, haben die Verfasser jener verschiedenen Theorien danach gestrebt, die Erscheinung des thermoelektrischen Stromes, das Peltiersche Phänomen und den

Thomsoneffekt zu einem Ganzen zu vereinigen und die Gesetze oder Regeln abzuleiten, denen diese Erscheinungen folgen. Eine sehr vollständige und eingehende Darlegung dieser Theorien bis auf die neuesten findet man in Weinsteins Thermodynamik und Kinetik der Körper, Bd. 3, S. 348—400, Braunschweig 1905.

Die ersten Theorien dieser Art sind fast gleichzeitig von Clausius (1853) und W. Thomson (1854) publiziert worden. Clausius kannte hierbei den Thomsoneffekt noch nicht, so daß dieser unter den Erscheinungen, auf welche seine Theorie sich bezieht, noch fehlt. Das Wesentliche der Theorie von Clausius besteht in folgendem. Nehmen wir an, eine geschlossene Kette bestehe aus zwei Metallen, die an den Stellen A und B aneinander gelötet sind; die Temperaturen der Lötstellen mögen sich voneinander nur unendlich wenig unterscheiden, und zwar mag die Temperatur an der Lötstelle A gleich t, diejenige der Lötstelle B gleich $t + dt$ sein. Clausius nimmt an, daß die in der Lötstelle vorhandene Wärmebewegung die Ursache für das Auftreten einer Potentialdifferenz sei; diese Bewegung treibt nämlich die ungleichnamigen Elektrizitäten nach entgegengesetzten Seiten, bis sich eine Doppelschicht gebildet hat, welche die Wirkung der Wärmebewegung aufhebt. Die Größe der auftretenden Potentialdifferenz hängt von der Temperatur ab; sie möge in A gleich e, in B gleich $e + de$ sein. In einer geschlossenen Kette wirkt eine unendlich kleine elektromotorische Kraft $dE = de$. Nehmen wir an, es sei im Verlaufe einer gewissen Zeit durch die Kette die Elektrizitätsmenge η geströmt. Clausius nimmt an, daß die Arbeit der elektrischen Kräfte in der Lötstelle, die durch das Produkt aus η und der Potentialdifferenz ausgedrückt wird, der Peltierschen Wärme äquivalent sei. Dies gibt an der Lötstelle A die Peltiersche Wärme (in mechanischen Einheiten) $q_2 = e\eta$, an der Lötstelle B die Wärme $q_1 = (e + de)\eta$. Hierbei wird die Wärme q_1 an der wärmeren Lötstelle B absorbiert, q_2 an der kälteren Lötstelle A ausgeschieden. Es ist klar, daß bei $\eta = 1$ für die Peltiersche Wärme überhaupt $q = e$ gefunden wird; wie wir aber gesehen haben, ist dies nicht richtig, denn q wird durch die weniger einfache Formel (35), S. 729, bestimmt. Stellt man sich auf den Standpunkt von Clausius, so sieht man, daß das Hindurchströmen der Elektrizitätsmenge η durch die Kette von einer Absorption der Wärmemenge $q_1 = (e + de)\eta$ an der erwärmten Lötstelle A und einer Ausscheidung der Wärmemenge $q_2 = e\eta$ an der kälteren Lötstelle B begleitet ist. Ist $dE = de$ unendlich klein, so erhält man einen unendlich schwachen Strom; von der Jouleschen Wärme, die dem Quadrat der Stromstärke proportional ist, kann man absehen, dies aber berechtigt uns, den ganzen Vorgang als einen reversiblen anzusehen und auf ihn das zweite Prinzip der Thermodynamik anzuwenden. Sind $T = t + 273$ und $T + dT$ die absoluten Temperaturen der Lötstellen,

so gilt für alle umkehrbaren Kreisprozesse (Bd. III, Kap. VIII, § 13) die Relation

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{T}{T + d\,T}.$$

Substituiert man die Werte $q_1 = (e + d\,e)\,\eta$ und $q_2 = e\,\eta$, so erhält man

$$\frac{d\,e}{e} = \frac{d\,T}{T}.$$

Durch Integration erhält man hieraus die Gleichung

$$e = a\,T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

wo a ein konstanter Faktor ist. Somit findet Clausius, daß die elektromotorische Kraft der Berührung zweier Leiter der absoluten Temperatur proportional ist; dies ergibt aber für die thermoelektrische Kraft E den Ausdruck:

$$E = e_2 - e_1 = a\,(T_2 - T_1) = a\,(t_2 - t_1) \quad . \quad . \quad (42,\text{a})$$

und dies ist die Formel (10), S. 716. Wie wir gesehen haben, führt die richtige Formel (35) gerade unter der Annahme, daß $e = a\,T$ ist, zur Gleichung $q = e$, vgl. (35, a) und (36, a), d. h. zur Formel (42, a). Natürlich führt die Annahme $q = e$, welche der Theorie von Clausius zugrunde liegt, umgekehrt zur Gleichung $e = a\,T$. Clausius wußte, daß die Gleichung (42, a) durch die Versuche nicht bestätigt wird, und er hat auch bereits im Jahre 1853 darauf hingewiesen, daß man diese Nichtübereinstimmung durch die Annahme erklären kann, daß auch in einem homogenen Metalle zwischen ungleich erwärmten Teilen desselben Potentialdifferenzen auftreten. Er nahm jedoch an, daß dies nur in solchen Metallen möglich sei, in denen eine Temperaturänderung von einer Änderung des Molekularzustandes begleitet sei.

In dieser Richtung ist die Clausiussche Theorie von Budde (1874) weiter entwickelt worden, dessen Resultate Clausius selbst in der Folge als sehr wertvoll bezeichnet hat (vgl. seine Mechanische Wärmetheorie, Bd. II, S. 193—203, 1879). Man muß übrigens bemerken, daß die Buddesche Theorie in vielen Stücken der Theorie ähnelt, die W. Thomson bereits im Jahre 1854 aufgestellt hat.

Die Ausführungen von Budde sind in ihren Grundzügen die folgenden. Die Existenz einer thermoelektrischen Reihe (S. 710) weist darauf hin, daß man die Konstante a der Gleichung (42) als Differenz zweier Größen α und β anzusehen hat, die für jedes der beiden Metalle charakteristisch sind. Es ist somit

$$e = (\alpha - \beta)\,T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42,\text{b})$$

Hier sind die Größen α und β Funktionen der Temperatur T. Eine elektromotorische Kraft tritt jedoch auch zwischen jedem Paare

benachbarter Schichten eines Leiters auf. Hat man für eine Schicht die Größe α, für die benachbarte die Größe $\alpha + d\alpha$ und ist die Temperatur der Berührungsfläche gleich T, so tritt zwischen den Schichten die elektromotorische Kraft $T d\alpha$ auf. Sind α_1, β_1 und α_2, β_2 die Werte an den Lötstellen, so ist die gesamte elektromotorische Kraft E in der geschlossenen Kette gleich

$$E = \int_{T_1}^{T_2} T d\beta + (\alpha_2 - \beta_2) T_2 + \int_{T_2}^{T_1} T d\alpha + (\alpha_1 - \beta_1) T_1 \quad (42,c)$$

Führt man die Integration teilweise aus, so erhält man z. B.

$$\int_{T_1}^{T_2} T d\beta = T_2 \beta_2 - T_1 \beta_1 - \int_{T_1}^{T_2} \beta d T$$

und findet demnach

$$E = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha - \beta) d T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42,d)$$

oder, wenn man $T_1 = T_0$, $T_2 = T$ setzt,

$$E = \int_{T_0}^{T} (\alpha - \beta) d T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Hieraus ergibt sich für die thermoelektrische Fähigkeit (S. 722):

$$\frac{dE}{dT} = \alpha - \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Die Formeln (42, b) und (44) geben:

$$e = T \frac{dE}{dT} = (\alpha - \beta) T \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Untersucht man die Abhängigkeit der Größe E von der Temperatur, so findet man hierdurch die Differenz $\alpha - \beta$ und kennt man eine dieser Größen (für irgend ein Metall), so kann man alle anderen bestimmen. Setzt man beispielsweise für Blei $\beta = 0$, so findet man α für alle übrigen Metalle. Strömt durch die Lötstelle die Einheit der Elektrizitätsmenge, so erhält man nach Budde für die Peltiersche Wärme

$$q = \pm e = \pm T \frac{dE}{dT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45.a)$$

Wenden wir uns jetzt der Arbeit von W. Thomson zu; derselbe nahm zuerst theoretisch an, daß ein Temperaturgefälle mit einem Potentialgefälle in der gleichen oder in der entgegengesetzten Richtung verknüpft sei und daß ein Strom, der an einem ungleich erwärmten Leiter entlang dahinfließt, von einer Ausscheidung oder einer Absorption der Wärme begleitet werde; später (1856) hat er, wie wir gesehen haben (S. 731), durch unmittelbare Versuche die Existenz dieser Erscheinung —

des Thomsoneffekts — nachgewiesen. Eine bestimmte Substanz wird hierbei durch eine gewisse Größe σ charakterisiert, die Thomson als die spezifische Wärme der Elektrizität bezeichnet hat; auf S. 734 haben wir die Definition derselben gegeben. Wir bringen in Erinnerung, daß $\sigma > 0$ ist, wenn das Strömen der Elektrizität von der kälteren Stelle zur wärmeren von Wärmeabsorption begleitet ist, d. h. wenn der Strom die Wärme gleichsam transportiert. Wir haben auch die neuesten Bestimmungen der Größe σ kennen gelernt, unter denen die wichtigsten die Arbeiten von Battelli (1886) und Lecher (1905) sind. Die theoretischen Überlegungen von W. Thomson sind in ihren Grundzügen die folgenden. Es seien A und B die Lötstellen zweier Metalle (Fig. 269); ihre Temperaturen aber T_1 und T_2, wobei $T_2 > T_1$ ist, so daß die Strömung der Wärme in den Richtungen erfolgt, welche durch die Pfeile a und b angedeutet sind. Die Richtung des thermoelektrischen Stromes entspreche den Pfeilen c und d, die gesamte in der Kette wirkende elektromotorische Kraft bezeichnen wir mit E. Nehmen wir an, es sei durch die Kette die Einheit der Elektrizitätsmenge hindurchgeströmt; es ist dann die gesamte in der Kette aufgetretene elektrische Energie gleich E. Sie muß gleich der Wärme sein, die in der Kette verschwunden ist. Nehmen wir wieder an, es sei die Wärmemenge q_1 in der kalten Lötstelle A aufgetreten, q_2 in der warmen Lötstelle B verschwunden; q_1 und q_2 wollen wir durch mechanische Einheiten ausdrücken. Im Leiter (σ_2) fließt der Strom der Wärmeströmung entgegen; hier verschwindet in jeder Schicht die Wärme $\sigma_2 dT$; in jeder Schicht des anderen Leiters erscheint die Wärme $\sigma_1 dT$, wobei dT immer als positiv anzusehen ist. Das Prinzip von der Erhaltung der Energie ergibt somit

Fig. 269.

$$E = q_2 - q_1 + \int_{T_1}^{T_2} (\sigma_2 - \sigma_1)\, dT \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Ferner betrachtet W. Thomson den ganzen Vorgang des Wärmetransportes als einen umkehrbaren Kreisprozeß, was nur bei unendlich kleiner Stromstärke, wo man die Joulesche Wärme vernachlässigen kann, richtig ist. Nach dem zweiten Prinzip der Thermodynamik ist

$$\frac{q_2}{T_2} - \frac{q_1}{T_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{T}\, dT = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46,a)$$

Setzt man $T_1 = T_0$, $T_2 = T$, $q_2 = q$, so geben die beiden letzten Gleichungen

$$\frac{dE}{dT} = \frac{dq}{dT} + \sigma_2 - \sigma_1 \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

$$\frac{d\left(\frac{q}{T}\right)}{dT} + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{T} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (47,\mathrm{a})$$

Letztere Gleichung gibt

$$\frac{q}{T} = \frac{dq}{dT} + \sigma_2 - \sigma_1 \quad \ldots\ldots \quad (47,\mathrm{b})$$

Aus den Formeln (47) und (47, b) folgt

$$\frac{dE}{dT} = \frac{q}{T} \quad \ldots\ldots \quad (47,\mathrm{c})$$

d. h.

$$q = T\frac{dE}{dT} \quad \ldots\ldots \quad (47,\mathrm{d})$$

als Ausdruck für die Peltiersche Wärme. Formel (47, c) gibt

$$E = \int_{T_1}^{T_2} \frac{q}{T}\, dT \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

Setzt man (47, d) in (47, b) ein, so erhält man

$$\sigma_2 - \sigma_1 = -T\frac{d^2E}{dT^2} \quad \ldots\ldots \quad (48,\mathrm{a})$$

In den drei letzten Formeln sind die wichtigsten Sätze der Thomsonschen Theorie enthalten. Tait hat angenommen, daß die Größe σ für eine gegebene Substanz proportional der absoluten Temperatur ist, d. h. daß man

$$\sigma = aT \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

setzen kann. In diesem Falle gibt (47, a) den Ausdruck

$$\frac{d\left(\frac{q}{T}\right)}{dT} + a_2 - a_1 = 0,$$

d. h.

$$\frac{q}{T} + (a_2 - a_1)T + C = 0.$$

Ist τ die Temperatur des neutralen Punktes, für welche $q = 0$ ist, so ist $(a_2 - a_1)\tau + C = 0$, folglich

$$q = (a_2 - a_1)(\tau - T)T \quad \ldots\ldots \quad (49,\mathrm{a})$$

Es sei $a_2 - a_1 = k$: setzt man (49, a) in (48) ein, so findet man

$$E = k(T_2 - T_1)\left[\tau - \frac{T_1 + T_2}{2}\right] \quad \ldots \quad (49,\mathrm{b})$$

Diese Formel ist identisch mit der Avenariusschen Gleichung (17), S. 717. Wie wir gesehen haben, hat Battelli aus seinen Versuchen die Gleichung $\sigma = aT$ abgeleitet, doch stimmen die neuesten Untersuchungen von Lecher (1905) mit dieser Formel nicht überein.

Von den thermoelektrischen Theorien, welche vor dem Jahre 1885 in Vorschlag gebracht worden sind, wäre noch die Theorie von F. Kohlrausch (1875) zu erwähnen. Dieselbe geht von der Voraussetzung aus, daß jede Wärmeströmung von einer Elektrizitätswanderung begleitet ist und umgekehrt jede Elektrizitätsströmung, also auch in einem gleichmäßig erwärmten Leiter, von einer Wärmewanderung begleitet ist; mit anderen Worten: die Wärme führt Elektrizität mit sich und die Elektrizität führt Wärme mit sich fort. Ausgehend von dieser Annahme, erklärt Kohlrausch die von uns betrachteten thermoelektrischen Erscheinungen.

Anfangend vom Jahre 1885 sind zahlreiche thermoelektrische Theorien entwickelt worden. Die Verfasser der wichtigsten von ihnen sind: Lorentz (1885), Duhem (1886), Boltzmann (1887), Planck (1889), Voigt (1895), Riecke (1898), Liebenow (1899), Drude (1900), Wiedeburg (1900), Weinstein (1905), Lecher (1906). Eine Darlegung dieser Theorien, die sich auf sehr verschiedenartige Annahmen stützen und zum Teil sehr kompliziert sind, tritt aus dem Rahmen dieses Buches heraus. Wir wollen nur bemerken, daß die neuesten Theorien die thermoelektrischen Erscheinungen auf Grund der Elektronentheorie zu erklären suchen. Wir beschränken uns auf Angabe der Literatur über die Theorie der thermoelektrischen Erscheinungen und fügen außer den oben erwähnten auch noch einige andere Arbeiten hinzu.

Literatur.

Zu § 2.

Streit: Jahresberichte der Gymnasien zu Schlawe (1902), Kattowitz (1903), Wittenberge (1905).

Seebeck: Gilb. Ann. **73**, 115, 430, 1823; P. A. **6**, 1, 133, 159, 253, 1826; Abhandl. Berl. Akad. 1822/23, S. 265; Ann. d. chim. et phys. (2), p. 199, 1823.

Becquerel: Ann. d. chim. et phys. **31**, 386, 1826; **41**, 353, 1829; P. A. **17**, 545, 1829.

Magnus: P. A. **83**, 469, 1851.

Hankel: P. A. **62**, 197, 1844.

W. Thomson (Lord Kelvin): Rep. Brit. Assoc. 1855; Papers **2**, 181; P. A. **99**, 334, 1856.

Erhard: W. A. **14**, 504, 1881.

Matthiessen: P. A. **103**, 412, 1858.

E. Becquerel: Ann. d. chim. et phys. (4) **8**, 403, 1866; Compt. rend. **61**, 146, 1865.

Bachmetjew: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **18**, 47, 1886; **21**, 264, 1889; **23**, 220, 301, 370, 430, 1891; **25**, 256, 1893; W. A. **43**, 723, 1891; Rep. d. Phys. **26**, 705, 1890; **27**, 442, 607, 1891.

Holborn u. Day: Berl. Ber. 1899, S. 691.
Jäger u. Diesselhorst: Wiss. Abhandl. d. Reichsanstalt **3**, 270, 1900.
Rollmann: P. A. **83**, 77, 1851; **84**, 275, 1851; **89**, 90, 1853.
Hutchins: Amer. Journ. of sc. (3) **48**, 226, 1894.
C. L. Weber: W. A. **23**, 447, 1884.
Des Coudres: W. A. **43**, 673, 1891.
Englisch: W. A. **50**, 88, 1893.
Stefan: Wien. Ber. 1865, Nr. 9; P. A. **124**, 633, 1865.
Lusanna: Atti R. Ist. Veneto **51**, 1489, 1893.
W. Thomson (Kristalle): Papers, **1**, 266.
Perrot: Arch. d. sc. phys. et natur. (4) **6**, 105, 229, 1898; **7**, 149, 1899; Compt. rend. **126**, 1194, 1898.
Chassagny et Abraham: Compt. rend. **111**, 602, 732, 1890.
Overbeck: W. A. **22**, 344, 1884.
Barus: W. A. **7**, 383, 1879; Diss. Leipzig 1879.
W. Thomson (Mech. Einwirk.): Phil. Trans. **3**, 1856; Papers **2**, 267.
Le Roux: Ann. d. chim. et phys. (4) **10**, 217, 1867.
Tunzelmann: Phil. Mag. (5) **5**, 339, 1878; Chem. News **37**, 118, 1878.
E. Cohn: W. A. **6**, 385, 1879.
Ewing: Proc. R. Soc. **32**, 399, 1881.
Des Coudres: W. A. **43**, 680, 1891; Verh. Phys. Ges. **9**, 18, 1890.
G. S. Meyer: W. A. **59**, 154, 1896.
A. Becquerel (Versch. Temp.): Ann. d. chim. et phys. (2) **23**, 135, 1823.
Magnus (Versch. Temp.): P. A. **83**, 469, 1851; Ann. d. chim. et phys. (3) **34**, 105, 1855.
Gaugain: Ann. d. chim. et phys. (3) **65**, 75, 1862.
Matteucci: P. A. **44**, 629, 1838; **47**, 600, 1839; Bibl. univ. (3) **13**, 199; **15**, 187, 1838.
Rosing: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **30**, 151, 1898.
Egg-Sieberg: Elektrotechn. Ztschr. 1900, S. 619; Heinke, Handbuch d. Elektrotechnik **1**, 260, Leipzig 1902.
Borgmann: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **9**, 314, 1877.

Zu § 3.

Pouillet: Compt. rend. **4**, 515, 1837; **5**, 785, 1837; P. A. **42**, 297, 1837.
Regnault: Mém. d. l'Acad. d. sc. **21**, 240, 1847.
Gaugain: Ann. d. chim. et phys. (3) **65**, 5, 1862.
Cumming: Ann. of Phil. (New Series) **5**, 427, 1823; Schweigg. Journ. **40**, 320, 1823.
Draper: Phil. Mag. (3) **16**, 451, 1840.
E. Becquerel: Ann. d. chim. et phys. **31**, 371, 1826.
Hankel: P. A. **62**, 491, 1844.
Avenarius: Über Thermoelektrizität (russ.), St. Petersburg 1864; P. A. **119**, 406, 1863; **122**, 193, 1864; **149**, 372, 1873.
Tait: P. A. **152**, 427, 1874; Proc. Edinb. R. Soc. **8**, 32, 44, 182; **9**, 208, 350, 362, 1872—1874; Trans. R. Soc. Edinb. **27**, 1873.
W. Thomson: Phil. Trans. London 1856, Part. III.
Kohlrausch u. Ammann: P. A. **141**, 456, 1870; Gött. Nachr. 1870, S. 400.
Tidblom: Lunds Univers. Års-Skrift (2) **10**, 1873.
Knott and Mc. Gregor: Proc. R. Soc. Edinb. **9**, 421, 1876; **18**, 310, 1894; Trans. R. Soc. Edinb. **28**, 321, 1878.
Naccari e Bellati: N. Cim. (2) **16**, 5, 120, 1876.
Noll: W. A. **53**, 874, 1894.

Jäger u. Diesselhorst: Vgl. Lit. zu § 2.
Holborn u. Day: Vgl. Lit. zu § 2.
Abt: Ann. d. Phys. (4), S. 320, 1900.
Chassagny et Abraham: Compt. rend. **111**, 602, 732, 1890; **112**, 1198, 1891.
Battelli: Atti di Torino **22**, 169, 1888.
Holman: Phil. Mag. (5) **41**, 463, 1896.
Barret: Phil. Mag. (5) **49**, 309, 1900.
Harrison: Phil. Mag. (6) **3**, 177, 1902.
Dewar and Fleming: Phil. Mag. (5) **40**, 95, 1895.
De Metz: Compt. rend. **138**, 1904.
Righi: Sulla forza electromotrice del Selenio. Padova 1888; Naturwiss. Rundschau **4**, 236.
Weidert: Ann. d. Phys. (4) **18**, 811, 1905; Diss. Rostock, 1905.
Bachmetjew: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **29**, 108, 1897.
Hoffmann: Diss. Rostock 1898.

Zu § 4.

Noll: Vgl. § 3.
Braun: Vgl. Winkelmann, Handb. d. Phys. **4** (1), 740, 1905.
Burnie: Phil. Mag. (5) **43**, 397, 1897.
Nobili: Schweigg. Journ. **53**, 271, 1828.
Walker: P. A. **5**, 327, 1825.
Gore: Phil. Mag. (4) **13**, 1, 1857; **43**, 54, 1872; Proc. R. Soc. **19**, 324, 1871; **27**, 213, 1878; **29**, 472, 1879; **31**, 214, 1880; **37**, 521, 1884.
Faraday: Exper. Res. Ser. **17**, § 1932, 1952, 1840.
Bleekrode: P. A. **138**, 571, 1869.
Bouty: Compt. rend. **90**, 917, 1880; Journ. d. Phys. (1) **9**, 229, 1880.
Ebeling: W. A. **30**, 530, 1887.
Brander: W. A. **37**, 457, 1889.
Hagenbach: W. A. **53**, 447, 1894; **58**, 21, 1896.
Lindig: P. A. **123**, 1, 1864.
Bagard: Compt. rend. **113**, 849, 1891.
Emery: Proc. R. Soc. **55**, 356, 1895.
Henderson: Phys. Rev. **23**, 101, 1906.
Andrews: Phil. Mag. (3) **10**, 433, 1837; P. A. **41**, 164, 1837.
Hankel: P. A. **103**, 612, 1858.
L. Poincaré: Compt. rend. **110**, 339, 1890.
Arndt: Ztschr. f. Elektrochem. **12**, 337, 1906.
Goodwin and Wentworth: Phys. Rev. **24**, 77, 1907.
R. Lorenz u. Kalmus: Phys. Chem. **59**, 17, 1905.
Wild: P. A. **103**, 353, 1858; Ann. d. chim. et phys. (3) **53**, 370, 1858.
E. Becquerel: Ann. d. chim. et phys. (4) **8**, 389, 1866.
Donle: W. A. **28**, 574, 1886.
Gockel: W. A. **40**, 450, 1890.
Bagard (Flüssigk.): Compt. rend. **114**, 986, 1892; Ann. d. chim. et phys. (7) **3**, 83, 1894.
Naccari e Battelli: Atti d. R. Acad. di Torino **20**, 1884/85; **25**, 1885/86.
Duane: W. A. **65**, 374, 1898; Berl. Ber. 1896, S. 967; Diss. Berlin 1897.
Bucherer: Ann. d. Phys. (4) **3**, 204, 1900.
Nernst: Phys. Chem. **4**, 129, 1889.
Planck: W. A. **40**, 561, 1890.

Zu § 5.

Peltier: Ann. d. chim. et phys. (2) **56**, 371, 1834; P. A. **43**, 324, 1838.
E. Becquerel: Ann. d. chim. et phys. (3) **20**, 60, 1847.
E. Lenz: P. A. **44**, 342, 1838.
Quintus Icilius: P. A. **89**, 377, 1853.
Frankenheim: P. A. **91**, 161, 1854.
Le Roux: Ann. d. chim. et phys. (4) **10**, 243, 1867; Compt. rend. **99**, 842, 1884.
Edlund: P. A. **140**, 435, 1870; **143**, 404, 534, 1871.
Sundell: Ofvers. Vetensk. Acad. Forhandl. 1872, No. 3; P. A. **149**, 144, 1873.
Waltenhofen: Wien. Ber. **75**, 1877; W. A. **21**, 360, 1884.
Gore: Phil. Mag. (5) **21**, 359, 1886.
Skobelzin u. Zinserling: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **19**, 121, 1887.
Battelli: Rend. d. Acad. dei Lincei (4) **3**, 404, 1887; **5**, 631, 1889.
Jahn: W. A. **34**, 755, 1888.
Bausenwein: Wien. Ber. **113**, 663, 1904; 114, 1625, 1905; Ann. d. Phys. (4) **15**, 213, 1904.
Lecher: Phys. Ztschr. **6**, 781, 1905; **7**, 34, 1906.
La Rosa: Rendic. Acc. d. Lincei (5) **13**, 167, 1904.
Bouty: Compt. rend. **89**, 146, 1879; **90**, 987, 1880.
Hoorweg: W. A. **9**, 568, 1880; **11**, 146, 1880.
Gill: W. A. **40**, 115, 1890.
Gockel: W. A. **24**, 618, 1885.
Schulz-Sellack: P. A. **141**, 467, 1870.
Naccari e Battelli: Atti di Torino **20**, 581, 1886; N. Cim. (3) **20**, 201, 1886;
Bagard: Compt. rend. **114**, 980, 1892; **116**, 27, 1126, 1893; Ann. d. chim. et phys. (7) **3**, 83, 1894.
Lussanna: Atti d. R. Ist. Venet. (7) **4**, 477, 1489, 1892/93.

Zu § 6.

W. Thomson: Phil. Trans. **3**, 661, 1856; Ann. d. chim. et phys. (3) **54**, 105, 1858; Math. et phys. Papers **1**, 246; **2**, 192.
Le Roux: Ann. d. chim. et phys. (4) **10**, 258, 1867.
Hoorweg: W. A. **9**, 955, 1880.
Trowbridge and Penrose: Amer. Journ. of sc. (3) **24**, 379, 1882; Phil. Mag. (5) **14**, 440, 1882.
Bidwell: Proc. R. Soc. **37**, 25, 1884.
Battelli: Atti di Torino **22**, 48, 369, 1886/87; Rend. d. Acad. dei Lincei **3**, 105, 212, 1887; N. Cim. (3) **21**, 228, 250, 1887; **22**, 157, 221, 1887.
Haga: Ann. d. l'école polytechn. dy Delft **3**, 43, 1887; W. A. **28**, 179, 1886; **32**, 131, 1887.
Laws: Cambridge Proc. **12**, 179, 1903; Phil. Mag. (6) **7**, 560, 1904.
King: Proc. Amer. Acad. Boston **33**, 353, 1898.
Hall: Proc. Amer. Acad. of Arts and Sc. **41**, No. 2, Mai 1905; Contrib. Phys. Labor. of Harvard Univers. 1904.
Lecher: Wien. Ber. **114**, 1599, 1905; **115**, 173, 1906; Ann. d. Phys. (4) **19**, 853, 1906; **20**, 480, 1906.
Bagard: Compt. rend. **117**, 97, 1893; Ann. d. chim. et phys. (7) **3**, 83, 1894; Thèse de doctorat, Paris 1894.
Radakowits: Phys. Ztschr. **8**, 505, 1907.

Zu § 7.

Clausius: P. A. **90**, 513, 1853; Abhandl. **2**, 175, 1867; Mech. Wärmetheorie **2**, 170, 1879.

Budde: P. A. **153**, 343, 1874; W. A. **21**, 277, 1884; **25**, 564, 1885; **30**, 664, 1887.
W. Thomson: Proc. Edinb. R. Soc., Dec. 1851; Phil. Mag. (4) **3**, 1852; **11**, 214, 281, 1856; Trans. Edinb. R. Soc. **21**, 123, 1854; Phil. Trans. **3**, 661, 1856, 1875; Math. and Phys. Papers **1**, 246; **2**, 192; Ann. d. chim. et phys. (3) **54**, 105, 1858.
Tait: Nature, 23. Mai 1873; Trans. R. Soc. Ediub. **27**, 125, 1873; P. A. **152**, 427, 1874.
F. Kohlrausch: P. A. **156**, 601, 1875; W. A. **23**, 477, 1884; Gött. Nachr. 1874, S. 65.
Lorentz: Arch. Néerland. **20**, 129, 1885; W. A. **36**, 594, 1889.
Duhem: Compt. rend. **104**, 1606, 1887; Ann. d. l'école. norm. (3) **2**, 363, 405, 1885; Le potentiel thermodynam., p. 222, Paris 1886; L'Électricité et le Magn. **1**, 478, 1891.
Boltzmann: Wien. Ber. **96**, 1258, 1887.
Lorberg: W. A. **34**, 662, 1888.
Planck: W. A. **36**, 624, 1889; **44**, 385, 1891.
Parker: Phil. Mag. (5) **26**, 353, 1888; **27**, 72, 1889; Proc. Cambr. Phil. Soc. **7**, 269, 1891.
Voigt: W. A. **67**, 715, 1899; **69**, 706, 1899.
Riecke: W. A. **66**, 353, 545, 1898; Phys. Ztschr. **2**, 639, 1901; Ann. d. Phys. (4) **2**, 835, 1900.
Drude: Ann. d. Phys. (4) **1**, 566, 1900; **3**, 369, 1900; **7**, 687, 1902.
Wiedeburg: Ann. d. Phys. (4) **1**, 758, 1900.
Liebenow: W. A. **68**, 316, 1899; Ann. d. Phys. (4) **2**, 636, 1900; **3**, 155, 1900; Verh. d. deutsch. phys. Ges. **1**, 74, 82, 1899.
Weinstein: Thermodynamik u. Kinetik der Körper **3**, 390—400, Braunschweig 1905.
Lecher: Siehe zu § 6.
Stansfield: Phil. Mag. (5) **46**, 59, 1898.
Ponsot: Compt. rend. **140**, 1585, 1905.
Lodge: Phil. Mag. (5) **2**, 524, 1876.
Edlund: P. A. **137**, 474, 1869.
Le Roux: Ann. d. chim. et phys. (4) **10**, 241, 1867.
Liebmann: W. A. **68**, 316, 1899.
Reinganum: Ann. d. Phys. (4) **2**, 398, 1900.

Siebentes Kapitel.

Ponderomotorische Wirkungen des Magnetfeldes.

§ 1. Einleitung. In den vorhergehenden Kapiteln dieses Abschnittes haben wir die Eigenschaften und die beiden Quellen (Magnete und Ströme) des Magnetfeldes betrachtet. Wir gehen jetzt zu den Wirkungen dieses Feldes über und wollen hierbei zunächst die rein mechanischen Wirkungen ins Auge fassen, d. h. diejenigen Kräfte betrachten, unter deren Einwirkung Körper, die sich im Magnetfelde befinden, in Bewegung versetzt werden können.

Die magnetischen Kräfte wirken gemäß ihrer Definition auf den „freien Magnetismus“; außerdem wirken sie auch auf den Strom. Über den freien Magnetismus ist uns bereits bekannt, daß er bloß „fingiert“ (vgl. S. 400) ist und vom Magneten selbst nicht getrennt werden kann. Die elektrischen Ströme haben wir ebenfalls bisher bloß als eine Erscheinung angesehen, die in einem gewissen Körper, in einem Leiter, auftritt. Die magnetischen Kräfte wirken unmittelbar auf den freien Magnetismus und auf den Strom ein, aber diese Wirkung überträgt sich gleichsam auf den Körper, den Magneten oder Stromleiter, mit denen die Objekte der unmittelbaren Einwirkung verbunden sind. Man hat demgemäß von ponderomotorischen (zum Unterschiede von den elektromotorischen) Wirkungen des Magnetfeldes erstens auf Magnete und zweitens auf Leiter zu sprechen, in denen elektrische Ströme fließen. Im letzten Falle spricht man gewöhnlich der Kürze halber von Wirkungen auf Ströme, wobei man mit diesem Worte stromdurchflossene Leiter meint.

Beim Studium der ponderomotorischen Kräfte, denen in einem gegebenen Magnetfelde Magnete oder Ströme unterworfen sind, wendet man in gewissen Fällen besondere Aufmerksamkeit den Bedingungen für das Gleichgewicht der Magnete oder Ströme zu, wobei man die letzteren sich beweglich denkt unter gegebenen Bedingungen, die für ihre möglichen Bewegungen existieren. So kann man z. B. die Gleichgewichtsbedingungen von Strömen oder Magneten betrachten, die sich um gegebene Achsen zu drehen vermögen.

Wie wir gesehen haben, kann ein Magnetfeld durch Anwesenheit von Magneten oder Strömen hervorgerufen werden; es könnte daher scheinen, daß man vier wesentlich verschiedenen Fällen von ponderomotorischen Wirkungen im Magnetfelde begegnen müßte, nämlich: Magnete im Felde von Magneten, Magnete im Felde von Strömen, Ströme im Felde von Magneten und endlich Ströme im Felde von Strömen. Überträgt man in Gedanken die Ursache der wahrgenommenen ponderomotorischen Wirkungen vom Felde selbst auf die Quelle dieses Feldes, so erhielte man folgende vier Einwirkungen: Magnete auf Magnete, Magnete auf Ströme, Ströme auf Magnete und Ströme auf Ströme. Da aber Magnete und Ströme, die als Objekte für die zu untersuchenden ponderomotorischen Wirkungen dienen, selbst Quellen von Magnetfeldern repräsentieren, so ist klar, daß gleichzeitig auch jene Magnete und Ströme, die wir als die Quellen des ursprünglich gegebenen Feldes angesehen haben, ponderomotorischen Wirkungen unterliegen. Demgemäß hat man von Wechselwirkungen zwischen zwei Quellen zweier, gleichzeitig vorhandener, einander gleichsam überlagernder Magnetfelder zu sprechen. Nach dem dritten Newtonschen Gesetze (Bd. I) kann die Aufgabe über die Wechselwirkungen zwischen einem Strome und Magneten nicht in zwei wesentlich verschiedene Aufgaben

zerfallen, von denen etwa die eine von der Wirkung eines Stromes auf einen Magneten, die andere von der Wirkung eines Magneten auf einen Strom handelt, denn es müssen diese beiden Wirkungen nach dem erwähnten Gesetze auf Kräfte zurückgehen, die an Größe einander gleich, der Richtung nach einander entgegengesetzt sind. Somit hat man nicht vier, sondern bloß drei wesentlich verschiedene Fälle der Wechselwirkung voneinander zu unterscheiden, nämlich:

1. Die Wechselwirkung von Magneten.
2. Die Wechselwirkung von Magneten und Strömen.
3. Die Wechselwirkung von Strömen.

In Wirklichkeit hat man es gewöhnlich damit zu tun, daß der eine der aufeinander einwirkenden Körper unbeweglich gemacht ist und man nur die Kräfte untersucht, unter deren Einwirkung der andere Körper in Bewegung gerät oder sich in einer bestimmten Gleichgewichtslage einstellt. In diesem Falle kann man in der Tat die oben genannten vier Fälle der Wirkung auf Magnete und Ströme einzeln betrachten; man darf aber nicht vergessen, daß die Untersuchung zweier von diesen Fällen nicht etwa zwei wesentlich verschiedene Aufgaben repräsentiert. Selbstverständlich ist es auch von nicht geringem Interesse, diejenigen Fälle zu betrachten, wo beide aufeinander einwirkenden Körper beweglich sind; diese Fälle lassen sich auch leicht durch das Experiment verwirklichen. Wir wenden uns einer eingehenderen Betrachtung der oben genannten drei Fälle der Wechselwirkung zu.

§ 2. Wechselwirkung von Magneten. Untersucht man theoretisch, d. h. durch Rechnung, diejenigen Kräfte, welche auf einen Magnet einwirken, der in das Magnetfeld eines anderen Magneten gebracht ist, so geht man hierbei vom Coulombschen Gesetze aus, das auf S. 398 genannt war und dessen wir uns bei der Herleitung verschiedener Formeln bereits wiederholt bedient haben. Mißt man die magnetische Menge mit Hilfe der elektromagnetischen Einheit (S. 402) und nimmt man an, es sei für das umgebende Medium die magnetische Suszeptibilität $\mu = 1$, so wird das Coulombsche Gesetz durch folgende Formel ausgedrückt, vgl. (3), (S. 402)

$$f = \frac{mm'}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

in welcher m und m' zwei magnetische Mengen sind, die sich voneinander im Abstande r befinden; f ist die Kraft, die auf m und m' einwirkt. Diese Kraft ist eine abstoßende, wenn m und m' das gleiche Vorzeichen haben, eine anziehende, wenn m und m' entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Eine Prüfung dieses Coulombschen Gesetzes kann zum Teil nach denselben beiden Methoden ausgeführt werden, wie die Prüfung des anderen Coulombschen Gesetzes, das sich auf elektrische Kräfte bezieht und das wir auf S. 283 bis 291 eingehender betrachtet haben. Man hat aber hierbei zwei Umstände zu beachten, durch welche die Frage komplizierter wird, wenn man es mit Magneten zu tun hat. Einer von ihnen besteht darin, daß bei Untersuchung der Wirkungen eines Magneten (oder Stromes) auf einen anderen Magneten, welche man doch an der Oberfläche der Erde vornimmt, jener zweite Magnet sich unter der Wirkung der Kraft des Erdmagnetismus befindet, was sich in seinen Bewegungen, seiner Gleichgewichtslage usw. äußern muß. Der zweite Umstand, der hier von nicht geringer Bedeutung ist, besteht darin, daß die Verteilung des Magnetismus im Innern eines Magneten und längs seiner Oberfläche nicht mit Genauigkeit bestimmt werden kann; infolgedessen läßt sich die Rechnung nicht so durchführen, daß die beobachtete Wechselwirkung der Magnete das Resultat der Wechselwirkungen aller freien molekularen Magnetismusmengen des einen Magneten auf alle freien molekularen Magnetismusmengen des anderen ist. Nur in zwei Fällen kann man sich den gesamten freien Magnetismus eines Magneten in seinen Polen konzentriert denken, nämlich, wenn sich der Magnet im homogenen Felde (S. 434) befindet, und wenn man die Wirkung eines Magneten in solchen Punkten betrachtet, deren Abstand vom Magneten sehr groß im Vergleiche zu den linearen Dimensionen des Magneten selbst ist (S. 465 bis 467).

Wenden wir uns den beiden Methoden zu, mit deren Hilfe Coulomb die Richtigkeit desjenigen Teiles seines Gesetzes erwiesen hat, welcher die Beziehung zwischen der Kraft f und dem Abstande r der magnetischen Massen m und m' darstellt. Die erste von diesen beiden Methoden, die Schwingungsmethode, ist der auf S. 289 (vgl. Fig. 119) betrachteten analog und fast identisch mit der Methode zur Bestimmung der Verteilung des freien Magnetismus längs einem Magneten (S. 464). Ein möglichst langer Magnet wird in vertikaler Lage befestigt. In die durch einen seiner Pole hindurchgehende Horizontalebene wird eine Magnetnadel gebracht, welche in dieser Horizontalebene schwingen kann; hierbei muß die Ebene, welche durch die Magnetachse und den Mittelpunkt der Magnetnadel hindurchgeht, mit der Ebene des magnetischen Meridians zusammenfallen. Es sei H_0 die Horizontalkomponente der Intensität des Erdmagnetismus, H_1 und H_2 die Feldintensitäten des Magneten in den Abständen r_1 und r_2 von seinem Pole, n_0 die Schwingungszahl der Magnetnadel bei Abwesenheit des Magneten, n_1 und n_2 ihre Schwingungszahlen in den Entfernungen r_1 und r_2. Dann ist $H_0 = cn_0^2$, $H_0 + H_1 = cn_1^2$, $H_0 + H_2 = cn_2^2$, wo c ein Proportionalitätsfaktor ist. Hieraus folgt $H_1 = c(n_1^2 - n_0^2)$, $H_2 = c(n_2^2 - n_0^2)$. Ist das Gesetz

richtig, so muß $H_1 : H_2 = r_2^2 : r_1^2$ sein und man erhält

$$\frac{n_1^2 - n_0^2}{n_2^2 - n_0^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Die Versuche von Coulomb haben, wenn auch nur in grober Annäherung, diese Gleichung für verschiedene Werte von r_1 und r_2 bestätigt.

Die zweite Methode von Coulomb beruht auf Anwendung der Drehwage und ist der auf S. 286 angegebenen Methode analog. Wir wollen diese Methode in einer allgemeineren Form beschreiben, als es Coulomb selbst getan hat. Es sei AB (Fig. 270) die Lage des beweglichen Magneten, der sich bei völlig untordiertem Faden im magnetischen Meridian befindet. Tordiert man den Faden um einen gewissen Winkel φ_0, so wird der Magnet um einen gewissen Winkel α_0 abgelenkt. Auf Grund von Formel (12), S. 434, in der jetzt $\varphi = \alpha_0$ ist, erhalten wir die Gleichung

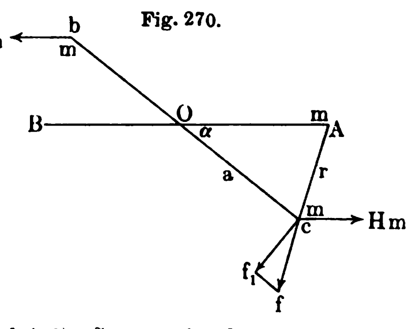


Fig. 270.

$$C\varphi_0 = MH \sin \alpha_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2, a)$$

in welcher C der Torsionskoeffizient des Fadens, M das magnetische Moment des Magneten und H die Horizontalkomponente der Intensität des Erdmagnetismus ist. Bringen wir nach A den Pol m_1 eines vertikalen Magneten, wobei m_1 mit dem in A befindlichen Pole des beweglichen Magneten gleichnamig ist. Es wird dann letzterer um einen gewissen Winkel α abgelenkt, falls die volle Tordierung des Fadens, die wir bewirkt haben, gleich φ ist. Die Gleichgewichtsbedingung lautet jetzt, vgl. Fig. 270,

$$f_1 a = f a \cos \frac{\alpha}{2} = C\varphi + MH \sin \alpha = C\left(\varphi + \varphi_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_0}\right).$$

Ist der Torsionswinkel gleich φ', so erhält man den Winkel α' und die Kraft f'; es ist dann

$$f' a \cos \frac{\alpha'}{2} = C\left(\varphi' + \varphi_0 \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha_0}\right);$$

hieraus folgt

$$\frac{f}{f'} = \frac{\varphi \sin \alpha_0 + \varphi_0 \sin \alpha}{\varphi' \sin \alpha_0 + \varphi_0 \sin \alpha'} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha'}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Dieses Verhältnis ergibt sich aus dem Experiment. Nach dem Coulombschen Gesetze muß

$$f:f' = sin^2 \frac{\alpha'}{2} : sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

sein. vgl. (7, a), S. 287. Setzt man beide Ausdrücke für das Verhältnis $f:f'$ einander gleich, so erhält man

$$sin \frac{\alpha}{2} \, tg \frac{\alpha}{2} (\varphi \sin \alpha_0 + \varphi_0 \sin \alpha) = sin \frac{\alpha'}{2} \, tg \frac{\alpha'}{2} (\varphi' \sin \alpha_0 + \varphi_0 \sin \alpha').$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß bei allen Tordierungen des Fadens

$$sin \frac{\alpha}{2} \, tg \frac{\alpha}{2} (\varphi \sin \alpha_0 + \varphi_0 \sin \alpha) = Const \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

sein muß, falls das Coulombsche Gesetz richtig ist. Die Versuche bestätigen innerhalb der unvermeidlichen Beobachtungsfehler die Konstanz des Ausdruckes (3), in dem, wie oben gesagt war, φ_0 und α_0 auf Grund eines Vorversuches bestimmt werden.

Den genauesten Beweis für das Coulombsche Gesetz hinsichtlich der Beziehung zwischen f und r hat Gauss geliefert; wir werden seine Methode weiter unten kennen lernen.

Der zweite Teil des Coulombschen Gesetzes, der von dem Zusammenhange zwischen der Kraft f und den Mengen m und m_1 des freien Magnetismus handelt, kann nicht experimentell geprüft werden. da wir keine Methode dafür besitzen, m oder m_1 in einem bestimmten, uns bekannten Verhältnisse zu variieren, wie solches für elektrische Ladungen wohl möglich ist (S. 288). Wir erhalten nämlich von der Existenz der Größe m erst durch ihre Wirkung Kunde und machen die Annahme, daß unter gleichen Bedingungen die Größe m proportional jener Wirkung ist; somit liegt bereits in der Definition der Größe m die Annahme, daß der zweite Teil des Coulombschen Gesetzes richtig ist. Eine gewisse indirekte Bestätigung kann man im folgenden erblicken. Nehmen wir an, es seien A, B, C, D usw. die Pole verschiedener Magnete. Es zeigt sich dann, daß das Verhältnis der Wirkungen der Pole A und B nicht davon abhängt, auf welchen Pol C, D usw. diese Wirkung ausgeübt wird.

Gestützt auf das Coulombsche Gesetz kann man eine große Zahl von verschiedenen Aufgaben, die sich auf die Wechselwirkung von Magneten beziehen, lösen. Die entsprechenden Lösungsmethoden müssen hierbei von den theoretischen oder rein praktischen Zielen abhängen. die man im Auge hat, sowie von dem Genauigkeitsgrade, den das Resultat besitzen soll. Zunächst muß man sich entscheiden, ob man es für nötig hält, in Betracht zu ziehen, welches die Verteilung des freien Magnetismus, in den zwei aufeinander einwirkenden Magneten ist, oder ob man es für möglich erachtet, sich beide freien Magnetismen

in den beiden Magnetpolen vereinigt zu denken. Im ersten Falle kann man den Betrachtungen die Formel (16), S. 438, zugrunde legen, nämlich die Formel für das Potential V eines Magneten in einem beliebigen äußeren Punkte, dessen Koordinaten ξ, η, ζ in der Größe r vorkommen. Ein einfaches, hierher gehöriges Beispiel haben wir bereits auf S. 467 betrachtet.

Wir gehen zu dem Falle über, wo man die Wirkung jedes der beiden Magnete als bloß von seinen Polen ausgehend ansieht. Beschränkt man sich auf angenäherte Lösungen, so ist es in einigen Fällen möglich, die Formel (13, c), S. 436, anzuwenden, welche die Feldintensität H eines Magneten von geringer Länge in Punkten angibt, die von ihm weit abstehen.

Für praktische Zwecke macht man die Annahme, daß die Achsen beider Magnete in ein und derselben Ebene, die fast immer die Horizontalebene ist, liegen. Ferner setzt man voraus, daß einer der Magnete, A, der ablenkende, unbeweglich gemacht sei, der andere dagegen, B, der abzulenkende, sich nur um eine Achse drehen kann, die durch seinen Mittelpunkt hindurchgeht und senkrecht zur erwähnten Ebene ist; in der Praxis ist diese Achse fast immer vertikal. Auf den Magnet B wirken vier Kräfte ein, die paarweise an seinen Polen angreifen und von den Polen des Magneten A ausgehen. Die Komponenten dieser Kräfte in einer zur Achse des Magneten B senkrechten Richtung liefern ein Kräftepaar, dessen Moment $\mathfrak{M}$ zu bestimmen ist. Bei Abwesenheit des Magneten A stellt sich die Achse des Magneten B in der Ebene des magnetischen Meridians ein. Durch Einwirkung von A wird die Achse von B um einen Winkel φ abgelenkt, der sich leicht bestimmen läßt, wenn das Moment $\mathfrak{M}$ des ablenkenden Kräftepaares gefunden ist.

Fig. 271.

Sehr allgemeine Formeln wurden von Lamont, von mir und von A. Schmidt (1907) abgeleitet. Es seien AB und A_1B_1 (Fig. 271) die Achsen von Magneten, an deren Polen die magnetischen Mengen $\pm m$ und $\pm m_1$ konzentriert sind; die Achsen bilden die Winkel θ und θ_1 mit der Richtung der Geraden, welche die Mittelpunkte der Magnete verbindet; e_1, e_2, e_3 und e_4 seien die Entfernungen der Pole voneinander; a und a_1 seien die halben Entfernungen der Pole; $M = 2am$ und $M_1 = 2a_1m_1$ die magnetischen Momente. Das Potential W der beiden Magnete aufeinander ist gleich

$$W = m m_1 \left\{ \frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_2} + \frac{1}{e_3} - \frac{1}{e_4} \right\}.$$

Wie ich gezeigt habe, läßt sich dieser Ausdruck auf folgende Form bringen:

$$W = -\frac{M M_1}{r^3} \left\{ k_0 + \frac{k_2}{r^2} + \frac{k_4}{r^4} + \cdots \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wo k_0, k_2, k_4 usw. Funktionen von a, a_1, θ und θ_1 sind. Die drei ersten Größen k_0, k_2, k_4 wurden berechnet; es ist

$$\left.\begin{aligned} k_0 &= 2 \cos\theta \cos\theta_1 - \sin\theta \sin\theta_1 \\ k_2 &= -\tfrac{3}{2}(a^2 + a_1^2)(4 \cos\theta \cos\theta_1 - \sin\theta \sin\theta_1) \\ &+ \tfrac{5}{2}(a_1^2 \cos^2\theta_1 + a^2 \cos^2\theta)(4 \cos\theta \cos\theta_1 - 3 \sin\theta \sin\theta_1) \end{aligned}\right\} \quad . \quad (4, a)$$

Die Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial \theta}$ und $\frac{\partial W}{\partial \theta_1}$ sind gleich den gesuchten Momenten der Kräftepaare, welche auf die Magnete einwirken.

Wenden wir uns der Untersuchung zweier spezieller Fälle zu: dieselben sind als Gaussssche Hauptlagen bekannt.

Erste Gaussssche Hauptlage. Der ablenkende Magnet NS (Fig. 272) liegt unbeweglich, senkrecht zum magnetischen Meridian. Auf der Verlängerung seiner Achse befindet sich der Mittelpunkt B des beweglichen Magneten ns (der Magnetnadel), welcher durch die Einwirkung von NS um den Winkel φ aus dem magnetischen Meridian herausgedreht wird. Die Gleichgewichtsbedingung für die Magnetnadel beruht in der Gleichheit des Moments für das Kräftepaar, welches die Nadel aus dem magnetischen Meridian ablenkt und des Moments $MH \sin\varphi$, vgl. (12), S. 434, desjenigen Kräftepaares, mit welchem der Erdmagnetismus die Nadel in den magnetischen Meridian zurück zu drehen sucht. Für diesen besonderen Fall habe ich die Gleichgewichtsbedingung abgeleitet, ohne die Formel (4) zu benutzen; sie hat folgende Gestalt:

$$\frac{2 M M_1}{r^3} \cos\varphi \left\{ 1 + \frac{p_2}{r^2} + \frac{p_4}{r^4} + \frac{p_6}{r^6} + \cdots \right\} = MH \sin\varphi \quad . \quad . \quad (5)$$

wo p_{2k} eine Funktion von a, a_1 und φ ist, deren Gestalt ich für ein beliebiges k berechnet habe. Die beiden ersten Glieder dieser Funktion lauten:

$$\left.\begin{aligned} p_2 &= 2 a_1^2 - 3 a^2 + 15 a^2 \sin^2\varphi \\ p_4 &= 3 a_1^4 - 15 a^2 a_1^2 (1 - 5 \sin^2\varphi) \\ &+ \tfrac{45}{8} a^4 (1 - 14 \sin^2\varphi + 21 \sin^4\varphi) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5, a)$$

Diese beiden Ausdrücke sind bereits von Lamont angegeben worden. man kann sie aus Formel (4) und (4, a) finden, wenn man $\theta_1 = 0$ und $\theta = 90^0 - \varphi$ setzt. Beschränkt man sich auf ein Ergänzungsglied. so erhält man

$$tg\,\varphi = \frac{2M_1}{Hr^3}\left\{1 + \frac{p_2}{r^2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Vernachlässigt man die Dimensionen der abzulenkenden Magnetnadel ($a = 0$), so erhält man

$$tg\,\varphi = \frac{2M_1}{Hr^3}\left\{1 + \frac{2a_1^2}{r^2}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6,a)$$

Läßt man schließlich auch noch das Glied $\frac{a_1^2}{r^2}$ fort, so ist

$$tg\,\varphi = \frac{2M_1}{Hr^3} \ldots\ldots\ldots \quad (6,b)$$

Die Formel (6, a) läßt sich leicht unmittelbar finden, wenn man annimmt, daß die Feldintensität f des Magneten NS in n und s die gleiche ist wie in B. Es ist dann

$$f = \frac{m_1}{(r-a_1)^2} - \frac{m_1}{(r+a_1)^2} = \frac{4a_1 m_1 r}{(r^2-a_1^2)^2}$$
$$= \frac{2M_1}{r^3}\left(1 - \frac{a_1^2}{r^2}\right)^{-2} = \frac{2M_1}{r^3}\left(1 + \frac{2a_1^2}{r^2}\right).$$

Die übrigen Glieder lassen wir fort. Damit die Nadel im Gleichgewicht ist, muß die Resultante der Intensitäten f und H die Richtung

Fig. 272.

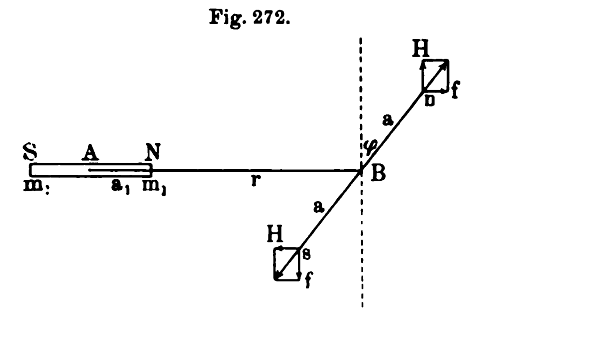
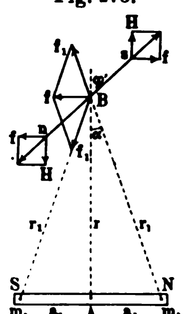


Fig. 273.



der Achse ns haben. Dies gibt $f = H\,tg\,\varphi$, und hieraus folgt dann Formel (6, a); man kann sie auch leicht aus Formel (58), S. 467, und die Formel (6, b) aus (13, c), S. 436, ableiten.

Zweite Gausssche Hauptlage. Der ablenkende Magnet NS (Fig. 273) liegt auch hier senkrecht zum magnetischen Meridian, doch befindet sich der Mittelpunkt B der Magnetnadel ns auf einer Geraden, welche zur Achse von SN senkrecht ist und durch dessen Mitte A hindurchgeht. Die allgemeinen Formeln (4) und (4, a) ergeben für diesen Fall, wenn man $\theta_1 = 90^0$ und $\theta = -\varphi'$ setzt, als Gleichgewichtsbedingung den Ausdruck

$$\frac{MM_1 \cos\varphi'}{r^3}\left\{1+\frac{q_2}{r^2}+\frac{q_4}{r^4}\right\} = HM \sin\varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

hierbei ist

$$\left.\begin{aligned} q_2 &= 6a^2 - \tfrac{3}{2}a_1^2 - \tfrac{45}{2}a^2 \sin^2\varphi' \\ q_4 &= \tfrac{15}{8}a_1^4 - \tfrac{15}{4}a_1^2 a^2(6 - 23\sin^2\varphi') \\ &+ 15a^4(1 - \tfrac{21}{2}\sin^2\varphi' + \tfrac{105}{8}\sin^4\varphi') \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (7,a)$$

Lamont gibt als Koeffizienten der beiden letzten eingeklammerten Glieder die Zahlen $-\frac{21}{4}$ und $-\frac{21}{8}$ anstatt $-\frac{21}{2}$ und $+\frac{105}{8}$ an, was einer Korrektur bedarf. Beschränkt man sich auf ein Ergänzungsglied, so erhält man

$$tg\,\varphi' = \frac{M_1}{Hr^3}\left\{1+\frac{q_2}{r^2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7,b)$$

Vernachlässigt man die Größe a, so erhält man

$$tg\,\varphi' = \frac{M_1}{Hr^3}\left\{1-\frac{3a_1^2}{2r^2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7,c)$$

Läßt man auch a_1 fort, so ist

$$tg\,\varphi' = \frac{M_1}{Hr^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7,d)$$

Die Formeln (6, b) und (7, d) geben

$$tg\,\varphi = 2\,tg\,\varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7,e)$$

Bei sehr kleinen Werten von φ und φ' ist der Ablenkungswinkel bei der ersten Gaussschen Hauptlage doppelt so groß als bei der zweiten. Die Formel (7, c) läßt sich leicht herleiten, wenn man annimmt, daß die Feldintensität f des Magneten NS in n und s die gleiche ist wie in B. Die Größe f setzt sich aus zwei gleichen Kräften f_1 zusammen, die, wie aus der Figur ersichtlich ist, längs NB und SB verlaufen, wobei $f = 2f_1 \sin\alpha$ ist und $\alpha = \angle ABN$; ferner ist $f_1 = m_1 : r_1^2$, $\sin\alpha = a_1 : r_1$, also

$$f = \frac{2m_1 a_1}{r_1^3} = \frac{M_1}{(r^2+a_1^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_1}{r^3}\left(1+\frac{a_1^2}{r_2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{M_1}{r^3}\left(1-\frac{3a_1^2}{2r^2}\right).$$

Wie oben lautet die Gleichgewichtsbedingung $f = H\,tg\,\varphi'$, was auf Formel (7, c) führt. Formel (7, d) erhält man leicht aus (13, c), S. 436.

Wir können nun zeigen, wie Gauss das Coulombsche Gesetz geprüft hat. Gauss nahm an, daß die Kraft f indirekt proportional der $n$ten Potenz des Abstandes r sei, wobei n eine unbekannte, jedoch ganze Zahl ist. Er untersuchte durch Rechnung die Ausdrücke für $tg\,\varphi$ und $tg\,\varphi'$ und erhielt hierbei

$$\left.\begin{aligned} tg\,\varphi &= \frac{nP}{r^{n+1}} + \frac{Q}{r^{n+3}} \\ tg\,\varphi' &= \frac{P}{r^{n+1}} + \frac{Q'}{r^{n+3}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

wo P, Q und Q' für die zwei gegebenen Magnete Zahlen sind, die nicht von r abhängen. Sind die Werte von r sehr groß, diejenigen für φ und φ' sehr klein, so erhält man

$$\varphi = n\varphi' \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8, a)$$

Gauss maß für zwei Magnete die, zu 15 verschiedenen Werten von r zugehörigen Winkel φ und φ', wobei r zwischen 1,1 m und 4 m variierte. Es ergab sich zunächst, daß für große Werte von r der Winkel φ sehr nahe gleich dem Doppelten von φ' ist; er fand z. B. für $r = 3{,}5$ m die Werte $\varphi = 6' 56{,}9''$ und $\varphi' = 3' 28{,}9''$. Hieraus folgt, daß $n = 2$ ist. Außerdem berechnete er nach der Methode der kleinsten Quadrate (Bd. I) die numerischen Koeffizienten in den Formeln (8), wobei er in den Nennern $n = 2$ setzte. Er fand

$$\begin{aligned} tg\,\varphi &= 0{,}086\,870\,r^{-3} - 0{,}002\,185\,r^{-5} \\ tg\,\varphi' &= 0{,}043\,435\,r^{-3} + 0{,}002\,449\,r^{-5}. \end{aligned}$$

Die nach diesen Formeln berechneten Werte der Winkel φ und φ' unterscheiden sich von den beobachteten nur um wenige Sekunden. Diese Untersuchungen haben die vollständigste und genaueste Bestätigung des Coulombschen Gesetzes geliefert.

Bei Berechnung der Wechselwirkung von Magneten haben wir deren Querdimensionen unberücksichtigt gelassen. Ich habe sowohl für den allgemeinen Fall, als auch für die beiden Gaussschen Hauptlagen Formeln angegeben, deren Hilfsglieder von den Querdimensionen der Magnete abhängen. Für zylinderförmige, hohle Magnete kann man die Werte dieser Glieder vollkommen genau finden.

Im Magnetfelde unterliegen den ponderomotorischen Wirkungen nicht nur permanente (natürliche oder Stahl-) Magnete, sondern auch Körper, die im Magnetfelde temporären Magnetismus annehmen, wie z. B. Eisenstücke. Die komplizierte Frage nach diesen Wirkungen ist von Kirchhoff (1884) untersucht worden. Die Wechselwirkungen von vielen beweglichen (beispielsweise schwimmenden) Magneten haben Lloyd, Weihrauch, A. M. Mayer, Wood u. a. untersucht.

§ 3. Wechselwirkung von Magneten und Strömen. In § 1 haben wir bewiesen, daß die Wirkung eines Magneten auf einen Strom ebenso groß ist wie die Wirkung eines Stromes auf einen Magneten; nur die Vorzeichen sind die entgegengesetzten. Das gleiche gilt natürlich von den wirkenden Kräften. Wir müssen daher diese beiden Fälle zusammenfassen und zu gleicher Zeit besprechen. Die Frage nach diesen

ponderomotorischen Kräften haben wir bereits zum Teil im dritten Kapitel, anfangend von § 7 (S. 537) berührt. Wir haben gesehen, daß die Wechselwirkung zwischen einem Magnetpole und einem geschlossenen Strome auf die Wechselwirkungen zwischen einem Magnetpole und „Stromelementen“ zurückgeführt werden kann, wobei man den Berechnungen das Gesetz von Biot und Savart zugrunde legen muß, das durch die Formel

$$f = \frac{mJds}{r^2} \sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

ausgedrückt ist, vgl. (48), S. 538. Hier bedeutet m die magnetische Menge im Pol, J die Stromstärke in elektromagnetischen Einheiten (S. 539), ds die Länge des Stromelements, r den Abstand zwischen dem Pole und dem Stromelemente, ferner ist $\angle\,\varphi = \angle\,(r, ds)$. Die Kraft f ist immer senkrecht zur Ebene, welche durch r und ds hindurchführt.

Ist f die Kraft, welche auf den Magnetpol einwirkt, so wird ihre Richtung durch die Richtung der Kraftlinien desjenigen geradlinigen Stromes bestimmt, den man erhält, wenn man sich ds nach beiden Seiten verlängert denkt. Diese Richtung wird durch die Ampèresche Regel oder durch die Bohrerregel (S. 490) bestimmt.

Repräsentiert jedoch f die Kraft, welche auf ein Stromelement einwirkt, so ist seine Richtung die entgegengesetzte und wird durch die Linkehandregel (S. 557) bestimmt, wobei die Kraftlinie mit r zusammenfällt. Durch Einführung der Intensität H' des Magnetfeldes an der Stelle, an der sich ds befindet, hatten wir

$$f = \mu H' J ds \sin\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9, a)$$

gefunden, vgl. (66), S. 557. Hier ist die Kraft f normal zur Fläche (H', ds); sie verläuft nach der Seite hin, welche durch die Linkehandregel bestimmt ist.

Die in den Formeln (9) und (9, a) enthaltenen Gesetze sind Differentialgesetze (S. 565), die sich auf einen unendlich kleinen Teil des Ganzen beziehen, dessen Wirkungen durch den Versuch festgestellt werden können. Wie alle Differentialgesetze, so können auch diese nicht durch das Experiment verifiziert werden, denn man kann nicht aus der Kette ein Stromelement aussondern und die Kräfte studieren, die auf dasselbe einwirken oder von demselben ausgehen. Prüfen kann man nur die Integralgesetze, die sich aus (9) oder (9, a) ergeben und sich auf den gesamten geschlossenen Stromkreis beziehen. Aus dem Umstande, daß das Experiment in allen Fällen die Rechnungsergebnisse bestätigt, folgt noch nicht, daß das zugrunde gelegte Differentialgesetz richtig ist. Wie wir gesehen haben, kann man zu dem Ausdruck für ein solches Gesetz, beispielsweise auf der rechten Seite von (9) oder (9, a), beliebige Glieder hinzufügen, die der Bedingung genügen, daß sie bei Integration

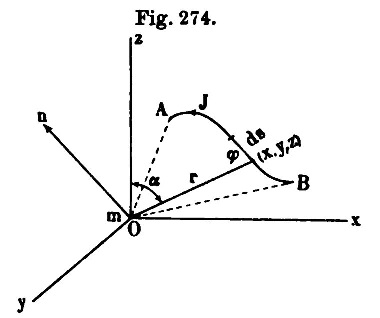
längs einer geschlossenen Umgrenzung eine Integralwirkung ergeben, die gleich Null ist.

Formel (9) zeigt uns, daß die Wechselwirkung zwischen einem gegebenen Magnetpole und einem Strome von den magnetischen Eigenschaften des umgebenden Mediums unabhängig ist, wenn dieses Medium homogen und unbegrenzt ist. Daß dem so sein muß, läßt sich leicht einsehen, denn wir hatten gesehen (S. 537), daß die Feldintensität eines Stromes unter denselben Bedingungen unabhängig vom umgebenden Medium ist. Mit dem gesagten steht die Formel (9, a) nicht im Widerspruch, wenngleich in ihr die magnetische Permeabilität μ des umgebenden Mediums vorkommt, denn es ist die Größe H' selbst indirekt proportional μ, falls ein Magnetpol die Feldquelle bildet.

Denken wir uns einen geschlossenen Strom J und einen Magnetpol m und nehmen wir an, es sei F die Kraft, welche auf den Pol m einwirkt. Ist V das Potential des Stromes in dem Punkte, in welchem sich m befindet, so ist

$$F = -m\frac{\partial V}{\partial n} \quad . \quad . \quad (10)$$

Fig. 274.



wo n die Normale im Punkte m zur Fläche $V = Const$ ist und n nach der Seite hin verläuft, nach welcher V abnimmt. Setzt man für V seinen Wert aus Formel (60), S. 549 ein, und bezeichnet mit F_x, F_y und F_z die Komponenten der Kraft F, so erhält man

$$F_x = -mJ\frac{\partial \Omega}{\partial x}; \quad F_y = -mJ\frac{\partial \Omega}{\partial y}; \quad F_z = -mJ\frac{\partial \Omega}{\partial z} \qquad (10, a)$$

Geht man direkt von Formel (9) aus, so kann man andere Formeln für die Kraft F und deren Komponenten ableiten. Es sei AB (Fig. 274) ein Teil eines geschlossenen Stromes J; einer der Endpunkte habe die Koordinaten x, y, z, der andere die Koordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Den Pol m bringt man nach O, in den Anfangspunkt der Koordinaten. Die Kraft, mit welcher Jds auf m einwirkt, bezeichnen wir jetzt mit dF, ihre Komponenten mit dF_x, dF_y, dF_z; sie hat die Richtung von n, d. h. sie ist senkrecht zur Fläche (r, ds) und verläuft nach der Seite hin, welche durch die Bohrerregel bestimmt wird. Formel (9) ergibt jetzt

$$dF_x = \frac{mJds}{r^2} \sin\varphi \cos(n, x) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (10, b)$$

Es ist aber $r\,ds\,\sin\varphi\cos(n,x)$ die Projektion auf die Fläche yOz des Parallelogramms, das über den Geraden r und ds errichtet ist; sie ist gleich $y\,dz - z\,dy$. Setzt man diesen Ausdruck in Formel (10, b) ein, integriert über die ganze geschlossene Stromumgrenzung hin und schreibt die analogen Ausdrücke für dF_y und dF_z hin, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} F_x &= mJ\int\frac{y\,dz - z\,dy}{r^3} \\ F_y &= mJ\int\frac{z\,dx - x\,dz}{r^3} \\ F_z &= mJ\int\frac{x\,dy - y\,dx}{r^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Ferner erhält man aus den Ausdrücken

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad \ldots\ldots \quad (11,\text{a})$$

$$\cos(F,x) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(F,y) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(F,z) = \frac{F_z}{F} \quad (11,\text{b})$$

die Größe und Richtung der Kraft F. Wir bemerken, daß man (11) auch in folgender Form schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned} F_x = mJ\int\frac{z^2}{r^3}\,d\left(\frac{y}{z}\right); \quad F_y = mJ\int\frac{x^2}{r^3}\,d\left(\frac{z}{x}\right); \\ F_z = mJ\int\frac{y^2}{r^3}\,d\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}\right| \quad . \quad (11,\text{c})$$

Befindet sich der Pol m nicht in O, sondern im Punkte (x_1, y_1, z_1), so müssen die Größen x, y und z in Formel (11) durch die Größen $(x - x_1)$, $(y - y_1)$ und $(z - z_1)$ ersetzt werden. Wir können dann schreiben

$$\left.\begin{aligned} F_x &= mJ\int\frac{(y-y_1)\,dz - (z-z_1)\,dy}{r^3} \\ &= mJ\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_1}\,dz - mJ\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_1}\,dy \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (11,\text{d})$$

und für F_y und F_z analoge Ausdrücke.

Wenden wir uns jetzt der überaus wichtigen Frage zu, wo die Quelle für jene Arbeit zu suchen ist, die bei der Bewegung eines Magnetpoles im Felde eines elektrischen Stromes geleistet wird. Wir wollen beweisen, daß diese Arbeit nicht etwa auf Kosten einer besonderen potentiellen Energie des **Magneten** und Stromes geleistet wird und daß sich daher der Fall eines **Magneten** und eines Stromes in dieser Beziehung sehr wesentlich von dem Falle zweier Magnete unterscheidet. Zwei beispielsweise gleichnamige Magnetpole

m und m' besitzen zusammengenommen einen bestimmten Vorrat an potentieller Energie; entfernen sich diese Pole voneinander, so wird die Arbeit der Repulsivkräfte auf Kosten eines Energievorrates geleistet, der sich bei Entfernung der Pole voneinander in Wirklichkeit vermindert. Es ist unmöglich, daß, infolge der Wechselwirkung von permanenten Magnetpolen, der eine von ihnen sich längs einer geschlossenen Linie bewegt, d. h. zu seinem Ausgangsorte zurückkehrt, wobei auch der Vorrat an potentieller Energie seinen ursprünglichen Wert annimmt. Ganz anders verhält es sich, wenn man einen Magnetpol m und einen Strom J vor sich hat. Die Kraftlinien des Stromes sind geschlossene Kurven und man kann sich denken, daß ein Magnetpol unter Wirkung des Magnetfeldes des Stromes sich ununterbrochen längs einer solchen geschlossenen Kraftlinie bewegt. Wir werden später sehen, auf welche Weise eine solche ununterbrochene Bewegung eines Magneten um einen Strom herum (oder eines Stromes um einen Magneten herum) experimentell verwirklicht werden kann. Bei jedem vollen Umlaufe wird, wie man aus Formel (42), S. 532, sieht, die Arbeit $R = 4\pi Jm$ geleistet. Nach jedem vollen Umlaufe nimmt aber das ganze System seine ursprüngliche Lage an, d. h. „die potentielle Energie des Stromes und Magneten", wenn eine solche existiert, nimmt ihren früheren Wert an. Es ist klar, daß die Arbeit R nicht auf Kosten einer derartigen Energie hat geleistet werden können. Wie wir sehen werden, wird sie auf Kosten jenes Energievorrates geleistet, der die Energiequelle des elektrischen Stromes bildet. Dieser Vorrat wird schneller verbraucht, wenn trotz der Polbewegung die Stromstärke J konstant bleibt. Bleibt jedoch aus irgend einem Grunde der Energieverbrauch konstant, so ruft die Polbewegung eine Verminderung der Stromstärke J hervor, d. h. es wird die Arbeit auf Kosten der Energie des Stromes selbst verbraucht, in dessen Leiter sich die Wärmeausscheidung vermindert. Hierbei betreten wir bereits das Gebiet der Induktionserscheinungen bei Strömen, das wir erst im dritten Abschnitte dieses Bandes (in der zweiten Hälfte desselben) betrachten werden. Es läßt sich streng beweisen, daß die Energie des Magnetfeldes und Stromes gleich der Summe der Energie des einzeln genommenen Magneten und Stromes ist, daß es also keinerlei besondere potentielle Energie zwischen dem Systeme Magnet—Strom gibt. Der Beweis hierfür stützt sich auf eine Formel, die wir später kennen lernen werden; sie ist der Formel (53, c), S. 107, analog.

Wenden wir uns den verschiedenen Sonderfällen von ponderomotorischen Wirkungen zwischen Strömen und Magneten zu.

Die Kraft F, mit welcher ein sehr langer geradliniger Strom J auf einen Magnetpol m einwirkt, ergibt sich aus Formel (4), S. 491, oder (48, a), S. 539; sie ist gleich

$$F = \frac{2mJ}{r} \quad \text{. . . . .} \quad (12)$$

wo r der Abstand zwischen m und der Stromlinie ist; die Stromstärke J ist hierbei in el.-mg.-Einheiten ausgedrückt. Wie wir gesehen haben (S. 531), kann ein Magnet unter Einwirkung eines Stromes keinerlei Drehung um eine Achse ausführen, die mit der Stromlinie zusammenfällt. Fällt jedoch die Drehungsachse des Magneten nicht mit der Stromlinie zusammen, so erfährt der Magnet seitens des Stromes eine Ablenkung. Unter der Wirkung des Feldes des Erdmagnetismus und der Kräfte, welche von seiten des Stromes auf seine Pole einwirken, nimmt der Magnet eine gewisse bestimmte Gleichgewichtslage an. Verschiedene Fälle einer solchen Wirkung eines geradlinigen Stromes sind von Decharme, Garnault und Raveau untersucht worden.

Man kann leicht durch Rechnung finden, daß ein Strom, dessen Leiter an den Schenkeln eines Winkels 2φ entlang verläuft, auf einen Pol m, der sich auf der Halbierungsgeraden dieses Winkels befindet und zwar außerhalb des Winkels selbst in der Entfernung r von seinem Scheitelpunkte, mit einer Kraft F einwirkt, die gleich

$$F = \frac{2mJ}{r} tg \frac{\varphi}{2} \quad (12, a)$$

ist. Für $\varphi = 90^0$ erhält man hieraus die Formel (12); Biot und Savart haben auf experimentellem Wege die Richtigkeit der Formel (12, a) nachgewiesen.

Fig. 275.

Wir gehen zur Wirkung eines Kreisstromes auf eine Magnetnadel über. Nehmen wir an, der Strom befinde sich in der Ebene des magnetischen Meridians und es sei AB (Fig. 275) seine Projektion auf eine horizontale Ebene; R sei sein Radius. Auf der Achse befindet sich in C der Mittelpunkt der Magnetnadel NS, deren Achse im magnetischen Meridiane PQ liegt, wenn kein Strom vorhanden ist. Durch die Wirkung des Stromes wird die Nadel um einen gewissen Winkel φ abgelenkt, der zu bestimmen ist. Nehmen wir zunächst an, die Magnetnadel sei so klein, daß die Feldintensitäten des Stromes in N und S gleich der Feldintensität in C gesetzt werden können, für welche die Formel (49), S. 540, gilt. Die Kräfte $\pm F$, welche auf die Pole einwirken, sind parallel zu OC und sind gleich

$$F = \frac{2\pi m R^2 J}{l^3} \quad \text{. . . . .} \quad (12, b)$$

wo $l = AC$ ist. Die Resultante der Kräfte F und Hm, wo H die Horizontalkomponente der Intensität des Erdmagnetismus ist, muß mit der Magnetachse zusammenfallen, woraus $tg\,\varphi = F:Hm$ folgt; setzt man den Wert für F ein, so erhält man

$$tg\,\varphi = \frac{2\pi R^2 J}{Hl^3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$J = \frac{Hl^3}{2\pi R^2}\, tg\,\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13,a)$$

Befindet sich der Mittelpunkt C des Magneten in O, so ist $l = R$ und die Ablenkung φ_0:

$$tg\,\varphi_0 = \frac{2\pi J}{RH} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13,b)$$

$$J = \frac{RH}{2\pi}\, tg\,\varphi_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13,c)$$

Darf man die Dimensionen der Magnetnadel nicht außer acht lassen, so hat man die Feldintensität des Stromes in den Punkten N und S zu berechnen, die außerhalb der Achse OC des Stromes liegen. Wir wollen bloß die Resultate anführen, da die Berechnungen selbst recht kompliziert sind. Es sei $CN = CS = a$ die halbe Länge der Magnetnadel und $OC = b$. Dann erhält man anstatt der Formel (13) die folgende

$$\left.\begin{aligned} tg\,\varphi &= \frac{2\pi R^2 J}{Hl^3} K \\ K &= 1 - \frac{3a^2(4b^2 - R^2)}{4l^4}(1 - 5\sin^2\varphi) \\ &+ \frac{45a^4(8b^4 - 12b^2R^2 + R^4)}{64l^8}(1 - 14\sin^2\varphi + 21\sin^4\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (13,d)$$

Vernachlässigt man das dritte Glied im Ausdrucke für K, so erhält man an Stelle von Formel (13, a)

$$J = \frac{Hl^3}{2\pi R^2}\, tg\,\varphi \left\{1 + \frac{3a^2(4b^2 - R^2)}{4l^2}(1 - 5\sin^2\varphi)\right\} \quad (13,e)$$

Befindet sich der Mittelpunkt C der Nadel in O ($b = 0$, $l = R$), so erhält man anstatt (13, c)

$$J = \frac{RH}{2\pi}\, tg\,\varphi \left\{1 - \frac{3a^2}{4R^2}(1 - 5\sin^2\varphi)\right\} \quad \ldots \quad (13,f)$$

Das erste Hilfsglied in (13, d) und in (13, e) verschwindet, wenn man

$$b = \frac{R}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13,g)$$

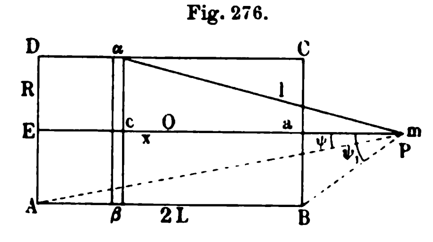
setzt. Unter dieser Bedingung kann man die Formeln (13) bis (13, c) benutzen, wobei dann der Fehler durch das dritte Glied im Ausdrucke

(13, d) für die Größe K bestimmt wird; für letztere erhält man

$$K = 1 - \frac{54}{125}\left(\frac{a}{R}\right)^4 \{1 - 14 \sin^2\varphi + 21 \sin^4\varphi\} \; . \quad . \quad (13,h)$$

Wir gehen zur Betrachtung der ponderomotorischen Wirkung einer Rolle auf einen Magnetpol m über. Wir nehmen an, daß die Rolle zylinderförmig ist und aus einer einzigen Lage von isoliertem Draht besteht, der auf eine Zylinderfläche aufgewickelt ist. Es sei $ABCD$ (Fig. 276) der Längsschnitt der Rolle, so daß die Drahtwindungen fast senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehen. Es sei $2L$ die Länge, R der Radius der Rolle, J die Stromstärke, N die Gesamtzahl aller Drahtwindungen, $n = N : 2L$ die Anzahl der Drahtwindungen pro Längeneinheit der Rolle. Wir wollen die Kraft F berechnen, welche auf einen Magnetpol m wirkt, der sich in P auf der Rollenachse im Abstande a vom Mittelpunkte O der Rolle befindet. Die Elemente des Stromes bilden, wie gesagt, einen sehr kleinen Winkel mit einer zur Rollenachse senkrechten Ebene; wir wollen diesen Winkel gleich Null setzen, d. h. wir wollen annehmen, die Rolle bestehe aus N kreisförmigen Windungen. Die Wirkung jeder der Windungen wird durch die Größe (12, b) bestimmt. Die Summierung von N solchen Größen führt zu zusammengesetzten und unbequemen Ausdrücken. Wir ersetzen daher die Summation durch Integration, indem wir uns den ganzen Strom NJ längs der ganzen Seitenlinie $2L$ des Zylinders gleichmäßig verteilt denken, so daß auf die Längeneinheit dieser Seitenlinie ein Strom $NJ : 2L = nJ$ kommt. In der Entfernung $Oc = x$ vom Mittelpunkte O trennen wir von der Rolle einen Teil $\alpha\beta$ ab, dessen Breite dx ist; er repräsentiert einen Kreisstrom vom Radius R und der Stärke $nJdx$, der in P mit einer Kraft F wirkt, die nach Formel (12, b) gleich $2\pi m R^2 nJdx : l^3$ ist, wo $l^2 = \overline{P\alpha}^2 = R^2 + (a + x)^2$ ist. Für die gesamte Kraft F erhält man

Fig. 276.



$$F = 2\pi R^2 nJm \int_{-L}^{+L} \frac{dx}{\{R^2 + (a + x)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2\pi nJm \left\{\frac{a + L}{\sqrt{R^2 + (a + L)^2}} - \frac{a - L}{\sqrt{R^2 + (a - L)^2}}\right\} \; . \quad . \quad (14)$$

Wir bezeichnen mit $\psi = \angle EPA$ und $\psi_1 = \angle EPB$ die Winkel, unter welchen von P aus die Radien der beiden Grundflächen er-

scheinen. Dann ist

$$F = 2\pi n J m (\cos\psi - \cos\psi_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14, a)$$

Befindet sich der Pol m im Mittelpunkte der Rolle ($a = 0$), so ist

$$F_0 = 4\pi n J m \frac{L}{\sqrt{R^2 + L^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14, b)$$

Ist die Rolle von sehr bedeutender Länge, d. h. ist L sehr groß im Vergleiche zu R, so erhält man

$$F_0 = 4\pi n J m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14, c)$$

Das gleiche Resultat erhält man auch für F, wenn R sehr klein im Vergleiche zu $L - a$ ist. Dies bedeutet, daß in einer sehr langen Rolle in einem gewissen Abstande zu beiden Seiten von ihrer Mitte die Kraft F fast konstant ist. Man findet, daß bei $L = 20\,R$ die Kraft F sich um $0{,}01\,F_0$ auf $^7/_8$ der ganzen Rollenlänge ändert und um $0{,}001\,F_0$ auf $^2/_3$ der Länge. In alle unsere Formeln kann man die Anzahl $N = 2nL$ aller Windungen, sowie die Länge $D = 2\pi R N = 4\pi n R L$ des ganzen Drahtes einführen. Befindet sich in P der Mittelpunkt einer so kleinen Magnetnadel, daß man die auf ihre Pole wirkenden Kräfte gleich F setzen kann, und ist die Achse der Rolle senkrecht zur Ebene des magnetischen Meridians, so wird die Nadelachse aus dieser Ebene um einen Winkel φ abgelenkt, der durch die Gleichung

$$tg\,\varphi = \frac{F}{Hm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

bestimmt ist; hier hebt sich der Faktor m stets fort, da er in F enthalten ist. Von einer Rolle, die nur eine Drahtlage besitzt, kann man zu einer solchen übergehen, die aus einer Reihe von Drahtlagen besteht; dieselben erfüllen den Raum innerhalb der Oberflächen zweier konaxialer Zylinder mit den Radien R_1 und R_2. Die Anzahl der auf die Längeneinheit kommenden Drahtlagen ist offenbar gleich n, es ist also die Gesamtzahl der Drahtlagen gleich $N_1 = n(R_2 - R_1)$. Ersetzt man wiederum die Summierung durch Integration, so hat man in Formel (14) dF anstatt F und $nJdR$ anstatt J zu schreiben und den ganzen Ausdruck von $R = R_1$ bis $R = R_2$ zu integrieren. Man erhält dann

$$F = 2\pi n^2 J m \left\{ (a + L)\, lg \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + (a+L)^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + (a+L)^2}} - (a - L)\, lg \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + (a-L)^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + (a-L)^2}} \right\} \quad . \quad (15, a)$$

Setzt man $a = 0$, so erhält man für die Kraft F_0 im Mittelpunkte der Rolle:

$$F_0 = 4\pi n^2 J L m \lg \frac{R_2 + \sqrt{R_2^2 + L^2}}{R_1 + \sqrt{R_1^2 + L^2}} \quad . \quad . \quad . \qquad (15,b)$$

Man kann die Formeln verändern, indem man die Gesamtzahl der Drahtwindungen einführt, d. h. die Größe

$$N_2 = NN_1 = 2n^2 L(R_2 - R_1).$$

Wir hatten die Annahme gemacht, es befinde sich der Magnetpol auf der Achse der Rolle. Diesen Fall, wo sich der Pol auf dieser Achse befindet, haben Maxwell, Hicks, James, Stuart, Minchin, Nagaoka u. a. studiert. Wir wollen uns auf den Hinweis beschränken, daß innerhalb einer sehr langen Rolle die Kraft F in allen Punkten, die genügend weit von den Enden abstehen, den gleichen Wert hat, d. h. nicht nur in den Punkten, die auf der Achse der Rolle liegen, wovon bereits vorher die Rede war, sondern auch außerhalb derselben in einem beliebigen Querschnitte. Eine ausführliche Behandlung aller hierher gehörigen Fragen findet man in dem Werke Mascart et Joubert: „Leçons sur l'Electricité et le Magnetisme", Vol. II, p. 101—118, 1886.

Die Formeln (14) und (15,a) ermöglichen eine Untersuchung des Einflusses der Rolle auf einen Magneten, dessen Achse längs der Rollenachse gelegen ist. Sind die nächstgelegenen Enden der Rolle und des Magneten ungleichnamig, so wird der Magnet in die Rolle hineingezogen und zwar mit einer Kraft, die man mit Hilfe der angegebenen Formeln leicht berechnen kann, wenn man von der magnetisierenden Wirkung der Rolle absieht. Die Gleichgewichtslage des Magneten wird erreicht, wenn sein Mittelpunkt mit demjenigen der Rolle zusammenfällt. Ganz andere Formeln gelten für die Kraft, mit welcher die Rolle weiches Eisen in ihr Inneres hineinzieht, da dieses von der Rolle magnetisiert wird, wobei der Magnetisierungsgrad von der relativen Lage der Rolle und des Eisens abhängt. Wir weisen in bezug auf diese Frage bloß auf die entsprechenden Arbeiten von Hankel, Dub, Waltenhofen, St. Loup und Cazin hin.

Die Rolle kann in der Weise auf einen Zylinder aufgewickelt werden, daß ihre Dicke in verschiedenen Querschnitten nicht die gleiche ist, so daß also ihre äußere Fläche keine Zylinderfläche darstellt. Auch die Innenfläche der Rolle muß nicht zylindrisch sein; der Draht kann auf die Oberfläche eines rechteckigen Parallelepipedons, einer Kugel, eines Ellipsoids gewickelt werden. Viele Forscher haben die Wirkungen berechnet, die derartige Rollen auf einen Magnetpol ausüben. Die Resultate dieser Berechnungen haben indes gegenwärtig kein großes praktisches Interesse mehr und wir beschränken uns deshalb darauf, in der Literaturübersicht die Arbeiten einiger dieser Forscher namhaft zu machen; zu ihnen gehören C. Neumann, Riecke, Wallentin,

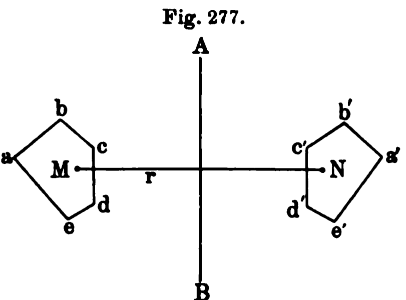
Minchin u. a. Nur eine Formel wollen wir hier angeben. Ein Strom J, der längs dem Umfange eines regelmäßigen n-Ecks dahinfließt, dessen Seite a ist, wirkt auf einen Pol m, der sich im Zentrum jenes n-Ecks befindet, mit einer Kraft F ein, die gleich

$$F = \frac{4nJm}{a} \sin\frac{\pi}{n} \, tg\frac{\pi}{n} \quad \text{. . . . . .} \quad (15,c)$$

ist. Setzt man $n = \infty$ und $na = 2\pi R$, so erhält man einen Ausdruck, der für $l = R$ identisch mit (12, b) ist.

Von besonderem Interesse ist die Wirkung eines Stromes J, der an einem Drahte entlang fließt, welcher auf einen Ring von durchaus willkürlichem Querschnitt aufgewickelt ist. Man erhält einen solchen Ring durch Drehung einer beliebigen ebenen Figur $abcde$ (Fig. 277) um irgend eine Achse AB. Eine durch die Achse AB hindurchgehende Ebene schneidet den Ring in den beiden Figuren $abcde$ und $a'b'c'd'e'$. Die Gesamtzahl der Drahtwindungen sei N; wir wollen sie durch N geschlossene Ströme ersetzen, welche die Umgrenzungen der Meridionalschnitte umgeben. Zu bestimmen sei die Kraft F, die auf den Pol m einwirkt; letzterer befinde sich im inneren Punkte M, dessen Abstand von der Achse AB wir mit r bezeichnen. Beachtet man die Symmetrie in der Verteilung der Ströme rings um die Achse AB und den Grundsatz, nach welchem die Kraftlinien von Strömen geschlossene Kurven sind, welche die Stromlinie umgeben, so sieht man, daß die Kraftlinie, welche durch M hindurchgeht, nichts anderes sein kann als ein Kreis vom Radius r. Diese Linie umgibt jeden der geschlossenen Ströme, es muß daher die Arbeit, welche von den magnetischen Kräften bei Bewegung des Poles m längs der ganzen Kraftlinie geleistet wird, d. h. die Größe $2\pi rF$, gleich $4\pi NJm$ sein, wie man dies aus der Formel (42, d), S. 532, ersieht. Hieraus erhält man

Fig. 277.



$$F = \frac{2NJm}{r} \quad \text{. . . . .} \quad (16)$$

Da die Kraftlinien einerseits die Oberflächen der ringförmigen Wickelung nirgends schneiden und andererseits jede Kraftlinie den Strom umgeben muß, also auch durch die Ebene hindurchgehen muß, längs deren Umgrenzung dieser Strom dahinfließt, so ist klar, daß eine geschlossene ringförmige Rolle im äußeren Raume keinerlei Magnetfeld hervorruft. Im Innern des Ringes sind die Kraftlinien Kreise, welche die oben angegebene Lage haben: die Kraft F im

Innern des Ringes ist indirekt proportional dem Abstande von der Ringachse AB. Sie hängt weder von der Form, noch auch von den Dimensionen des Ringquerschnittes ab, sondern bloß von der Stromstärke J und der Anzahl N der Drahtwindungen. Formel (16) behält auch für den Fall ihre Geltung, daß die Ringwickelung aus einer beliebigen Anzahl von Lagen besteht.

Auf S. 550 haben wir das elektrodynamische Solenoid und sein Magnetfeld kennen gelernt und hierbei gesehen, daß dieses Feld identisch ist mit dem Felde eines magnetischen Solenoids, dessen Pole an den Enden des Solenoids liegen und die magnetische Menge $\pm m = J_s \sigma = nJ\sigma$ enthalten, wo n die Anzahl der Kreisströme J ist, welche auf die Längeneinheit der Solenoidachse aufgereiht sind; $J_s = nJ$ ist die Kraft des Solenoids und σ die Fläche, um welche jeder der Ströme herumfließt. Der Kürze halber wollen wir das elektrodynamische Solenoid einfach als „Solenoid" bezeichnen. Praktisch erhält man ein solches Solenoid, wenn man einen Strom durch die Wickelung einer Rolle von nicht zu geringer Länge hindurchsendet. Der Südpol eines solchen Solenoids befindet sich an dem Ende, an welchem die Richtung des Stromes, der um das Solenoid herumfließt, identisch erscheint mit der Richtung der Uhrzeigerbewegung, vorausgesetzt, daß man von außen her auf das Ende des Solenoids blickt. Die ponderomotorische Wirkung eines Solenoids auf einen beweglichen Magneten ist gleich der Wirkung, welche auf diesen Magneten ein anderer Magnet ausübt, dessen Pole die oben angegebene Lage und Intensität haben.

Den besonderen Fall der sogenannten unipolaren Wirkung des Feldes eines elektrischen Stromes auf einen Magneten werden wir weiter unten ins Auge fassen.

Wir gehen jetzt zu einigen Fällen über, bei denen es sich um die Wirkung des Feldes von Magneten auf bewegliche elektrische Ströme handelt. Wie wir gesehen haben, wirkt auf ein Stromelement Jds, das sich in einem Felde von der Intensität H' befindet, eine Kraft ein, deren Größe durch Formel (9, a), deren Richtung durch die Linkehandregel bestimmt wird (S. 557). Aus dieser Regel geht hervor, daß sich ein Strom, der vertikal nach unten fließt und sich unter Einwirkung des Feldes des Erdmagnetismus befindet, nach Osten zu bewegen suchen muß, ein Strom aber, der nach oben fließt, nach Westen. Aus dem zu Anfang dieses Paragraphen Gesagten folgt, daß man, falls man in den Formeln (11) bis (11, d) auf der rechten Seite das Vorzeichen wechselt, die Komponenten der Kraft F erhält, mit welcher der Pol m_r dieses Magneten auf einen unveränderlichen Leiter AB einwirkt, der den Strom J führt. Es ist z. B.

$$F_x = -mJ\int \frac{y\,dz - z\,dy}{r^3} = mJ\int \frac{z^2}{r^3}\, d\left(\frac{y}{z}\right) \quad . \quad . \quad (17)$$

Aus dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung folgt, daß ein bewegliches Solenoid im Magnetfelde denselben Kräften unterliegt, wie ein ihm äquivalenter Magnet.

Wenden wir uns der Herleitung eines allgemeinen Ausdruckes für die ponderomotorische Wirkung des Feldes auf einen geschlossenen Strom zu. Für die potentielle Energie W eines geschlossenen Stromes J, der in ein Magnetfeld gebracht ist, hatten wir die Formel (64, b), S. 555, gefunden:

$$W = -JN \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

wo N die Zahl der Induktionslinien ist, welche durch die von der Stromlinie umgrenzte Fläche von der Südseite zur Nordseite hin gehen. Ändert sich irgend ein Parameter p, der die Lage des Stromes bestimmt, unter der Einwirkung des Feldes um den Betrag dp, und wird hierbei die Arbeit Pdp geleistet, so ist $Pdp = -dW$; hieraus folgt

$$P = J\frac{dN}{dp} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Die Arbeit Pdp kann nur eine positive sein; hieraus folgt, daß die vom Felde bewirkte Bewegung des Stromes von einer Zunahme der Induktionslinienzahl N begleitet sein wird. Stabiles Gleichgewicht tritt ein, wenn die Zahl N ihren größtmöglichen Wert annimmt. Es ist $P = 0$ auch für den Fall, daß N ein Minimum ist; wie man leicht einsieht, entspricht dieser Fall dem labilen Gleichgewicht des Leiters. Denkt man sich in (19) die Größe p als geradlinige Koordinate, so sieht man ein, daß eine fortschreitende Bewegung eines geschlossenen Stromes nicht durch ein homogenes Feld bewirkt werden kann. Im inhomogenen Felde sucht ein geschlossener Strom sich nach der Seite hin zu bewegen, nach welcher hin die Feldintensität zunimmt. Kann sich der Strom bloß um eine feste Achse A drehen, und setzt man in Formel (19) die Größe p gleich dem Winkel α, der die Lage des Leiters bestimmt, so ist P das Moment $\mathfrak{M}$ des Kräftepaares, welches den Leiter um die Achse A dreht, so daß

$$\mathfrak{M} = J\frac{dN}{d\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19, a)$$

ist. Ist die Achse A den Kraftlinien eines homogenen Feldes parallel, so ist offenbar $\mathfrak{M} = 0$. Nehmen wir an, die Achse A sei senkrecht zu den Kraftlinien und es sei ferner $\alpha = 0$, falls die Projektion der geschlossenen Stromlinie auf die zu den Kraftlinien senkrechte Ebene ihren Maximalwert S hat. Verläuft der Strom in einer Ebene, so ist S die Fläche, welche vom Strome umflossen wird. Wie man leicht einsieht, entsprechen die Werte $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi$ den Gleichgewichts-

lagen. Nehmen wir an, es trete für $\alpha = 0$ stabiles Gleichgewicht ein. Für einen beliebigen Wert von α ist $N = BS\cos\alpha$, wo B die Induktion bedeutet. Dann gibt Formel (19, a) das Moment des Kräftepaares

$$\mathfrak{M} = -JB\sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19,\text{b})$$

Bilden die Kraftlinien mit der Drehachse den Winkel $90 - \beta$, so ist

$$\mathfrak{M} = -JB\cos\beta\sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19,\text{c})$$

Das Minuszeichen weist darauf hin, daß das Kräftepaar den Winkel α zu verkleinern sucht. Nehmen wir an, der Strom könne sich um eine vertikale Achse drehen, er befinde sich im Felde des Erdmagnetismus und die Stromlinie sei eben. In diesem Falle ist

$$\mathfrak{M} = -JH\sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19,\text{d})$$

wo H die Horizontalkomponente der Intensität des Erdmagnetismus ist. Ein Solenoid, dessen Achse horizontal ist und das sich um eine durch seinen Mittelpunkt gehende vertikale Achse drehen kann, stellt sich mit seiner Achse im magnetischen Meridian ein. Ist ein Teil der Leiter beweglich oder kann er **Deformationen** erleiden, so entspricht die Lage des **stabilen** Gleichgewichts dem größtmöglichen, unter den gegebenen Bedingungen erreichbaren Flächeninhalte S. Denken wir uns einen geschlossenen ebenen Strom J (Fig. 278) innerhalb eines homogenen Feldes, dessen Kraftlinien senkrecht zur Zeichenebene sind und vom Beschauer fort gerichtet sind; die Stromrichtung ist in der Figur angegeben. Der Leiter selbst wird sich im Gleichgewicht befinden, es werden aber hierbei an allen seinen Elementen Kräfte angreifen (s. die Pfeile), welche die Stromlinie auszurecken, also die Fläche S zu vergrößern suchen.

Fig. 278.

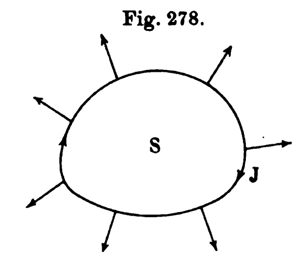
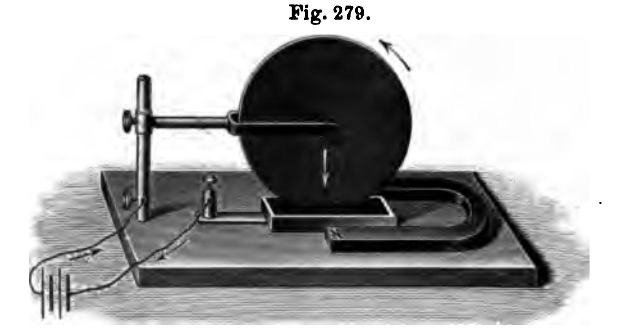


Fig. 279.



Eine interessante ponderomotorische Wirkung eines Magneten auf einen Strom sieht man beim **Barlowschen Rade** (Fig. 279). Ein um

eine horizontale Achse drehbares Rad taucht mit seinem unteren Rande oder mit seinen Zähnen in eine Quecksilberwanne, die sich zwischen den Polen eines hufeisenförmigen Magneten befindet. Der Strom wird durch die Radachse zum Quecksilber geleitet und fließt den vertikalen Radius des Rades entlang. Durch die Wirkung des Magneten erhält dieser Radius eine Bewegung senkrecht zu den Kraftlinien (zwischen den Magnetpolen) und zu sich selbst; das Rad beginnt sich infolgedessen in der Pfeilrichtung zu drehen. Wechselt man die Stromrichtung, so erfolgt die Drehung in entgegengesetzter Richtung. Dieser Versuch zeigt deutlich, daß das Substrat des Stromes mit der Substanz des Leiters verbunden ist, weil sich auf letztere jene Kräfte übertragen, die wir uns zunächst auf das Substrat des Stromes einwirkend denken müssen.

Wir wenden uns zur Betrachtung des namentlich für die Theorie überaus wichtigen Falles der kontinuierlichen Drehungen von Strömen oder Magneten; die hierher gehörigen Erscheinungen können als unipolare bezeichnet werden. Wenden wir uns zunächst der Fig. 280 (a. f. S.) zu und bestimmen wir die Komponente $\mathfrak{M}_z$ des Drehmoments $\mathfrak{M}$, welches auf den Teil AB des Stromes J einwirkt, der unter der Wirkung des im Punkte m befindlichen Pols m steht. Auf das Element Jds wirkt eine Kraft ein, deren Komponente dF_x durch Formel (10, b) gegeben ist. Setzt man, wie dies bereits geschehen war, $ydz - zdy$ anstatt $rds \sin\varphi \cos(n, x)$ ein, so erhält man, vgl. (11),

$$dF_x = JM\frac{ydz - zdy}{r^3}$$

und analoge Ausdrücke für dF_y und dF_z. Die Komponente $d\mathfrak{M}_z$ des Moments $d\mathfrak{M}$, welches auf Jds wirkt, ist gleich

$$d\mathfrak{M}_z = xdF_y - ydF_x = \frac{Jm}{r^3}\{z(xdx + ydy) - (x^2 + y^2)dz\}$$

Die Gleichung $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ gibt aber $rdr = xdx + ydy + zdz$, es ist daher

$$d\mathfrak{M}_z = \frac{Jm}{r^3}\{z(rdr - zdz) - (r^2 - z^2)\,dz\}$$

$$= \frac{Jm}{r^2}(zdr - rdz) = -Jmd\,\frac{z}{r}.$$

Setzt man $\angle(r, z) = \alpha$, so erhält man $z = r\cos\alpha$, also

$$d\mathfrak{M}_z = -Jmd\cos\alpha.$$

Führt man die Bezeichnungen $\angle BOz = \alpha_1$, $\angle AOz = \alpha_2$ ein, so erhält man

$$\mathfrak{M}_z = Jm(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Diese Formel zeigt uns, daß das Moment der auf den Leiter AB des Stromes J einwirkenden Kräfte, bezogen auf eine durch den Pol m hindurchgehende Achse, nicht von der Form des Leiters, sondern nur von der Lage seiner Enden A und B abhängt. Ist der Strom geschlossen, so ist $\mathfrak{M}_s = 0$. Ein Magnetpol kann einen geschlossenen Strom nicht dazu veranlassen, sich um eine Achse zu drehen, welche durch diesen Pol hindurchgeht. Hieraus folgt, daß die Resultante aller Kräfte, mit denen ein Magnetpol auf einen geschlossenen Strom einwirkt, durch diesen Pol hindurchführt. Im Hinblick auf die Wichtigkeit des erhaltenen Resultats wollen wir noch eine und dabei einfachere Herleitung der Formel (20) angeben. Da das Moment von der Form des Leiters AB unabhängig ist, so können wir annehmen, daß es sich in der Ebene befindet, welche durch

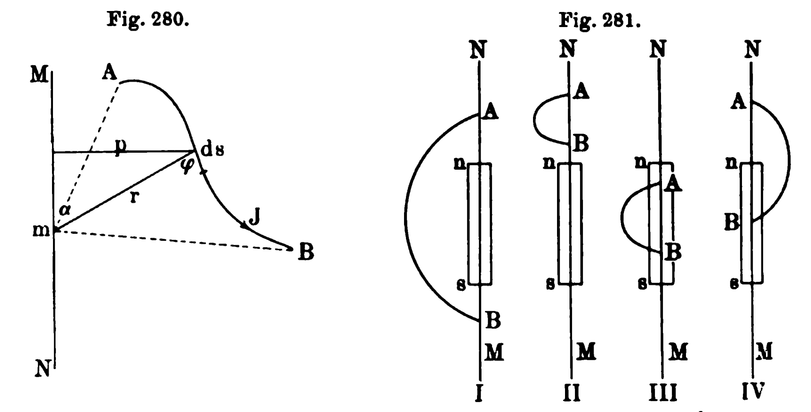


Fig. 280. Fig. 281.

den Pol m und die Enden A und B hindurchgeht. Es sei MN die Drehungsachse (Fig. 280), m der Magnetpol. Die Kraft

$$dF = \frac{Jm}{r^2} \sin\varphi\, ds,$$

welche auf das Element ds einwirkt, ist senkrecht zur Ebene der Zeichnung; es ist daher ihr Moment $d\mathfrak{M}$ gleich $\frac{Jmp}{r^2}\sin\varphi\, ds$, wo p den Abstand des Elementes ds von der Achse MN bedeutet. Es ist aber $p = r\sin\alpha$, wo $\alpha = \angle(r, MN)$ ist, $ds\sin\varphi = r\,d\alpha$ und daher das Moment $d\mathfrak{M} = Jm\sin\alpha\, d\alpha = -Jm\, d\cos\alpha$, woraus sich, wenn man $\angle AmM = \alpha_1$ und $\angle BmM = \alpha_2$ setzt,

$$\mathfrak{M} = Jm(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20, a)$$

ergibt.

Betrachten wir jetzt den überaus wichtigen speziellen Fall, wo sich ein Teil der Kette um eine Achse dreht, die mit der Achse des gegebenen Magneten zusammenfällt. Es sei ns (Fig. 281,

I bis IV) ein Magnet, MN seine Achse, die durch beide Pole hindurchgeht. Formel (20, a) gibt das von einem Pole hervorgerufene Moment; der andere Pol ruft ein ähnliches Moment hervor, jedoch von entgegengesetztem Vorzeichen, wobei an Stelle von α_1 und α_2 die Winkel α_1' und α_2' zwischen der Magnetachse und den Geraden eingesetzt werden müssen, die vom zweiten Pole aus zu den Enden A und B des beweglichen Teiles der Kette verlaufen. Auf diese Weise erhält man

$$\mathfrak{M} = Jm(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1' + \cos\alpha_2') \quad . \quad . \quad (20,\text{b})$$

Da die Drehung um die Magnetachse MN erfolgt, so müssen sich natürlich die Enden A und B auf der Achse MN selbst befinden. Hierbei sind vier Fälle möglich.

I. (Fig. 281, I). Die Punkte A und B befinden sich zu beiden Seiten des Magneten; $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_1' = \alpha_2' = \pi$; (20, b) gibt $\mathfrak{M} = 0$, eine Drehung ist nicht möglich.

II. (Fig. 281, II). Die Punkte A und B befinden sich auf einer Seite des Magneten; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1' = \alpha_2' = 0$; (20, b) gibt $\mathfrak{M} = 0$; eine Drehung ist nicht möglich.

III. (Fig. 281, III). Die Punkte A und B befinden sich zwischen den Polen des Magneten; $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi$, $\alpha_1' = \alpha_2' = 0$; (20, b) gibt $\mathfrak{M} = 0$; eine Drehung ist nicht möglich.

IV. (Fig. 281, IV). Ein Ende des beweglichen Leiters befindet sich außerhalb des Magneten, das andere zwischen den Polen; $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_1' = 0$, $\alpha_2' = 0$; (20, b) gibt

$$\mathfrak{M} = 2mJ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Es erfolgt Drehung; sie hält ununterbrochen an, da sich die relative Lage von Strom und Magnet während der Drehung nicht ändert. Sonach erhält man folgendes Resultat: ununterbrochene Drehung eines Teils des Stromkreises um die Achse eines Magneten ist möglich, wenn die an der Achse anliegenden Enden jenes Teils sich zu beiden Seiten eines der Pole befinden oder wenn, mit anderen Worten, eines und nur eines dieser Enden sich zwischen den Magnetpolen befindet.

Eine ununterbrochene Drehung eines Magneten kann durch einen Strom hervorgerufen werden; hierbei hat man zwei Fälle voneinander zu unterscheiden:

1. Drehung eines Magnetpols um den Strom, wobei sich der andere Pol auf der Drehungsachse befindet oder eine solche Lage hat, daß er einer Drehwirkung des Stromes (in entgegengesetzter Richtung) nicht unterliegt.

2. Drehung eines Magneten um seine eigene Achse. Dieser in jeder Beziehung merkwürdige Fall einer ponderomotorischen Wirkung wird nach dem Schema von Fig. 281, IV verwirklicht und bildet das

Gegenstück zu der soeben betrachteten kontinuierlichen Drehung des beweglichen Teiles AB eines Leiters um einen unbeweglichen Magneten. Macht man AB unbeweglich, den Magneten aber um seine Achse drehbar, so erfolgt eine solche Drehung in Wirklichkeit: der Magnet dreht sich ununterbrochen um seine Achse in einer Richtung, die dem Drehungssinne eines beweglichen Leiters AB um die Achse des unbeweglichen Magneten entgegengesetzt ist.

Eine kontinuierliche Drehung von Strömen oder Magneten in den drei angegebenen Fällen hat zuerst Faraday (1821) erhalten. Wir wollen einige Apparate beschreiben, die zur Demonstration dieser Drehungen dienen.

Fig. 282.



In Fig. 282 ist ein Faradayscher Apparat abgebildet, in welchem nebeneinander die Drehung eines Magneten sn um gac und die Drehung des Teiles k eines Stromleiters um den Magneten $s'n'$ erfolgt. Der Apparat besteht aus zwei Gefäßen mit Quecksilber; der Strom wird in der Richtung $caghkbz$ hindurchgesandt. Das untere Ende des Magneten ns ist mit einem Fädchen an dem Drahtende befestigt; der Magnet $n's'$ ist in eine Metallröhre hineingesteckt; das untere Ende des Drahtes k schwimmt auf der Quecksilberoberfläche. Wie man leicht einsieht, wird der Pol s sich um ga, der Leiter k aber um den Pol s' drehen und zwar von oben her gesehen in der Uhrzeigerrichtung. Gegenwärtig bedient man sich häufig des in Fig. 283 abgebildeten Apparates. Eine kleine Metallsäule dd, die mit der Klemmschraube e in Verbindung steht, hat an ihrem oberen Ende eine mit Quecksilber gefüllte Vertiefung; in letzteres taucht die den Draht abc tragende Drahtspitze b. Die Enden dieses Drahtes tauchen in Quecksilber, das sich in der ringförmigen, mit der Klemmschraube h verbundenen Rinne f befindet. An der Achse befindet sich der Magnet NS. Fließt der Strom in der Richtung $hgfbde$, so drehen sich beide Drähte dem Uhrzeiger entgegen.

Sendet man einen Strom durch ein frei hängendes, dünnes und biegsames Metallband und bringt an dasselbe einen Magnet heran, so schlingt sich das Band schraubenförmig um den Magneten. Riecke (1884), Lamprecht (1885) und Colard (1895) haben theoretisch die

Frage behandelt, welche Form biegsame, jedoch nicht dehnbare Leiter unter der Einwirkung von magnetischen Kräften annehmen; Experimentaluntersuchungen hierüber haben Le Roux, Gore u. a. angestellt.

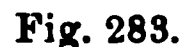
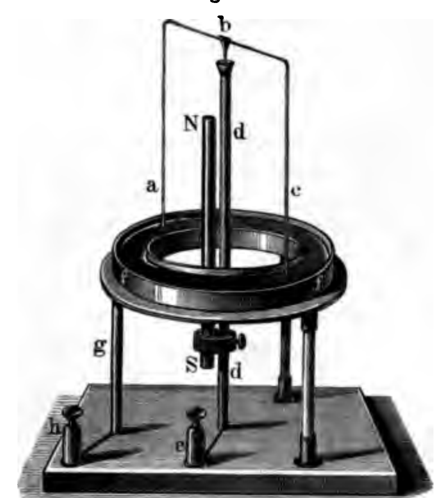


Fig. 283.



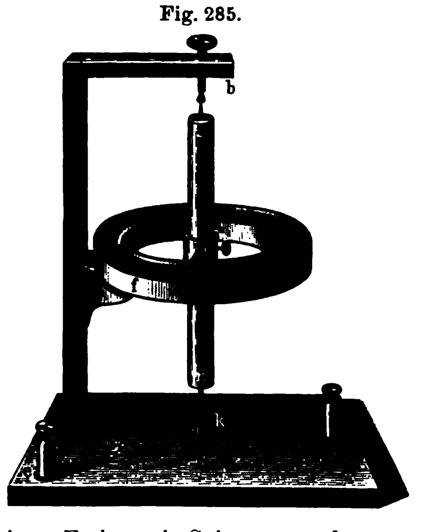
Rotation kann auch in stromdurchflossenen Flüssigkeiten erfolgen; eine solche

Fig. 284.



ist zuerst von Davy (1823) beobachtet worden. Am einfachsten erhält man die Rotation, wenn man auf den Pol *N* (Fig. 284) eines Magneten ein Gefäß mit Quecksilber bringt und in letzteres die Enden *A* und *D* der Stromleitung taucht. Fließt der Strom in der Richtung der Pfeile, so bemerkt man an der Quecksilberoberfläche zwei wirbelartige Strömungen in den durch die Pfeile angedeuteten Richtungen. Bertin, de la Rive u. a. haben verschiedenartige Apparate konstruiert, die zur Beobachtung der Rotation von Flüssigkeiten bestimmt waren. Die Theorie dieser Erscheinungen ist sehr eingehend von Riecke (1885) behandelt worden.

Fig. 285.



Die Drehung eines Magneten um seine eigene Achse kann mit Hilfe des in Fig. 285 abgebildeten Apparates gezeigt werden. Der Magnet *ns* ist an seinen Enden mit Spitzen versehen, so daß er sich um seine Achse drehen kann; die untere Stütze *k* ist mit der Klemmschraube *a* verbunden. An den in der Mitte des

Magneten befestigten Ring c ist ein Draht gelötet, dessen umgebogenes Ende ein wenig in das Quecksilber eintaucht, das sich in der ringförmigen, mit der Klemmschraube e verbundenen Rinne f befindet. Wie man sieht, entspricht dieser Apparat vollkommen dem Schema der Fig. 281, IV. Sendet man einen Strom in der Richtung $efcka$ hindurch, so beginnt der Magnet, von oben her betrachtet, in der Uhrzeigerrichtung zu rotieren.

Um die kontinuierliche Drehung eines Magneten um einen Strom zu zeigen, benutzt man gegenwärtig anstatt des einfachen Faradayschen Apparates (Fig. 285) den in Fig. 286 abgebildeten. Das Metallsäulchen ab, welches mit der Klemmschraube e in Verbindung

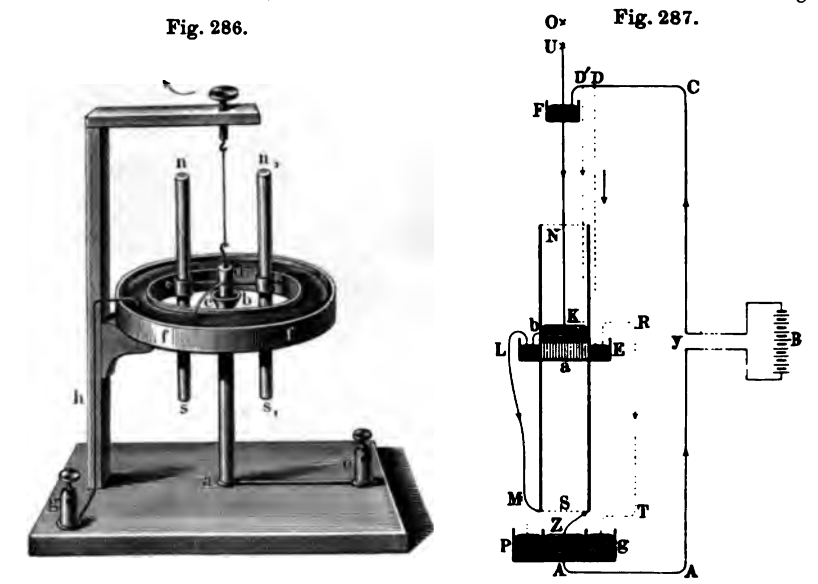


Fig. 286. Fig. 287.

steht, trägt ein Schälchen mit Quecksilber, in welches das untere Ende eines an einem Fädchen hängenden Kupferstäbchens d eintaucht. Mit ihm stehen zwei Magnete ns und $n_1 s_1$ in Verbindung, sowie der Draht c, dessen Ende wie beim vorhergehenden Apparate in das Quecksilber des ringförmigen, mit g leitend verbundenen Behälters eintaucht. Läßt man einen Strom in der Richtung $ghfedbae$ hindurchgehen, so beginnen die Pole s und s_1 um den Strom ba — von oben gesehen — gegen den Uhrzeiger zu rotieren.

In letzter Zeit sind neuere Apparate von Ulsch, W. König und namentlich von W. Nikolajew konstruiert worden. Wir wollen einige von den scharfsinnig konstruierten Nikolajewschen Apparaten beschreiben. Einer derselben ist in Fig. 287 abgebildet. Ein hohler Elektromagnet NS hängt an einem im Punkte O befestigten Faden,

seine Wickelung ist nicht mit abgebildet, aber in M und Z sind ihre Enden zu sehen. In a befindet sich ein Kork, über den Quecksilber gegossen ist; E ist ein ringförmiges Gefäß mit Quecksilber; der Stab KU geht durch das, Quecksilber enthaltende Gefäß F hindurch; Quecksilber befindet sich auch in Z, sowie in dem ringförmigen Gefäße pg. Der Strom der Batterie B kann in vier Leitungsbahnen geschlossen werden.

I. Die Leitungen ML und DF sind entfernt; der Strom fließt in der Richtung $BCDERTgpZAB$. Die ganze Kette, abgesehen von der Wickelung zwischen p und Z, die offenbar keine Drehung des Magneten hervorrufen kann, liegt außerhalb des Magneten, ist mit ihm nicht verbunden. Der Magnet bleibt in Ruhe.

Fig. 288.

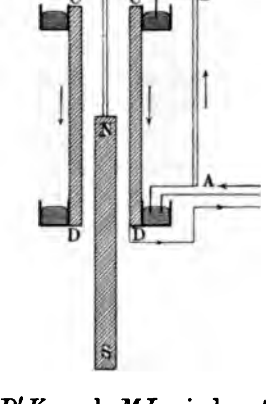
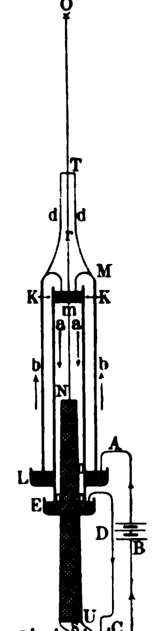


Fig. 289.



II. Die Leitungen Mp, DF und $ERTg$ sind entfernt; der Strom fließt in der Richtung $BCDELMZAB$. Der Teil ML der Kette ist mit dem Magneten verbunden, der sich unter Einwirkung des übrigen Teiles der Kette sehr energisch dreht.

III. Die Leitungen DE, $D'K$ und ML sind entfernt; die Stromrichtung ist $BCD'FNKbERTgpZAB$. Jetzt ist der Teil FK mit dem Magneten verbunden, der sich in entgegengesetzter Richtung dreht.

IV. Die Leitungen $D'F$, DE und ML sind entfernt; die Stromrichtung ist $BCD'KbERTgpZAB$, d. h. der mit dem Magneten verbundene Teil FNK ist durch den mit ihm nicht verbundenen Teil $D'K$ ersetzt. Der Magnet dreht sich ebenso energisch wie im dritten Falle; dies beweist, daß der Strom $D'K$ ebenso inaktiv ist wie der mit dem Magneten verbundene Strom FNK, und daß der Stromkreis, von welchem sich ein Teil innerhalb des hohlen Magneten befindet, die Drehung hervorruft.

Ein anderer Apparat ist in Fig. 288 abgebildet. Ein Magnet NS hängt frei innerhalb der Röhre $CCDD$, die von zwei ringförmigen, Quecksilber enthaltenden Gefäßen C und D umgeben ist; er ist befestigt an dem geradlinigen Leiter AB; das obere ringförmige Gefäß C ist mit der Röhre CD metallisch verbunden. Der Strom hat die durch die Pfeile angedeutete Richtung; er geht durch AB und die Röhre $CCDD$. Der Magnet dreht sich zusammen mit dem Leiter AB. Der dritte Apparat von W. Nikolajew ist in Fig. 289 abgebildet. Ein

Elektromagnet NS hängt an einem Fädchen m: er ist von zwei Röhren aa und bb umgeben. Die Gefäße KK und R, sowie die ringförmigen Gefäße L, E und PC enthalten Quecksilber. Die äußere Röhre bb ist an der Scheibe T befestigt, welche an dem Fädchen TO hängt. An derselben Scheibe ist ein Faden r befestigt, an welchem das Gefäß KK und die äußere Röhre aa frei hängen; der Faden m ist an dem Gefäße KK befestigt. Die Stromrichtung ist $BAbKaEDCuSRB$: der Strom geht längs der Röhren aa und bb in entgegengesetzten Richtungen. Der Magnet kann an der äußeren Röhre aa befestigt werden: dann hängt das System $SNEaaK$ als Ganzes am Fädchen r. Sind NS und aa nicht fest verbunden, so bleibt der Magnet in Ruhe und beide Röhren drehen sich in entgegengesetzten Richtungen. Ist der Magnet mit der Röhre aa verbunden, so drehen sich beide zusammen nach einer Seite, die äußere Röhre nach der entgegengesetzten Seite.

Im Jahre 1895 entstand, veranlaßt durch Lecher, ein längerer Streit über die Bedingungen, unter denen kontinuierliche Drehungen von Strömen und Magneten auftreten. Auf diese Streitfrage, an der sich sehr viele Forscher beteiligt haben, werden wir zu sprechen kommen, wenn wir zu den Erscheinungen der sogenannten unipolaren Induktion übergehen.

§ 4. Wechselwirkung von Strömen. Die Lehre von den Wechselwirkungen zweier Ströme bildet einen Teil der sogenannten Elektrodynamik, zu der man auch die Lehre von der Induktion von Strömen (Bd. IV, 2) rechnet.

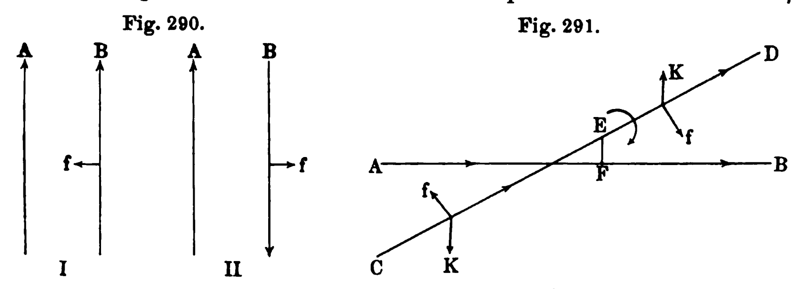
Ein stromdurchflossener Leiter, der in ein Magnetfeld eines Stromes gebracht ist, muß ponderomotorischen Kräften unterliegen. Die Linkehandregel setzt in den Stand, in vielen Fällen die Richtung dieser Kräfte zu bestimmen, also auch diejenigen Bewegungen, die unter den verschiedenen Bedingungen von beweglichen Leitern ausgeführt werden. Wir wollen einige Einzelfälle betrachten.

Zwei parallele Ströme A und B (Fig. 290, I) von derselben Richtung ziehen einander an. Die Kraftlinien des Stromes A treffen nach der Schraubenregel den Strom B und zwar in der vom Leser abgewandten Richtung. Die Linkehandregel (Handfläche nach oben, Zeigefinger nach vorn, Mittelfinger nach oben, Daumen nach links) zeigt, daß die Kraft f, welche auf die Elemente des Stromes B einwirkt, zum Strome A hin gerichtet ist.

Zwei parallele Ströme A und B (Fig. 290, II) von entgegengesetzter Richtung stoßen einander ab, denn nach der Linkehandregel (Handfläche nach unten, Zeigefinger nach vorn, Mittelfinger nach unten, Daumen nach rechts) ist jetzt die Kraft f von B nach rechts gerichtet.

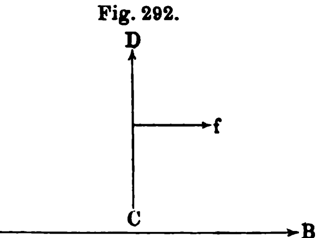
Nehmen wir an, es bilden die Ströme AB und CD (Fig. 291) miteinander einen spitzen Winkel und es kann sich der Strom CD um die kürzeste Entfernung EF der beiden Ströme drehen, wobei er immer in einer gewissen (in der Figur nicht angegebenen) Ebene P, die parallel zu AB ist, verbleibt. Eine solche Bewegung kann nur durch die Komponente K der Feldintensität hervorgerufen werden, welche zu P senkrecht ist. In den auf ED gelegenen Punkten hat die Komponente K die Richtung nach oben, es ist daher die ponderomotorische Kraft f

Fig. 290. Fig. 291.



nach rechts gerichtet; in den Punkten, die sich auf EC befinden, ist die Komponente K nach unten gerichtet, die Kraft f daher nach links. Der Strom CD wird sich also mit dem Uhrzeiger bewegen, während er sich parallel zu AB zu stellen sucht. Würde der Strom CD die entgegengesetzte Richtung haben (von D nach C) und daher die Stromrichtungen miteinander einen stumpfen Winkel bilden, so würden auch die Kräfte f die entgegengesetzte Richtung haben. Der Strom CD würde sich gegen den Uhrzeiger bewegen, um derart parallel zu AB zu werden, daß beide Ströme nach derselben Richtung verlaufen. Das Resultat, zu dem wir gelangt sind, spricht man bisweilen mit folgenden Worten aus: Ströme, die einen Winkel einschließen, ziehen einander an, wenn sie beide zum Scheitel hin oder beide vom Scheitel wegfließen; sie stoßen einander ab, wenn einer die Richtung zum Scheitel hin, der andere vom Scheitel des Winkel weg hat. Kürzer kann man sagen, daß Ströme, die einen Winkel einschließen, sich parallel zu stellen suchen und zwar so, daß sie nach derselben Seite hin gerichtet sind.

Fig. 292.



Nehmen wir endlich an, es sei CD (Fig. 292) ein beweglicher Teil des Leiters, der senkrecht zum Strome AB ist. In CD sind die Kraftlinien des Stromes AB senkrecht zur Ebene der Zeichnung und auf den Leser zu gerichtet. Die Linkehandregel zeigt, daß auf den Leiter CD ein System von parallelen Kräften einwirkt, deren

Resultante f nach rechts verläuft; der Leiter CD wird sich parallel zu sich selbst am Strome AB entlang bewegen und zwar nach der Stromhälfte hin, die ihn auf Grund des Vorhergehenden anzieht.

Zur experimentellen Beobachtung der betrachteten Fälle von ponderomotorischen Wechselwirkungen von Strömen dienen verschiedenartige Apparate, von denen wir einige wenige beschreiben wollen. Zum Aufhängen von beweglichen Leitern dienen zwei metallene winkelig umgebogene Träger t und v (Fig. 293) mit Quecksilbernäpfchen (x und y) an ihren Enden, die sich übereinander befinden. In diese Näpfchen werden an ihren Enden mit Spitzen versehene Drähte von verschiedener Form hineingehängt, z. B. ein viereckiger Draht *abcd* oder ein kreisförmiger usw. An solch einen Draht bringt man einen anderen, stromdurchflossenen Draht heran, dessen Form ebenfalls verschiedenartig sein kann, z. B. einen rechteckigen Holzrahmen, auf den mehrere Drahtwindungen aufgewickelt sind (Fig. 294). Wenn man ein solches Drahtviereck an die Teile *ad* oder *bc* des

Fig. 293.

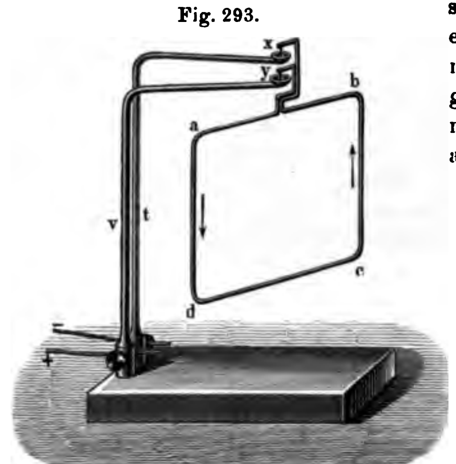


Fig. 294.

Vierecks *abcd* (Fig. 293) heranbringt, so läßt sich leicht die Anziehung und Abstoßung der parallelen Ströme zeigen; hält man den Drahtrahmen unterhalb des Drahtes *dc*, so kann man die Drehung eines beweglichen Stromes zeigen, der mit einem anderen, unbeweglichen Strome einen Winkel einschließt.

Die gegenseitige Anziehung von parallelen und gleichgerichteten Strömen kann man auch an den Teilen ein und derselben Kette zeigen. Hierzu dient die sogenannte Rogetsche Spirale (Fig. 295). Ihr Hauptbestandteil ist ein vertikaler schraubenförmiger Draht, dessen unteres Ende durch eine kleine Kugel beschwert ist; eine angelötete Spitze berührt das in einem Metallnäpfchen enthaltene Quecksilber. Läßt man durch diesen Draht einen Strom hindurchgehen, so ziehen sich die Windungen desselben gegenseitig an, infolgedessen verkürzt sich der Draht, die Spitze tritt aus dem Quecksilber heraus und der

Strom wird unterbrochen. Jetzt fehlt die Anziehung zwischen den Drahtwindungen und das Drahtende senkt sich unter der Wirkung des beschwerenden Kügelchens von neuem. Sobald aber die Spitze mit der Quecksilberfläche in Berührung kommt, wird der Strom wieder geschlossen, die Windungen ziehen einander an, die Spitze hebt sich usf. Das Resultat ist, daß man eine ununterbrochene Schwingung des Kügelchens in vertikaler Richtung erhält. Endlich kann die seitliche Bewegung eines Teiles des Stromkreises, senkrecht zum Strom (vgl. Fig. 292), mit Hilfe des in Fig. 296 abgebildeten Apparates gezeigt werden. Er besteht aus einem ringförmigen Gefäße *a* mit Quecksilber, das mit der Klemmschraube *c* in Verbindung steht. Der vertikale Träger ist mit *b* verbunden und trägt an seinem oberen Ende ein Quecksilbernäpfchen, in welches die Spitze *o* taucht, die an den Draht *ngp* angelötet ist, dessen Enden ein wenig in das Quecksilber von *a* eintauchen. Um das Gefäß *a* herum laufen mehrere Windungen eines Drahts *dd*,

Fig. 295.

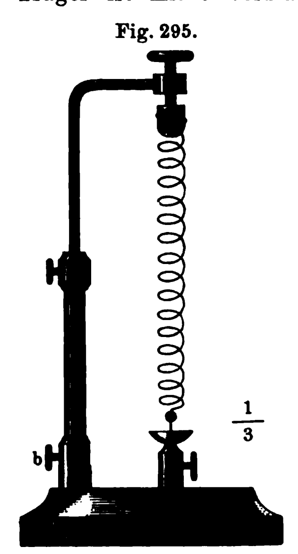
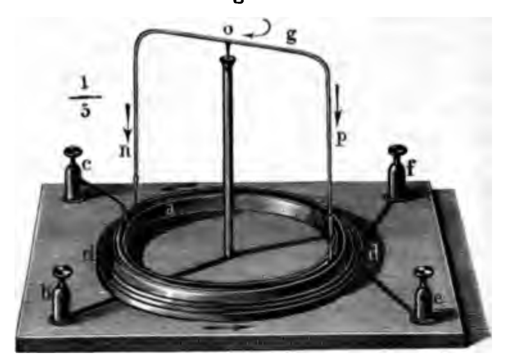


Fig. 296.



dessen Enden mit den Klemmschrauben *f* und *e* verbunden sind. Läßt man mittels *b* und *c* durch beide Hälften von *ngp* einen Strom gehen, so beginnt sich dieser Draht um die Trägerachse zu drehen. Hat der Strom die Richtung der Pfeile in unserer Figur, so erfolgt die Drehung — von oben gesehen — in der Uhrzeigerrichtung.

Die ersten zur Untersuchung und Demonstration der verschiedenen Wechselwirkungen von Strömen geeigneten Apparate stammen von Ampère. Andere Apparate haben Savary, Ritchie, Bertin, Mühlenbein, Benecke, Oberbeck u. a. konstruiert.

Wir haben bereits früher in einigen besonderen Fällen die Richtung der ponderomotorischen Kräfte bestimmen können, die infolge der Wechselwirkung zweier Ströme auf bewegliche Teile des Stromkreises auftraten, sobald uns die Lage der Kraftlinien des Stromes be-

kannt war. Die Schlußfolgerungen, zu denen wir in den vorhergehenden Kapiteln gelangt sind, setzen uns jetzt in den Stand, in die Frage nach den Wechselwirkungen von Strömen noch viel tiefer einzudringen.

Vor allen Dingen können wir die Frage nach dem Einflusse des Mediums auf die Wechselwirkung von Strömen lösen. Wie wir gesehen haben, ist das Magnetfeld eines Stromes von der Intensität J, der längs einer geschlossenen Linie s dahinfließt, identisch mit dem Magnetfelde eines magnetischen Blattes, welches eine beliebige, von der Kurve s umgrenzte Fläche S überdeckt, wobei die Kraft ω jener Doppelschicht durch Formel (59, d), S. 548

$$\omega = \mu J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

gegeben ist. Hier ist μ die magnetische Permeabilität des homogen gedachten Mediums und $\omega = k\delta$, wo δ die Dicke des Blattes, $\pm k$ die Oberflächendichte des Magnetismus auf beiden Seiten des Blattes ist. Zwei Ströme J_1 und J_2 wirken derart aufeinander ein, wie zwei magnetische Blätter, deren Kräfte $\omega_1 = \mu J_1$ und $\omega_2 = \mu J_2$ sind. Die Wechselwirkung zweier solcher Blätter ist nach dem Coulombschen Gesetze proportional der Größe $\omega_1 \omega_2 : \mu$. Hieraus folgt, daß die Wechselwirkung zweier Ströme proportional der Größe $\mu J_1 J_2$ ist. Man kann auch folgende Überlegung anstellen: wir ersetzen nur einen der Ströme, z. B. J_1, durch ein Blatt, dessen Kraft $\omega_1 = \mu J_1$ ist. Die Wirkung dieses Blattes auf den Strom J_2 ist proportional der Größe $\omega_1 J_2$ und hängt vom Medium nicht ab (S. 757). Substituiert man $\omega_1 = \mu J_1$, so findet man wieder, daß die Wechselwirkung der Ströme proportional der Größe $\mu J_1 J_2$ ist. Es ist also die Wechselwirkung zweier Ströme direkt proportional der magnetischen Permeabilität μ des umgebenden homogenen Mediums. Des Vergleiches halber erinnern wir daran, daß die Wechselwirkung zweier Magnete indirekt proportional μ ist und die Wechselwirkung eines Stromes und eines Magneten von μ nicht abhängt.

Ferner können wir auf Grund früherer Resultate in sehr allgemeiner Form die Frage nach den ponderomotorischen Kräften der Wechselwirkung zweier Ströme lösen, sowie der Wechselwirkung verschiedener Teile desselben Stromes aufeinander. Wir haben gesehen, daß die potentielle Energie $W_{1,2}$ zweier geschlossener Ströme J_1 und J_2 aufeinander durch die Formel (70), S. 562

$$W_{1,2} = -J_1 J_2 \mu L_{1,2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

gegeben ist, wo $\mu L_{1,2}$ der Koeffizient der gegenseitigen Induktion zweier Ströme genannt wurde. Ferner haben wir gesehen, daß der magnetische Induktionsfluß $\Psi_{1,2}$ (oder die Anzahl $N_{1,2}$ der Induktionslinien des Feldes vom Strome J_1), der die Umgrenzung des Stromes J_2 durchsetzt, wenn $J_1 = 1$ ist, gleich dem Flusse $\Psi_{2,1}$ oder gleich der Anzahl $N_{2,1}$ der Induktionslinien des Feldes vom Strom

$J_2 = 1$ ist, welche durch die Umgrenzung des Stromes J_1 hindurchgehen, so daß $\Psi_{1,2} = \Psi_{2,1}$ und $N_{1,2} = N_{2,1}$ ist, und daß ferner, vgl. (71, c), S. 563

$$\mu L_{1,2} = \Psi_{1,2} = N_{1,2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23,\text{a})$$

ist. Für die Größe $L_{1,2}$ hatten wir zuerst die Formel (71), S. 562

$$L_{1,2} = -\iint \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dn_1 dn_2} dS_1 dS_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23,\text{b})$$

gefunden, wo dS_1 und dS_2 die Elemente zweier beliebigen Flächen sind, welche durch die Umgrenzungen der Ströme J_1 und J_2 hindurchgelegt sind; n_1 und n_2 sind die nach den Nordseiten gezogenen Normalen zu diesen Flächen; r die Entfernung der Elemente dS_1 und dS_2 voneinander. Die Integrale erstrecken sich auf alle Elemente der Flächen S_1 und S_2. Mit Hilfe des Stokesschen Theorems hatten wir den Ausdruck (23, b) umgeformt und ihm die Gestalt (73), S. 564,

$$L_{1,2} = \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23,\text{c})$$

gegeben, wo ds_1 und ds_2 die Elemente der Umgrenzungen der Flächen S_1 und S_2 sind, d. h. die Elemente unserer beiden Ströme, r der Abstand zwischen ds_1 und ds_2, $\varepsilon = \angle (ds_1, ds_2)$; die Integrale erstrecken sich auf die Umgrenzungen beider Ströme. Die Formeln (23) und (23, c) geben

$$W_{1,2} = -J_1 J_2 \mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

(23, a) gibt

$$W_{1,2} = -J_1 J_2 N_{1,2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24,\text{a})$$

Bezeichnet man mit Pdp die Arbeit der ponderomotorischen Kräfte bei unendlich geringer Änderung des Parameters p, der die Lage eines der Ströme bestimmt, so gibt die Gleichung $Pdp = -dW$ gemäß der Formel (19), S. 767, den Ausdruck

$$P = -\frac{\partial W_{1,2}}{\partial p} = J_1 J_2 \frac{\partial N_{1,2}}{\partial p} = J_1 J_2 \mu \frac{\partial L_{1,2}}{\partial p} \quad . \quad . \quad (25)$$

Im besonderen Falle, wo p gleich x, y oder z ist, erhält man die Komponenten der Kraft, welche einen der Ströme parallel zu sich selbst verschiebt. Kann sich der Strom aber bloß um eine gewisse Achse drehen, und man setzt p gleich dem Winkel α, der die Lage dieses Stromes bestimmt, so ist P gleich dem Momente $\mathfrak{M}$ des drehenden Kräftepaares. Die Formeln (25) zeigen, daß bei der **Wechselwirkung zweier Ströme die Bewegung nach der Seite hin erfolgt, nach welcher sich die Zahl $N_{1,2}$ der Induktionslinien vergrößert, die von dem einen Strome ausgehen und innerhalb der Umgrenzung des anderen hindurchgehen** (von der Südseite zur Nordseite).

Für die potentielle Energie $W_{1,1}$ eines Stromes J_1 auf sich selbst hatten wir den Ausdruck, vgl. (75), S. 564

$$W_{1,1} = -\tfrac{1}{2} J_1^2 \mu L_{1,1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25,\text{a})$$

gefunden, wo wir $\mu L_{1,1}$ als den Koeffizienten der Selbstinduktion bezeichnet hatten. Die Größe $L_{1,1}$ wird durch eine ebensolche Formel gegeben, wie auch die Größe $L_{1,2}$, vgl. (23, c), so daß

$$W_{1,1} = -\tfrac{1}{2} J_1^2 \mu \iint \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds_1\, ds_1' \quad . \quad . \quad . \quad (25,\text{b})$$

ist, vgl. (77), S. 565. Hier bedeuten ds und ds_1' die Elemente eines und desselben Stromes J_1.

Wir hatten auf S. 564 bereits darauf hingewiesen, daß infolge der Wechselwirkung der Teile eines und desselben Stromes derartige Bewegungen dieser Teile erfolgen, daß hierdurch die Fläche vergrößert wird, die zu ihrer Umgrenzung die Stromlinie hat. Es versteht sich von selbst, daß ein Strom keine Bewegung seiner selbst als eines Ganzen hervorrufen kann. Die ponderomotorischen Wirkungen können nur als Deformation der Stromlinie auftreten, d. h. in Form von Bewegung der beweglichen Teile, ohne Änderung von deren Form oder als Formänderungen von biegsamen oder dehnbaren Teilen des Stromkreises. Die Berechnung von $L_{1,1}$ begegnet gewissen besonderen Schwierigkeiten, welche in dem Kapitel von der elektrodynamischen Induktion erwähnt werden sollen.

Die Formeln (24) und (25) führen die Frage nach der Wechselwirkung zweier Ströme auf die Berechnung der Größe $L_{1,2}$ mit Hilfe der Formel (32, c) zurück, d. h. auf eine rein mathematische Frage. Diese Berechnungen sind fast in allen Fällen sehr verwickelt; wir beschränken uns hier darauf, den einfachsten Fall zweier geradliniger paralleler Ströme zu betrachten, von denen der eine J_1 eine sehr große, der andere J_2 aber eine endliche Länge b hat; die Entfernung der Ströme voneinander bezeichnen wir mit r. Wir nehmen an, der geradlinige Teil des Stromleiters J_2 könne sich parallel zu sich selbst bewegen, ohne die übrigen Teile des Stromkreises mit sich zu nehmen, was z. B. möglich ist, wenn die Enden des geradlinigen Teiles in Quecksilber schwimmen. Man könnte sich der Formel (24) bedienen, in der $\cos\varepsilon = 1$ oder gleich -1 wäre, je nach den Richtungen der Ströme, im gegebenen Falle ist es aber einfacher, wenn man die Zahl $N_{1,2}$ der Induktionslinien in Betracht zieht. Nehmen wir an, die Ströme haben die gleiche Richtung und es habe sich r um dr verkleinert, dann wird die gesuchte, auf den Strom J_2 einwirkende Kraft F aus der Gleichung $-F dr = J_1 J_2 dN_{1,2}$ bestimmt, wo $dN_{1,2}$ die Zunahme der Zahl der Induktionslinien des Stromes $J_1 = 1$ ist, welche durch die Umgrenzung des Stromes J_2 hindurchgehen. Die Intensität des Magnetfeldes des Stromes J_1 an der Stelle, wo sich der Strom J_2 befindet, ist

aber gleich $2 J_1 : r$; der vom Strome J_2 beschriebene Flächenraum ist gleich $-bdr$, es ist daher $dN_{1,2} = -2\mu b dr$. Also ist

$$-F dr = -2\mu J_1 J_2 \frac{b}{r} dr,$$

d. h.

$$F = 2\mu J_1 J_2 \frac{b}{r} \quad \ldots \ldots \quad (25, c)$$

Wie man leicht einsieht, wechselt F sein Vorzeichen, wenn die Ströme entgegengesetzte Richtungen haben.

Einige kompliziertere Fälle sind von verschiedenen Physikern behandelt worden, so z. B. zwei geradlinige Ströme, die in einer oder in verschiedenen Ebenen liegen (Ampère), zwei Kreisströme oder ein Kreisstrom und ein elliptischer Strom, die in derselben Ebene liegen (Plana, Kirchhoff), zwei Kreisströme, die in zueinander senkrechten Ebenen liegen (W. Weber), zwei Quadrate von gleicher Größe, die in gleicher Weise in parallelen Ebenen, welche zur Verbindungslinie der Quadratmittelpunkte senkrecht stehen, angeordnet sind (Mascart und Joubert) usw.

Fig. 297.

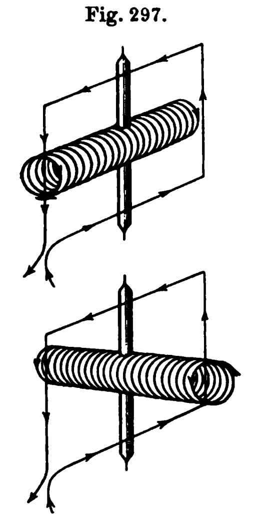


Fig. 298.

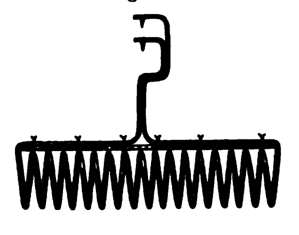


Fig. 299.

Aus dem in § 3 dieses Kapitels (S. 766) Gesagten geht hervor, daß die Wechselwirkung eines Stromes und eines Solenoids identisch ist mit der Wechselwirkung eines Stromes und eines Magneten und daß zwei Solenoide aufeinander wie zwei Magnete wirken. In Fig. 297 ist oben ein drehbares Solenoid abgebildet, dessen Achse in der Ebene eines viereckigen Leiters liegt. Läßt man durch diesen Leiter und durch das Solenoid in den durch Pfeile angedeuteten Richtungen Ströme hindurchgehen, so dreht sich das Solenoid in die Lage, welche im unteren Teile der Figur dargestellt ist. Bequemer ist es, dem Solenoide die Form der Fig. 298 zu geben und es an dem in Fig. 293, S. 778, abgebildeten Träger aufzuhängen.

Wir wollen jetzt zeigen, in welcher Weise man den Ausdruck (24) für das Potential $W_{1,2}$ zweier geschlossener Ströme aufeinander umformen kann; für dasselbe hatten wir übrigens schon einen Ausdruck durch Substitution von (23, b) in (23) erhalten. Es sei r (Fig. 299) die Entfernung der Anfangspunkte der Elemente ds_1 und ds_2 der beiden Ströme J_1 und J_2; die Koordinaten dieser Anfangspunkte bezeichnen wir mit x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2. Wir führen folgende Bezeichnungen ein: $\theta_1 = \angle(ds_1, r)$, $\theta_2 = \angle(ds_2, r)$, $\varepsilon = \angle(ds_1, ds_2)$. Bilden ds_1, ds_2 und r mit den Koordinatenachsen die Winkel $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ und (α, β, γ), so ist

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta_1 &= \cos\alpha \cos\alpha_1 + \cos\beta \cos\beta_1 + \cos\gamma \cos\gamma_1 \\ \cos\theta_2 &= \cos\alpha \cos\alpha_2 + \cos\beta \cos\beta_2 + \cos\gamma \cos\gamma_2 \\ \cos\varepsilon &= \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Ferner ist $\cos\alpha = (x_2 - x_1) : r$ usw., $\cos\alpha_1 = dx_1 : ds_1$ usw., endlich $\cos\alpha_2 = dx_2 : ds_2$ usw. Die Relation $r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ gibt

$$-r \frac{\partial r}{\partial s_1} = (x_2 - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial s_1} + (y_2 - y_1) \frac{\partial y_1}{\partial s_1} + (z_2 - z_1) \frac{\partial z_1}{\partial s_1} \quad . \quad (26, a)$$

Hieraus gibt Formel (26) $\frac{\partial r}{\partial s_1} = -\cos\theta_1$; in ähnlicher Weise erhält man $\frac{\partial r}{\partial s_2} = \cos\theta_2$, so daß

$$\frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} = -\cos\theta_1 \cos\theta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26, b)$$

ist. Formel (26, a) ergibt ferner, wenn man die Ableitung nach s_2 nimmt,

$$-r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} = \frac{\partial x_1}{\partial s_1} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} + \frac{\partial y_1}{\partial s_1} \frac{\partial y_2}{\partial s_2} + \frac{\partial z_1}{\partial s_1} \frac{\partial z_2}{\partial s_2} = \cos\varepsilon \quad (26, c)$$

Diese Gleichung und Formel (26, b) geben

$$r \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} = \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad (26, d)$$

Hieraus folgt

$$-\iint \frac{\cos\varepsilon}{r} ds_1 ds_2 = \iint \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} ds_1 ds_2 - \iint \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} ds_1 ds_2.$$

Das zweite von diesen Integralen, erstreckt über die geschlossenen Umgrenzungen, ist offenbar gleich Null, es ist daher

$$\iint \frac{\cos\varepsilon}{r} ds_1 ds_2 = \iint \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} ds_1 ds_2 \quad . \quad . \quad (26, e)$$

Hieraus folgt, daß man Formel (24):

$$W_{1,2} = -J_1 J_2 \mu \iint \frac{\cos \varepsilon}{r} \, ds_1 \, ds_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

auch folgendermaßen schreiben kann:

$$W_{1,2} = -J_1 J_2 \mu \iint \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r} \, ds_1 \, ds_2 \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Sind die beiden Integrale in Formel (26, e) einander gleich, so kann man offenbar $W_{1,2}$ auch als Summe dieser beiden Integrale, jedes multipliziert mit einem Koeffizienten, darstellen, wobei die Summe dieser Koeffizienten gleich $-J_1 J_2 \mu$ sein muß, während einer von ihnen völlig willkürlich ist. Es ist daher

$$W_{1,2} = -J_1 J_2 \mu \iint \frac{1}{r} \{(k+1) \cos \theta_1 \cos \theta_2 - k \cos \varepsilon\} \, ds_1 \, ds_2 \quad (29)$$

wo k eine beliebige Zahl ist. Setzt man beispielsweise $k = 2$, so erhält man:

$$W_{1,2} = -2 J_1 J_2 \mu \iint \frac{1}{r} \left(\tfrac{3}{2} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \varepsilon\right) ds_1 \, ds_2 \quad . \quad (30)$$

Diesen Ausdruck kann man die Ampèresche Formel nennen. Für $k = -1$ und $k = 0$ erhält man die Formeln (27) bzw. (28). Setzt man an Stelle von k den Wert $-(1+k):2$, so daß man $(k+1)$ durch $(1-k):2$ ersetzt, so erhält man:

$$W_{1,2} = -\tfrac{1}{2} J_1 J_2 \mu \iint \frac{1}{r} \{(1+k) \cos \varepsilon + (1-k) \cos \theta_1 \cos \theta_2\} \, ds_1 \, ds_2 \; (31)$$

Diesen Ausdruck kann man die Helmholtzsche Formel nennen. Setzt man in ihr $k = -5$, so erhält man die Formel (30). Ersetzt man mit Hilfe von (26, b) und (26, c) die Winkel in der allgemeinen Formel (29), so erhält man:

$$W_{1,2} = -J_1 J_2 \mu \iint \left\{ k \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} \right\} ds_1 \, ds_2 \quad . \quad (32)$$

Anstatt (30) erhält man für $k = 2$:

$$W_{1,2} = -2 J_1 J_2 \mu \iint \left\{ \frac{\partial^2 r}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} \right\} ds_1 \, ds_2 \quad , \quad (33)$$

Man überzeugt sich leicht, daß man die letztere Formel auch noch in folgender Form schreiben kann:

$$W_{1,2} = -4 J_1 J_2 \mu \iint \sqrt{r} \, \frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial s_1 \partial s_2} \, ds_1 \, ds_2 \quad . \quad . \quad (33, a)$$

Die Formel (32) kann man in folgender Form schreiben:

$$W_{1,2} = -kJ_1J_2\mu\iint\sqrt[k]{r}\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{r}}\frac{\partial^2 r}{\partial s_1\,\partial s_2} - \frac{1}{kr\sqrt[k]{r}}\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial r}{\partial s_2}\right\}ds_1\,ds_2,$$

d. h.

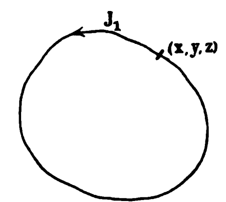
$$W_{1,2} = -kJ_1J_2\mu\iint\sqrt[k]{r}\,\frac{\partial}{\partial s_2}\left\{\frac{1}{\sqrt[k]{r}}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right\}ds_1\,ds_2 \quad . \quad . \qquad (34)$$

Für $k = 2$ erhält man anstatt (30) den Ausdruck:

$$W_{1,2} = -2J_1J_2\mu\iint\sqrt{r}\,\frac{\partial}{\partial s_2}\left\{\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial}{\partial s_1}\right\}ds_1\,ds_2 \quad . \qquad (34,\mathrm{a})$$

Auf Grund der Formel (23) kann man eine ganze Reihe von Ausdrücken für den **Koeffizienten** $\mu L_{1,2}$ **der gegenseitigen Induktion** erhalten, wenn man die Formeln (28) bis (34, a) benutzt.

Fig. 300.



Es versteht sich von selbst, daß man für die **potentielle Energie** $W_{1,1}$ **eines Stromes auf sich selbst**, also auch für den **Koeffizienten** $L_{1,1}$ **der Selbstinduktion**, anstatt (25, b) umgestaltete Formeln, die den soeben angeführten völlig analog sind, erhalten kann.

Die Ergebnisse der vorhergehenden Kapitel ermöglichen uns, noch eine weitere Frage zu lösen, nämlich die Frage nach **der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Element eines anderen Stromes**; wir können uns hierbei derselben beiden Methoden bedienen, die wir im vorhergehenden Paragraphen bei Bestimmung der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen Magnetpol angewandt haben. Es sei J_1 (Fig. 300) ein geschlossener Strom, $J_2 ds$ ein Element des anderen Stromes, H die Intensität des durch den Strom J_1 hervorgerufenen Magnetfeldes, $\angle (H, ds) = \varphi$. Dann ist die Kraft, welche auf das Element ds einwirkt, vgl. (9, a):

$$F = \mu H J_2 \sin\varphi\, ds \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

$$F \perp \text{Fläche } (H, ds) \quad \ldots \ldots \quad (35,\text{a})$$

Die Richtung der Kraft wird durch die Linkehandregel bestimmt; in der Figur ist vorausgesetzt, daß H die Richtung vom Leser fort hat. Bezeichnet man mit Ω den Raumwinkel, unter welchem vom Anfange des Elementes ds die Umgrenzung des Stromes J_1 erscheint, durch n aber die Richtung der Normalen zur Fläche $\Omega = Const$ (nach der Seite, nach welcher hin Ω abnimmt), so ist

$$H = -J_1 \frac{\partial \Omega}{\partial n} \quad \ldots \ldots \quad (35,\text{b})$$

Die Richtung von H fällt mit derjenigen von n zusammen; die drei letzten Formeln bestimmen vollständig die gesuchte Kraft F.

Ein anderer Weg, der uns die Komponenten der Kraft F gibt, ist der folgende. Es seien x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Umgrenzung von J_1; x_1, y_1, z_1 die Koordinaten des Anfanges des Elementes ds; die Richtung von ds bilde die Winkel λ, μ, ν, die Richtung von H die Winkel ξ, η, ζ, die Richtung von F die Winkel α, β, γ mit den Koordinatenachsen. Wie man leicht einsieht, ist in diesem Falle:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos\alpha}{\cos\nu\cos\eta - \cos\mu\cos\zeta} &= \frac{\cos\beta}{\cos\lambda\cos\zeta - \cos\nu\cos\xi} \\ &= \frac{\cos\gamma}{\cos\mu\cos\xi - \cos\lambda\cos\eta} \end{aligned}\right\} \quad . \quad (35,\text{c})$$

Hier sind die Vorzeichen schon derart gewählt, wie es der wahren Richtung der Kraft F entspricht, d. h. entsprechend der Linkehandregel, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man die x-Achse (nach rechts) parallel ds zieht, die z-Achse aber (nach oben) parallel zu H und wenn man beachtet, daß F die Richtung der y-Achse haben muß, die wie gewöhnlich nach vorn verläuft (für $\lambda = 0$ und $\zeta = 0$ muß $\beta = 0$ sein). Die Quadratsumme der Nenner in (35, e) ist gleich $\sin^2\varphi$, es ist daher z. B.:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\nu\cos\eta - \cos\mu\cos\zeta}{\sin\varphi} \text{ usw.} \quad \ldots \quad (35,\text{d})$$

Die Komponenten der Intensität H werden erhalten, wenn man in Formel (11, d) den Wert $m = 1$ einsetzt. Wir wollen folgende Abkürzungen einführen:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{(y - y_1)\,dz - (z - z_1)\,dy}{r^3} &= A \\ \int \frac{(z - z_1)\,dx - (x - x_1)\,dz}{r^3} &= B \\ \int \frac{(x - x_1)\,dy - (y - y_1)\,dx}{r^3} &= C \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (36)$$

Diese Größen werden die Determinanten des Stromes genannt. Es sei

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36,a)$$

Die Größe D heißt die Direktrix des geschlossenen Stromes. Formel (11.d) zeigt uns, daß die Komponenten der Intensität H folgende Werte haben:

$$H_x = J_1 A; \quad H_y = J_1 B; \quad H_z = J_1 C \quad . \quad . \quad (36,b)$$

$$H = J_1 D \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36,c)$$

Ferner ist offenbar

$$A = D \cos\xi; \quad B = D \cos\eta; \quad C = D \cos\zeta \quad . \quad . \quad (36,d)$$

Die gesuchten Komponenten F_x, F_y, F_z der Kraft F ergeben sich aus Formel (35):

$$F_x = \mu H J_2 \sin\varphi \cos\alpha \, ds,$$

oder, vgl. (35, d) und (36, c):

$$F_x = \mu J_1 J_2 D (\cos\nu \cos\eta - \cos\mu \cos\zeta) \, ds.$$

Endlich gibt Formel (36, d):

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \mu J_1 J_2 (B \cos\nu - C \cos\mu) \, ds \\ F_y &= \mu J_1 J_2 (C \cos\lambda - A \cos\nu) \, ds \\ F_z &= \mu J_1 J_2 (A \cos\mu - B \cos\lambda) \, ds \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Die Formeln (36) und (37) liefern die vollständige Lösung der Frage nach der ponderomotorischen Wirkung eines geschlossenen Stromes J_1 auf ein Stromelement $J_2 ds$. Hier bedeuten λ, μ, ν die Winkel zwischen ds und den Koordinatenachsen. Die Resultante F ist gleich:

$$F = \mu J_1 J_2 D \sin\varphi \, ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

wo D in (36, a) gegeben ist. Die Winkel α, β, γ, welche sie mit den Koordinatenachsen bildet, werden durch die Formeln (35, c) gegeben, wo λ, μ, ν bekannt sind, die Winkel ξ, η, ζ aber durch die Gleichungen (36, d) und (36, a) bestimmt werden.

§ 5. Wechselwirkung zweier Stromelemente. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir die Frage nach der integralen Wechselwirkung zweier geschlossener Ströme vollständig behandelt. Man muß sich darüber klar werden, daß alle unsere Schlußfolgerungen sich ausschließlich auf die Formel von Biot und Savart gestützt haben: auf Grund dieser Formel hatten wir die Analogie zwischen den Wirkungen eines Stromes und eines magnetischen Blattes aufgefunden. Die Frage nach den ponderomotorischen Wechselwirkungen zweier Ströme ist durch die Formeln (24) und (25) erschöpfend gelöst, soweit diese Lösung einer unmittelbaren experimentellen Prü-

fung zugänglich ist. Da aber alle Folgerungen, die sich in den besonderen Fällen aus diesen Formeln ergeben haben, durch die Versuche vollkommen bestätigt wurden, so kann an der Richtigkeit jener Formeln (24) und (25) auch nicht der geringste Zweifel bestehen. Von den Formeln (37) läßt sich nicht das Gleiche sagen, obgleich man aus ihnen offenbar jene Formeln (24) und (25) ableiten kann. Sie experimentell zu prüfen, ist unmöglich und man kann daher nur sagen, daß die Wechselwirkung zweier geschlossener Ströme derart erfolgt, als ob jedes Element ds des einen Stromes seitens des anderen geschlossenen Stromes Kräften unterliegt, die durch die Formeln (37) gegeben sind. Der historische Weg aber, der zu der Endformel (24) geführt hat, ist ein anderer gewesen. Als Ampère die Wechselwirkung von Strömen entdeckt hatte, machte er die Voraussetzung, daß die beobachtete Erscheinung das Resultat von Kräften sei, welche zwischen jedem Paar von Elementen ds_1 und ds_2 beider Ströme wirken, ähnlich wie die allgemeine Gravitation und die Wechselwirkungen von elektrisierten und magnetisierten Körpern zu jener Zeit durch Kräfte, welche zwischen paarweise genommenen Massenteilchen, Ladungen oder freien Magnetismen wirken, erklärt wurde. In den drei letzten Fällen haben die elementaren Kräfte als Anziehungen oder Abstoßungen die Richtung der Geraden, welche die entsprechenden aufeinander einwirkenden Elemente verbindet. In analoger Weise setzte nun Ampère voraus, daß auch zwei Elemente ds_1 und ds_2 zweier Ströme J_1 und J_2 nur in der Richtung ihrer Verbindungslinie r einander anziehen oder abstoßen. Gegenwärtig darf man jedenfalls die Existenz einer unmittelbaren Wechselwirkung (actio in distans, vgl. Bd. I) zwischen den Stromelementen nicht mehr gelten lassen. Die beobachtete ponderomotorische Wirkung auf den Leiter des Stromes J_2, der sich im Magnetfelde des Stromes J_1 befindet, ist das Resultat der Wirkung des unmittelbar an den Stromleiter J_1 angrenzenden Feldes auf diesen Stromleiter. A priori läßt sich nicht einmal sagen, ob man sich diese Wirkung auch nur für Zwecke der mathematischen Analyse als Resultat von Kräften denken darf, die zwischen den paarweise genommenen Elementen beider Ströme wirken. Daß man eine solche Zerlegung der integralen Wirkung vornehmen darf, ist schon an sich eine Hypothese, welche wir durch die weitere Hypothese, daß die differentialen Kräfte nur längs der Verbindungsgeraden der Elemente wirken, noch weiter einengen. Selbst in dem Falle, daß es gelingt, für diese Kräfte einen Ausdruck zu finden, der bei der Summation nach allen Elementen beider Ströme auf die zweifellos richtige Formel (24) führt, werden wir dennoch diese Kräfte als fingierte anzusehen haben, ihnen keinerlei reelle, physikalische Bedeutung beimessen dürfen. Wir werden dann sagen müssen, daß zwei Ströme derart aufeinander

einwirken, als ob zwischen ihren paarweise genommenen Elementen elementare Kräfte von der gefundenen Form wirkten. Außerdem muß uns ein Zweifel daran aufsteigen, daß die gefundene Form für die Kräfte die einzig mögliche sei und daß es nicht noch andere elementare Kräfte gibt, die alle zu einer und derselben integralen Wechselwirkung zweier geschlossenen Ströme führen. Dieser Zweifel aber muß sogleich zur Gewißheit führen, daß es eine unendliche Zahl von möglichen Formen der differentialen Kräfte gibt, falls eine solche Form vorhanden ist, denn es ist klar, daß man zum analytischen Ausdruck für letztere beliebige Glieder hinzufügen kann, die bei der Integration nach den beiden geschlossenen Umgrenzungen verschwinden. Aus dem Gesagten geht hervor, daß man beim Suchen nach der möglichen Form eines Differentialgesetzes nur ein unbestimmtes Resultat erwarten darf, das jedenfalls eine bloße Fiktion darstellt.

Mit der Frage nach dem Differentialgesetze für die Wechselwirkung von Stromelementen geht auch noch die andere, interessante Frage nach der Existenz eines elementaren Potentials zweier Stromelemente Hand in Hand. Wie man leicht zeigen kann, sind die oben angeführten Annahmen, welche Ampère gemacht hat, mit der Existenz eines elementaren Potentials unvereinbar. Es wird nämlich die relative Lage zweier Stromelemente ds_1 und ds_2 durch ihren Abstand r und gewisse Winkel definiert, wie z. B. $\theta_1 = \angle(r, ds_1)$, $\theta_2 = \angle(r, ds_2)$, $\varepsilon = \angle(ds_1, ds_2)$. Es sei nun $f ds_1 ds_2$ die zwischen den Elementen ds_1 und ds_2 wirkende Kraft und $w ds_1 ds_2$ das Potential dieser Elemente aufeinander. Es unterliegt keinem Zweifel, daß f nicht bloß von r abhängen kann, sondern auch von den Winkelparametern, und daß f daher beispielsweise in folgender Form dargestellt werden kann:

$$f ds_1 ds_2 = J_1 J_2 F(r, \theta_1, \theta_2, \varepsilon)\, ds_1 ds_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

Würde das Potential w nur von r abhängen, so würde seine Ableitung nach r, die proportional f ist, ebenfalls bloß von r abhängen. Man muß daher für das Potential einen Ausdruck von der Form

$$w ds_1 ds_2 = J_1 J_2 \Phi(r, \theta_1, \theta_2, \varepsilon)\, ds_1 ds_2 \quad . \quad . \quad (39, a)$$

gelten lassen. In diesem Falle aber sind partielle Differentiale von w nach den Winkelparametern vorhanden, und dies besagt, daß bei Drehung des Elementes (ohne Änderung von r) eine gewisse Arbeit geleistet wird. Da es klar ist, daß Kräfte vorhanden sein müssen, welche das Element zu drehen suchen, so kann die Wechselwirkung beider Elemente nicht bloß in einer Kraft bestehen, die, wie Ampère annimmt, die Richtung von $\pm r$ hat.

Wenden wir uns den Versuchen und Überlegungen zu, auf Grund derer Ampère seine berühmte Formel für die Kraft $f\,ds_1\,ds_2$, d. h. für die Form der Funktion F, die in (39) vorkommt, gefunden hat.

Ampère nahm zunächst an, daß die Kraft der Wechselwirkung zweier Elemente ds_1 und ds_2 der Ströme J_1 und J_2 proportional dem Produkte $J_1\,J_2\,ds_1\,ds_2$ sei. Bei Richtungsänderung eines der Ströme wechselt die Richtung der Kraft, wie dies daraus hervorgeht, daß zwei nebeneinander liegende geradlinige, gleiche Ströme (Fig. 301, Mitte) keinerlei Wirkung ausüben und keinerlei Wirkungen unterliegen. Ampère setzte weiter voraus, daß die gesuchte Kraft indirekt

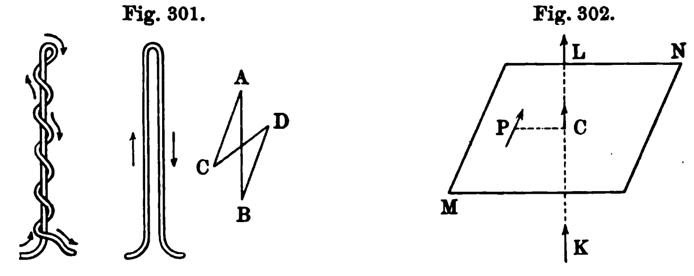


Fig. 301. Fig. 302.

proportional einer gewissen $n$ten Potenz der Entfernung r der Elemente voneinander sei, so daß man

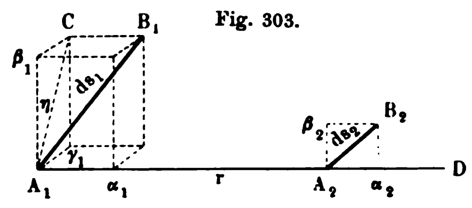
$$f\,ds_1\,ds_2 = \frac{C J_1 J_2\,ds_1\,ds_2}{r^n}\,\Omega$$

schreiben kann, wobei Ω von den Winkelparametern der Elemente ds_1 und ds_2 abhängt, z. B. von den Winkeln $\theta_1 = \angle(r, ds_1)$, $\theta_2 = \angle(r, ds_2)$, $\varepsilon = \angle(ds_1, ds_2)$ und C ein Proportionalitätsfaktor ist. Ferner überzeugte sich Ampère durch den Versuch davon, daß zwei gleiche Ströme von entgegengesetzten Richtungen auch dann keinerlei Wirkung ausüben, wenn einer der Leiter geradlinig ist, der andere aber ihn in einer nahegelegenen schrauben- oder zickzackförmigen Linie umgibt (Fig. 301, links). Hieraus folgt, daß hinsichtlich der ponderomotorischen Wirkungen jedes Stromelement AB (Fig. 301, rechts) durch ein System von Strömen AC, CD und DB ersetzt werden kann, woraus sich die wichtige Folgerung ergibt, daß ein Stromelement durch zwei oder drei seiner Komponenten nach der Regel vom Parallelogramm oder Parallelepipedon ersetzt werden kann. Endlich hat Ampère darauf hingewiesen, daß $f = 0$ ist, wenn die Ebene, welche durch eines der Elemente hindurchgeht, auf dem anderen senkrecht steht ($\varepsilon = 90^0$ und einer der Winkel θ_1 oder θ_2 gleich 90^0). Liouville (1829) hat folgenden Beweis für diesen Satz angegeben: Nehmen wir an, das Element P (Fig. 302) liege in der Ebene MN, welche durch die Mitte des zu ihm senkrechten Elementes C hindurchgeht. Es seien L und K zwei Elemente, die sich in gleichen Abständen

von MN auf den Verlängerungen des Elementes C befinden. Wegen der vollständigen Symmetrie müßten K und L offenbar in gleicher Weise auf P einwirken, wenn sie entgegengesetzte Richtungen hätten, z. B. beide von der Ebene MN sich entfernten. Hieraus folgt, daß die Elemente L und K, da sie gleiche Richtung haben (vgl. Fig. 302), auf P entgegengesetzte Wirkungen ausüben, und dies muß richtig bleiben, wie sehr sich auch L und K der Ebene MN nähern. Fallen sie mit C zusammen, so muß C auf P zu gleicher Zeit anziehend und abstoßend wirken, woraus hervorgeht, daß zwischen C und P keinerlei Wechselwirkung vorhanden ist.

Es seien jetzt $A_1 B_1 = ds_1$ und $A_2 B_2 = ds_2$ (Fig. 303) die Elemente zweier Ströme J_1 und J_2; $A_1 A_2 = r$, $\angle (r, ds_1) = \angle B_1 A_1 A_2 = \theta_1$. $\angle (r, ds_2) = \angle B_2 A_2 D = \theta_2$. Nehmen wir die Ebene (r, ds_2) als eine der Koordinatenebenen an, $A_1 A_2$ als eine der Koordinatenachsen und zerlegen wir ds_2 in die Komponenten α_2 und β_2, ds_1 in die Komponenten α_1, β_1 und γ_1 (vgl. Fig. 303), den Flächenwinkel zwischen den Ebenen (r, ds_1) und (r, ds_2) bezeichnen wir mit $\eta = \angle \beta_1 A_1 C_1$. Die Wechselwirkung zwischen ds_1 und ds_2 kann man durch sechs Wechsel-

Fig. 303.



wirkungen ersetzen, die wir durch folgende Symbole andeuten wollen: (α_1, α_2), (β_1, β_2), (α_1, β_2), (β_1, α_2), (γ_1, α_2) und (γ_1, β_2). Aus unserer letzten Betrachtung folgt, daß die vier letzteren Wechselwirkungen gleich Null sind, so daß

$$f\, ds_1\, ds_2 = (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (39,\text{b})$$

ist. Wir haben

$$(\beta_1, \beta_2) = \frac{C J_1 J_2 \beta_1 \beta_2}{r^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (39,\text{c})$$

wo C ein Proportionalitätsfaktor ist. Setzt man $C = 1$, so führt man damit eine besondere Einheit für die Stromstärke ein, die wir als die elektrodynamische Einheit bezeichnen wollen. Substituiert man noch $\beta_1 = ds_1 \sin\theta_1 \cos\eta$, $\beta_2 = ds_2 \sin\theta_2$, so erhält man

$$(\beta_1, \beta_2) = \frac{J_1 J_2\, ds_1\, ds_2}{r^n} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\eta \quad . \quad . \qquad (39,\text{d})$$

Für (α_1, α_2) erhält man, da $\alpha_1 = ds_1 \cos\theta_1$, $\alpha_2 = ds_2 \cos\theta_2$ ist:

$$(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{K J_1 J_2\, ds_1\, ds_2}{r^n} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \quad . \quad . \quad . \qquad (39,\text{e})$$

wo K ein neuer Proportionalitätsfaktor ist. So ist nun

$$f\,ds_1\,ds_2 = \frac{J_1\,J_2\,ds_1\,ds_2}{r^n}\,\{K\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\eta\}.$$

Führt man den Winkel $\varepsilon = (ds_1, ds_2)$ ein, wobei $\cos\varepsilon = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos\eta$ ist, so erhält man:

$$f\,ds_1\,ds_2 = \frac{J_1\,J_2\,ds_1\,ds_2}{r^n}\,\{\cos\varepsilon - (1-K)\cos\theta_1\cos\theta_2\} \quad . \quad . \quad (40)$$

Den Zahlenwert des Exponenten n hat Ampère durch folgenden Versuch bestimmt. Ein Kreisstrom O_1 kann sich frei zwischen zwei unbeweglichen Kreisströmen O und O_2 um eine vertikale Achse drehen (J ist ein Gegengewicht). Die Radien der drei Kreise verhalten sich zueinander wie 1 : 2 : 4. Ein und derselbe Strom wird durch die drei kreisförmigen Leiter in solchen Richtungen (Fig. 304, die Pfeile) hindurch-

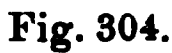
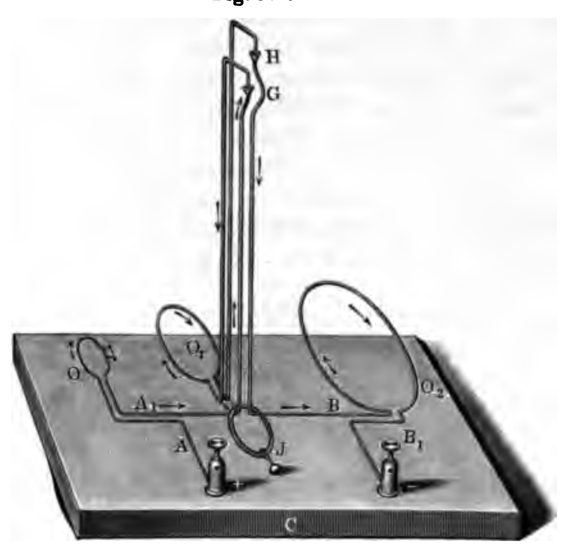


Fig. 304.

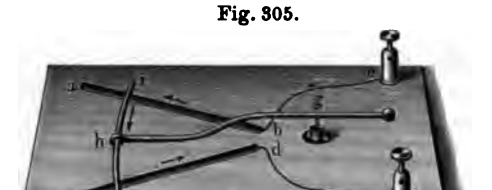


gesandt, daß der Strom O_1 von den Strömen O und O_2 abgestoßen wird. Hierbei zeigte sich nun, daß O_1 in einer solchen Lage stehen blieb, in welcher die Entfernung der Zentren von O_1 und O_2 doppelt so groß war als die Entfernung der Zentren von O und O_1. Hieraus folgt, daß bei Verdoppelung der Kreisdimensionen und Verdoppelung ihres Abstandes (indem man die Wechselwirkung von O_2 und O_1 statt deren von O_1 und O betrachtet) sich die Wechselwirkung nicht ändert (O und O_2 in gleicher Weise auf O_1 wirken). Eine Verdoppelung aller Dimensionen aber, d. h. aller ds_1 und ds_2, vergrößert die Kraft auf das Vierfache. Hieraus folgt, daß $n = 2$ ist, also:

$$f\,ds_1\,ds_2 = \frac{J_1 J_2\,ds_1\,ds_2}{r^2}\{\cos\varepsilon - (1-K)\cos\theta_1\cos\theta_2\}\ . \qquad (40,a)$$

Die Größe K hat Ampère durch folgenden Versuch bestimmt. Der zu hg senkrecht befestigte Metallbogen ik (Fig. 305) dreht sich frei um die Spitze g, wobei er in zwei Punkten die Oberfläche des in den Rinnen ab und cd befindlichen Quecksilbers berührt. Der Strom wird in der durch Pfeile bezeichneten Richtung hindurchgesandt. Ampère fand nun, daß der Bogen ik unbeweglich blieb, wenn sein Mittelpunkt sich im Punkte G befand, obgleich doch auf ihn ein in den sehr nahen Punkten b und d beinahe geschlossener Strom einwirkte. Auch unter der Wirkung eines Magneten (oder Solenoids) blieb ik in Ruhe. Wenn man aber ik in h um einen kleinen Winkel verrückte, so geriet der Bogen in Bewegung, und zwar sowohl unter der Wirkung des Stromes selbst, als auch unter der Wirkung eines Magneten. Hieraus zog Ampère den Schluß, daß **die Kraft, mit welcher ein geschlossener Strom auf ein Stromelement einwirkt, senkrecht zu letzterem ist.** Berechnen wir jetzt die Wirkung des geschlossenen Stromes J_1 auf das Element $J_2 ds_2$. Die Formeln (26,b) und (26,c), S. 784, geben uns

Fig. 305.



$$\left.\begin{aligned} f\,ds_1\,ds_2 &= -\frac{J_1 J_2\,ds_1 ds_2}{r^2}\left\{r\frac{\partial^2 r}{\partial s_1\,\partial s_2} + K\frac{\partial r}{\partial s_1}\,\frac{\partial r}{\partial s_2}\right\} \\ &= -\frac{J_1 J_2\,ds_1\,ds_2}{r^{K+1}}\,\frac{\partial\left(r^K\frac{\partial r}{\partial s_2}\right)}{\partial s_1} = \frac{J_1 J_2\,ds_1\,ds_2}{r^{K+1}}\,\frac{\partial(r^K\cos\theta_2)}{\partial s_1}\end{aligned}\right\}\quad (40,b)$$

Die Komponente dieser Kraft in der Richtung von ds_2 ist gleich

$$f\cos\theta_2\,ds_1\,ds_2 = \frac{J_1 J_2\,ds_1\,ds_2}{r^{K+1}}\cos\theta_2\,\frac{\partial(r^K\cos\theta_2)}{\partial s_1}\,.$$

Die an ds_2 liegende Komponente der Gesamtwirkung des Stromes J_1 muß gleich Null sein, d. h. es ist

$$ds_2\int f\cos\theta_2\,ds_1 = J_1 J_2\,ds_2\int\frac{\cos\theta_2}{r^{K+1}}\,\frac{\partial(r^K\cos\theta_2)}{\partial s_1}\,ds_1 = 0\,.$$

oder, was offenbar dasselbe ist

$$\tfrac{1}{2}J_1 J_2\,ds_2\int\frac{1}{r^{K+1}}\,\frac{\partial(r^K\cos\theta_2)^2}{\partial s_1}\,ds_1 = 0\,.$$

Läßt man $\frac{1}{2} J_1 J_2 ds_2$ fort und integriert teilweise, so erhält man

$$\left|\frac{\cos^2\theta_2}{r}\right| + (2K+1)\int \frac{\cos^2\theta_2}{r^2}\, ds_1 = 0.$$

Da sich das Integral über die geschlossene Umgrenzung zu erstrecken hat, so verschwindet das erste Glied. Die Elemente des zweiten Integrals sind sämtlich positiv, es ist daher $2K+1=0$, d. h. $K=-\frac{1}{2}$. Somit nimmt Formel (40, a) folgende Endgestalt an:

$$f\, ds_1\, ds_2 = \frac{J_1 J_2\, ds_1\, ds_2}{r^2}\left\{\cos\varepsilon - \tfrac{3}{2}\cos\theta_1\cos\theta_2\right\} \quad . \quad . \quad (41)$$

Dies ist nun die berühmte Ampèresche Formel. Eine umfangreiche Literatur knüpft sich an diese Formel und an die kritische Betrachtung ihrer Herleitung. Aber diese ganze Literatur hat heute nur noch historisches Interesse. Wie wir wissen, hält die Herleitung obiger Formel, namentlich aber der letztbeschriebene Versuch, einer strengeren Kritik nicht stand. Zu Beginn dieses Paragraphen haben wir die hierhergehörigen prinzipiellen Fragen erörtert. Wir wollen nur noch auf einige Arbeiten hinweisen, die eine Kritik der Ampèreschen Formel enthalten, oder aber eine andere Ableitung derselben geben; es sind dies Arbeiten von Liouville, Stefan, C. Neumann, Margules, Korteweg, Riecke, D. Bobylew, Lorentz, Moutier, Ettinghausen, Felici, Savary, Blanchet, Pellat, Buguet, Izarn u. a.

Aus Formel (41) lassen sich verschiedene Schlüsse ziehen. Nehmen wir an, die Elemente ds_1 und ds_2 seien einander parallel; dann ist $\varepsilon = 0$ und $\theta_1 = \theta_2$; in der Klammer erhalten wir $1 - \frac{3}{2}\cos^2\theta_1$. Ist $\cos\theta_1 < \sqrt{\frac{2}{3}}$, so ziehen die Elemente einander an; ist $\cos\theta_1 > \sqrt{\frac{2}{3}}$, so stoßen sie einander ab; ist $\cos\theta_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$, also $\theta_1 = 35^0\,16'$, so wirken sie gar nicht aufeinander ein. Dies Resultat hat wenig Wahrscheinlichkeit für sich. Die Elemente eines und desselben geradlinigen Stromes stoßen einander ab, denn für $\varepsilon = \theta_1 = \theta_2 = 0$ ist

$$f\, ds_1\, ds_2 = -\frac{J_1 J_2\, ds_1\, ds_2}{2 r^2}.$$

Ampère, Faraday, Lenz, Forbes u. a. haben dieses Resultat durch Versuche zu verifizieren gesucht, doch sind jene Versuche nicht ganz überzeugend.

Die Formel (41) kann man auf verschiedene Weise umformen. Setzt man $K = -\frac{1}{2}$, so erhält man aus (40, b)

$$f\, ds_1\, ds_2 = \frac{J_1 J_2\, ds_1\, ds_2}{r^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial s_1}\frac{\partial r}{\partial s_2} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s_1\, \partial s_2}\right\} \quad . \quad (41, a)$$

$$\left.\begin{aligned} f\,ds_1\,ds_2 &= -\frac{J_1 J_2\,ds_1\,ds_2}{\sqrt{r}}\,\frac{\partial\left(r^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial r}{\partial s_1}\right)}{\partial s_1} \\ &= \frac{J_1 J_2\,ds_1\,ds_2}{\sqrt{r}}\,\frac{\partial\left(r^{-\frac{1}{2}}\cos\theta_2\right)}{\partial s_1} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (41,\mathrm{b})$$

Wie man leicht sieht, kann man auch

$$f\,ds_1\,ds_2 = -\frac{2\,J_1 J_2\,ds_1\,ds_2}{\sqrt{r}}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s_1\,\partial s_2} \quad . \quad . \quad . \quad (41,\mathrm{c})$$

schreiben.

Es möge ausdrücklich bemerkt werden, daß die Größe f in allen unseren Formeln positiv gerechnet wird, wenn die Stromelemente einander anziehen, und daß die Stromstärken in elektrodynamischen Einheiten gemessen sind, die für zwei parallele, gleich gerichtete, zu r senkrechte ($\varepsilon = 0$, $\theta_1 = \theta_2 = 90^0$) Elemente den Ausdruck

$$f\,ds_1\,ds_2 = \frac{J_1 J_2\,ds_1\,ds_2}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41,\mathrm{d})$$

liefern.

Wir wollen jetzt das Potential $W_{1,2}$ zweier geschlossener Ströme J_1 und J_2 aufeinander berechnen. Nehmen wir an, daß beide Ströme eine sehr kleine Verschiebung erfahren; die Arbeit, die hierbei von sämtlichen Kräften $f\,ds_1\,ds_2$ geleistet wird, muß gleich der Verminderung der Größe $W_{1,2}$ sein und wollen wir sie mit $-\delta W_{1,2}$ bezeichnen. Ist δ die Änderung des Abstandes zwischen ds_1 und ds_2, so ist die Arbeit der Anziehungskraft $f\,ds_1\,ds_2$ gleich $-f\,ds_1\,ds_2\,\delta r$. Es ist, vgl. (41,c):

$$\begin{aligned} -\delta W_{1,2} &= \iint f\,ds_1\,ds_2\,\delta r = -2\,J_1 J_2 \iint \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s_1\,\partial s_2}\,\frac{\delta r}{\sqrt{r}}\,ds_1\,ds_2 \\ &= -4\,J_1 J_2 \iint \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s_1\,\partial s_2}\,\delta\sqrt{r}\,ds_1\,ds_2 \\ &= -2\,J_1 J_2 \left\{\int ds_1 \int \delta\sqrt{r}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s_1\,\partial s_2}\,ds_1 + \int ds_2 \int \delta\sqrt{r}\,\frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial s_1\,\partial s_2}\,ds_1\right\}. \end{aligned}$$

Führt man bei beiden Integralen teilweise Integration aus, wobei die ersten Glieder verschwinden, so erhält man

$$\begin{aligned} \delta W_{1,2} &= 2\,J_1 J_2 \iint \left\{\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s_1}\,\delta\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s_2}\right) + \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s_2}\,\delta\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s_1}\right)\right\} ds_1\,ds_2 \\ &= 2\,J_1 J_2 \iint \delta\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s_1}\,\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s_2}\right) ds_1\,ds_2 = 2\,J_1 J_2\,\delta \iint \frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s_1}\,\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s_2}\,ds_1\,ds_2 \end{aligned}$$

$$= \tfrac{1}{2} J_1 J_2 \delta \iint \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s_1} \frac{\partial r}{\partial s_2} ds_1 ds_2 = -\tfrac{1}{2} J_1 J_2 \delta \iint \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} ds_1 ds_2,$$

vgl. (26, b), S. 784. Hieraus folgt

$$W_{1,2} = -\tfrac{1}{2} J_1 J_2 \iint \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} ds_1 ds_2 \quad . \; . \; . \quad (42)$$

oder, vgl. (26, d), S. 784,

$$W_{1,2} = -\tfrac{1}{2} J_1 J_2 \iint \frac{\cos\varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43)$$

Dieser Ausdruck ist zuerst von F. Neumann (1845) angegeben worden. Vergleicht man (42) und (43) mit den Formeln (27) und (28), S. 785, so sieht man, daß sie sich voneinander durch den Faktor $\frac{1}{2}$ unterscheiden. Dieser Umstand erklärt sich dadurch, daß wir bei Ableitung der Formeln (27) und (28) von der Biot-Savartschen Formel (48), S. 538, ausgingen, in welcher wir den Proportionalitätsfaktor C gleich 1 setzten und hierdurch die elektromagnetische (el.-mg.) Einheit für die Stromstärke einführten; die Formeln (42) und (43) aber haben wir erhalten, nachdem wir in Formel (39) oder, was offenbar dasselbe ist, in (41, d) $C = 1$ gesetzt haben, wodurch wir zur elektrodynamischen (el.-dyn.) Einheit für die Stromstärke gelangt sind. Bezeichnen wir mit J_d und J_m die numerischen Werte eines und desselben in el.-dyn. und el.-mg. Einheiten gemessenen Stromes und suchen wir die Dimension der el.-dyn. Einheit der Stromstärke. In Formel (41, d) stellt die ganze linke Seite eine Kraft dar; sie ist von der Dimension MLT^{-2}, daher ist

$$[J_d]^2 = MLT^{-2}$$

oder

$$[J_d] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}} T^{-1}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit (46, b), S. 535, oder mit (4, b) S. 491, so sieht man, daß die el.-mg. und die el.-dyn. Einheit der Stromstärke die gleiche Dimension haben. (Bei Herleitung von (42) und (43) hatten wir $\mu = 1$ gesetzt.) Dies wird auch dadurch bestätigt, daß (42) und (43) sich von (27) und (29) unabhängig von der Wahl der Grundeinheiten für L, M und T durch den Faktor $\frac{1}{2}$ unterscheiden. Die angeführten Formeln geben $\frac{1}{2} J_d^2$ und J_m^2, d. h.

$$J_d = J_m \sqrt{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44)$$

Der numerische Wert eines in el.-dyn. Einheiten gemessenen Stromes ist $\sqrt{2}$ mal größer als der numerische Wert desselben in el.-mg. Einheiten gemessenen Stromes. Bezeichnet man diese Einheiten mit i_d und i_m, so ist

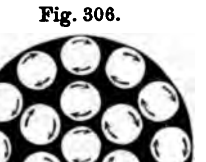
$$i_d = \frac{i_m}{\sqrt{2}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44, a)$$

Die el.-dyn. Einheit der Stromstärke ist $\sqrt{2}$ mal kleiner als die el.-mg. Einheit, unabhängig davon, welches die Grundeinheiten der Länge, Maße und Zeit sind. Gegenwärtig wird das el.-dyn. Maßsystem nicht benutzt.

Wie man leicht einsieht, lassen sich die Formeln (42) und (43) durch eine ganze Reihe von anderen Ausdrücken ersetzen, die sich von (29), (30), (31), (32), (33), (33, a), (34) und (34, a) nur durch den Faktor $\frac{1}{2}$ unterscheiden. Besonders interessant ist jetzt die Formel (30), welche an die Ampèresche Formel (41) erinnert.

Die Zusammenfassung aller experimentellen und theoretischen Untersuchungen über die Elektrodynamik hat Ampère zu seiner berühmten Theorie des Magnetismus geführt, die auf der Identität der Wirkungen eines Magneten und eines Solenoids beruht. Nach seiner Theorie hat man einen jeden Magneten als ein System von sehr kleinen „Elementarmagneten" anzusehen, von denen jeder ebenfalls von einem sehr kleinen elektrischen Strome umgeben ist. Nimmt man an, daß alle diese Ströme in Ebenen liegen, die zur Magnetachse senkrecht sind, so kann die Gesamtheit aller in einer solchen Ebene liegenden Ströme (Fig. 306) durch einen einzigen, um die Ebene herumfließenden Strom ersetzt werden, wie wir hierauf bereits auf S. 537, Fig. 212, hingewiesen haben. Führt man diese Substitution für alle Ebenen aus, so ist in der Tat der Magnet durch ein Solenoid ersetzt. Man muß die Annahme machen, daß die Elementarströme keinerlei Widerstand finden, weshalb auch ihre Energie nicht in Wärmeenergie übergeht.

Fig. 306.



Viele Forscher haben die Ampèresche Formel (41) durch andere Ausdrücke für die Kraft $f ds_1 ds_2$ der Wechselwirkung zweier Stromelemente zu ersetzen gesucht. Man findet zunächst, daß man entsprechend den Formeln (42) und (43) die beiden folgenden Gesetze für die Wechselwirkung von Elementen gelten lassen kann (die Stromstärken in el.-dyn. Einheiten ausgedrückt):

$$f ds_1 ds_2 = \frac{1}{2} J_1 J_2 \frac{\cos \varepsilon}{r^2} ds_1 ds_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

$$f ds_1 ds_2 = \frac{1}{2} J_1 J_2 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} ds_1 ds_2 \quad . \quad . \quad . \quad (45, a)$$

Es läßt sich nämlich streng beweisen, daß man aus diesen Differentialgesetzen für die Energie $W_{1,2}$ die Ausdrücke (42) und (43) erhält. Die Formeln (41), (45) und (45, a) führen, falls die Elemente ds_1 und ds_2 eine besondere Lage haben, zu ganz verschiedenen Resultaten. Für zwei geschlossene Ströme aber führen alle drei Formeln zu

gleichen Ausdrücken für $W_{1,2}$, also auch zu gleichen Wechselwirkungen. Dürfte man die unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen in (42) und (43) als elementare Potentiale ansehen, so erhielte man für die Kraft, welche in der Richtung von r wirkt, gerade die Ausdrücke (45) und (45, a); aber zu diesen Kräften würden noch andere sich gesellen, welche die Elemente zu drehen suchen würden, wie dies zu Anfang dieses Paragraphen erläutert worden war. Von den Formeln, die man an Stelle der drei oben genannten in Vorschlag gebracht hat, erwähnen wir die Formel von Grassmann (1845), Hankel (1865) und Reynard (1870), die in el.-dyn. Einheiten folgende Gestalt hat:

$$f ds_1 ds_2 = \tfrac{1}{2} J_1 J_2 ds_1 ds_2 \frac{\sin\theta_2 \cos\psi}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad (45, b)$$

wo $\theta_2 = \angle (r, ds_2)$, ψ der Winkel zwischen ds_1 und der durch ds_2 und r gehenden Ebene ist. Diese Formel gibt für zwei geschlossene Ströme die gleichen Resultate, wie die Ampèresche Formel. Fällt eines der Elemente mit r zusammen, so gibt Formel (45, b) den Wert $f = 0$, wodurch sich diese Formel wesentlich von den früher betrachteten unterscheidet. Riecke (1880) hat auf eine Reihe von möglichen Wechselwirkungen zwischen den Elementen ds_1 und ds_2 hingewiesen, die sich aus der Ampèreschen Formel ergeben, wenn man letztere in Teile zerlegt. Stefan (1869) hat in besonders klarer Weise gezeigt, daß es unendlich viele Elementargesetze geben kann, welche für zwei geschlossene Ströme zu demselben Resultate führen.

Wir gehen jetzt zu den nächst den Arbeiten von Ampère und F. Neumann, von dem Formel (43) stammt, klassischen Arbeiten von Helmholtz und W. Weber über. Wie wir gesehen haben, vgl. (39, a), ist die Existenz eines elementaren Potentials $w ds_1 ds_2$ unvereinbar mit der Grundannahme von Ampère, daß zwischen ds_1 und ds_2 nur eine Kraft in der Richtung von r wirkt. Nichtsdestoweniger hat man bisweilen die in Formel (42) unter dem Integralzeichen stehenden Ausdrücke

$$w ds_1 ds_2 = -\tfrac{1}{2} J_1 J_2 \frac{\cos\varepsilon}{r} ds_1 ds_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

$$w ds_1 ds_2 = -\tfrac{1}{2} J_1 J_2 \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2}{r} ds_1 ds_2 \quad . \quad . \quad (46, a)$$

als Potentiale zweier Stromelemente aufeinander angesehen. Helmholtz legte seiner Lehre die Annahme zugrunde, daß zwei Elemente ds_1 und ds_2 in der Tat ein bestimmtes Potential haben, das gleich

$$w ds_1 ds_2 = \frac{A J_1 J_2 ds_1 ds_2}{r} \{(1+k)\cos\varepsilon + (1-k)\cos\theta_1 \cos\theta_2\} \quad . \quad (47)$$

ist, wo A und k Konstante bedeuten und A von der Wahl der Einheiten abhängt. Für zwei geschlossene Ströme erhält man als Wert von $W_{1,2}$

den Ausdruck (31), S. 785 (in el.-dyn. Einheiten), der, wie wir gesehen haben, sicher richtig ist, da er auf Grund von (26, d) identisch mit (27) oder (28) ist. Die Helmholtzsche Annahme, daß die Kräfte der Wechselwirkung zweier Elemente tatsächlich ein Potential von der Form (47) haben, hat eine umfangreiche Literatur hervorgerufen; von den an ihr beteiligten Autoren seien Bertrand genannt, der nicht einmal die Möglichkeit der Existenz eines elementaren Potentials zugibt, ferner C. Neumann, Zöllner, Herwig u. a. Selbstverständlich können Versuche mit geschlossenen Strömen die Frage nicht lösen; man hat dazu ungeschlossene, induzierte Ströme zu verwenden; die Versuche, welche N. Schiller zu diesem Zwecke unternommen hat, haben ebenfalls, wie er selbst eingehend begründet, keine entscheidende Bedeutung.

In ganz anderer Richtung ging W. Weber an die Lösung der Frage; er legte seiner Theorie kein Differentialgesetz, sondern ein Punktgesetz (S. 565) für die Wechselwirkung zweier Elektrizitätsteilchen zugrunde; dasselbe ist durch Formel (9, a), S. 41, bereits angegeben worden, es lautet:

$$f = C\,\frac{\eta\eta_1}{r^2}\left\{1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2a^2 r\,\frac{d^2r}{dt^2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Es ist hier die Annahme gemacht, daß die Kraft f nicht nur vom Abstande r abhängt, sondern auch von den beiden ersten Differentialquotienten desselben nach der Zeit t. Für unbewegte Teilchen geht das Gesetz in das Coulombsche über. Sehr bemerkenswert ist hierbei, daß die Kraft f ein Potential

$$w = -\,C\,\frac{\eta\eta_1}{r}\left\{1 - a^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48,\text{a})$$

hat, denn es ist

$$f = -\frac{dw}{dr} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48,\text{b})$$

Weber hat gezeigt, daß Formel (48) zu einem Ausdruck für die Wechselwirkung der Teilchen führt, der mit der Ampèreschen Formel identisch ist und daß sie auch als Grundlage für eine Ableitung der Gesetze der elektrodynamischen Induktion (Bd. IV, 2) dienen kann. An dem sich lange hinziehenden Streite über die Zulässigkeit der Weberschen Formel haben sich Helmholtz, C. Neumann, Thomson und Tait, Clausius u. a. beteiligt.

Teils Modifikationen der bereits betrachteten, teils selbständigere Theorien sind von zahlreichen Forschern in Vorschlag gebracht worden. Der Zweck aller dieser Theorien ist, eine Erklärung nicht nur für die ponderomotorischen, sondern auch für die elektromotorischen (Induktions-) Wirkungen der bewegten Elektrizität zu geben. Wir wollen

hierüber nur einige wenige Worte sagen und zwar zum Teil aus dem Grunde, weil wir die Induktionserscheinungen noch nicht betrachtet haben, hauptsächlich aber, weil alle diese Theorien gegenwärtig nur noch von historischem Interesse sind. Hierher gehören beispielsweise die Arbeiten von C. Neumann, Clausius, Riemann, Hankel, Reynard, Moutier, Edlund u. a.

C. Neumann hat eine ganze Reihe zum Teil sehr umfangreicher Arbeiten einer sorgfältigen und allseitigen Analyse der Grundlagen der Elektrodynamik gewidmet; hierher gehört sein Werk „Elektrische Kräfte", 1873. In seiner eigenen Theorie nimmt er das Vorhandensein eines Potentials an, das von $\frac{dr}{dt}$ abhängt, schreibt ihm aber eine bestimmte Ausbreitungsgeschwindigkeit zu.

Clausius nimmt für das elektrodynamische Potential w den Ausdruck

$$w = -\frac{\eta\eta'}{r}(1 + kvv' \cos\varepsilon) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

an, in welchem v und v' die absoluten Geschwindigkeiten sind, mit denen sich die Teilchen η und η' bewegen, ε aber der Winkel zwischen den Richtungen dieser Bewegungen. Formel (49) führt zu dem Ergebnis, daß zwei Teilchen, die sich an der Erdoberfläche in relativer Ruhe befinden, aufeinander mit einer Kraft einwirken, die von der Erdgeschwindigkeit v abhängt, denn es ist in diesem Falle:

$$f = \frac{\eta\eta'}{r^2}(1 + kv^2).$$

Fröhlich, Budde, Lorberg, Levy, Wand u. a. haben gegen die Clausiussche Theorie Einwürfe erhoben.

Edlund macht ebenso wie Weber die Annahme, daß die Kraft f von $\frac{dr}{dt}$ und von $\frac{d^2r}{dt^2}$ abhängt; den Grund hierfür sieht er darin, daß die Kraft gleichsam hinter dem bewegten Teilchen zurückbleibt, weshalb sie auch nicht den vom Coulombschen Gesetze geforderten Wert erreichen kann, wenn sich das Teilchen bewegt. Gegen diese Theorie sind von Herwig, Baumgarten, Lecher, von mir u. a. Einwürfe erhoben worden.

§ 6. Experimentelle Prüfung der Gesetze der Wechselwirkung von Strömen. Wie wir gesehen haben, wird die Frage nach der Wechselwirkung zweier Ströme durch die Formeln (24) und (25), S. 781, vollständig gelöst. W. Weber war der Erste, der eine Prüfung dieser Formeln durch das Experiment vorzunehmen gesucht hat. Er hat zu diesem Zwecke das Elektrodynamometer konstruiert, dessen Hauptbestandteil zwei Drahtrollen oder Ringe sind, die aus isoliertem

Draht bestehen. Eine der Rollen ist unbeweglich, die andere ist bifilar aufgehängt, wobei die Aufhängedrähte gleichzeitig die Stromleitung vermitteln. Weber hat zwei Elektrodynamometer konstruiert. Beim ersten hatte die unbewegliche Rolle einen inneren Durchmesser und eine Breite von 76 mm und enthielt 3500 Windungen von 0,7 mm dickem Draht. Die bewegliche Rolle (5000 Windungen von 0,4 mm dickem Draht) wurde innerhalb der unbeweglichen Rolle aufgehängt, so daß die Mittelpunkte der Rollen zusammenfielen, die Ebenen ihrer Wickelungen aber zueinander senkrecht waren. Die bewegliche Rolle war mit einem Spiegel versehen, um ihre Drehungen mittels Fernrohr und Skala zu messen. Diesen Apparat benutzte Weber zur Prüfung des Gesetzes über die Abhängigkeit der Wechselwirkung von Strömen von ihrer Stärke. Sind die Ströme gleich, so muß ihre Wechselwirkung proportional dem Quadrat der Stromstärke sein. Weber stellte die Achse der unbeweglichen Rolle senkrecht zur Ebene des magnetischen Meridians ein und brachte im Norden davon in einem Abstande von 583 mm einen beweglichen Magnet (Stahlspiegel) an, dessen unter der Einwirkung der festen Rolle erfolgende Ablenkungen zur Messung der Stärke des Stromes J dienten. Indem er nun ein und denselben Strom durch beide Rollen gehen ließ und seine Stärke ungefähr im Verhältnis von 1 : 2 : 3 änderte, überzeugte sich Weber davon, daß sich die Wechselwirkung der Rollen genau proportional dem Quadrat der Stromstärke änderte.

Fig. 307.

Das zweite Elektrodynamometer bestand aus einer (während der Dauer der Beobachtung) unbeweglichen Rolle A (Fig. 307), deren Achse an einem kleinen Bänkchen befestigt war. Die bewegliche Rolle aa umgibt die unbewegliche; sie trägt einen kleinen Spiegel d, der zur Beobachtung der Ablenkungen dient. Die Rolle A kann in der Weise aufgestellt werden, daß die Mittelpunkte beider Rollen zusammenfallen. Man kann sie aber auch leicht herausnehmen und seitlich von aa (siehe die Figur) aufstellen, im Norden, Süden, Osten oder Westen und dabei in verschiedenen Entfernungen von aa; die Ebenen der Windungen beider Rollen wurden bei Webers Versuchen immer senkrecht zueinander gestellt, die Achse der beweglichen aber wurde, bevor der Strom hindurchging, in die Ebene des magnetischen Meridians gebracht. Eine weitere unbewegliche Rolle, durch welche derselbe Strom J hindurchgesandt wurde, der auch durch beide Rollen des Elektrodynamometers ging, diente zur Messung der Stromstärke. Weber hat das Drehmoment des Kräftepaares, das auf die bewegliche Rolle wirkte, berechnet, und zwar erstens bei verschiedenen Abständen r und zweitens bei folgenden drei Stellungen der Rolle: 1. wenn ihre Zentren zusammenfielen; 2. wenn die Ebene der Windungen der festen Spule durch das Zentrum der beweglichen ging (die erste befindet sich im Norden oder Süden von der zweiten); 3. wenn die Ebene der Windungen der beweglichen Spule durch das Zentrum der festen ging (die zweite befindet sich im Osten oder Westen von der ersten). Weber beobachtete bei den Entfernungen $r = 0$, 300, 400, 500 und 600 mm. Er fand die vollkommenste Übereinstimmung zwischen den Wechselwirkungen, wie sie die Beobachtung und die Rechnung auf Grund der Ampèreschen Formel ergaben.

Spätere Prüfungen der Gesetze über die Wechselwirkungen von Strömen stammen von Cazin (1864), Boltzmann (1869) und Niemöller (1878).

Literatur.

Zu § 2.

Coulomb: Mém. Ac. Roy. de Paris 1785, p. 587; Collection des mémoires I, p. 127.

Lamont: Handbuch des Erdmagnetismus, Berlin 1849, S. 21.

Chwolson: Mém. de l'Acad. Imp. de St. Pétersbourg (7) **31**, No. 10, 1883.

A. Schmidt: Berl. Ber. 1907, S. 306.

Gauss: Intensitas viris magneticae ad mensuram absolutam revocata. Comm. soc. reg. scient. Gottingensis **8**, 1841; Werke **5**, 79, 1867; P. A. **28**, 241, 604, 1833; Resultate aus den Beobachtungen des magnet. Vereins in Göttingen, 1836.

Kirchhoff: Berl. Ber. 28. Febr. 1884; W. A. **24**, 52, 1885; Vorles. über Elektr. u. Magn., Leipzig 1891, S. 170.

Weihrauch: Mém. Soc. Natur. de Moscou **14**, No. 4, 1883.
Lloyd: Trans. R. Irish etc. **19**, 159, 249, 1843.
A. M. Mayer: Phil. Mag. (5) **5**, 397, 1878; **7**, 98, 1879.
Wood: Phil. Mag. (5) **46**, 162, 1898.

Zu § 3.

Biot et Savart: Ann. d. chim. et phys. (2) **15**, 222, 1820.
Ampère: Ann. d. chim. et phys. (2) **15**, 67, 198, 1820; **37**, 133, 1828; Gilb. Ann. **67**, 123, 1821.
Garnault: J. de Phys. (3) **1**, 245, 1892.
Raveau: Compt. rend. **130**, 31, 1900.
Decharme: Compt. rend. **115**, 651, 1892.
Maxwell: Elektricity and Magnetism **2**, 304.
Minchin: Phil. Mag. (5) **35**, 354, 1893; **36**, 201, 1893; **37**, 204, 1894.
Nagaoka: Phil. Mag. (6) **6**, 19, 1903.
Hicks: Phil. Mag. 1881, p. 628.
James Stuart: Phil. Mag. (4) **45**, 219, 1873.
Hankel: Ber. k. sächs. Ges. 1850, S. 78.
Dub: P. A. **90**, 255, 1853; **105**, 54, 1858.
Waltenhofen: P. A. **141**, 407, 1870; Wien. Ber. (2) **62**, 438, 1870; Carls Repert. **6**, 305, 1870.
St. Loup: Ann. de l'école norm. **7**, 181, 1870.
Cazin: Compt. rend. **74**, 733, 1872; **75**, 261, 1872.
C. Neumann: Crelles Journ. **37**, 47, 1848.
Riecke: P. A. **145**, 218, 1872.
Wallentin: W. A. **1**, 452, 545, 1877.
Minchin: Electrician **35**, 603, 706, 1895.
Barlow: Phil. Mag. (2) **59**, 241, 1822; On magnetic attraction, London 1823, p. 279.
Faraday: Royal Instit. Sept. 1821; Ann. d. chim. et phys. (2) **18**, 337, 1821; Gilb. Ann. **71**, 124, 1822; **73**, 113, 1823.
Riecke: W. A. **23**, 252, 1884; **25**, 496, 1885.
Lamprecht: W. A. **25**, 71, 1885.
Colard: Eclair. électr. 1895, p. 162.
Le Roux: Ann. d. chim. et phys. (3) **61**, 409, 1860.
Gore: Phil. Mag. (4) **48**, 39, 1874.
Davy: Trans. R. Soc. 1823, p. 153; Ann. d. chim. et phys. (2) **25**, 64, 1824.
Bertin: Ann. d. chim. et phys. (3) **58**, 90, 1860; (4) **16**, 74, 1869; Mém. de la soc. des sciences natur. de Strassbourg **6**, 47, 1865.
De la Rive: Ann. d. chim. et phys. (3) **56**, 286, 1859.
Ritchie: Trans. R. Soc. 1833, II, p. 318; P. A. **27**, 552, 1833; **32**, 538, 1834.
Ulsch: Ztschr. f. phys. u. chem. Unterr. **16**, 82, 1903.
W. König: W. A. **60**, 519, 1897.
Nikolajew: Compt. rend. **119**, 469, 1894; **129**, 202, 475, 1899; Journ. d. phys. (3) **4**, 472, 1895; **10**, 140, 142, 1901.

Zu § 4.

Ampère: Ann. d. chim. et phys. (2) **15**, 79, 170, 1820; **18**, 88, 313, 1821; **20**, 414, 1822; **26**, 145, 390, 1824; Journ. de phys. **93**, 441, 1821; Gilb. Ann. **67**, 113, 225, 1821; Mém. de l'Acad. de Paris (2) **6**, 175, 387, 1823; Collection des Mém. **3**, 1; neue Ausgabe: Paris, Hermann, 1883.
Savary: Ann. d. chim. et phys. (2) **22**, 91, 1823.

Ritchie: Phil. Mag. (3) **4**, 13, 1834.
Roget: P. A. **36**, 550, 1835.
Bertin: Mém. de la Soc. des sc. natur. de Strassbourg **5** u. **6**, 1865; Ann. d. chim. et phys. (3) **55**, 304, 1859; **58**, 90, 1860.
Mühlenbein: Ztschr. f. phys. Unterr. **1**, 202, 1888.
Benecke: Ztschr. f. phys. Unterr. **2**, 181, 1885.
Oberbeck: Ztschr. f. phys. Unterr. **5**, 284, 1892.
Plana: Giorn. acad. **111**, 3.
Kirchhoff: Fortschr. d. Phys. 1848, S. 336.
W. Weber: Elektrodynam. Maßbestimmungen, 1846, S. 42.
Mascart et Joubert: Leçons sur l'électr. et le magn. **1**, 540, 1882.

Zu § 5.

Ampère s. unter § 4.
Liouville: Ann. d. chim. et phys. (2) **41**, 415, 1829.
Stefan: Wien. Ber. **59**, 693, 1869.
C. Neumann: Elektrische Kräfte 1873, S. 43.
Margules: Wien. Ber. **78**, 779, 1878.
Korteweg: Crelles Journ. **90**, 49, 1880.
Riecke: W. A. **11**, 278, 1880.
Bobylew: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **7**, 173, 1875.
Lorentz: Arch. Néerl. **17**, 85, 1882.
Moutier: Compt. rend. **63**, 299, 1866; **78**, 1201, 1874; Ann. d. chim. et phys. (5) **4**, 267, 1875; Bull. Soc. Philomath. (7) **3**, 148, 1882.
Ettinghausen: Wien. Ber. **77**, 109, 1878.
Felici: N. Cim. (3) **9**, 243, 1882.
Savary: Ann. d. chim. et phys. **22**, 91, 1823.
Blanchet: Ann. de l'école norm. sup. **2**, 1, 1865.
Pellat: Journ. d. phys. (2) **3**, 117, 1884.
Buguet: Journ. d. phys. (2) **2**, 462, 1884.
Duhem: Journ. d. phys. (2) **5**, 26, 1886.
Izarn: Compt. rend. **98**, 143, 1884.
F. Neumann: Berl. Ber. 1845, S. 24; 1847, S. 6.
Faraday: Quarterly Journ. of sc. **12**, 416, 1822; Gilb. Ann. **72**, 127, 1822.
E. Lenz: P. A. **47**, 461, 1839.
Forbes: Phil. Mag. (4) **21**, 81, 1861.
Grassmann: P. A. **64**, 1, 1845.
Reynard: Ann. de chim. et phys. (4) **19**, 272, 1870.
Hankel: P. A. **126**, 440, 1865; **131**, 607, 1860; Ber. d. sächs. Ges. d. Wiss. 1865, S. 30; 1866, S. 269.
Helmholtz: Wissenschaftliche Abhandl. **1**, 545, 1882; Crelles Journ. **72**, 1, 1870; **75**, 35, 1872; **78**, 273, 1874; Berl. Ber. 1873, S. 91; P. A. **153**, 545, 1874.
Bertrand: Compt. rend. **73**, 965, 1871; **75**, 860, 1872; **79**, 337, 1874; **158**, 87, 1876.
C. Neumann: Ber. d. k. sächs. Ges. 1872, S. 144; 1874, S. 145; P. A. **155**, 226, 1875.
Zöllner: P. A. **154**, 321, 1875; **158**, 106, 1876.
Schiller: P. A. **159**, 456, 537, 1876; **160**, 333, 1877.
Herwig: P. A. **153**, 263, 1874.
W. Weber: Elektrodynamische Maßbest. **1**, 99, 1846; **2**, 323; P. A. **73**, 229, 1848; **136**, 485, 1869; **156**, 21, 1875; W. A. **4**, 366, 1878.
Helmholtz (Webersches Gesetz): Crelles Journ. **72**, 1, 1870; **75**, 35, 1872; Wiss. Abhandl. **1**, 545, 647, 1882.

Thomson u. Tait: Handb. d. theor. Physik 1871, S. 350.
Tait: Sketch of thermodynamics 1868, p. 76.
C. Neumann (Geschwindigkeit des Potentials): Math. Ann. **1**, 317, 1869; Prinzipien der Elektrodynamik, Tübingen 1868.
Clausius: P. A. **156**, 657, 1875; **157**, 489, 1876; W. A. **1**, 14, 1877; **10**, 613, 1880; **11**, 604, 1880; Journ. f. Math. **82**, 85, 1876; Die mechan. Wärmetheorie **2**, 227, 1879.
Frölich: W. A. **9**, 261, 1880; **12**, 121, 1881.
Budde: W. A. **10**, 553, 1880; **12**, 644, 1881; **29**, 488, 1886; **30**, 100, 1887; Verh. Berl. Ges. **7**, 10, 1888.
Lorberg: P. A., Ergbd. **8**, 599, 1877; W. A. **36**, 671, 1889.
Riemann: P. A. **131**, 257, 1867.
Wand: P. A. **159**, 94, 1876.
Levy: Compt. rend. **95**, 986, 1882.
Moutier: Compt. rend. **63**, 299, 1866; **78**, 1201, 1875; Ann. d. chim. et phys. (5) **4**, 267, 1875.
Edlund: Théorie des phénom. électr. 1874; P. A. **148**, 421, 1873; **149**, 87, 1873; **156**, 590, 1875; Ergbd. **6**, 95, 241, 1873; Arch. sc. phys. (2) **43**, 209, 297, 1872; W. A. **1**, 161, 1877; **2**, 347, 1877; **15**, 165, 1882.
Hankel: P. A. **126**, 440, 1865; **131**, 607, 1860; Ber. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1865, S. 30; 1866, S. 269.
Reynard: Ann. d. chim. et phys. (4) **19**, 272, 1870.
Baumgarten: P. A. **154**, 305, 1875.
Herwig: P. A. **150**, 623, 1873.
Lecher: Repert. de phys. **20**, 151, 1884.
Chwolson: P. A., Ergbd. **8**, 140, 1876.

Zu § 6.

W. Weber: Elektrodyn. Maßbest. 1846.
Cazin: Ann. de chim. et phys. (4) **1**, 257, 1864; Repertorium d. Physik **1**, 42, 1866.
Boltzmann: Wien. Ber. **60**, 69, 1869.
Niemöller: W. A. **5**, 433, 1878.

Achtes Kapitel.

Erregung des magnetischen Zustandes der Körper.

§ 1. **Einleitung.** Nachdem wir im vorhergehenden Kapitel die ponderomotorischen Kräfte betrachtet haben, die im Magnetfelde auftreten, gehen wir jetzt zur Untersuchung der sonstigen Wirkungen dieses Feldes auf die in ihm befindlichen Körper über. Zunächst wollen wir in diesem Kapitel die rein magnetischen Erscheinungen betrachten, welche beim Einbringen irgend eines Körpers in das Magnetfeld auftreten. Die Intensität dieser Erscheinungen hängt bei gegebenem Magnetfelde vor allen Dingen von der Substanz des Körpers ab; sie ist sehr stark nur für wenige Substanzen (insbesondere für

Fe, Stahl, Ni, Co) und sehr klein für fast alle übrigen, aber aller Wahrscheinlichkeit nach niemals gleich Null. Rein äußerlich genommen, kann die in Frage stehende Erscheinung durch folgenden Satz definiert werden: ein Körper, der in ein Magnetfeld gebracht ist, wird selbst zum Magneten; er wird magnetisiert. Man sagt hierbei, im Körper werde ein magnetischer Zustand hervorgerufen, oder es werde in ihm Magnetismus induziert; die Erscheinung selbst aber nennt man magnetische Induktion. Man kann diese Erscheinung von zwei Gesichtspunkten aus betrachten. Man kann sagen, es erfolgen unter der Einwirkung des Feldes oder gar unter unmittelbarer Einwirkung der Feldquellen (actio in distans!) im Körper derartige Veränderungen, daß er sich in einen Magneten verwandelt. Das Feld dieses neu entstehenden Magneten überlagert gleichsam das bereits vorhandene Feld, so daß eine gewisse neue Kräfteverteilung im äußeren Raume entsteht. Verschwindet das ursprüngliche Feld, so verbleibt in einigen Fällen ein Teil des induzierten Magnetismus, sowie das ihm zugehörige Feld. Im Zusammenhange mit einer derartigen Auffassung steht auch die Frage nach dem „Mechanismus“ der magnetischen Induktion, z. B. der Versuch, diesen Mechanismus auf eine Drehung von Molekularmagneten (s. u.) zurückzuführen. Man kann aber das Auftreten der magnetischen Induktion auch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachten; bringt man in ein Magnetfeld einen Körper, dessen magnetische Permeabilität μ sich von der Permeabilität μ_0 des Mediums (beispielsweise der Luft) unterscheidet, so erfolgt eine Neuordnung der Induktionslinien, die sich z. B. für $\mu > \mu_0$ innerhalb des Körpers verdichten, weshalb letzterer alle Eigenschaften eines Magneten erlangt, fingierten Nord- und Südmagnetismus erhält usw. Von diesem Gesichtspunkte aus dürfte man schon nicht mehr von einer Einwirkung des Feldes auf den Körper reden, sondern eher von einer Einwirkung des Körpers auf das Feld. Der Körper selbst aber repräsentiert hierbei nur das Medium für die Induktionslinien. Man könnte meinen, die zweite Auffassung sei die richtigere, die dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft besser entsprechende. Dies ist aber nicht der Fall. Erstens läßt sich nämlich die Erscheinung des remanenten Magnetismus nicht ohne Zuhilfenahme von neuen Hypothesen mit obiger Auffassung in Einklang bringen. Zweitens aber ist die Feldänderung durchaus nicht die einzige Erscheinung, die man beim Einführen von Körpern in ein Magnetfeld beobachtet; es ändert sich hierbei, wie wir später sehen werden, noch eine ganze Reihe von physikalischen Eigenschaften dieser Körper. Drittens führt gerade die neueste, gegenwärtig (1907) noch in der Entwickelung begriffene Elektronentheorie des Magnetismus zu dem Schlusse, daß innerhalb eines in ein Magnetfeld gebrachten Körpers wirkliche Änderungen vor sich gehen. Alles dies berechtigt uns dazu,

wie früher von einer magnetisierenden Wirkung des Magnetfeldes zu sprechen.

Wir wollen uns zunächst einige früher abgeleitete Formeln ins Gedächtnis zurückrufen. Es sei H die Feldintensität in einem beliebigen Punkte des Körpers. Wir hatten mit J den Magnetisierungsgrad im gegebenen Punkte bezeichnet; derselbe ist, vgl. (23), S. 409, gleich dem auf die Volumeneinheit bezogenen magnetischen Momente, sowie gleich der Dichte k des fingierten Magnetismus, der sich an einer vom gegebenen Körper losgelöst gedachten Grundfläche eines Parallelepipedons befindet, vorausgesetzt, daß jene Grundfläche senkrecht zur magnetischen Achse des losgetrennten Teiles ist, vgl. (23, a), S. 409. Nimmt man an, die Magnetisierung J sei vom Felde H bewirkt, so erhält man, vgl. (24)

$$J = \varkappa H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo $\varkappa$ die magnetische Suszeptibilität der betrachteten Substanz ist. Denken wir uns innerhalb des Körpers einen unendlich schmalen Spalt (vgl. S. 410), dessen Seiten senkrecht zu H und daher mit fingiertem Magnetismus von der Dichte $\pm k'$ bedeckt sind. Die Feldintensität innerhalb eines solchen Spaltes ist dann die Induktion $B = \mu H$, wobei μ die magnetische Permeabilität der Substanz bedeutet. Die Größe dieses Feldes ist gleich

$$H + 4\pi k' = H + 4\pi J = H + 4\pi\varkappa H = (1 + 4\varkappa) H.$$

Hieraus folgt, vgl. (25), S. 410

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Früher unterschied man nur paramagnetische und diamagnetische Körper; zu ersteren rechnete man die Körper, für welche $\varkappa > 0$ ist, zu den letzteren Körper, für die $\varkappa < 0$ ist; für alle Körper ist $\mu > 0$. Die Größe μ ist dem Induktionsvermögen K der Dielektrika analog. Bringt man in ein homogenes Magnetfeld eine diamagnetische ($\mu < 1$) Kugel, so ordnen sich die Kraftlinien derart an, wie es die Fig. 70, S. 152, zeigt; bei einer paramagnetischen Kugel erhält man die in Fig. 71, S. 152, abgebildete Linienverteilung. Einen Fall, welcher der Fig. 72, S. 152, ($\mu = \infty$) entsprechen würde, gibt es im Gebiete der magnetischen Erscheinungen nicht.

Gegenwärtig pflegt man die Körper hinsichtlich ihrer magnetischen Eigenschaften in stark magnetische oder ferromagnetische und in schwach magnetische einzuteilen. Zu den ersten rechnet man die verschiedenen Eisen- und Stahlsorten, Nickel, Kobalt, sowie einige Legierungen und Erze. Die Bezeichnungen „paramagnetische" und „diamagnetische" Körper gebraucht man nur für schwach magnetische Körper. Es ist dies um so mehr am Platze, als einige neuere Theorien zu dem Ergebnisse führen, daß die Erscheinungen, die man in ferromagnetischen Substanzen beobachtet, sich ihrem Wesen nach von den-

jenigen unterscheiden, die etwa in paramagnetischen Körpern auftreten. Wenn sich jene Theorien bestätigen sollten, so wäre es direkt falsch, die ferromagnetischen Körper zu den paramagnetischen zu rechnen.

Die Komponenten der Magnetisierung J hatten wir (S. 437) mit A, B, C bezeichnet. Die Volumdichte ϱ des fingierten Magnetismus in irgend einem Punkte wird demnach, vgl. (18), S. 439, durch folgende Formel bestimmt:

$$\varrho = -\left\{\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

An der Magnetoberfläche hat man die Oberflächendichte k des fingierten Magnetismus; dieselbe ist, vgl. (17) und (20), S. 439, gleich

$$k = \overline{A}\cos(n,x) + \overline{B}\cos(n,y) + \overline{C}\cos(n,z) = \overline{J}\cos(\overline{J},n) \quad (4)$$

wo $\overline{J}(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ die Magnetisierung an der Oberfläche, n die Richtung der an diese Oberfläche gezogenen Normalen ist. Das Potential V des Magneten ist, vgl. (19), S. 439, gleich

$$V = \int\frac{k\,ds}{r} + \int\frac{\varrho\,dv}{r} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

wo ds und dv die Elemente der Oberfläche und des Volumens, r der Abstand dieser Elemente von dem Punkte ist, auf den sich V bezieht. Wir hatten die Magnetisierung eine solenoidale genannt, wenn überall $\varrho = 0$ ist, d. h. wenn

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

ist, vgl. (41, a), S. 453, als eine geschichtete (lamellare) hatten wir sie bezeichnet, wenn ein Potential φ der Magnetisierung vorhanden ist, d. h. wenn man

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad C = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

setzen kann, vgl. (43, a), sowie (44), S. 454.

Wir werden weiter unten sehen, daß $\varkappa$, also auch μ, nicht etwa Größen sind, die für eine gegebene Substanz einen bestimmten numerischen Wert haben, sondern daß diese Größen in hohem Grade vom Felde H selbst abhängen. Dies gilt insbesondere von den stark paramagnetischen Substanzen, deren Hauptrepräsentant das Eisen ist. Wie wir sehen werden, beruht die hauptsächliche Ursache für die Kompliziertheit der Erscheinung der magnetischen Induktion gerade auf dieser Abhängigkeit der Größen $\varkappa$ und μ von H.

§ 2. Mathematische Theorie der magnetischen Induktion. Diese Theorie behandelt folgende Aufgabe: es ist ein Magnetfeld

gegeben, in das ein Körper von bestimmter Größe, Form und Zusammensetzung eingeführt wird; zu bestimmen ist der magnetische Zustand dieses Körpers, d. h. die Verteilung des Magnetismus in ihm oder, was auf dasselbe hinausläuft, sein Potential in allen Punkten sowohl innerhalb, als auch außerhalb des Körpers selbst. Eine Methode zur Lösung dieser Aufgabe ist zuerst von Poisson (1824) angegeben worden, der diese Lösung auch auf einige besondere Fälle in Anwendung gebracht hat. Wir wollen hier nicht die vielen Forscher namhaft machen, die jene Theorie der magnetischen Induktion weiter ausgearbeitet und geprüft haben; die wichtigsten diesbezüglichen Arbeiten sind im Literaturverzeichnis aufgeführt. Bereits an dieser Stelle aber wollen wir auf einen wesentlichen Mangel dieser Theorie hinweisen: sie beruht auf der Annahme, daß $\varkappa$ oder μ Größen sind, die für eine gegebene Substanz konstant sind, d. h. nicht von der Intensität H des Feldes im Innern des Körpers abhängen, was, wie gesagt, nicht richtig ist. Außerdem läßt diese Theorie die mögliche Existenz eines remanenten Magnetismus ganz außer acht. Läßt man auch den letzteren Umstand beiseite, so kann man dennoch sagen, daß uns die Theorie nur dann eine richtige Vorstellung von der Verteilung des induzierten Magnetismus gibt, wenn H in allen Punkten im Innern des Körpers ein und denselben Wert hat. Aber selbst in diesem Falle beantwortet sie nicht die Frage nach dem Zusammenhange zwischen dem Magnetiesierungsgrade und der Größe des gegebenen Außenfeldes H. Die Versuche, einen Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und H in die Theorie einzuführen, werden wir nicht näher betrachten.

Führen wir folgende Bezeichnungen ein. Es sei die Intensität eines gegebenen Außenfeldes H_0, das Potential V_0; die Induktion gibt im Innern des Körpers die Volumendichte ϱ, auf seiner Oberfläche die Dichte k des Magnetismus. Das durch diesen Magnetismus im Innern des Körpers wachgerufene Feld sei H_i, das Potential V_i, außerhalb des Körpers seien die entsprechenden Größen H_e und V_e. Das Gesamtfeld im Innern des Körpers sei $H = H_0 + H_i$, das Potential $V = V_0 + V_i$, der Magnetisierungsgrad J, seine Komponenten A, B, C. Die Summe der zweiten Differentialquotienten nach x, y, z bezeichnen wir symbolisch mit Δ^2. Es ist dann im Innern des Körpers $\Delta^2 V_0 = 0$, folglich $\Delta^2 V = \Delta^2 V_i$. Wir haben nun

$$\Delta^2 V = \Delta^2 V_i = -4\pi\varrho \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = -4\pi k \quad \ldots\ldots \quad (8,a)$$

$$J = \varkappa H = \varkappa (H_0 + H_i) \quad \ldots\ldots \quad (8,b)$$

Setzt man $-\varkappa(V_0 + V_i) = -\varkappa V = \varphi$, so ist

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad C = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Hieraus folgt, daß die Magnetisierung eine geschichtete ist, vgl. (7). Formel (3) gibt $\varrho = -\Delta^2\varphi = \varkappa\Delta^2 V$. Substituiert man dies in (8), so erhält man $(1 + 4\pi\varkappa)\Delta^2 V = \mu\Delta^2 V = 0$. Es ist aber $\mu > 0$, folglich $\Delta^2 V = 0$, dies aber gibt $\varrho = 0$. Hieraus folgt, daß die Magnetisierung eine solenoidale ist. Man erhält also bei der magnetischen Induktion gleichzeitig geschichtete und solenoidale Magnetisierung; fingierter Magnetismus befindet sich nur an der Körperoberfläche. Die Dichte k dieses Magnetismus ist, vgl. (4), gleich

$$k = J\cos(J, n) = -\varkappa\left(\frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_i}{\partial n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (8, c)$$

Es ist aber, vgl. (5):

$$V_i = \int\frac{k\,ds}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

folglich

$$V_i = -\varkappa\int\frac{ds}{r}\left(\frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_i}{\partial n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

In den Formeln (9) und (10) ist die gesamte allgemeine Theorie der magnetischen Induktion enthalten. Die Aufgabe ist gelöst, wenn man eine solche Verteilung der fingierten Massen von der Dichte k an der Körperoberfläche gefunden hat, daß das Potential V_i derselben der Gleichung (10) genügt. Substituiert man (9) in (8, c), so erhält man für k folgenden Ausdruck:

$$k = -\varkappa\left\{\frac{\partial}{\partial n}\int\frac{k\,ds}{r} + \frac{\partial V_0}{\partial n}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10, a)$$

Nicht uninteressant ist es, daß man die allgemeinen Gleichungen erhält, wenn man vom Gesetze der Konstanz des magnetischen Induktionsflusses ausgeht. Bezeichnet man die Komponenten der Kräfte H_0, H_e, H_i in der Richtung der Normalen n mit $H_{0,n}$, $H_{e,n}$, $H_{i,n}$, so lautet dieses Gesetz:

$$H_{e,n} + H_{0,n} = \mu(H_{i,n} + H_{0,n}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

oder

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = (\mu - 1)\left(\frac{\partial V_0}{\partial n} + \frac{\partial V_i}{\partial n}\right).$$

Ersetzt man die linke Seite durch $-4\pi k$, vgl. (8, a), und setzt $\mu - 1 = 4\pi\varkappa$, so erhält man den Ausdruck (8, c) für k.

Das Feld H_i hat im allgemeinen eine solche Richtung, daß die Intensität $H = H_0 + H_i$ kleiner als die Intensität H_0 ist. Die Magnetisierung J ist kleiner als die Magnetisierung $J_0 = \varkappa H_0$, die man bei Abwesenheit einer Oberflächenschicht von der Dichte k erhalten würde. Diese Schicht übt daher eine entmagnetisierende Wirkung

aus, als deren Maß wir die Größe [1])

$$N = -\frac{H_i}{J} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

betrachten. Sie bezieht sich auf einen bestimmten Punkt des Körpers; man kann aber auch Mittelwerte einführen (vgl. S. 455). Die Formeln (8, b) und (12) geben uns:

$$N = \frac{\varkappa H_0 - J}{\varkappa J} = \frac{J_0 - J}{\varkappa J} \quad \ldots \quad (12,a)$$

$$J = \frac{\varkappa H_0}{1 + \varkappa N} = \frac{J_0}{1 + \varkappa N} \quad \ldots \quad (12,b)$$

$$H_i = -\frac{\varkappa N}{1 + \varkappa N} H_0 \quad \ldots \ldots \quad (12,c)$$

$$H = H_0 + H_i = \frac{H_0}{1 + \varkappa N} \quad \ldots \quad (12,d)$$

$$\varkappa = \frac{J}{H_0 - NJ} \quad \ldots \ldots \quad (12,e)$$

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa = \frac{H_0 + (4\pi - N)J}{H_0 - NJ} \quad . \quad (12,f)$$

Für die Induktion $B = \mu H = \mu (H_0 + H_i)$ erhält man, wenn man (12, c) substituiert und μ an Stelle von $\varkappa$ einführt,

$$B = \frac{4\pi\mu}{4\pi + (\mu - 1)N} H_0 \quad \ldots \quad (13)$$

Hieraus ist

$$\mu = \frac{(4\pi - N)B}{4\pi H_0 - NB} \quad \ldots \ldots \quad (13,a)$$

$B = \mu\,(H_0 + H_i)$ und (8, b) geben $B = \frac{\mu J}{\varkappa}$; demgemäß ist nach (12, e) und (12, f):

$$B = H_0 + (4\pi - N)J \quad \ldots \quad (13,b)$$

$$J = \frac{B - H_0}{4\pi - N} \quad \ldots \ldots \quad (13,c)$$

$$\mu = \frac{B}{H_0 - NJ} \quad \ldots \ldots \quad (13,d)$$

---

[1]) Auf S. 455 hatten wir die Bezeichnungen J und J' anstatt J_0 und J gebraucht und die Mittelwerte H_i' und N' eingeführt; ferner hatten wir dort die Richtungen der Vektoren H_i' und J' unberücksichtigt gelassen und daher das Minuszeichen fortgelassen.

Bei der Herleitung unserer Formeln hatten wir von vornherein die Größe $\varkappa$ eingeführt; es sei bemerkt, daß viele Autoren einen anderen Koeffizienten p gebrauchen, der gleich

$$p = \frac{4\pi\varkappa}{3 + 4\pi\varkappa} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (13\ e)$$

ist. Ist $\varkappa$ sehr klein, so kann man die Größe H_i im Vergleich zu H_0 fortlassen und $J = \varkappa H_0$, $N = 0$ setzen; die Gestalt des Körpers kommt hierbei gar nicht in Betracht. Ist $\varkappa$ sehr groß und N nicht klein, so erhält man aus (12, b) $J = H_0 : N$, so daß also die Magnetisierung in diesem Falle gar nicht von $\varkappa$ abhängt.

Wenden wir uns der Betrachtung einiger besonderer Fälle zu. In ein homogenes Feld ($H_0 = Const$) ist eine sehr große Platte eingeführt, deren Seitenflächen senkrecht zu H_0 sind. Es sei k die Dichte des Magnetismus auf derjenigen Plattenseite, deren äußere Normale die Richtung von H_0 hat; auf der anderen Seite sei die Dichte gleich k'. Es läßt sich leicht nachweisen, daß $k' = -k$ ist. Es ist nämlich $H_i = -2\pi(k \pm k')$, also $H_0 + H_i = H_0 - 2\pi(k \pm k') = Const$, folglich $J = \varkappa(H_0 + H_i) = Const$. Formel (4) gibt uns $k = J$, $k' = -J$ und hieraus folgt $k' = -k$. Jetzt haben wir $H_i = -4\pi k = -4\pi J$ und daher

$$J = \varkappa(H_0 + H_i) = \varkappa(H_0 - 4\pi J).$$

Danach ist

$$J = k = \frac{\varkappa H_0}{1 + 4\pi\varkappa} = \frac{1 - \mu}{4\pi\mu} H_0 \quad . \quad . \quad . \qquad (14)$$

$$H_i = -\frac{1 - \mu}{\mu} H_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (14, a)$$

$$H = H_0 + H_i = \frac{H_0}{\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (14, b)$$

$$N = \frac{H_i}{J} = 4\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (14, c)$$

vgl. (45, c), S. 456.

Wir gehen zu dem Falle über, wo sich eine Kugel vom Radius r in einem homogenen Felde ($H_0 = Const$) befindet. Wie wir gesehen haben (S. 441), ruft eine gleichmäßig magnetisierte Kugel ($J = Const$) das Innenfeld

$$H_i = -\tfrac{4}{3} J\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15)$$

hervor, vgl. (22, b), S. 441; ihr magnetisches Moment M ist, vgl. S. 440 nach der Formel (22), gleich

$$M = \tfrac{4}{3}\pi r^3 J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15, a)$$

Eine solche gleichmäßige Magnetisierung genügt den Gleichungen für die magnetische Induktion, denn Formel (15) steht nicht im Wider-

spruch mit der Grundgleichung (8, b), d. h. der Formel

$$J = \varkappa (H_0 + H_i) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15, b)$$

wo H_0 und J konstante Größen sind. Setzt man hier die Formel (15) ein, so erhält man

$$J = \varkappa (H_0 - \tfrac{4}{3} J \pi)$$

und hieraus

$$J = \frac{\varkappa H_0}{1 + \frac{4 \pi \varkappa}{3}} = \frac{3}{4 \pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2} H_0 \quad . \quad . \qquad (15, c)$$

$$H_i = - \frac{\mu - 1}{\mu + 2} H_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15, d)$$

$$H = H_0 + H_i = \frac{3}{\mu + 2} H_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15, e)$$

Berechnet man den Winkel φ wie in Fig. 173, S. 441 (H_0 hat die Richtung von links nach rechts), so ist

$$k = J \cos \varphi = \frac{3}{4 \pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 2} H_0 \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \qquad (15, f)$$

$$N = - \frac{H_i}{J} = \frac{4 \pi}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15, g)$$

was mit Formel (45, b), S. 456, übereinstimmt. Endlich ist noch das magnetische Moment M der Kugel, vgl. (15, a) und (15, c), gleich

$$M = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} r^3 H_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15, h)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Größe p, vgl. (13, d), nichts anderes als das magnetische Moment einer Kugel vom Radius $r = 1$ ist, welche sich in einem homogenen Felde von der Intensität $H_0 = 1$ befindet. Für die Induktion B finden wir auf Grund von (13) und (15, g):

$$B = \frac{3 \mu}{\mu + 2} H_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (15, i)$$

Ist μ sehr groß, so kann man $B = 3 H_0$ setzen, d. h. es liegen die Kraftlinien im Innern der Kugel dreimal so dicht aneinander als im äußeren, ursprünglichen Felde. Der Ausdruck (15, f) stimmt vollkommen mit (77), S. 150, überein, wenn man $K_1 = 1$, $K_2 = \mu$, $F = - H_0$ setzt; worauf dies beruht, läßt sich leicht erkennen.

Bringt man in ein homogenes Feld H_0 ein Rotationsellipsoid, dessen Achse die Richtung H_0 hat, so wird das Ellipsoid gleichmäßig ($J = Const$) magnetisiert. Auf S. 456 waren die Formeln (45, d) (45, e) und (45, f) für die Größe N' angegeben worden, die identisch mit der in den Formeln (12) bis (12, f) vorkommenden Größe N ist. Substituiert man dieses N in (12, b), (12, c), (12, d), so erhält man die

Größen J, H_i und H. Die Dichte ist $k = J \cos\varphi$, wo φ den Winkel zwischen der Drehungsachse und der Normalen zur Ellipsoidoberfläche in dem Punkte, auf welchen sich die Größe k bezieht, bedeutet.

Bringt man in ein homogenes Feld H_0 einen sehr langen Zylinder so, daß seine Achse parallel zu H_0 ist, so kann man in den Teilen des Zylinders, die weit von seinen Grundflächen abstehen, die entmagnetisierende Wirkung des Magnetismus unberücksichtigt lassen und $H_i = 0$, $N = 0$ setzen; es ist dann

$$J = \varkappa H_0; \qquad B = \mu H_0 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Ist die Achse eines sehr langen Zylinders senkrecht zum Felde H_0, so ist, vgl. (45, g), S. 456,

$$N = 2\pi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Die Formeln (12, b), (12, c), (12, d) und (13) geben:

$$J = \frac{\varkappa H_0}{1 + 2\pi\varkappa} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\mu - 1}{\mu + 1} H_0 \quad \ldots \quad (17, \mathrm{a})$$

$$H_i = \frac{2\pi\varkappa H_0}{1 + 2\pi\varkappa} = \frac{\mu - 1}{\mu + 1} H_0 \quad \ldots\ldots \quad (17, \mathrm{b})$$

$$H = \frac{H_0}{1 + 2\pi\varkappa} = \frac{2}{\mu + 1} H_0 \quad \ldots\ldots \quad (17, \mathrm{c})$$

$$B = \frac{2\mu}{\mu + 1} H_0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17, \mathrm{d})$$

Für einen sehr großen Wert von μ kann man $B = 2 H_0$ setzen, während für eine Kugel im Grenzfalle $B = 3 H_0$ war.

Große praktische Bedeutung hat die Magnetisierung eines Ringes, der durch Umdrehung irgend einer ebenen Figur um eine Achse entsteht, die in der Ebene dieser Figur liegt, ohne sie jedoch zu schneiden (vgl. Fig. 277, S. 765). Wir wollen Zylinderkoordinaten einführen. Es sei n der Abstand des gegebenen Punktes M von der Achse, z der Abstand des Punktes M von irgend einer zur Achse senkrechten Ebene und φ der Winkel zwischen der durch M und die Achse und einer beliebigen, ebenfalls durch die Achse gehenden Ebene. Kirchhoff hat den Fall untersucht, wo das gegebene Feld H_0 überall senkrecht zur Ebene $\varphi = Const$, d. h. zum Ringquerschnitt ist und nicht von φ abhängt. Die Kraftlinien des Feldes H_0 sind Kreise, für deren sämtliche Punkte $z = Const$ und $r = Const$ ist. In diesem Falle ist $H_0 = f(r, z)$; der Ring wird magnetisiert, es ist aber gar kein Oberflächenmagnetismus vorhanden, es ist daher $N = 0$, $H_i = 0$, $H_e = 0$, d. h. der Ring bringt im Außenraume keinerlei Wirkung hervor; es ist $H = H_0$ und $B = \mu H$. Besonders interessant ist der Fall, wo das Feld dadurch entsteht, daß ein Strom i durch einen gleichmäßig

auf den Ring gewickelten Draht (geschlossenes Solenoid) fließt. In diesem Falle ist, vgl. (16), S. 765:

$$H = H_0 = \frac{2\,ni}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

wo n die Gesamtzahl der Drahtwindungen ist. Es ist hier

$$J = \frac{2\,\varkappa ni}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18,a)$$

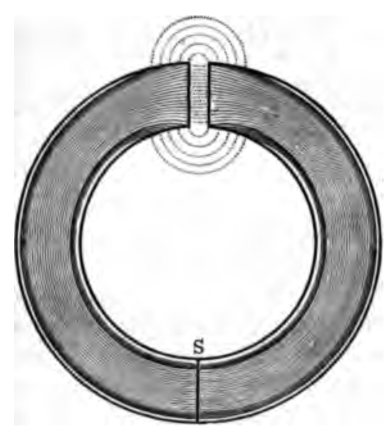
$$B = \frac{2\,\mu ni}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18,b)$$

Der gesamte Induktionsfluß Ψ ist gleich

$$\Psi = 2\,\mu ni \iint \frac{dr\,dz}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18,c)$$

wo sich das Integral auf sämtliche Elemente des Ringquerschnittes erstreckt. Für einen Ring mit rechteckigem Querschnitt, dessen (zur Achse parallele) Höhe h, dessen Breite b und Achsenabstand des Mittelpunktes gleich R ist, erhält man

Fig. 308.



$$\Psi = 2\,\mu nihlg\,\frac{2\,R + b}{2\,R - b} \quad (18,d)$$

Ist $\frac{b}{R}$ sehr klein, so kann man

$$\Psi = \frac{2\,\mu inS}{R} \quad . \quad (18,e)$$

setzen, wo $S = hb$ ist. Es sei ein Ring mit rundem Querschnitt (ein sog. Toroid) gegeben; es sei ϱ sein Querschnittsradius, also $S = \pi\varrho^2$. Dann ist

$$\Psi = 4\,\pi\mu ni \left\{R - \sqrt{R^2 - \varrho^2}\right\} \quad (18,f)$$

Hier ist R der Abstand des Querschnittzentrums von der Ringachse. Für einen sehr kleinen Wert von $\frac{\varrho}{R}$ ist

$$\Psi = \frac{2\,\mu inS}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18,g)$$

Die Magnetisierung eines Ringes für andere Fälle des wirksamen Feldes haben Boltzmann, Sauter, Mues, Schütz, Bulgakow u.a. untersucht.

Von sehr großer praktischer Bedeutung ist der Fall eines ungeschlossenen Ringes (Ring mit Spalte oder Ausschnitt), vgl. Fig. 308. Die Theorie dieses Falles ist von du Bois entwickelt worden. Nehmen

wir an, es haben R und ϱ die frühere Bedeutung, die Spaltbreite sei gleich d; der Ring ist, wie im vorhergehenden Falle, mit einer Wickelung versehen, durch welche ein Strom hindurchgeht. Die Induktionslinien ordnen sich in der Weise an, wie aus der Figur zu ersehen ist: in der Nähe von S, d. h. in großer Entfernung von dem Spalt, unterscheiden sie sich nur sehr wenig von den Kreislinien, die wir beim geschlossenen Ringe hatten. Unter der Wirkung des Oberflächenmagnetismus auf den einander zugekehrten Enden des ungeschlossenen Ringes nehmen die Größen H und B ab, wenn man sich dem Spalt nähert. Infolgedessen divergieren die Induktionslinien und treffen die Seitenfläche des Ringes unter sehr spitzen Winkeln. Diese Linien treten fast senkrecht zur Oberfläche ins Freie, wenn μ einen großen Wert hat (Eisen), wie man dies aus Formel (18), S. 407, ersieht, wo $\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = 1$, also $tg\,\alpha_1 = \mu\, tg\,\alpha_2$ ist, wenn α_1 und α_2 die Winkel zwischen den Induktionslinien und der Normalen zur Ringoberfläche sind. Somit geht nicht der ganze Induktionsfluß durch den Spalt hindurch. Diese Erscheinung bezeichnet man als Streuung (engl. leakage). Es sei nun Ψ der mittlere Induktionsfluß im Innern des Ringes, Ψ' der Induktionsfluß im Spalte. Es wird dann die Größe

$$\sigma = \frac{\Psi}{\Psi'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

der Streuungskoeffizient genannt; es ist offenbar $\sigma > 1$ und um so größer, je breiter der Spalt ist. Bei Vernachlässigung des Oberflächenmagnetismus an der Seitenfläche des Ringes und unter der Annahme, daß an den Grundflächen die Dichte k überall die gleiche sei, fand du Bois für den Entmagnetisierungsfaktor N den Ausdruck

$$N = \frac{4\pi\left(d + s - \sqrt{d^2 + s^2}\right)}{2\pi R - d} \quad \ldots \quad (19,\mathrm{a})$$

Ist d sehr klein, d. h. ist der Spalt sehr eng, so ist

$$N = \frac{2d}{R} \cdot \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19,\mathrm{b})$$

Drückt man die Spaltbreite in Prozenten p des Kreisumfanges $2\pi R$ oder in Graden α des Winkels aus, unter welchem der Spalt vom Ringmittelpunkte aus erscheint, so erhält man aus dem letzten Ausdrucke angenähert

$$N = \tfrac{1}{2} p = 0{,}035\,\alpha \,. \quad \ldots \ldots \quad (19,\mathrm{c})$$

H. Lehmann (1893) hat die du Boisschen Formeln für einen Ring aus schwedischem Eisen ($R = 7{,}96$ cm, $\varrho = 0{,}895$) und fünf Werte von d (zwischen 0,040 und 0,357 cm) experimentell geprüft und hierbei folgende Werte für N und σ gefunden:

$d =$	0,040	0,063	0,103	0,202	0,357 cm
$N =$	0,0079	0,0102	0,0140	0,0203	0,0246 „
$\sigma =$	(1,31)	1,52	1,79	2,48	3,81 „

Die Zahl 1,31 war durch Extrapolation aus der empirischen Formel $\sigma = 1 + 7d : R$ gefunden worden. Die Resultate dieser Messungen stehen mit der Theorie von du Bois in sehr befriedigender Übereinstimmung.

Im Zusammenhange mit der inneren, entmagnetisierenden Wirkung des induzierten Oberflächenmagnetismus steht auch die Erscheinung der magnetischen Beschattung, die durch Hohlkörper, sogenannte magnetische Schirme, hervorgerufen wird. Bringt man in ein Magnetfeld einen Hohlkörper, beispielsweise eine Hohlkugel oder einen sehr langen Hohlzylinder aus stark magnetischer Substanz, so ruft der auf diesem Körper induzierte Oberflächenmagnetismus in dem Hohlraum selbst eine Wirkung hervor, die dem Außenfelde H_0 entgegengesetzt ist, infolgedessen das Feld H' innerhalb des Hohlraumes schwächer wird als das Feld H_0. Der Hohlraum befindet sich im „Schatten" und der Körper selbst wirkt als Schirm, der den Hohlraum vor magnetischen Wirkungen, die von außen kommen, schützt. Die ponderomotorische Wirkung des äußeren Feldes auf die in dem Hohlraume befindlichen Körper (Magnete, Ströme) ist vermindert, dafür aber treten ponderomotorische Kräfte auf, die auf den als Schirm dienenden Hohlkörper einwirken. Die Kraftlinien des Außenfeldes werden bei ihrem Eintritt in den Körper stark gebrochen und verlaufen größtenteils innerhalb der Masse desselben, so daß sie den Hohlraum rings umgeben. Mit den hierher gehörigen Fragen haben sich Stefan (1882), du Bois, Wills u. a. beschäftigt. Wir begnügen uns mit einem Hinweise auf zwei Formeln. Für eine Hohlkugel mit dem inneren Radius R_1, dem äußeren Radius R_2 ist

$$\frac{H_0}{H_1} = 1 + \frac{2}{9}\,\frac{(\mu - 1)^2}{\mu}\left(1 - \frac{R_1^3}{R_2^3}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20)$$

Für einen großen Wert von μ und geringe Dicke $d = R_2 - R_1$ kann man

$$\frac{H_0}{H_1} = 1 + \frac{9\pi\varkappa}{3}\,\frac{d}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20,\text{a})$$

setzen. Für einen Hohlzylinder von sehr großer Länge, dessen Achse senkrecht zu H_0, dessen Radien R_1 und R_2 sind, erhält man

$$\frac{H_0}{H_1} = 1 + \frac{1}{4}\,\frac{(\mu - 1)^2}{\mu}\left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) \quad . \quad . \quad . \qquad (20,\text{b})$$

Für große Werte von μ und kleine Werte von $d = R_2 - R_1$ ist

$$\frac{H_0}{H_1} = 1 + 2\pi\varkappa\,\frac{d}{R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (20,\text{c})$$

Du Bois und Wills haben Formeln für doppelte und dreifache Schirme angegeben, d. h. für zwei und drei konzentrische Kugelflächen oder konaxiale Zylinderflächen.

Alles, was bisher über die Theorie der magnetischen Induktion gesagt war, stützte sich auf die Annahme, daß $\varkappa$ und μ konstante Größen seien, die von der Intensität des wirksamen Magnetfeldes H nicht abhängen und daß daher die Magnetisierung proportional der Feldintensität sei. Wie aber bereits erwähnt war, hängen $\varkappa$ und μ von H ab und strebt die Magnetisierung J, die zugleich mit H wächst, einer gewissen Grenze, der sogenannten magnetischen Sättigung zu. Außerdem gibt unsere Theorie keinen Aufschluß darüber, wie es sich mit der Erscheinung des remanenten Magnetismus verhält. Obgleich wir die Resultate der experimentellen Bestimmungen des Zusammenhanges zwischen $\varkappa$, μ und H noch nicht betrachtet haben, wollen wir dennoch schon an dieser Stelle auf einen Versuch zur theoretischen Erklärung der Sättigung und des remanenten Magnetismus hinweisen. Diese Erklärung geht von der Hypothese der drehbaren Molekularmagnete aus, auf deren Grundzüge wir bereits auf S. 428 hingewiesen haben. Die ersten diesbezüglichen Versuche stammen von W. Weber (1852), der die Annahme machte, daß die magnetische Kraft H das Molekül zu drehen und seine Achsen parallel zu H zu stellen suche, wobei dann eine andere entgegengesetzt wirkende Kraft F wachgerufen wird, die parallel ist zu der ursprünglichen Richtung der Molekülachse vor ihrer Drehung. Es sei n die sehr große Anzahl von Molekülen in der Volumeneinheit, m das magnetische Moment eines Moleküls. In diesem Falle ist der Grenzwert der Magnetisierung J, welcher $H = \infty$ entspricht, gleich mn. Nehmen wir an, die Molekülachse habe zuerst den Winkel α mit der Richtung H gebildet, nach erfolgter Drehung aber sei dieser Winkel gleich β. Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann:

$$tg\,\beta = \frac{D \sin\alpha}{H + D\cos\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (21)$$

Infolge der Drehung hat sich ein magnetisches Moment ΔJ in der Richtung von H gebildet; dasselbe ist gleich

$$\Delta J = m(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Führt man in diese Formel den Wert für β aus (21) ein und macht die Annahme, daß sämtliche Richtungen α gleich oft vorkommen, so erhält man für J das folgende Resultat:

Für $0 < H < D$ ist

$$J = \tfrac{2}{3}\, mn \frac{H}{D} \quad \ldots \ldots \quad (21, a)$$

Für $H > D$ ist

$$J = mn\left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{H^2}{D^2}\right) \quad \ldots \ldots \quad (21,\mathrm{b})$$

Das heißt, daß bei kleinen Werten von H die Magnetisierung J proportional H bis zu $H = D$ wächst, wobei J gleich $\frac{2}{3}$ des Maximalwertes mn wird. Für $H > D$ nähert sich die Magnetisierung asymptotisch dem Werte mn. Vom remanenten Magnetismus ist in der Weberschen Theorie keine Rede.

Maxwell hat diese Lücke ausgefüllt. Er nimmt an, daß das Molekül, wenn der Drehungswinkel $\alpha - \beta$ desselben unterhalb eines gewissen Wertes θ bleibt, nach dem Verschwinden des Feldes H vollständig in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Ist dagegen $\alpha - \beta > 0$, so dreht sich nach Verschwinden von H das Molekül nur um einen Winkel θ zurück und bleibt daher um den Winkel $\alpha - \beta - \theta$ abgelenkt, wodurch sich der remanente Magnetismus erklärt. Das Endresultat dieser Theorie ist der Wirklichkeit nicht so nahe, daß man ihm eine große Bedeutung beimessen könnte.

Eine Erklärung für das Auftreten der Kraft D infolge der Wirkung aller benachbarten Moleküle auf das betrachtete Molekül habe ich, wie es scheint, zuerst gegeben. Eine weitere Behandlung der Theorie der drehenden Molekularmagnete kann man in den Arbeiten von Righi (1880), Auerbach (1881), Ewing (1899), du Bois (1894) u. a. finden.

Wenn die Intensität des Feldes plötzlich ansteigt oder abfällt, so findet zuerst eine sehr schnelle Änderung des magnetischen Zustandes statt; hierauf folgt, wie es scheint, nach einer kurzen Pause, eine weitere langsame Änderung, die mehrere Minuten andauern kann. Diese Erscheinung wurde von Holborn (1896), Martens (1897), Klemenčič (1897) und in neuester Zeit von Gildemeister (1907) untersucht. Gildemeister studierte speziell den sehr schnell verschwindenden Teil der Magnetisierung für den Fall, daß das Feld plötzlich vernichtet wird (durch Öffnung des magnetisierenden Stromes). Er fand, daß diese Magnetisierung in $^1/_{300\,000}$ Sek. auf weniger als die Hälfte, in $^1/_{150\,000}$ Sek. auf weniger als ein Zehntel sinkt, und in $^1/_{50\,000}$ Sek. völlig verschwunden ist. Von $^1/_{50\,000}$ bis $^1/_{2000}$ Sek. findet keine weitere Veränderung statt; die weitere langsame Abnahme der Magnetisierung beginnt also jedenfalls erst später.

§ 3. **Elektromagnete.** Im vorhergehenden Paragraphen hatten wir die Erscheinung der magnetischen Induktion in einem Magnetfelde von beliebigem Ursprunge betrachtet und nur für den Fall eines Ringes die Annahme gemacht, daß das Feld durch einen elektrischen Strom hervorgerufen wird, welcher durch die Ringwickelung hindurchfließt. Wir wenden uns jetzt einem weniger allgemeinen Falle der Magnetisie-

rung durch den Strom zu, indem wir annehmen, der zu magnetisierende Körper bestehe aus Eisen, besitze also einen großen Wert von μ. Ein solcher Körper heißt ein Elektromagnet; er besteht aus einem eisernen Kern und der Wickelung oder Spule; letztere kann aus einer oder mehreren Lagen von isoliertem Drahte bestehen, durch welchen der Strom gesandt wird. Dem Elektromagneten kann man verschiedene Gestalt geben; am gebräuchlichsten sind geradlinige (der Kern ist ein geradliniger Stab von gewöhnlich kreisförmigem Querschnitte) und hufeisenförmige. Die letzteren sind zuerst von Sturgeon (1825) und Brewster (1826) konstruiert worden. Gewöhnlich sind sie mit zwei geradlinigen Spulen versehen, die auf die Schenkel des hufeisenförmigen Eisenkernes gesteckt werden. Eine Platte aus weichem Eisen, die bisweilen an die Pole des Elektromagneten angelegt wird, heißt Anker.

Die Intensität des Magnetfeldes H innerhalb der Spule wird durch Formel (15, a), S. 763, bestimmt, wenn man $m = 1$ setzt. Angenähert kann man auch die Formel (14, c), S. 763, gelten lassen, wenn man unter n die Anzahl der Drahtwindungen versteht, die auf die Längeneinheit der Spule in allen Lagen kommen, d. h. wenn man $H = 4\pi n i$ setzen kann, wobei i die Stromstärke ist. Ist S der Flächeninhalt des Querschnittes vom Hohlraum innerhalb der Spule, so erhält man für den Kraftfluß

$$\Phi = 4\pi n i S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Fig. 309.

Füllt man jenen Hohlraum durch den eisernen Kern aus, so wird der Induktionsfluß Ψ innerhalb der Spule gleich

$$\Psi = 4\pi n(1 + 4\pi k) i S = 4\pi n \mu i S \quad . \quad . \quad . \quad (22, a)$$

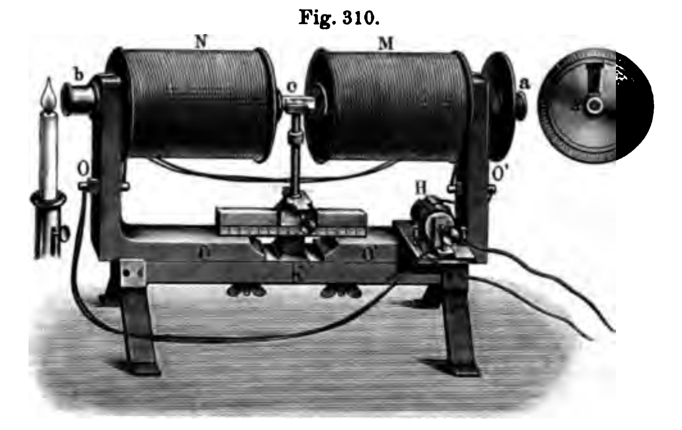
Die Feldintensität H, also auch der Kraftfluß innerhalb der Spule, ändert sich aber dadurch nicht, daß man den Hohlraum innerhalb der Spule mit Eisen ausfüllt. Dies bedeutet, daß die Feldintensität im Innern eines engen geradlinigen Kanals, den man aus dem Innern des Kernes, parallel zur Spulenachse, herausgeschnitten hat, gleich der früheren ist, d. h. gleich $H = 4\pi n i$. In einem senkrecht zur Achse herausgeschnittenen Spalt aber ist die Feldintensität, welche die Induktion B mißt, gleich $\mu H = 4\pi n \mu i$.

Von den verschiedenen Formen der Elektromagneten seien hier nur einige wenige erwähnt. In Fig. 309 ist ein Joulescher Elektromagnet abgebildet; derselbe besteht aus einem eisernen Hohlzylinder, der parallel zur Achse in zwei ungleiche Hälften zerschnitten ist; die größere von ihnen ist der Länge nach mit Draht umwickelt, während die kleinere als Anker dient.

Rühmkorff hat einen für gewisse Zwecke dienlichen Elektromagneten konstruiert, der auch noch heutigen Tages oft benutzt wird.

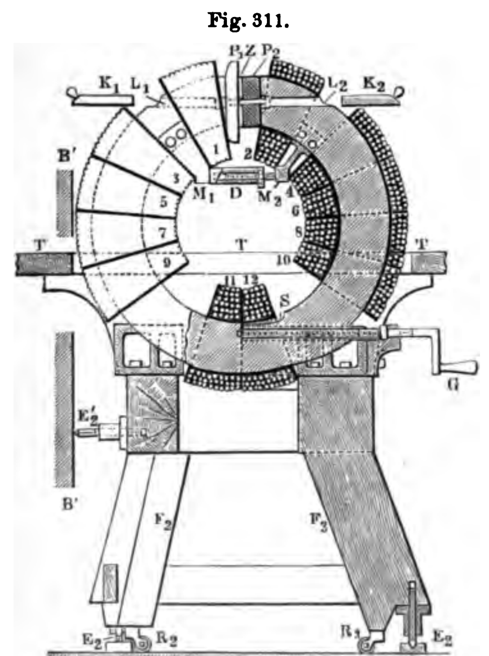
Er besteht aus einer eisernen Bank K (Fig. 310), längs welcher sich dicke Eisenplatten O und O', die rechtwinkelig umgebogen sind, ver-

Fig. 310.



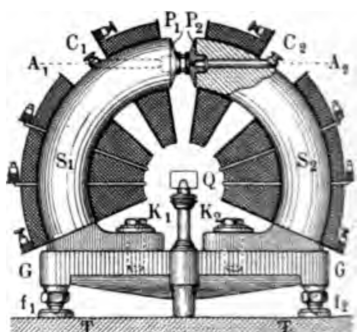
schieben können. An die oberen Enden dieser Platten sind horizontale Eisenzylinder geschraubt und auf diese die Spulen N und M gesteckt. Auf einem in der Höhe verstellbaren Tischchen befindet sich der Körper c, den man der Wirkung eines kräftigen Magnetfeldes aussetzen will. Die eisernen Kerne sind längs ihren Achsen durchbohrt, zu Zwecken, von denen später die Rede sein soll.

Fig. 311.



In neuerer Zeit haben die

Fig. 312.



Elektromagnete von du Bois, die in kleinem Raume ein Magnetfeld von sehr hoher Intensität wachzurufen erlauben, weitere Verbreitung

gefunden. Zuerst (1894) hat du Bois den in Fig. 311 schematisch abgebildeten Ringelektromagnet konstruiert. Ein eiserner Ring ist auf einem dreibeinigen Holztische montiert; er wird von unten her durch messingene Fassungen gehalten. Die Tischplatte TT dient zur Aufnahme von Hilfsgerät. Der Ring ist längs der horizontalen Ebene S, welche seine innere Peripherie tangiert, durchschnitten; dies ermöglicht es, die Abstände beider Ringhälften durch Drehung der Kurbel G zu verändern. Auf den Ring sind 12 sektorenförmige Spulen aufgesetzt; die Breite eines jeden von diesen entspricht einem Zentriwinkel von 20°, so daß sie zusammen 240° oder $^2/_3$ der Ringoberfläche überdecken. Im oberen Teile ist ein Kanal $L_1 L_2$ eingebohrt, der durch die Eisenzylinder k_1 und k_2 ausgefüllt werden kann. Damit der Ring infolge der Anziehung der Pole keine Durchbiegung erleidet, ist ein ausschiebbarer Kupferstab $M_1 M_2$ angebracht; bei sehr starker Magnetisierung muß man in den Spalt Z Kupferplatten einschieben. An die Enden (die Pole) des Elektromagneten können eiserne Endstücke (Polschuhe) von verschiedener Form angeschraubt werden; zwei solche Polschuhe $P_1 P_2$ sind in der Figur dargestellt. Stefan und zu gleicher Zeit Ewing und Low (1888) haben gezeigt, daß man zur Erreichung der maximalen Feldstärke in kleinem Raume Polschuhe von der Form von Kegelstümpfen anzuwenden habe, deren Seitenlinien mit der Achse einen Winkel $\alpha = 54^0\,44'$ ($\alpha = arctg \sqrt{2}$) bilden. Später hat Walter (1904) die Theorie von Stefan weiter verfolgt und ihre praktische Anwendbarkeit gezeigt. Du Bois hat die größte Intensität bei $\alpha = 60^0$ gefunden, d. h. wenn die Seitenlinien des Kegelstumpfes miteinander einen Winkel von 120° bildeten; es gelang ihm, in einem wenige Millimeter breiten Raume eine Feldintensität von 40000 C. G. S.-Einheiten zu erreichen. Indem er die Breite jenes Raumes bis auf Teile eines Millimeters herabminderte, konnte er eine noch größere Intensität erreichen.

Im Jahre 1900 hat du Bois einen Halbringelektromagnet konstruiert, dessen Einrichtung aus Fig. 312 ersichtlich ist. Wir wollen nur bemerken, daß die Schrauben K_1 und K_2 die Entfernung beider Schenkel voneinander zu variieren gestatten und jeden Schenkel um eine Vertikalachse drehen lassen. Acht Spulen überdecken $22{,}5^0 \times 8 = 180^0$, d. h. einen Halbkreis. Der Träger Q dient zur Aufstellung verschiedener Apparate.

Wenden wir uns der Betrachtung einiger Eigenschaften der Elektromagnete zu. Es ist eine sehr große Zahl von Untersuchungen ausgeführt worden, um empirisch den Zusammenhang zwischen der Magnetisierung und der Stärke der magnetisierenden Kraft, sowie den Dimensionen des Kernes zu ermitteln. Wir wollen hier kurz einige ältere Arbeiten erwähnen, die gegenwärtig nur noch historisches Interesse haben. Unter der Magnetisierung verstanden die Autoren jener Arbeiten eine Größe,

die einen gewissen Mittelwert von J repräsentierte oder direkt durch das magnetische Moment des Kernes gemessen wurde; wir werden für sie die Bezeichnung mit dem Buchstaben J beibehalten. Die magnetisierende Kraft H wurde durch das Produkt aus der Stromstärke und der Windungszahl der Spule gemessen. Lenz und Jacobi (1839), die dicke Kerne und keine starken Ströme benutzten, fanden, daß J proportional H wächst, was nur in sehr engen Grenzen der Wirklichkeit entspricht. Von Interesse sind die folgenden empirisch gefundenen Formeln:

J. Müller fand: . . . $J = c \operatorname{arctg} bH$ . . . . (23)

wo b und c von den Dimensionen des Kernes abhängen;

Lamont: . . . . . $J = a(1 - e^{-cH})$ . . (23,a)

O. Fröhlich: . . . $J = \frac{kJ_0 H}{1 + kH}$ . . . . (23,b)

wo a, c, k Konstante, J_0 der Maximalwert von J ist. Später (1894) hat Fröhlich seine Formel durch einen komplizierteren Ausdruck ersetzt. Weitere empirische Formeln sind von Sohncke, Ruths, Müllendorf, Kapp u. a. in Vorschlag gebracht worden.

Von sehr vielen ist versucht worden, die Beziehung zwischen dem magnetischen Moment M oder der mittleren Magnetisierung J von Eisenstäben, namentlich von Zylindern, und ihrer Länge l und Dicke d zu finden. Ohne uns bei den verschiedenartigen, rein empirischen Resultaten dieser Arbeiten aufzuhalten, beschränken wir uns auf einige wenige Hinweise. Es ist offenbar $M = vJ$, wo v das Volumen des Stabes ist; man kann daher $M = Cld^2J$ setzen, wo C eine Konstante darstellt. Dub fand, daß M proportional $\sqrt{d}$ ist, also J proportional $d^{-\frac{3}{2}}$; ferner fand er aus seinen Beobachtungen, daß J proportional $l\sqrt{l}$, also M proportional $l^2\sqrt{l}$ ist. Die Untersuchungen von Waltenhofen, G. Wiedemann u. a. aber haben gezeigt, daß eine solche Abhängigkeit von den Stabdimensionen durch die Versuche nicht bestätigt wird. Einfache Gesetze hierfür gibt es nicht und kann es offenbar auch nicht geben. Angenähert kann man

$$M = Cld^2\left(\frac{l}{d}\right)^{1+p}, \qquad J = C_1\left(\frac{l}{d}\right)^{1+p}$$

setzen, wo $p = 0{,}3$ ist. Ähnliche Formeln lassen sich auch auf den remanenten Magnetismus in Anwendung bringen.

Wenden wir uns der interessanten Frage nach der sogenannten Tragkraft der Magnete zu. Auch hier werden wir nicht auf die zahlreichen Experimentaluntersuchungen eingehen, die Fechner (1833), Lenz und Jacobi (1839), Joule (1851), Dub (1852), Waltenhofen (1870), Siemens (1881) u. a. ausgeführt haben, die aber zu keinerlei klaren und

bestimmten Ergebnissen geführt haben. Ausführlich beschrieben sind diese Arbeiten in G. Wiedemanns „Lehre von der Elektrizität“, Bd. III, S. 638 bis 661 und 688 bis 709, Braunschweig 1895. Eine theoretische Untersuchung der Frage stammt von Stefan (1880) und von Maxwell in seinem berühmten „Treatise on Elektric. and Magn.“ 2, § 641 bis 644. Die Stefansche Theorie führt zu der Formel

$$P = 2\pi J^2 S \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

wo P die Tragkraft, S der Flächeninhalt des Querschnittes des Magnetkernes, J seine mittlere Magnetisierung ist. Zu einer wesentlich anderen Formel führt die Theorie von Maxwell; diese Formel läßt sich auf elementarem Wege herleiten. Denken wir uns einen geradlinigen Elektromagneten, der zusammen mit seiner Spule durch einen Querschnitt in zwei Teile geteilt ist; diese Teile sind sodann bis zu möglichst inniger Berührung zwischen den Kernen und den stromdurchflossenen Spulen aneinander gebracht. Es ist diejenige Kraft P zu finden, welche dazu erforderlich ist, einen Teil vom anderen loszureißen. Wir wollen eine gleichmäßige Magnetisierung J voraussetzen, die gleich der Dichte k des Magnetismus auf den einander berührenden Oberflächen ist. Es sei H die Feldintensität der Spulen. Die Formel (63), S. 553, und der dort angegebene Zusammenhang zwischen einem Solenoid (Strom) und einem Magneten erlaubt uns, die Spulen durch Magnete ersetzt zu denken, deren Magnetisierung J_1 gleich $H : 4\pi$ ist. Hieraus folgt, daß wir den Kern mit der Rolle durch einen Kern allein ersetzen können, wobei sich dann auf beiden Oberflächen S Magnetismus von der Oberflächendichte $J + H : 4\pi$ befinden wird. Die Feldintensität an einer der Oberflächen ist gleich $2\pi(J + H : 4\pi)$, es ist daher die Kraft P, welche auf die benachbarte Fläche S einwirkt, gleich

$$P = 2\pi\left(J + \frac{H}{4\pi}\right)^2 S = \frac{(H + 4\pi J)^2 S}{8\pi} = \frac{B^2 S}{8\pi} \qquad (24,\text{a})$$

Dies ist die Maxwellsche Formel. Ist nur einer der Stäbe von einer Spule umgeben, so ist die Feldstärke an seiner Oberfläche gleich $H + 2\pi J$, daher also die Tragkraft

$$P' = (H + 2\pi J)\, JS = (2\pi J^2 + HJ) S \quad . \quad . \quad (24,\text{b})$$

Offenbar ist die Differenz $P - P' = H^2 S : 8\pi$ gleich der Kraft der Anziehung der Spulen, d. h. gleich der Größe $2\pi J_1^2 S = 2\pi (H : 4\pi)^2 S$. Diese Größe ist sehr klein im Vergleich zu P, wenn der Kern stark magnetisiert ist. Siemens und Wassmuth (1882) haben die Formel (24) von Stefan, Bosanquet (1886), Bidwell, Threlfall (1894) und E. T. Jones (1895) die Maxwellsche Formel geprüft. Von besonderer Bedeutung ist die Arbeit von E. T. Jones, welcher gezeigt hat, daß die Kraft P proportional B^2, nicht aber proportional J^2 ist, denn er

fand, daß bei sehr großen Werten von H die Kraft P noch zu wachsen fortfährt, während J konstant bleibt.

Ist in Formel (24, a) die Größe B in C. G. S.-Einheiten, S in Quadratcentimetern und P in Grammen ausgedrückt, so ist

$$P = \frac{B^2 S}{8\pi . 981} \text{ Gramm} = \left(\frac{B}{5000}\right)^2 S \text{ Kilogramm} \quad . \quad (24, c)$$

Wie wir sehen werden, ist es praktisch nicht schwer, den Wert $B = 20000$ zu erhalten, woraus sich für P ein Wert von etwa 16 kg pro Quadratcentimeter ergibt; der größte erreichbare Wert $B = 60000$ gibt für P ungefähr 144 kg pro Quadratcentimeter.

In engem Zusammenhange mit dem hier Besprochenen steht auch die Lehre von der sogenannten magnetischen Kette, die von großer praktischer Bedeutung ist, von theoretischem Standpunkte aus aber keine strenge wissenschaftliche Kritik verträgt. Wir wollen diese Lehre kurz besprechen. Auf S. 415 hatten wir die Formel (38)

$$\psi = \frac{\int H dl}{\int \frac{dl}{\mu \sigma}} = \frac{\int H dl}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

abgeleitet, die sich auf einen beliebigen Teil einer Induktionsröhre bezieht. Hier ist ψ der Induktionsfluß in dieser Röhre, dl das Längenelement der Röhre, σ der Flächeninhalt des Querschnittes des Elementes dl; H und μ beziehen sich auf dasselbe Element dl. Die Größe $\int H dl$ haben wir als die auf den Röhrenabschnitt einwirkende magnetomotorische Kraft bezeichnet, die Größe $r = \int \frac{dl}{\mu \sigma}$ aber als den magnetischen Widerstand (reluctance) des Abschnittes. Die ganze Formel ist der Ohmschen Formel analog.

Beinahe gleichzeitig (1886) haben Kapp und die Gebrüder J. und E. Hopkinson gezeigt, daß bei der Konstruktion von dynamoelektrischen Maschinen ein der Formel (25) analoger Ausdruck von großem Nutzen sein kann; er ist zwar nicht ganz genau, für Zwecke der Praxis kommt er jedoch der Wirklichkeit genügend nahe. Wie wir wissen, sind die Induktionslinien geschlossene Kurven, deshalb kann man aus jedem System, dessen hauptsächlichster Teil ein Elektromagnet ist, einen ringförmigen Raum absondern, in dem die Mehrzahl der Induktionslinien dahinfließt. Auf diesen Raum nun kann man die Formel (25) in Anwendung bringen. Besteht er aus Teilen, für welche l (die Länge), σ und μ verschiedene Werte haben, so setzt man den Gesamtwiderstand r der „magnetischen Kette“ gleich

$$r = \sum \frac{l_i}{\mu_i \sigma_i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25, a)$$

Nimmt man an, daß das Magnetfeld durch eine Spule hervorgerufen ist, welche im ganzen n Drahtwindungen hat, so erhält man, vgl. (42), S. 532:

$$\int H dl = 4\pi n i = 0{,}4\pi n i_a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25,\text{b})$$

wo i die Stromstärke in C. G. S.-Einheiten, i_a die Stromstärke in Amperes ist: $n i_a$ ist die Anzahl der „Amperewindungen". Somit hat man als Ausdruck für den Induktionsfluß:

$$\psi = \frac{0{,}4\pi n i_a}{\sum \frac{l_i}{\mu_i \sigma_i}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25,\text{c})$$

Für einen geschlossenen Ring von kreisförmigem Querschnitt (ein Toroid) ist

$$\psi = \frac{4\pi i n \mu \sigma}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25,\text{d})$$

wo l die Länge der Mittellinie des Ringes ist. Ist bloß ein Teil des Ringes von der Wickelung bedeckt und hat dabei der Ring eine bedeutende Dicke, so kann man sich noch angenähert der Formel (25, d) bedienen, indem man annimmt, daß alle Induktionsröhren die Ringmasse durchsetzen, d. h. die Streuung in die umgebende Luft unberücksichtigt läßt. Von besonderem praktischen Interesse ist der Fall eines ungeschlossenen oder mit einem Spalt versehenen Ringes. Es sei d die Spaltbreite, dann ist

$$\psi = \frac{4\pi n i}{\frac{l-d}{\mu\sigma} + \frac{d}{\sigma}} = \frac{4\pi i n \mu s}{l + d(\mu - 1)} \quad . \quad . \quad . \quad (25,\text{e})$$

denn für Luft ist $\mu = 1$. Bei großem Werte von μ kann diese Größe sehr viel kleiner als (25, d) sein, selbst wenn d klein im Verhältnis zu l ist; eine Luftschicht vergrößert in bedeutendem Maße den Widerstand der magnetischen Kette. Die Versuche von K. Kahle (1890) haben gezeigt, daß Formel (25, e) keine richtigen Resultate liefert, sobald nur d einigermaßen große Werte erreicht (er ging bis zu $d = 20{,}18$ mm).

Die Analogie der Formel (25, c) mit der Ohmschen Formel ist eine rein äußerliche, denn der Begriff des magnetischen Widerstandes ist künstlich geschaffen und entspricht keiner bestimmten physikalischen Größe, wie dies beim elektrischen Widerstande wohl der Fall ist. Besonders wichtig ist, daß μ, also auch der magnetische Widerstand, von der Feldintensität abhängen, so daß in Formel (25, c) der Nenner vom Zähler abhängig ist. Hierdurch verschwindet endgültig die Möglichkeit, zwischen der magnetischen Kette und der Kette des elektrischen Stromes eine tiefergehende Analogie herzustellen. Nichtsdestoweniger erweist sich die Formel (25, c) zur Orientierung bei elektrotechnischen Berechnungen als sehr nützlich.

§ 4. Einwirkung des Magnetfeldes auf Gestalt und Dimensionen der Körper. Auf S. 296 war in Kürze auf die Erscheinungen der Elektrostriktion hingewiesen worden: es sind dies Formen- und Dimensionsänderungen der Körper, welche in ein elektrisches Feld gebracht sind. Analoge Änderungen werden auch in Körpern wachgerufen, die in ein Magnetfeld gebracht sind; sie bilden die sogenannte Magnetostriktion. Maxwell, Helmholtz, Kirchhoff, Duhem, Kolaček, Lorberg, Cantone, Gans und andere Forscher, deren Namen in der Literaturübersicht zu finden sind, haben verschiedene Theorien der Magnetostriktion entworfen. Wir werden uns auf wenige Worte beschränken, die sich auf die Theorie von Kirchhoff beziehen. Nach dieser Theorie wird der Zusammenhang zwischen den Komponenten A, B, C der Magnetisierung J und den Komponenten H_x, H_y, H_z der Feldintensität durch Formeln von der Gestalt

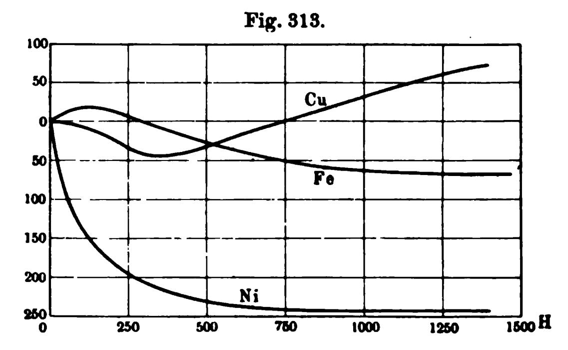
$$A = [\varkappa - \varkappa' (\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z) - \varkappa'' \lambda_x] H_x \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

und ähnliche für B und C gegeben. Hier hat $\varkappa$ den früheren Wert; $\varkappa'$ und $\varkappa''$ sind zwei neue Konstanten; λ_x, λ_y, λ_z die linearen Ausreckungen in den Achsenrichtungen. Im Endresultat findet Kirchhoff, daß im Innern eines magnetisierten Körpers überall ein allseitiger Druck (ähnlich dem hydrostatischen) gleich $\frac{BH}{8\pi} - \frac{\varkappa' H^2}{2}$ und ein Zug in der Richtung der Kraftlinien vorhanden sein muß, welch letzterer gleich $\frac{BH}{4\pi} + \frac{\varkappa'' H^2}{2}$ ist. Kirchhoff hat die Deformation einer Kugel im Magnetfelde berechnet; Cantone hat dasselbe für ein langgestrecktes Rotationsellipsoid, das in der Richtung der Drehungsachse gleichmäßig magnetisiert war, getan und hat Formeln für die Verlängerung dieser Achse und für die Volumenvergrößerung des Ellipsoids angegeben. Sowohl die Theorie von Kirchhoff als auch die von anderen in Vorschlag gebrachten Theorien haben eine große Anzahl von Entgegnungen wachgerufen, so daß man die ganze Frage noch als ungeklärt vom theoretischen Gesichtspunkte anzusehen hat. Man kann nicht sagen, daß die Ergebnisse irgend einer der in Vorschlag gebrachten Theorien sich durch das Experiment in quantitativer Hinsicht bestätigt hätten; Übereinstimmung zwischen der Theorie und Beobachtung findet sich nur in bezug auf den allgemeinen Charakter der Erscheinung hinsichtlich seiner qualitativen Seiten.

Wir gehen zu den experimentellen Untersuchungen über den Einfluß des Magnetfeldes auf die Körperdimensionen über. Die Längenänderung eines Körpers bei longitudinaler Magnetisierung desselben ist von sehr vielen Forschern studiert worden. Sie haben sich hierbei verschiedener Methoden bedient, z. B. eines sehr empfindlichen Hebels mit Spiegel, dessen Bewegung mittels Fernrohr und Skala beobachtet

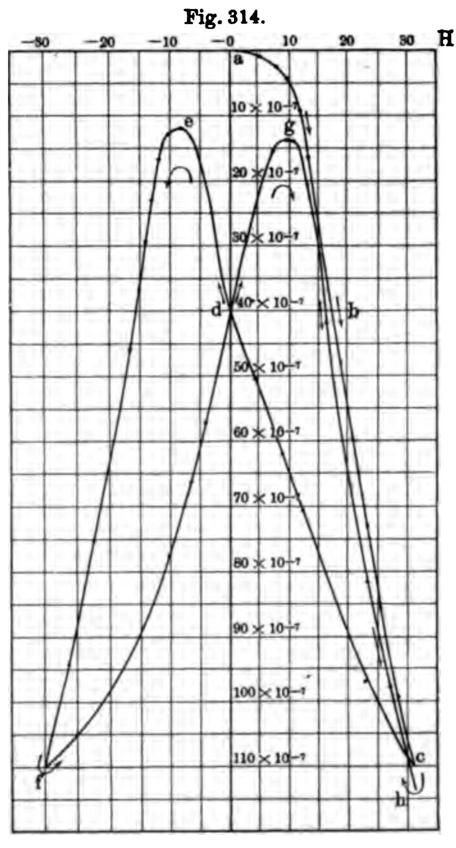
wurde, oder der Methode des Kontaktmikrometers, das den Strom zu schließen hatte, oder endlich einer Methode der Interferenzringe, analog

Fig. 313.



der Fizeauschen Methode zur Messung der thermischen Ausdehnung der Körper (Bd. III). Die ersten diesbezüglichen Messungen hat Joule (1847) ausgeführt, der für das Eisen eine Längenzunahme fand, welche proportional dem Quadrat des Magnetisierungsgrades war. Indem wir die Arbeiten von A. M. Mayer und Barrett übergehen, wenden wir uns den Untersuchungen von Shelford Bidwell (1885 bis 1905) zu. Die Resultate einiger von den zahlreichen Untersuchungen dieses Forschers, die er an Stäben und Ringen aus Fe, Co und Ni ausgeführt hat, sind in der Fig. 313 dargestellt, wo die Abszissen die in C. G. S.-Einheiten ausgedrückten Feldintensitäten H bedeuten, die Ordinaten aber, die von der Nullinie aus gerechnet werden, die Längenzunahmen (nach oben) oder Längenabnahmen (nach unten). Man findet, daß Eisen bei geringer Feldintensität eine Längenzunahme erfährt, die je nach der

Fig. 314.



Eisensorte zwischen $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ und $5 \cdot 10^{-6}$ der Gesamtlänge schwankt. Ist $H > 100$, so vermindert sich die Längenzunahme, wird gleich Null und geht bei weiterem Wachstum von H in eine Längenabnahme über. Genau das entgegengesetzte Verhalten zeigt Kobalt: nämlich Längenabnahme bei kleinen und Längenzunahme bei großen Werten von H. Endlich zeigt Nickel eine sehr starke Längenabnahme, die bei sehr großem H sich, wie es scheint, asymptotisch einem nahe bei $50 \cdot 10^{-6}$ der Gesamtlänge gelegenen Grenzwerte nähert. Von den zahlreichen späteren Arbeiten bieten ein besonderes Interesse die Arbeiten der japanischen Forscher Nagaoka, Honda und Shimizu, welche gezeigt haben, daß die unter dem Einfluß eines Magnetfeldes auftretenden Längenänderungen die Erscheinung der Hysteresis zeigen, d. h., es ist die Länge nicht die gleiche, wenn derselbe Wert von H bei Zunahme oder Abnahme der Feldintensität erreicht wird. Für den ganzen Zyklus der Feldänderungen von $+H$ bis $-H$ und umgekehrt erhält man für die Längenänderungen geschlossene Kurven; eine solche sich auf Ni beziehende Kurve ist in Fig. 314 (a. v. S.) dargestellt. Unterwirft man das Nickel erstmalig der Wirkung eines allmählich anwachsenden Feldes H, so wird die Längenabnahme desselben durch die Kurve abc dargestellt; für $H = +30$ ist sie gleich $110 \cdot 10^{-7}$. Bei allmählicher Abnahme des Feldes von $H = +30$ bis $H = 0$ erhält man die Kurve cd, so daß bei $H = 0$ die Verlängerung $40 \cdot 10^{-7}$ übrig bleibt. Nimmt man darauf die Magnetisierung in entgegengesetztem Sinne vor, von $H = 0$ bis $H = -30$, so erhält man die Kurve edf, d. h. die Längenabnahme fährt zuerst fort abzunehmen und wächst darauf schnell bis zu jenem Werte, der bei $H = +30$ erhalten worden war. Ein allmählicher Übergang von $H = -30$ zurück bis auf $H = +30$ liefert die Kurve $fdgc$. Ändert man darauf weiter H von $H = +30$ bis $H = -30$ und umgekehrt, so werden bei jedem „Zyklus“ die Längenabnahmen durch die Kurve $cdefdgc$ dargestellt. Rosing hat gleichzeitig mit Nagaoka das Vorhandensein eines solchen Falles der Hysteresis entdeckt. Er untersuchte einen Eisendraht, der von einem Gewichte von 380 g pro Quadratmillimeter Querschnitt gespannt war und fand, daß seine relative Längenzunahme $\frac{\Delta l}{l}$ durch die Formel

$$10^9 \frac{\Delta l}{l} = 0{,}000\,044\,834\, J^2 - 0{,}003\,650\,23\, JH + 0{,}030\,153\,1\, H^2$$

ausgedrückt wird. Von den Untersuchungen von Cantone über die Längenänderung eines länglichen Rotationsellipsoids (Achsenverhältnis 16,7 : 1) war bereits auf S. 828 die Rede. Er verglich die auf Grund der Kirchhoffschen Theorie abgeleiteten Formeln für die Längen- und Volumänderung mit den Beobachtungsresultaten und konnte auf

diese Weise die in der Formel (26) vorkommenden Größen $\varkappa$, $\varkappa'$ und $\varkappa''$ bestimmen. Er fand, daß $\varkappa'$ und $\varkappa''$ sehr groß im Vergleich zu $\varkappa$ sind und daß außerdem für Eisen $\varkappa' > 0$, $\varkappa'' < 0$, für Nickel jedoch umgekehrt $\varkappa' < 0$, $\varkappa'' > 0$ ist.

Nagaoka und Honda (1902) haben Nickelstahl untersucht; die Resultate ihrer Versuche sind aber von van Aubel und Osmond angezweifelt worden. Bidwell hat für das Wismut eine Längenzunahme im Magnetfelde gefunden, die Versuche von van Aubel und Wills haben jedoch dieses Resultat nicht bestätigt.

Den Einfluß der Temperatur auf die Längenänderungen im Magnetfelde haben (1902) Honda und Shimizu untersucht. Wir wollen einige Resultate ihrer Beobachtungen anführen. Für Nickel nimmt die Verkürzung bei der Erwärmung ab und verschwindet bei 400° fast vollständig. Bei der Temperatur der flüssigen Luft (— 186°) ist sie bei kleinen Werten von H geringer, bei großen H jedoch größer als bei gewöhnlicher Temperatur. Im weichen Eisen verschwindet bei hohen Temperaturen jene Längenabnahme, die großen Werten von H entspricht. Die maximale Längenzunahme ändert sich nicht zwischen — 186° und + 200°. Im gegossenen Kobalt vermindert sich bei Temperaturerhöhung jene Längenabnahme, die kleinen Werten von H entspricht und nimmt die Längenzunahme bei großen Werten von H zu; bei 800° verschwindet die Längenabnahme, doch wird noch bei 1020° eine Längenzunahme beobachtet. Für ausgeglühten Kobalt wächst die Längenabnahme zuerst von — 186° an bis zu einem Maximum, nimmt dann bis auf Null ab und geht in Längenzunahme über, die ebenfalls ein Maximum hat und darauf abnimmt, jedoch selbst bei 1634° noch sehr bedeutend ist.

Die vom Magnetfelde hervorgerufenen Tordierungen werden wir später betrachten, da man diese Erscheinung an den Körpern offenbar nur bei besonderen Symmetriestörungen beobachten kann.

Volumenänderungen durch das Magnetfeld haben zum Teil dieselben Forscher beobachtet, welche auch die Längenänderungen studiert haben und außerdem insbesondere Knott und Shand, Maurain u. a. Die Resultate sind nicht sehr durchsichtig; jedenfalls sind die Volumenänderungen nur sehr gering. Die Längenänderung bei longitudinaler Magnetisierung ist von einer entgegengesetzten Änderung der Querdimensionen begleitet. Das Verhältnis σ der relativen Querdimensionsänderung zur relativen Längenänderung ist eine Größe, welche an den Poissonschen Koeffizienten (Bd. I) erinnert und liegt, wie es scheint, nahe bei 0,5, was einer Unveränderlichkeit des Volumens entspricht. Joule fand für Eisen $\varDelta v = 0$; das gleiche Resultat erhielt auch Cantone, der für Ni $\varDelta v < 0$ erhielt. Für Ni fanden Nagaoka und Honda zuerst $\varDelta v < 0$, später (1902) aber $\varDelta v > 0$ für Eisen, Stahl,

Nickel und Nickelstahl, sowie $\Delta v < 0$ für Co; gegossener Kobalt hat ein Minimum des Volumens bei $H = 900$.

Knott und Shand (Fe), sowie Bidwell (Ni und Co) haben die Änderung des inneren Volumens von Röhren, die sich im Magnetfelde befinden, untersucht. Ihre Versuchsergebnisse sind kompliziert und lassen sich nicht als endgültig ansehen.

Hurmuzescu (1897) fand eine Verminderung des Volumens einer Flüssigkeit (Eisensalzlösung) im homogenen Magnetfelde und das gleiche Resultat erhielt Quincke (1900) für Lösungen von $FeCl_3$ und $K_4Fe(CN)_6$.

Bringt man die Grenzfläche zwischen zwei Flüssigkeiten oder einer Flüssigkeit und einem Gase in ein Magnetfeld H, so tritt an dieser Trennungsfläche ein Druck Δp auf, der gleich

$$\Delta p = \frac{\varkappa - \varkappa'}{2} H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

ist, wo $\varkappa$ und $\varkappa'$ sich auf die beiden in Berührung stehenden Substanzen bezieht. Quincke, Töpler und Hennig haben diese Formel zur Messung der Größen $\varkappa$ (s. u.) angewandt.

Mit der Erscheinung der Magnetostriktion steht offenbar auch das Tönen von Eisendrähten, die einer unterbrochenen oder (der Richtung nach) wechselnden Magnetisierung unterworfen werden, im Zusammenhange. Diese Erscheinung hat zuerst Page (1838) beobachtet: untersucht wurde sie darauf von Delezenne, Marian, Matteucci, Wertheim, de la Rive, Ferguson, Ader, Trowbridge, Bachmetjew und in neuester Zeit von Honda und Shimizu. Sie läßt sich leicht beobachten, wenn man einen Eisenstab in seiner Mitte befestigt und jede seiner beiden Hälften mit einer Spule umgibt, die seine Oberfläche nicht berührt. Läßt man durch die Wickelung der Spule einen unterbrochenen (intermittierenden) oder einen Wechselstrom hindurchgehen, so beginnt der Stab zu tönen, wobei die Tonhöhe vollkommen der Anzahl der Magnetisierungen entspricht, die der Stab in der Zeiteinheit erfährt. Strittig ist hierbei nur die Frage, ob die Longitudinalschwingungen des Stabes, d. h. seine Längenänderungen, nur infolge der Magnetisierung auftreten oder auch infolge der Anziehung der Spule. Bachmetjew hat gezeigt, daß ein stark gespannter Stab nicht tönt; Honda und Shimizu haben gefunden, daß die Schwingungsamplitude viel größer ist, als die allein infolge der Magnetisierung auftretende Längenzunahme. Auf der soeben erwähnten Erscheinung beruht die Einrichtung des Telephons von Reis.

§ 5. **Methoden zur Messung der Größen $\varkappa$ und μ für ferromagnetische Körper.** Wir hatten die Grundgleichungen $J = \varkappa H$, $B = \mu H$ und $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$, in denen sich H, B und J auf ein

und denselben Punkt im Innern des Körpers bezogen. Aus ihnen folgt

$$B = \mu H = (1 + 4\pi\varkappa) H = H + 4\pi J \quad . \; . \; . \quad (28)$$

Ist das Außenfeld H_0 gegeben, so ist, vgl. (12, d), S. 812

$$H = \frac{H_0}{1 + \varkappa N} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28, a)$$

wo N die entmagnetisierende Wirkung des Oberflächenmagnetismus bedeutet. Für μ hatten wir die Formeln (12, f) und (13, a):

$$\mu = \frac{H_0 + (4\pi - N) J}{H_0 - NJ} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (28, b)$$

$$\mu = \frac{(4\pi - N) B}{4\pi H_0 - NB} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28, c)$$

Für große Werte von $\varkappa$ kann man

$$\mu = 4\pi\varkappa = 12{,}566\,\varkappa \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (28, d)$$

$$B = 4\pi J = 12{,}566\,J \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (28, e)$$

setzen. Ist $N = 0$, so ist $H = H_0$ und

$$\mu = 1 + 4\pi \frac{J}{H} = \frac{B}{H} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (28, f)$$

Bei der experimentellen Untersuchung der Magnetisierung nehmen wir H als unabhängige Variable. Bewirkt man die Magnetisierung mit Hilfe einer langen Spule, so bestimmt man das Außenfeld H_0 nach der Formel

$$H_0 = 4\pi n_1 i = 0{,}4\,\pi n_1 i_a \quad . \; . \; . \; . \quad (28, g)$$

in welcher n_1 die Anzahl der Windungen pro Längeneinheit der Spule, i die Stromstärke in C. G. S.-Einheiten, i_a die Stromstärke in Amperes ist. Außer H_0 sieht man auch N als bekannt an. Unsere Aufgabe besteht darin, B oder J oder μ als Funktionen von H darzustellen. Durch das Experiment bestimmt man eine der Größen J oder B. Im ersten Falle findet man H nach der Formel, vgl. (12):

$$H = H_0 - H_i = H_0 - NJ \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Im zweiten Falle, wenn der Versuch uns die Größe B liefert, hat man, vgl. (28, e):

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{4\pi H_0 - NB}{4\pi - N} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (29, a)$$

Die Formeln (28, b) und (28, c) geben μ unmittelbar.

In bezug auf die Größe N wollen wir folgendes bemerken. In der Praxis gibt man dem zu untersuchenden Körper die Gestalt eines Ringes, für den $N = 0$ ist oder die Gestalt eines langen Stabes, für den ebenfalls $N = 0$ gesetzt werden kann, oder endlich

die Form eines Ovoids, für welches N durch Formel (45, d), S. 456, gegeben ist. Wie wir wissen, wird ein Ovoid gleichmäßig magnetisiert, wenn man es in ein homogenes Feld bringt. Hieraus ergibt sich für sein magnetisches Moment M die Relation

$$M = vJ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

wo v das Volumen des Ovoids bedeutet. Die gleiche Formel gilt auch für einen Stab, wenn man für ihn $N = 0$ setzen kann.

Wir wollen jetzt eine Übersicht über die Methoden zur Untersuchung der Eigenschaften von stark magnetischen Substanzen geben.

I. Magnetometrische Methode. Diese Methode ergibt J als Funktion von H. Sie besteht in folgendem: aus der zu untersuchenden Substanz wird ein sehr langgestrecktes Ovoid oder ein langer Stab hergestellt, der längs der Achse einer langen, horizontalen, senkrecht zum magnetischen Meridiane liegenden Spule gebracht wird. In eine der Gaussschen Hauptlagen (S. 752) wird ein Magnetometer, d. h. ein an einem Faden hängender kleiner Magnet, gebracht. Zur anderen Seite des Magnetometers wird eine zweite Spule derart aufgestellt, daß sich beim Durchgange eines und desselben Stromes durch beide Spulen ihre Wirkungen auf das Magnetometer aufheben, wenn sich das Ovoid oder der Stab nicht im Innern der ersten Rolle befinden. Führt man darauf in diese Spule den zu untersuchenden Körper ein, so beobachtet man am Magnetometer eine Ablenkung des Magneten, die nur von dem magnetisierten Körper herrührt. Wir werden im Kapitel, das von den Messungen handelt, sehen, wie man hieraus das magnetische Moment M des Ovoids oder Stabes bestimmen kann; kennt man M, so findet man J nach Formel (30). H_0 kennen wir aus Formel (28, g); für ein Ovoid findet man H aus (29), für einen langen, dünnen Stab kann man $H = H_0$ setzen. Ferner gibt Formel (28) uns die Größen $B = H + 4\pi J$, $\mu = B : H$ und $\varkappa = (\mu - 1) : 4\pi$; man kann μ unmittelbar nach Formel (28, b) oder $\varkappa$ nach Formel (12, e), S. 812, berechnen:

$$\varkappa = \frac{J}{H} = \frac{J}{H_0 - NJ} \quad \ldots\ldots \quad (30, a)$$

Für zylindrische Stäbe von geringer Länge hat man die Größe N einzuführen.

Es gibt noch eine zweite, ebenfalls magnetometrische Methode, die von Ewing (1891) in Vorschlag gebracht worden ist. Man stellt die Spule vertikal und zwar derart auf, daß die Ebene, welche durch Spulenachse und den Mittelpunkt des beweglichen Magneten hindurchgeht, senkrecht zum magnetischen Meridian ist; außerdem bringt man den oberen Pol des Ovoids oder des Stabes in die Achsenhöhe des beweglichen Magneten. Es sei bemerkt, daß für ein gleichmäßig magnetisiertes Ovoid der Abstand der Pole gleich $^2/_3$ der Länge der

Rotationsachse ist. Die Wirkung der Spule selbst kompensiert man mit Hilfe der zweiten Spule. Unter der Einwirkung des magnetisierten Ovoids oder Stabes erhält man eine gewisse Ablenkung φ des beweglichen Magneten. Es sei πa^2 der Flächeninhalt des Stabquerschnittes oder der Inhalt des Äquatorialschnittes des Ovoids. In beiden Fällen ist die Wirkung des Magneten gleich der Wirkung der magnetischen Mengen $\pm \pi a^2 J$, die an den Polen konzentriert sind. Es sei r die Entfernung des oberen Poles vom Mittelpunkte des beweglichen Magneten, l die Entfernung der Pole voneinander. Die Horizontalkomponente F der Kraft, mit welcher das Ovoid oder der Stab auf den Pol des beweglichen Magneten einwirkt, ist gleich:

$$F = \pi a^2 J \left\{\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2+l^2)^{\frac{3}{2}}}\right\} = \frac{\pi a^2 J}{r^2}\left\{1 - \left(\frac{r}{\sqrt{r^2+l^2}}\right)^3\right\} \qquad (30,\mathrm{b})$$

Für die Gleichgewichtslage des beweglichen Magneten ist

$$F = H' \operatorname{tg} \varphi,$$

wo H' die Horizontalkomponente der Intensität des Erdmagnetismus ist. Hieraus folgt:

$$J = \frac{r^2 H' \operatorname{tg}\varphi}{\pi a^2 \left\{1 - \left(\frac{r}{\sqrt{r^2+l^2}}\right)^3\right\}} \quad \ldots\ldots \quad (30,\mathrm{c})$$

Ist $\frac{r}{l}$ sehr klein, so kann man

$$J = \frac{r^2}{\pi a^2} H' \operatorname{tg}\varphi \quad \ldots\ldots \quad (30,\mathrm{d})$$

setzen.

II. Ballistische Methode. Diese Methode beruht auf der Erscheinung der Induktion von Strömen, mit der wir in Bd. IV, 2 uns bekannt machen werden; an dieser Stelle sei bloß auf folgendes hingewiesen. Nehmen wir an, daß durch eine Spule, welche im Ganzen n_1 Drahtwindungen enthält, parallel zu ihrer Achse ein Induktionsfluß ψ geht. Nehmen wir ferner an, daß dieser Fluß in der Spule dadurch verschwindet, daß die Ursache, welche den Fluß hervorgerufen hat, verschwindet oder daß die Spule selbst an einen Ort gebracht ist, an welchem $\psi = 0$ ist oder daß sie schnell um 90° um ihre zu jenem Flusse senkrechte Achse gedreht worden ist. In allen diesen Fällen tritt in der Spule, die in die geschlossene Kette eingeschaltet ist, ein kurzdauernder Induktionsstrom auf, wobei die gesamte Elektrizitätsmenge η, die durch die Kette strömt, gleich

$$\eta = \frac{n_1 \psi}{R} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

ist; hier bedeutet R den Widerstand der Kette. Zur Messung der Größe η dient das „ballistische" Galvanometer; die Magnetnadel eines solchen Galvanometers ist mit einem kleinen Gewichte belastet, wodurch ihr Trägheitsmoment vergrößert und ihre Bewegungen verzögert sind. Man kann die Annahme machen, daß der hindurchfließende Induktionsstrom wie ein Stoß wirkt, während dessen Dauer die Nadel nicht Zeit hat, merklich aus ihrer Gleichgewichtslage herauszutreten. Die unter der Einwirkung eines solchen Stoßes aufgetretene Nadelablenkung ermöglicht eine Bestimmung der Größe η.

Die ballistische Methode ergibt unmittelbar die Größe der Induktion B. Um nach dieser Methode die magnetischen Eigenschaften einer Substanz zu untersuchen, stellt man aus derselben einen Ring oder einen Stab her und wickelt auf sie einen Draht, durch den man den magnetisierenden Strom i hindurchsendet; dieser Draht bildet die sogenannte primäre Rolle. Auf dieselbe wickelt man die sekundäre Rolle über die ganze Länge oder einen Teil der Länge des Ringes: man verbindet sie mit dem ballistischen Galvanometer. Ändert man die Stromstärke sprungweise von Null bis zu einem gewissen Werte i_m, darauf von i_m bis auf Null, von Null bis $-i_m$ und wieder bis auf Null (Ewing), so gibt bei jeder Änderung der Stromstärke das ballistische Galvanometer ein Maß für die Änderungen des Induktionsflusses. Läßt man den Strom i hindurchgehen und wechselt plötzlich seine Richtung, so gibt das Galvanometer einen Ausschlag, der den doppelten Induktionsfluß (2ψ) mißt. Nehmen wir an, es enthalte die sekundäre Rolle n_1 Drahtwindungen und es umfasse jede Windung einen Flächenraum S_1; den Flächeninhalt des Ringes oder Stabquerschnittes bezeichnen wir mit S, wo im allgemeinen $S < S_1$ ist. Der gesamte Fluß, der durch die sekundäre Rolle hindurchgeht, ist gleich $S\psi + (S_1 - S)H$; es ist daher leicht, eine Korrektion anzubringen, falls S_1 nicht gleich S ist.

Für einen dünnen Ring mit rundem Querschnitt, sowie für einen abgeplatteten Ring, dessen Dicke in der Richtung senkrecht zur Achse gering ist, kann man für H und B die Formeln (18) und (18, b) anwenden, wobei man die in ihnen vorkommende Größe r als den Abstand der Mittellinie des Ringes von seiner Achse ansieht. Hat der Körper die Gestalt eines Stabes, so wickelt man die sekundäre Rolle auf einen besonderen Ring, der sich an der primären Rolle entlang frei verschieben läßt. Nachdem man durch die primäre Wickelung den Strom i, dem ein bestimmter Wert von H entspricht, hindurchgesandt hat, schiebt man schnell die sekundäre Rolle fort und entfernt sie von der primären. In diesem Falle mißt das ballistische Galvanometer die Größe des Induktionsflusses, der durch die sekundäre Rolle hindurchgegangen ist.

Wie man sieht, setzt uns die ballistische Methode überhaupt in den Stand, die Größe der Änderung $\Delta\psi$ des Induktionsflusses im

Innern der zu untersuchenden Substanz zu messen; in besonderen Fällen ist $\varDelta\psi = \psi$. Die entsprechende Änderung $\varDelta B$ der Induktion ist gleich

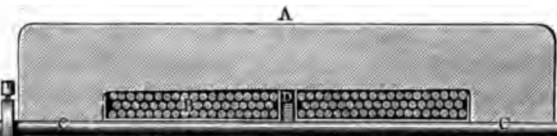
$$\varDelta B = \frac{\varDelta\psi}{S} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31,\text{a})$$

Die Anzahl n_1 der Windungen der sekundären Rolle kommt in dieser Formel nicht vor, da die Annahme gemacht ist, daß das ballistische Galvanometer für diejenige Stromkette kalibriert ist, die man hier benutzt, so daß seine Ausschläge die Größe $\varDelta\psi$ bestimmen. Hat man B und H gefunden, so erhält man J, μ und $\varkappa$ aus den Formeln (28).

Die Bedeutung, welche diese Methode insbesondere für Ringe hat, ist von Kirchhoff hervorgehoben und durch die Arbeiten von Stoletow und Rowland klargelegt worden.

III. Die Schlußjochmethode von J. Hopkinson. Diese Methode gestattet die Untersuchung von kurzen Stäben, ohne daß man dabei Korrektionen wegen der entmagnetisierenden Wirkung der Enden einzuführen hat.

Fig. 315.



Es wird dies durch Verbindung der Enden mittels dicker Eisenstreifen erreicht, wobei sich eine geschlossene magnetische Kette bildet. Den Hauptteil des Apparates bildet ein dicker Rahmen AAA aus weichem Eisen, in welchem sich ein Kanal CC befindet. In letzteren wird der zu untersuchende Stab eingeführt; er ist von einer doppelten Magnetisierungsrolle BB umgeben, sowie von der mit einem ballistischen Galvanometer verbundenen Induktionsrolle D. Ist n die Windungszahl der Spule BB, i die Stromstärke (in Amperes) in derselben, l die Länge desjenigen Stabteiles, der innerhalb des Rahmens liegt, s der Stabquerschnitt, S der Querschnitt beider Zweige des Rahmens, L die Länge des Rahmens allein und μ' die magnetische Permeabilität der Rahmensubstanz, so ist:

$$0{,}4\pi n i = B s\left\{\frac{l}{\mu s} + \frac{L}{\mu' S}\right\} = \frac{B}{\mu}\left\{l + \frac{s}{S}\,\frac{\mu}{\mu'}\,L\right\} \quad \ldots \quad (32)$$

oder

$$\frac{0{,}4\mu n i}{l} = H\left\{1 + \frac{s}{S}\cdot\frac{\mu}{\mu'}\cdot\frac{L}{l}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (32,\text{a})$$

Der Bruch $s:S$ ist sehr klein und es ist $\mu' > \mu$. Man kann daher

$$H = 0{,}4\pi \frac{ni}{l}\left\{1 - \frac{s}{S}\frac{\mu}{\mu'}\frac{L}{l}\right\}$$

setzen. Im zweiten Gliede kann man den ersten Faktor durch $H = B:\mu$ ersetzen, so daß

$$H = 0{,}4\pi \frac{ni}{l} - \frac{s}{S}\frac{B}{\mu'}\frac{L}{l} \quad \ldots \ldots \quad (32.\text{b})$$

ist. Nach dieser Formel kann man H berechnen, wenn B bekannt ist. Letztere Größe oder ihre Änderungen erhält man auf denselben Wegen, wie bei der vorhergehenden Methode. Ändert man i von einem Werte zum anderen, in besonderen Fällen bis auf Null oder bis $-i$, so erhält man die entsprechenden Änderungen des Flusses Bs. Es ist auch folgende Methode möglich: der zu untersuchende Stab besteht aus zwei Teilen, die am rechten Ende der linken Spule B zusammentreffen. Zieht man mit Hilfe des Griffes an dem rechten Teile des Stabes, so wird die Rolle D schnell aus dem Rahmen hervorgezogen und zur Seite geworfen; der induzierte Strom mißt den Fluß Bs. Von Ewing, Corsepius, Behn-Eschenburg, Kapp, Drysdale u. a. sind verschiedene Modifikationen dieser Methode in Vorschlag gebracht worden.

IV. Die magnetische Überbrückungs-(Isthmus-)methode. Diese zur Bestimmung von μ bei sehr starken Magnetisierungen die-

Fig. 316.

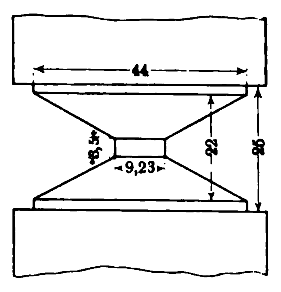
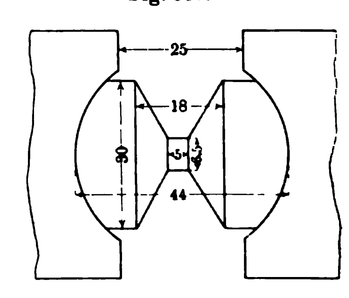


Fig. 317.



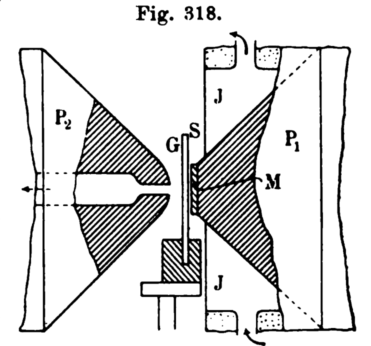
nende Methode ist von Ewing und Low (1887) in Vorschlag gebracht worden. Aus der zu untersuchenden Substanz wird ein Körper herausgeschliffen, der die Form einer Garnspule hat. In Fig. 316 und 317 sind zwei solche Formen abgebildet; die erste von ihnen besteht aus einem dünnen Teile (dem Isthmus) und zwei Kegelstumpfen, die sich zwischen den Polen eines starken Elektromagneten befinden; die zweite Form hat zylindrische Enden und wird, wie aus der Fig. 317 ersichtlich ist, zwischen die zylindrischen Einschnitte in den Polschuhen des Elektromagneten hineingebracht. Auf die Überbrückung (den Isthmus) wird die Induktionsrolle gewickelt, sie wird von einer Schicht

einer indifferenten Substanz umgeben und auf letztere wird die zweite Rolle gewickelt. Den zu untersuchenden Körper von der ersten Form (Fig. 316) kann man rasch zur Seite schaffen; den Körper von der zweiten Form (Fig. 317) kann man schnell um 180° um eine Achse drehen, welche senkrecht zur Ebene der Figur ist. Ist die innere Rolle mit einem ballistischen Galvanometer verbunden, so läßt sich aus den Angaben des letzteren die Größe B berechnen. Ist jedoch die äußere Spule mit dem Galvanometer verbunden, so kommt zur Wirkung des Induktionsflusses B im Eisen noch die Wirkung des Kraftflusses H im Zwischenraume zwischen den Rollen hinzu, so daß die Differenz zweier Galvanometerangaben das H berechnen läßt, das man als gleich dem gesuchten H innerhalb des Eisens annehmen kann. Hat man B und H gefunden, so erhält man wie früher J, μ und $\varkappa$.

V. Optische Methode von du Bois. Diese Methode beruht auf dem Kerrschen Phänomen, das wir später kennen lernen werden. Nehmen wir an, daß die Richtung der Magnetisierung an der Magnetoberfläche mit der Richtung der äußeren Normalen zusammenfällt. Wenn ein geradlinig polarisierter Strahl (Bd. II) senkrecht auf eine solche Fläche auffällt, so wird bei seiner Reflexion die Polarisationsebene um einen gewissen Winkel φ gedreht, der gleich

$$\varphi = kJ \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Fig. 318.



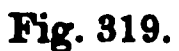
ist, wo k, die Kerrsche Konstante, von der Substanz und in beträchtlichem Grade von der Wellenlänge des einfallenden Lichtstrahles abhängig ist; die Temperatur wirkt auf k fast gar nicht ein; du Bois hat die numerischen Werte von k für Fe, Co und Ni bestimmt. Sein Apparat ist in Fig. 318 abgebildet. Hier sind P_1 und P_2 die Pole eines kräftigen Elektromagneten, M ist eine polierte Platte aus der zu untersuchenden Substanz, JJ ist ein Wasserdampfbehälter, der eine Beobachtung bei 100° auszuführen gestattet. Durch die Durchbohrung des Poles P_2 wird der einfallende und der reflektierte Strahl hindurchgesandt, wobei man φ messen und J bestimmen kann. Zur Bestimmung von B, welches die Feldintensität in der Nähe von M ist, diente eine auf der Seite S versilberte Platte G, in welcher die magnetische Drehung der Polarisationsebene (s. u.) erfolgte; die Größe dieser Drehung bestimmt den Induktionsfluß B. Die Gleichung $H = B - 4\pi J$ gibt die Größe H innerhalb der Platte.

VI. Die Zugkraft-Methode. Diese Methode beruht auf Anwendung der Formel (24, a), S. 825, und der sich von dieser kaum

unterscheidenden Formel (24, b). Ist die zum Zerreißen der magnetischen Kette erforderliche Kraft P in Grammen ausgedrückt, so ist

$$B = \sqrt{\frac{8 \,.\, 981 \pi P}{S}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (34)$$

wo S der Flächeninhalt des Querschnittes des loszureißenden Stabes ist. Die wichtigsten unter den hierher gehörigen Apparaten sind das Permeameter von S. Thompson und die magnetische Wage von du Bois. Der erste von diesen Apparaten besteht aus einem eisernen Rahmen A (Fig. 319), durch den in a ein Kanal gebohrt ist. Ein Stab aus der zu untersuchenden Substanz wird in diesen Kanal hineingebracht und berührt in b die andere Seite des Rahmens; c ist die Magnetisierungsrolle, B eine Federwage, die zur Bestimmung jener Kraft P dient, die zum Losreißen des Stabes vom Rahmen erforderlich ist. Die Größe H ist gleich $H = 0{,}4 \pi n i$, wo n die Windungszahl pro Längeneinheit der Rolle ist. Die magnetische Wage von du Bois ist in Fig. 320 schematisch dargestellt. Der zu untersuchende Stab T wird fest zwischen den Stützen V_1 und V_2 eingeklemmt; er ist umgeben von der Spule C. Auf der dreiseitig prismatischen Achse E schwingt ein massiver Bogen YY aus Eisen; seine Schwingungsamplitude ist sehr gering, sie wird durch den vorspringenden Teil A und die Schraube I begrenzt. Die


Fig. 319.

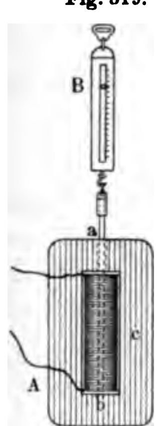


Fig. 320.

Achse E befindet sich nicht in der Mitte des Bogens, sondern es wird das Übergewicht der linken Hälfte desselben durch das Bleigewicht P aufgehoben. Die von V_1 und V_2 ausgehenden gleich starken Anziehungen wirken auf die ungleichen Arme des Hebels und lassen den linken Teil des Bogens sich senken, bis Berührung mit der Schraube I eintritt. Durch Verschiebung der beiden Gewichtsstücke W längs der oberen

doppelten Skala SS kann man diese Anziehung derart kompensieren, daß sich der linke Teil gerade von der Schraube I fortzubewegen anfängt. Die Teilstriche an der Skala sind derart aufgetragen, daß man die Zahl B durch einfache Multiplikation der Ablesung mit 10 oder mit 2 erhält, je nachdem, welches der beiden Gewichtsstücke vom Nullpunkt der Skala verschoben wurde. Die Rolle hat eine Länge von 4π Centimetern und enthält 100 Windungen, so daß der Wert von H in der Mitte derselben durch Multiplikation der Anzahl Amperes mit 10 erhalten wird. Die magnetische Kette ist ungeschlossen, da sie zwei Lücken bei I und A hat; du Bois hat die Theorie seines Apparates, gestützt auf die Formeln für die magnetische Kette (S. 827) entwickelt. Er fand für den Entmagnetisierungskoeffizienten $N = 0{,}02$.

VII. Andere Methoden zur Messung von B und μ für ferromagnetische Substanzen. Wir wollen noch kurz einige dieser Methoden erwähnen. Bruyer bringt eine Wismutspirale in den Spalt des Schließungsrahmens und beurteilt die Größe B aus ihrem elektrischen Widerstande (vgl. den Einfluß des Feldes auf den Widerstand von Wismut).

Siemens und Halske bringen in eine zylindrische Höhlung, innerhalb des Schließungsbogens, einen beweglichen Drahtrahmen, durch den ein Strom von bestimmter Stärke fließt. Der Drehungswinkel des Rahmens gestattet eine Bestimmung von B (s. das Galvanometer von Deprez und D'Arsonval).

Interessant ist noch der Apparat von Holden, der dazu dient, die Werte für μ in zwei Stäben zu vergleichen, von denen der eine zuvor geprüft worden ist und als Vergleichskörper dient. In neuester Zeit hat ein Apparat Verbreitung gefunden, der Fluxmeter genannt wird. Seine Theorie und Benutzungsart sollen später beschrieben werden.

§ 6. Abhängigkeit der Größen B und x von H für ferromagnetische Körper. Hysteresis. Wir gehen zur Betrachtung der Resultate über, die man für die Größen B und μ nach den soeben beschriebenen Methoden erhalten hat. Als unabhängige Variable wird fast immer die Feldintensität H im Inneren des zu untersuchenden Körpers angenommen. Die Untersuchungsergebnisse pflegt man in Tabellen für B, μ, x und J, entsprechend den verschiedenen Werten von H, oder häufiger in Form von Kurven anzugeben, welche die Abhängigkeit dieser Größen von H liefern; nur selten werden als unabhängige Variable B oder J gewählt.

Die Frage nach der Abhängigkeit insbesondere der Größen B und μ von H ist äußerst kompliziert. Erstens ändert sich diese Abhängigkeit zugleich mit der Sorte des betreffenden Materials, wenn man z. B. vom weichsten Eisen bis zur härtesten Stahlsorte geht. Ferner hängen B und μ, wie wir sehen werden, in hohem Grade davon ab, ob

das wirksame Feld H das stärkste Feld ist, das auf den gegebenen Körper eingewirkt hat, oder ob der Körper schon früher einmal einem noch stärkeren Felde unterworfen war. In diesem Paragraphen werden wir die Annahme machen, daß ein jedes der folgenden, allmählich wachsenden Felder erstmalig auf den Körper einwirkt. Wir wollen unsere Grundformeln noch einmal schreiben:

$$B = H + 4\pi J = (1 + 4\pi\varkappa)H = \mu H \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

Die Untersuchung der Größen B und μ hat eine große praktische Bedeutung für die Elektrotechnik, beim Bau von Dynamomaschinen, Elektromagneten usw. Auf diese Seite der Frage werden wir nicht näher eingehen. Die magnetischen Eigenschaften des Eisens hängen in hohem Grade von der Eisensorte ab, d. h. von seinem Gehalt namentlich an Kohle, sowie an verschiedenen anderen Beimengungen: ferner von der Art der Bearbeitung; von letzterer hängt u. a. auch der Kohlegehalt ab, wobei die Kohle entweder gelöst oder aber, wenigstens zum Teil, mit dem Eisen chemisch verbunden sein kann, wie z. B. beim Zementit, Fe_3C.

Wir wollen die Grenzwerte von H, J, B, μ und $\varkappa$ angeben. Die Feldintensität H kann leicht bis zu einigen Tausend C. G. S.-Einheiten gebracht werden. Ewing und Low (1889) sind bis zu $H = 24\,500$ gelangt; E. T. Jones (1896) sogar bis zu $H = 51\,600$. Solche Felder können nur in einem sehr kleinen Raume zwischen den konischen Endstücken der stärksten Elektromagnete hervorgerufen werden.

Die Magnetisierung J, welche gleich dem magnetischen Moment eines Cubikcentimeters ist, wächst, während H von $H = 0$ an zunimmt, zuerst langsam, darauf schneller und hierauf wieder langsamer und nähert sich dabei einem gewissen Grenzwerte J_m, welcher der Sättigung entspricht. Letztere wird im allgemeinen erreicht, wenn H gleich 2000 bis 3000 und J nahezu gleich $J_m = 1600$ C. G. S.-Einheiten ist; in Ausnahmefällen ist man bis zu $J_m = 1850$ gelangt. Für Gußeisen ist $J_m = 1250$. Die Größe B steht mit H ungefähr in derselben Beziehung wie J, denn man kann in der Formel $B = H + 4\pi J$ das erste Glied vernachlässigen, solange die Magnetisierung noch weit von der Sättigung entfernt ist. Jedoch bei $H > 3000$, wo J zu wachsen aufhört, fährt die Größe B fort, zugleich mit H zuzunehmen, so daß es für B kein Maximum gibt. Ewing und Low sind bis zu $B = 45\,350$ bei $H = 24\,500$ gelangt; E. T. Jones hat sogar den Wert $B = 74\,200$ bei $H = 51\,600$ erreicht.

Wenden wir uns dem besonders interessanten Zusammenhange zu, welcher zwischen den Größen μ und $\varkappa$ und der Größe H besteht. Bei sehr kleinen Werten von H ist ungefähr $\mu = 200$; man erhält aber für sehr weiches Eisen auch kleinere Werte bis zu $\mu = 100$ herab. Mit Zunahme von H wächst die Größe μ äußerst schnell bis zu

einem gewissen Maximalwerte μ_m, der bereits bei kleinen Werten von H erreicht wird, nämlich bei $H = 2$ bis $H = 3$ und nur selten bei größeren Werten von H bis zu $H = 10$. Dieser größte Wert ist ungefähr gleich $\mu_m = 3000$ und entspricht etwa den Werten $J = 400$ und $B = 5000$. Für reines Eisen fand Wilson (1898) jedoch $\mu_m = 5480$ bei $B = 9100$, woraus sich $H = 1{,}66$ und $J = 720$ ergibt. Dagegen erhält man beispielsweise für Gußeisen $\mu_m = 300$ bis 700 bei $B = 2000$ bis 6000. Wächst H noch mehr, so nimmt μ wiederum schnell und zwar unbegrenzt ab, solange als H wächst, wie man dies aus der Formel $\mu = 1 + 4\pi x = 1 + \frac{4\pi J}{H}$ ersieht, wo J aufgehört hat, sich zu ändern (Sättigung eintritt). Ewing und Low gelangten bis zu $\mu = 1{,}85$. E. T. Jones sogar bis zu $\mu \fallingdotseq 1{,}44$ bei jenen oben angeführten Werten von H und B. Die theoretische Grenze für $H = \infty$ ist $\mu = 1$.

Die Größe x steht mit H ungefähr in demselben Zusammenhange wie μ, da man bei großen Werten von μ die Relation $\mu = 4\pi x$ erhält. Der größtmögliche Wert ist ungefähr $x_m = 200$; der Wilsonschen Zahl $\mu = 5480$ aber entspricht $x_m = 425$. Bei sehr großen Werten von H, wo μ eine kleine Größe wird, ist x ein kleiner Bruch. So entspricht z. B. der Zahl $\mu = 1{,}85$ (Ewing und Low) der Wert $x = 0{,}07$; bei $\mu = 1{,}44$ (E. T. Jones) ist $x = 0{,}036$. Der theoretische Grenzwert für $H = \infty$ ist offenbar $x = 0$.

Bei kleinen Werten von H wachsen μ und x, wie wir gesehen haben, gleichzeitig mit H, was zuerst A. Stoletow (1872) gezeigt hat, der mit einem Ringe nach der ballistischen Methode experimentiert hat. Für $H = 0{,}4302$ fand er $x = 21{,}54$; für $H = 3{,}212$ erhielt er den Maximalwert $x_m = 174{,}0$ und nahm dann x ab bis zu $x = 42{,}13$ bei $H = 30{,}73$. Später haben Baur (1880) und Lord Rayleigh (1887) x und μ für sehr kleine Werte von H untersucht. Baur fand für weiches Eisen

$$x = 14{,}5 + 110\,H$$
$$\mu = 183 + 1382\,H$$

innerhalb der Grenzen $0{,}0158 < H < 0{,}384$. Lord Rayleigh fand für das härtere schwedische Eisen, daß man von $H = 0{,}00004$ bis $H = 0{,}04$ die Größen x und μ als konstant ansehen kann; ferner fand er bis zu $H = 1{,}2$

$$x = 6{,}4 + 5{,}1\,H$$
$$\mu = 81 + 64\,H.$$

Weiss (1896), Holborn (1897) u. a. haben ebenfalls einen linearen Zusammenhang zwischen x, μ und H bei kleinen Werten von H gefunden. Die Versuche von Culmann und Rössler haben gezeigt, daß man bei sehr kleinen Werten von H die Größen x und μ fast als konstant betrachten kann. Bei kleinem H beobachtet man eine be-

deutende magnetische Nachwirkung: die Magnetisierung erreicht nicht mit einem Male, sondern erst nach Ablauf einer gewissen Zeit ihren Endwert.

Für stärkere Magnetisierungen hat man verschiedene empirische Formeln in Vorschlag gebracht, welche die Form $\mu = f(B)$ haben. So kann man z. B. für einige Eisensorten

$$\mu = c B^{3/8} \quad \text{. . . . .} \quad (36)$$

setzen, während B zwischen 5000 und 10000 liegt; für weiches Eisen ist $c = 5{,}6$. Andere Beobachter fanden für weiches Eisen innerhalb der Grenzen $B = 7000$ und $B = 16000$ den Wert

$$\mu = 4850 - \frac{B}{3{,}5} \quad \text{. . . . . . .} \quad (36,a)$$

Für Ni und Cu ist der allgemeine Charakter des Zusammenhanges zwischen B, μ, $\varkappa$ und H derselbe wie für Fe, doch sind die numerischen Werte größtenteils andere.

Für weiches Nickel sind die angenäherten Maximalwerte $\mu_m = 296$ und $\varkappa_m = 23{,}5$ bei $H = 9{,}5$. Für harten Nickeldraht ist $\mu_m = 108$ und $\varkappa_m = 8{,}3$. Der Maximalwert der Magnetisierung ist $J_m = 400$, man hat aber auch $J_m = 540$ bei $H = 13\,000$, $B = 19\,800$ und $\mu = 1{,}52$ beobachtet; eine andere Nickelsorte ergab $\mu = 1{,}32$ bei $H = 16\,000$.

Kobalt wird bei sehr hohen Werten von H wie Gußeisen magnetisiert; bei $H = 5000$ wird bereits der Wert $J = 1300$ erreicht. Die Maximalwerte $\mu_m = 174$ und $\varkappa_m = 13{,}8$ liegen bei $H = 25$, d. h. bei einem viel größeren Werte von H als für Eisen. Bei $H = 15\,000$ erhält man $\mu = 2{,}10$.

Obiger Betrachtung des Zusammenhanges zwischen J, B und μ und der Größe H war die Annahme zugrunde gelegt, daß jedes Feld H erstmalig auf den gegebenen Körper einwirkt. Die Erscheinungen nehmen eine andere Gestalt an, wenn ein Feld wirkt, nachdem der Körper schon vorher einem stärkeren Felde unterworfen worden war. Wir wollen mit dem einfachsten Falle beginnen, wo H allmählich von $H = 0$ bis zu einem gewissen Werte $H = H'$ anwächst und darauf ebenso allmählich bis zum Werte $H = 0$ abnimmt und wollen das Resultat graphisch darstellen, wobei wir die H als Abszissen, die B oder J als Ordinaten wählen; die beiden letzteren Größen werden graphisch durch zwei fast vollständig gleiche Kurven bei natürlich verschiedenen Maßstäben dargestellt, da nur bei äußerst kleinen und sehr großen Werten von H nicht $B = 4\pi J$ gesetzt werden kann. Die erstmalige Magnetisierung liefert für J oder B eine Kurve von der Form OA (Fig. 321, S. 846); für $H = H'$ ist $J = H'A$. Wenn man jetzt H abnehmen läßt, so nimmt J allmählich ab und es verbleibt bei $H = 0$ die magnetische Remanenz $J_r = B_r : 4\pi = OC$. Um J auf Null

zu bringen, muß man auf den Körper mit einer negativen Kraft $OD = H_k$ einwirken, die als Koerzitivkraft bezeichnet wird.

Das Verhältnis der magnetischen Remanenz J_r zur temporären Magnetisierung J (bei $H = H'$) hängt von der Substanz, der Form des Körpers und von der Größe J selbst ab. Dieses Verhältnis kann sich der Einheit nähern. Ewing hat für einen langen, weichen Draht folgende Werte gefunden:

$H =$	0,42	0,99	1,44	2,02	2,51	3,16	5,02	7,20	11,91	45,51
$J =$	16	62	195	468	614	764	984	1070	1150	1230
$\frac{J_r}{J} =$	0,24	0,40	0,68	0,81	0,84	0,85	0,84	0,82	0,80	0,76

Der remanente Magnetismus beträgt hier bis zu 85 Proz. des temporären. Derselbe Draht ergab, nachdem er gestreckt worden war, als Maximum $J_r : J = 0{,}625$ bei $H = 720$ und $J = 359$. Der gewaltige Einfluß der Körperform auf J_r erklärt sich durch die entmagnetisierende Wirkung des Oberflächenmagnetismus. Je größer der Koeffizient N (S. 455) ist, um so kleiner ist die Größe J_r bei den gleichen Werten von J, die offenbar durch verschiedene Felder H hervorgerufen worden waren. In sehr langen Stäben und insbesondere in Ringen erhält man den Maximalwert von $J_r : J$. In einem Stabe, dessen Länge das 50fache seiner Dicke beträgt, erhält man für J_r bereits einen fast halb so großen Wert wie für den Idealfall, wo $N = 0$ ist. In einer Kugel und umsomehr in einer dünnen, transversal magnetisierten Platte erhält man einen verschwindend kleinen Wert für J_r. Bouty hat gezeigt, daß bei wiederholter Magnetisierung die Größe J_r gemäß der Formel $J_r = A - B : n$ bis zu einem gewissen Grenzwerte wächst; n bedeutet hier die Anzahl der Magnetisierungen.

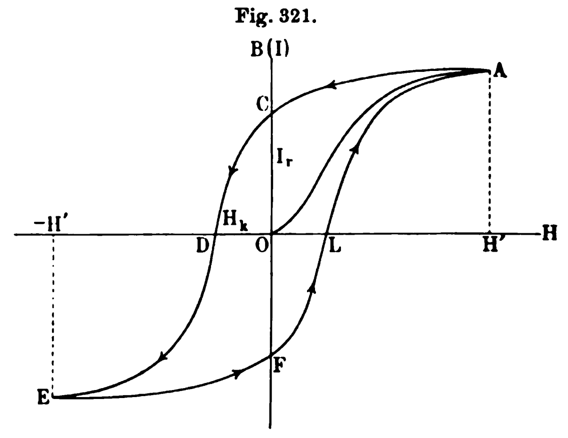
Die Größe J_r hängt auch davon ab, in welcher Weise H vom Werte H' zum Werte 0 gelangt. Waltenhofen (1863) hat zuerst beobachtet, daß bei plötzlichem Verschwinden des Feldes (Stromunterbrechung) ein viel kleinerer Wert für J_r erhalten wird, als bei allmählichem Übergange zu $H = 0$. In einigen Fällen kann auch ein negativer Wert für J_r erhalten werden; es entspricht dies der sogenannten anomalen Magnetisierung. Fromme, Auerbach, Righi u. a. haben diese Erscheinung untersucht und gezeigt, daß sie nicht durch die Wirkung von Induktionsströmen erklärt werden kann, sondern sich aus der Natur der magnetischen Erscheinungen selbst ergibt.

Die Koerzitivkraft H_k hängt nur von der Substanz und dem erreichten J ab, das durch die Kraft $-H_k$ vernichtet werden kann; sie hängt aber nicht von der Körperform und in diesem Sinne auch nicht von dem remanenten Magnetismus J_r ab, der durch sie vernichtet wird. Wenn man demnach in Körpern aus derselben Substanz, die aber verschiedene Gestalt haben, durch verschiedene H' die

gleichen J wachruft, so erhält man bei Abnahme von H' bis auf Null verschiedene Werte von J_r; um diese jedoch zu vernichten, ist stets die gleiche Kraft — H_k erforderlich. Für verschiedene Eisensorten schwankt H_k zwischen $H_k = 1$ und $H_k = 4$; für Stahl jedoch geht H_k bis zu 30, ja bisweilen bis zu 80.

Die Erscheinungen, welche wir hier beschreiben, sind von Warburg (1880) entdeckt worden und darauf, unabhängig von ihm, auch von Ewing (1882), der für sie den Namen Hysteresis in Vorschlag gebracht hat, der in der Folgezeit auf alle möglichen Erscheinungen angewandt worden ist, bei denen für eine gewisse Größe y (hier beispielsweise J) verschiedene Werte bei den gleichen Werten x der sie hervorrufenden Ursache (hier H) erhalten werden, je nachdem dieser Wert x durch Anwachsen von kleineren oder durch Abnahme von größeren Werten erreicht worden ist. Man könnte kürzer sagen, daß „Hysteresis" auftritt, wenn der Wert von y nicht nur von der im ge-

Fig. 321.



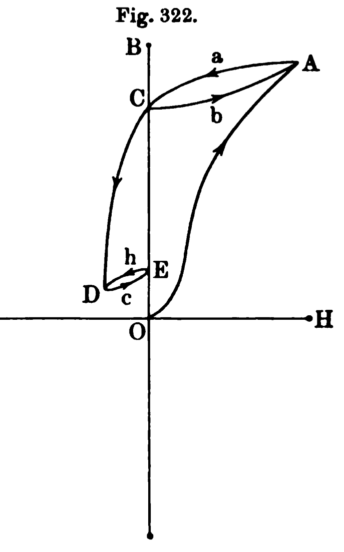
gebenen Augenblicke einwirkenden Ursache x abhängt, sondern auch von den Werten der Größen x, die vorher gewirkt hatten. Nach Ewing hat vor allem Hopkinson die magnetische Hysteresis eingehend studiert.

Um uns mit dieser Erscheinung vollständig bekannt zu machen, müssen wir den ganzen „Zyklus" der Magnetisierungen ins Auge fassen; vgl. Fig. 321. Läßt man das negative Feld bis zum Werte $-H'$ wachsen, so erhält man die Kurve DE, wobei die Ordinate des Punktes E ihrem absoluten Betrage nach gleich der Ordinate des Punktes A ist. Läßt man darauf das negative Feld bis auf Null abnehmen, so erhält man die Kurve EF, die zu AC symmetrisch ist, so daß $OF = -OC = -J_r$ ist. Endlich läßt man H von Null bis H' wachsen; bei $H = OL = OD = H_k$ ist $J = 0$ und bei $H = H'$ erhält man den früheren Wert von J, der durch die Ordinate des

Punktes A gegeben ist. Somit wird bei der zyklischen Magnetisierung zwischen $H = + H'$ und $H = - H'$ die Größe J (oder B) graphisch dargestellt durch eine geschlossene Kurve von der Gestalt $ACDEFLA$. Unterwirft man einen Körper erstmalig zyklischen Magnetisierungen, so bildet sich jene Kurve nicht sogleich aus; bei den ersten Zyklen wachsen die Ordinaten der Punkte A und B allmählich an, wovon bereits oben die Rede war (Bouty).

Die Gestalt der geschlossenen Kurve hängt von der Geschwindigkeit der Ummagnetisierungen ab. Mit dieser Frage haben sich sehr viele Forscher beschäftigt, z. B. Warburg und Hönig, Weihe, Oberbeck, Lord Rayleigh, Tanakadaté, Niethammer, Hopkinson, Wilson, Lydall und in neuester Zeit M. Wien, Ångström, Maurain, Schames u. a. Einige von den erwähnten Forschern fanden, daß bei Vergrößerung der Anzahl n der Zyklen, welche pro Sekunde durchlaufen werden, die Ordinaten der Punkte A und E sich etwas verkleinern, die Kurve bei A und E sich stärker krümmt und ihre beiden Zweige sich voneinander entfernen, so daß der von der Kurve eingeschlossene Flächenraum breiter und größer wird. Andere Forscher fanden, daß jener Flächenraum von der Zahl n der Zyklen pro Sekunde unabhängig sei. Dies bestätigte Schames (1907), welcher jene Flächen bei gleichen maximalen Induktionen B verglich, falls B nicht größer ist als 10000. Bei größerem B wächst die Fläche mit wachsender Frequenz n.

Fig. 322.



Eine unendliche Mannigfaltigkeit von Kurven erhält man, wenn man H durch unvollständige Zyklen ändert; so erhält man z. B. beim Übergange von $H = 0$ zu $H = H'$ und darauf zu $H = 0$ und wieder zurück zu $H = H'$ die Kurve $OAaCbA$ (Fig. 322). Geht man inmitten des Zyklus von einem gewissen negativen H zu $H = 0$ und wieder zurück, so erhält man die Kurve $DcEhD$.

Lord Rayleigh (1887) hat gefunden, daß für sehr kleine H, von $H = 0{,}00004$ bis $H = 0{,}04$, für welche μ eine Konstante ist, also B und J lineare Funktionen von H, keine Hysteresis existiert.

Um die Kurven für die zyklische Magnetisierung zu erhalten, mißt man J und B nach einer der vorhin beschriebenen Methoden. Hierbei kann man die Größe H allmählich variieren und auf diese Weise der Reihe nach die Punkte der gesuchten Kurve erhalten. Man

kann aber auch anders verfahren (Ewing). Indem man $H = H'$ macht, erhält man den Punkt A (Fig. 321); hierauf vermindert man H um den kleinen Betrag ΔH und erhält einen Punkt auf dem Zweige AC; ferner durchläuft man den ganzen Zyklus, kehrt zum Punkte A zurück und verkleinert hierauf H um einen Betrag $\Delta' H > \Delta H$, wodurch ein neuer Punkt auf dem Zweige AC erhalten wird; hierauf durchläuft man abermals den ganzen Zyklus usw. Searle und Ewing haben Apparate konstruiert, die gestatten, auf einem Schirme die Bewegung eines Lichtpunktes längs einer geschlossenen Magnetisierungskurve zu erhalten; diese Kurve kann man dann abzeichnen oder photographieren. Dieser Lichtpunkt wird durch Reflexion eines Strahles an einem kleinen Spiegel erhalten, der sich um eine vertikale und um eine horizontale Achse dreht, wobei die eine Drehung proportional H, die andere proportional B ist. Ångström (1899), Piola (1906) und Madelung (1907) haben die Braunsche Röhre mit Kathodenstrahlen (Bd. IV, 2) zur objektiven Darstellung der Magnetisierungskurven verwandt.

§ 7. Arbeit und Erwärmung bei der Magnetisierung. Warburg (1881) hat zuerst auf den einfachen Zusammenhang aufmerksam gemacht, der zwischen der Hysteresis und der Arbeit besteht, welche bei Änderung des magnetischen Zustandes eines Körpers geleistet wird. Wir wollen die Hopkinsonsche Herleitung der hierfür geltenden Grundformel angeben. Denken wir uns eine sehr lange Rolle, in welcher n Windungen auf die Längeneinheit kommen und nehmen wir an, daß durch sie der Strom i hindurchfließt. In diesem Falle ist $H = 4\pi ni$. Innerhalb der Rolle, deren Länge l ist, befindet sich ein Eisenstab; sein Querschnitt sei gleich s, sein Volumen $v = ls$. Nimmt die Induktion B um dB zu, also der Induktionsfluß um sdB, so tritt in jeder Windung der Rolle eine elektromotorische Kraft auf (Bd. IV, 2), die numerisch gleich sdB ist und in der Richtung wirkt, welche der Richtung des Stromes i entgegengesetzt ist. In der gesamten Rolle erscheint die elektromotorische Kraft $nlsdB$. Damit sich die Stromstärke i nicht ändert, muß die Energie $inls.dB$ auf Kosten derjenigen Energie verbraucht werden, welche als Stromquelle wirkt. Diese Energie $inls.dB$ wird zur Arbeit für die Änderung des magnetischen Zustandes des Körpers verbraucht. Es sei nun dW diejenige Arbeit, welche in der Volumeinheit des Körpers verausgabt wird. Dann ist

$$dW = \frac{inlsdB}{v} = in.dB.$$

Die Relation $H = 4\pi ni$ gibt

$$dW = \frac{1}{4\pi} HdB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Diese überaus wichtige Formel bestimmt die gesuchte Arbeit in Ergs pro Cubikcentimeter, wenn H und B in C. G. S.-Einheiten gegeben sind. Substituiert man $H = B - 4\pi J$ oder $dB = dH + 4\pi dJ$, so erhält man die Ausdrücke:

$$dW = \frac{1}{8\pi} d(H^2) + HdJ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37, a)$$

$$dW = \frac{1}{8\pi} d(B^2) - JdB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37, b)$$

Bei einem beliebigen geschlossenen Magnetisierungszyklus erhält man für die in der Volumeneinheit des Körpers verbrauchte Gesamtarbeit W den Ausdruck:

$$W = \frac{1}{4\pi} \int HdB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Es ist aber $\int HdB$ numerisch gleich dem Flächeninhalt, der (gegen die Uhrzeigerrichtung) von der Kurve umgrenzt wird, welche den Zusammenhang zwischen B und H bei der zyklischen Magnetisierung angibt (Fig. 321). Hieraus ergibt sich folgendes wichtige Resultat: Der Inhalt der Fläche, welche von der Kurve umgrenzt wird, die den Zusammenhang zwischen B und H bei der zyklischen Magnetisierung graphisch darstellt, dividiert durch 4π, ist numerisch gleich der Arbeit, welche bei einem Zyklus in der Volumeneinheit des Körpers verbraucht wird. Hieraus erkennt man den Zusammenhang, der zwischen der Hysteresis und der Arbeit besteht; wäre erstere nicht vorhanden, d. h. würde jedem Werte von H nur ein einziger Wert von B entsprechen, so wäre auch die gesamte bei der zyklischen Magnetisierung geleistete Arbeit gleich Null.

Für die Arbeit W, welche dem Zyklus entspricht, kann man außer der Formel (38) noch eine ganze Reihe von anderen Ausdrücken auf Grund von (37, a) und (37, b) finden, da die Integrale der ersten Glieder gleich Null sind:

$$W = \frac{1}{4\pi} \int HdB = \int HdJ = -\int JdB \quad . \quad . \quad . \quad (38, a)$$

Für eine geschlossene Kurve ist allgemein $\int d(x, y) = \int y\,dx + \int x\,dy = 0$; daher gibt (38, a) noch die Relation

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int BdH = -\int JdH = \int BdJ \quad . \quad (38, b)$$

Die Gleichungen $B = \mu H$ und $J = \varkappa H$ geben:

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{1}{\mu}\, d(B^2) = -\frac{1}{8\pi} \int \mu\, d(H^2) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\varkappa}\, d(J^2) = \frac{1}{2} \int \varkappa\, d(H^2) = -\int \varkappa HdB \end{aligned}\right\} \quad . \quad (38, c)$$

Es ist nicht uninteressant, (38) mit dem letzten der Ausdrücke (38, c) zu vergleichen; der direkte Übergang läßt sich leicht ausführen auf Grund der Formeln:

$$\int (1 + 4\pi\varkappa) H dB = \int \mu H dB = \int B dB = \tfrac{1}{2}\int d(B^2) = 0.$$

Für eine nichtzyklische Änderung des magnetischen Zustandes hat man die Formeln (37), (37, a) oder (37, b) zu gebrauchen. Bei sehr starken Magnetisierungen kann man $dJ = 0$ setzen: dann gibt (37, a):

$$dW = \frac{1}{8\pi} d(H^2) \quad \ldots \ldots \quad (38, d)$$

Für schwach magnetische Körper kann man $\mu = Const$ setzen: für die Arbeit W_0' der Magnetisierung eines Cubikcentimeters eines derartigen Körpers, welche geleistet wird, wenn das Feld von Null bis H wächst, ist:

$$W_0' = \frac{1}{4\pi}\int_0^H H dB = \frac{\mu}{4\pi}\int_0^H H dH = \frac{\mu}{8\pi} H^2 \quad \ldots \quad (39)$$

Durch diese Formel wird der Energievorrat eines magnetisierten schwach magnetischen Körpers bestimmt.

Der Flächeninhalt der Figur $ACDEFLA$ (Fig. 321) ist nahezu gleich $2\,DL \, . \, AH' = 4\,JH_k$. Man kann daher bei Berechnungen der Arbeit in 1 ccm für einen Zyklus die Formel

$$W = \frac{1}{\pi} JH_k \,\mathrm{Erg} \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

anwenden. Adler, Duhem u. a. haben die Frage nach der Magnetisierungsarbeit weiter verfolgt. Bekennt man sich zur Theorie der drehbaren Molekularmagnete, so kann man sich denken, daß die Magnetisierungsarbeit zur Überwindung der Reibung verbraucht wird, welche die Drehung der Molekularmagnete zu hindern sucht.

Wir hatten als Hysteresis eine gewisse Erscheinung bezeichnet: mit demselben Namen kann man auch die Größe W selbst belegen. d. h. den Energieverlust bei einer Magnetisierung: bei Bestimmung von W spricht man von „Messung der Hysteresis". Die Größe $W = \int H dJ$ für einen Zyklus, der fast bis zum Maximalwerte von J reicht, kann als Charakteristik der Substanz dienen. Für die in der Elektrotechnik gebräuchlichen weichen Eisensorten schwankt W um den Wert 10 000 Erg (pro 1 ccm). Für hartes Eisen ist W bedeutend größer und für einige Stahlsorten kann W sogar bis zu einigen Hunderttausend Ergs gehen. Für Nickel hat man Werte von 11 000 bis 25 000 erhalten; für Kobalt (mit 2 Proz. Fe) ist $W = 30\,400$.

Steinmetz hat eine empirische Formel für den Zusammenhang zwischen W und dem größten erreichten Werte von $\pm B$ angegeben, sie lautet:

$$W = \eta B^{1,6} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Derselbe Exponent liefert offenbar auch die Beziehung zwischen W und J, das man gleich $B:4\pi$ setzen kann. Die Formel (41) ist von sehr vielen Forschern geprüft worden, wie z. B. von Ewing und Miss Klassen, Baily, Maurach, Gray, Weiss u. a. Dabei hat sich gezeigt, daß der Exponent von B zwischen 1,3 und 1,8 schwankt: der Koeffizient η hat für Eisen Werte zwischen 0,001 und 0,004. Für die härtesten Stahlsorten aber reicht er bis zu 0,1. Maurach hat für einen Ring aus Eisen gefunden, daß der Exponent von 2,47 bis 1,22 abnimmt, wenn H von 0,31 bis 27,8 wächst, wobei J von 4,78 bis 1567 und W von 0,12 bis 9817 zunehmen.

Die Frage nach der Abhängigkeit der Größe W von der Geschwindigkeit, mit welcher der Zyklus durchlaufen wird, hat man als unentschieden zu betrachten, ungeachtet der großen Zahl der diesbezüglichen Untersuchungen. Von großer Bedeutung ist die Hysteresis im magnetischen Drehfelde, doch sind auch hierfür wenige unzweideutige Resultate erzielt worden. Auf Beschreibung der Apparate, die zur Messung der Größe der Hysteresis dienen (Hysterisimeter), werden wir nicht eingehen. Solche Apparate sind von Ewing, Marcel Deprez, Blondel und Holden konstruiert worden.

Die Arbeit W muß das Auftreten irgend einer Energie veranlassen. Da sich der magnetische Zustand eines Körpers bei zyklischer Magnetisierung nicht ändert, so folgt, daß diese Energie nur Wärmeenergie sein kann. Wir nehmen an, daß W in Ergs angegeben ist. Die äquivalente Wärmemenge q, die sich bei einem Zyklus in 1 ccm ausscheidet, ist gleich $q = W:4{,}16 \, . \, 10^7$ Grammkalorien. Vollziehen sich in 1 sec n Zyklen, so wird während der Dauer t in 1 ccm Eisen folgende Wärmemenge frei:

$$Q = \frac{n W t}{4{,}16 \, . \, 10^7} \text{ Grammkalorien} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Die Anzahl der verbrauchten Watts ist gleich $nW:10^7$. Auf eine Tonne (10^3 kg) Eisen, deren Volumen gleich $10^6:7{,}7$ ccm ist, werden

$$N = \frac{n W . 10^6}{10^7 . 7{,}7 . 736} = 0{,}000\,017\,7 \, n W \text{ Pferdestärken} \quad . \quad (42,\text{a})$$

verwandt (1 PS = 736 Watts). Ist z. B. $W = 10\,000$ (weiches Eisen) und $n = 100$, so erhält man $N = 17{,}7$ PS. Setzt man die Dichte des Eisens gleich 7,7 und seine Wärmekapazität gleich 0,11, so erhält man für die Temperaturerhöhung θ des Eisens bei einem Zyklus:

$$\theta = \frac{W}{4{,}16 \, . \, 10^7 \, . \, 7{,}7 \, . \, 0{,}11} = 2{,}84 \, . \, 10^{-8} \, W \text{ Grad} \quad . \quad (42,\text{b})$$

Für $W = 10000$ ist $\theta = 0{,}000284^0$. Die Temperaturerhöhung θ_1 in 1 Sek. (n Zyklen) ist gleich $2{,}84 \,.\, 10^{-8}\, n\, W$ Grad. Für $W = 10000$ und $n = 10Q$ ist $\theta_1 = 0{,}0284^0$. Würde man die Wärme nicht fortschaffen, so würde sich im Laufe einer Stunde die Temperatur um 102^0 für weiches Eisen erhöhen. In hartem Stahl erhält man eine geringere Erwärmung bei schwachen Magnetisierungen, wenn $H < 15$ ist. Ist aber $H > 15$, so erwärmt sich der Stahl stärker und man erhält beispielsweise bei $H = 75$ für weiches Eisen $\theta = 0{,}0003^0$ und für harten Stahl $\theta = 0{,}0019^0$.

Die experimentelle Bestimmung der Wärmemenge Q, die im Eisen als Äquivalent der Arbeit W der zyklischen Magnetisierung auftritt, bietet große Schwierigkeiten, da neben dieser Wärmeausscheidung eine Erwärmung des Eisens durch Induktionsströme (Foucaultsche Ströme, Bd. IV, 2) erfolgt, sowie eine Erwärmung durch die Magnetisierungsrolle, die selbst durch die hindurchgehenden Ströme erwärmt wird. Eine Messung der Wärme Q haben u. a. Joule, Cazin, Grove, Warburg, Herurg, Jamin und Roget, Borgmann, Warburg und Hönig, Pilleux, Edlund, Trowbridge, B. Strauss, M. Wien, Maurain u. a. ausgeführt. Auf eine Besprechung einzelner von diesen Arbeiten müssen wir verzichten und sagen nur so viel über sie im allgemeinen, daß sie das Vorhandensein der Wärme Q sicher bewiesen, sonst aber keine neuen Ergebnisse geliefert haben, die man als verbürgt anzusehen hätte.

§ 8. Einfluß mechanischer Einwirkungen und der Temperatur auf die Magnetisierung. Die betreffenden Einflüsse auf den remanenten Magnetismus haben wir bereits auf S. 470 bis 474 besprochen; wir haben an dieser Stelle den Einfluß zu betrachten, der sich während der Magnetisierung äußert.

I. Erschütterungen und Stöße vergrößern die temporäre Magnetisierung J und vermindern die remanente Magnetisierung J_r. Sie begünstigen im allgemeinen diejenige Veränderung der Größe J, welche als Folge der im gegebenen Augenblicke eintretenden Änderung des Feldes H erscheint. Die Größe W der Hysteresis nimmt beträchtlich ab; in weichem Eisen ist W fast gleich Null, wenn man während der zyklischen Magnetisierung das Eisen genügend starken Stößen aussetzt. Die Induktion B eines Eisendrahtes, die bei $H = 0{,}32$ gleich 190 war, nahm infolge der Stöße bis zu 6620 zu; der Wert $B = 7120$ ging in den Wert $B = 11600$ über. Bei Verminderung von H von einem großen Werte bis auf 0,33, wurde $B = 6880$ erhalten und nahm infolge der Stöße bis auf $B = 320$ ab. Für Ni kann sich das Maximum der Größe J durch Erchütterungen und Stöße auf das zehnfache vergrößern. Mit der Frage nach dem Einflusse von Erschütterungen

und Stößen haben sich Ewing, G. Wiedemann, Fromme, Villari. Berson, Ascoli u. a. beschäftigt.

II. Zug und Kompression als Ursachen, welche die Magnetisierung beeinflussen, sind von vielen Forschern untersucht worden. Man hat hierbei zwischen dem Einflusse, den eine mäßige Spannung bei verschiedenen Werten von H und dem Einflusse, den eine sich allmählich vergrößernde Spannung bei gegebenem Felde H ausübt, zu unterscheiden. Die ersten, welche diese Einflüsse untersucht haben, waren Wertheim (1852) und Matteucci (1858); sie fanden, daß Spannung die Magnetisierung von hartem Eisendraht vergrößert. Villari fand (1868), daß bei schwachen Feldern H eine Spannung die temporäre Magnetisierung J vergrößert, bei starken Feldern jedoch verringert. Bei einem gewissen Feldwerte H hat die Spannung keinen Einfluß: es ist dies der sogenannte „Villarische kritische Punkt“. Je größer die Spannung ist, um so kleiner ist das kritische H; je größer H ist, um so kleiner ist diejenige Spannung, bei welcher sich J zu verkleinern anfängt. Bei $H = 2{,}46$ wuchs die Größe J von 450 bis 620, wenn die Spannung p von Null bis auf 1,8 kg zunahm und darauf bis auf 520 bei $p = 6$ kg abnahm. Um $H = 7.5$ herum nimmt J ab, beginnend von $p = 0$. Für hartes Eisen erhält man eine deutliche Zunahme von J bei $H < 25$ und mäßiger Belastung; z. B. kann bei $H = 4{,}31$ die Größe J von 150 bis 550 wachsen, bei $H = 8{,}6$ von 350 bis 880 usw., bei starker Spannung fängt J wiederum an zu fallen. Wenn man bei gegebenem H einen Draht zyklischer Streckung p unterwirft, so erhält man bei Rückkehr zum früheren p nicht auch das frühere J: man beobachtet vielmehr eine magnetoelastische Hysteresis; die geschlossenen Kurven, welche man hierbei erhält, haben eine komplizierte Gestalt in der Art einer unregelmäßigen Acht (vgl. Ewing, Magnetic induction in iron, 3. Aufl., S. 217 bis 221, 1890; deutsche Ausgabe, S. 196 bis 200, 1896).

Kompression übt auf die Magnetisierung J den entgegengesetzten Einfluß aus wie die Streckung.

Von ganz gewaltigem Einfluß ist die Streckung auf Nickeldraht, wie die Untersuchungen von Heydweiller, Ewing u. a. gezeigt haben. Heydweiller hat gezeigt, daß es auch für Ni einen Villarischen kritischen Punkt gibt, daß sich aber derselbe bei sehr kleinen Werten von H befindet. Im allgemeinen aber vermindert die Zugspannung die Größe J in sehr hohem Grade. Wir wollen hierfür einige Zahlen anführen, die sich auf einen Nickeldraht von 0,68 mm Dicke beziehen. Bei $H = 100$ war $J = 400$, $J_r = 250$; betrug nun die Belastung $p = 12$ kg, so wurde $J = 100$, $J_r = 16$ erhalten. Für einen ebensolchen, jedoch etwas gehärteten Draht erniedrigte sich J von 375 bis auf 50 bei einer Belastung von 18 kg. Die magnetoelastische Hyste-

resis im Ni ist nur unbedeutend. Ewing (1888) hat gezeigt, daß bei Kompression in der Längsrichtung sich J und J_r beim Nickel sehr schnell vergrößern, beispielsweise bei $H = 20$ von $J = 100$ bis $J = 430$ und von $J_r = 50$ bis $J_r = 390$. Das Verhältnis $J_r : J$ nimmt von 0,5 bis 0,9 zu; bei Streckung kann es bis auf 0,19 sich vermindern. Es ist leicht verständlich, daß Dilatation und Kompression noch stärker auf J_r einwirken als auf J.

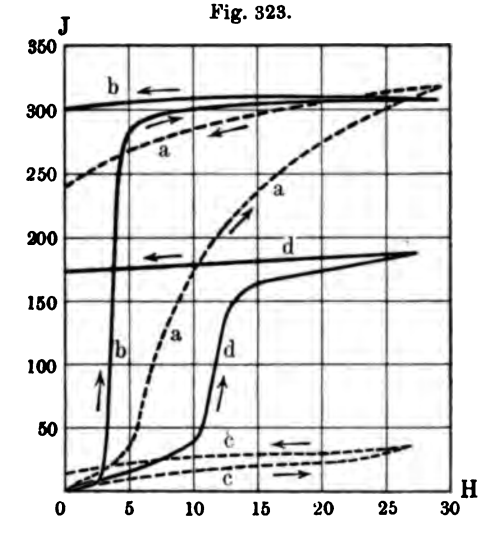
Für Kobalt hat W. Thomson ebenfalls einen kritischen Punkt gefunden, doch wirkten die Streckungen im entgegengesetzten Sinne wie beim Fe: bei kleinen Werten von H vermindert Streckung die Magnetisierung J, bei großen dagegen vermehrt sie dieselbe. Bei Kompression tritt, wie Chree gezeigt hat, die entgegengesetzte Erscheinung auf. Weitere Beobachtungen an Kobalt sind von G. S. Meyer (1896), sowie von Nagaoka und Honda (1902) angestellt worden.

III. Der Frage nach dem Einflusse der Torsion auf die Magnetisierung ist eine sehr große Anzahl von Arbeiten gewidmet, von denen die wichtigsten von Wertheim, G. Wiedemann, W. Thomson, Knott, Ewing, Zehnder, Nagaoka, Moreau, Schreber, Barus u. a. stammen. Eng verknüpft mit der Frage nach der Einwirkung einer Torsion auf die Magnetisierung eines Körpers ist auch die Frage nach dem Einflusse der Magnetisierung auf einen vorher tordierten Körper und der Tordierung, welche erzeugt wird durch longitudinale Magnetisierung eines Eisendrahtes, durch den ein elektrischer Strom fließt, wodurch in ihm bereits eine kreisförmige Magnetisierung im Querschnitte hervorgerufen wurde. Auf die komplizierten und mannigfaltigen hierher gehörigen Erscheinungen können wir hier nicht eingehen. Eine eingehende Beschreibung derselben findet man in G. Wiedemanns „Die Lehre von der Elektrizität", Bd. III, S. 767 bis 812, 1895 und in dem oben zitierten Werke von Ewing (S. 231 bis 249 der dritten englischen Auflage, S. 211 bis 225 der deutschen Ausgabe): Wir wollen uns auf einige wenige Angaben beschränken. Wenn man einen Eisenstab während der Magnetisierung einer zyklischen Tordierung nach einer oder nach beiden Seiten hin unterwirft, so nimmt J bei der Tordierung ab, bei der Retordierung zu; hierbei tritt auch magneto-elastische Hysteresis auf. Geht durch einen Eisendraht ein Strom, der in ihm eine im Außenraume unmerkliche, transversal-kreisförmige Magnetisierung wachruft, so erzeugt Tordierung eines solchen Drahtes eine merkliche longitudinale Magnetisierung; umgekehrt wird ein solcher Draht bei longitudinaler Magnetisierung tordiert. Ein bereits tordierter Draht wird durch longitudinale Magnetisierung ein wenig retordiert. G. Wiedemann hat ausgehend von der Theorie der drehbaren Molekularmagnete viele hierher gehörige Erscheinungen erklärt.

Nickel weist im allgemeinen die gleichen Erscheinungen wie Eisen auf, sie haben aber die entgegengesetzte Richtung. So wird z. B. durch

Tordierung, welche während des Magnetisierens erfolgt, diese Magnetisierung J selbst vergrößert. Zu sehr interessanten Resultaten haben die zahlreichen Untersuchungen von Nagaoka geführt. Wir beschränken uns darauf, eines dieser Resultate durch eine graphische Darstellung zu illustrieren. In Fig. 323 repräsentiert die Kurve *aa* das Wachsen und die Abnahme von J bei der erstmaligen Magnetisierung eines weichen Nickeldrahtes. Die Kurve *bb* bezieht sich auf den Fall, wo der Draht einer Torsion um 3° pro Centimeter unterworfen war; bei sehr kleinen H sind die Größen J verkleinert, bei mittleren Werten von H sehr stark vergrößert, die Biegungen der Kurve sind jäh; die Hysteresis ist vermindert. Die Kurve *cc* bezieht sich auf einen gestreckten Draht; die Größe J ist hier sehr stark vermindert, die Hysteresis ist fast gleich Null. Schließlich gilt die Kurve *cc* für den Fall, wo Streckung und Tordierung gleichzeitig auf einen Draht eingewirkt haben.

Fig. 323.



IV. Es bleibt uns noch übrig, den Einfluß der Temperatur auf die Magnetisierung zu betrachten. Hierher gehören Untersuchungen von Kupfer, G. Wiedemann, Perkins, Hopkinson, Tomlinson, Baur, Curie, Guillaume, Houllevigue, Osmond, du Bois, L. Dumas, Dumont, Kunz, Wills, Le Chatelier, Berson, Honda und Shimizu u. a.

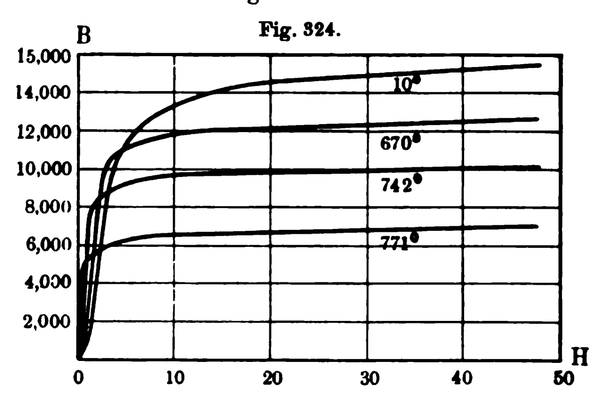
Für Eisen ergibt sich, daß bei kleinen Werten von H eine Erwärmung bisweilen eine sehr starke Zunahme der Magnetisierung J wachruft. Bei großen Werten von H ruft Erwärmung eine Abnahme von J hervor. Für jede Eisensorte gibt es ein gewisses „kritisches Feld H“, bei welchem der Einfluß der Erwärmung auf J sein Vorzeichen wechselt. Das Gesagte gilt von mäßigen Erwärmungen. Bei einer gewissen Temperatur zwischen 700 und 800° für Fe und zwischen 600 und 700° für Stahl ist die Magnetisierung $J = 0$. Hopkinson nennt diese Temperatur die kritische; Auerbach schlägt vor, als kritische diejenige Temperatur zu bezeichnen, bei der das Anwachsen von J in eine Abnahme übergeht. Diese beiden Definitionen sind voneinander nur wenig unterschieden, da der Übergang vom maximalen J

zu $J = 0$ (bei kleinem H) mit erstaunlicher Geschwindigkeit sich vollzieht. So fand z. B. Hopkinson für Fe, daß bei $H = 0{,}075$ die Induktion B von 17 bis 512 bei einer Temperaturzunahme von 10 bis 778° wächst. Bei $H = 0{,}3$ erhält man für μ folgende Werte:

Temp.:	20°	480°	580°	730°	750°	770°	775°	785°
$\mu =$	500	700	900	2500	3800	7700	11000	1 ($J=0$)

Bis 600° erfolgte langsames Wachstum von μ (bis zu 1000), hierauf bis 750° ein schnelleres Anwachsen (bis zu 3800) und endlich zwischen 750 und 775° ein fast plötzliches Anwachsen von 3800 bis 11000. Bei einer ganz geringen weiteren Temperatursteigerung sinkt die gewaltig starke Magnetisierung bis auf Null herab. Ein ganz anderes Bild erhält man bei großen Werten von H. Es ist z. B. bei

Fig. 324.



$H = 4$ ein sehr langsames Anwachsen von μ bis auf 620° vorhanden und hierauf schnelle Abnahme bis auf Null. Bei noch größeren Werten von H verschwindet das ursprüngliche Anwachsen von μ; es ist z. B. bei $H = 45$:

Temp.:	20°	370°	570°	720°	750°	785°
$\mu =$	300	300	260	240	200	1 ($J=0$)

Bestimmt man für verschiedene Temperaturen die Werte von B als Funktionen von H, so erhält man die in Fig. 324 dargestellten, einander schneidenden Kurven.

Das schnelle Verschwinden des Magnetismus bei einer gewissen Temperatur steht mit der von Barrett entdeckten merkwürdigen Erscheinung der Rekalescenz im Zusammenhange. Diese Erscheinung beruht darauf, daß bei ungefähr 780° im Eisen eine molekulare Änderung vor sich geht, die von Wärmeabsorption und Volumenverminderung begleitet ist; trotz gleichmäßiger Wärmezufuhr tritt ein Stillstand in der Temperaturerhöhung ein. Wird Eisen, welches über 800° erwärmt war, abgekühlt, so tritt bei 780° Wärmeausscheidung

ein, d. h. eine Temperaturerhöhung und Volumenzunahme. Für Stahl liegt die Temperatur der Rekalescenz niedriger; bis auf 680° erhitzter Stahl erwärmte sich von neuem bis auf 712°, so daß die Temperaturerhöhung 32° betrug. Alle diese Erscheinungen stehen mit den Umwandlungen in engem Zusammenhange, die im Eisen bei verschiedenen Temperaturen vor sich gehen. Van't Hoff (1900) hat gezeigt, daß diese Umwandlungen durch die Phasenregel bestimmt werden können (Bd. III) und daß ein „vierfacher Punkt" existiert, in welchem vier Phasen (Martensit, Zementit, Ferrit und ihr gesättigter Dampf) bei zwei Komponenten (Fe und C) im Gleichgewichte sind. Dieser Punkt liegt bei 670° und einer „Konzentration", die 0,8 Proz. Kohle entspricht; er ist analog dem kryohydratischen Punkte (Bd. III) einer wässerigen Salzlösung; beim Eisen hat man es dagegen mit einer festen Lösung zu tun.

Curie hat Eisen bei höheren Temperaturen und für $H = 1000$ untersucht. Er fand, daß nach starkem Sinken bei 760° die Magnetisierung langsam abzunehmen fortfährt; bei 860° erfolgt ein schnelleres Fallen, darauf ein langsameres, bei 1280° ein sehr starkes Ansteigen (um 50 Proz.) und darauf weiter bis 1365° abermals langsames Sinken. Den Einfluß sehr niedriger Temperaturen haben Fleming und Dewar, Claude, Osmond, Honda und Shimizu u. a. untersucht. Die Resultate dieser Arbeiten sind kompliziert und einander widersprechend.

Kunz, Thiesen, Morris, Roget u. a. haben den Einfluß der Temperatur auf die Hysteresis W untersucht. Im allgemeinen zeigt sich, daß der Energieverlust W mit Zunahme der Temperatur abnimmt.

Tomlinson fand, daß das kritische Feld (Villari, vgl. S. 852), bei welchem Streckung keinen Einfluß auf J ausübt, sich mit Zunahme der Temperatur erhöht.

Schwedow, Edison, Stefan u. a. haben Motoren gebaut, die auf der Eigenschaft des Eisens beruhen, bei hoher Temperatur seine magnetischen Eigenschaften fast völlig zu verlieren.

Nickel und Kobalt zeigen bei der Erwärmung im allgemeinen ähnliche Erscheinungen wie Eisen. Für Ni sinkt die Größe J schnell bis auf Null bei 300°, für Co bei ungefähr 1000°. Bei Steigerung der Temperatur wächst der Maximalwert μ und wird zudem bei geringeren Werten des Feldes H erhalten.

§ 9. Ferromagnetische Eigenschaften von Pulvern, Legierungen und Erzen. Im vorhergehenden hatten wir angenommen, daß die ferromagnetischen Körper Eisen, Nickel oder Kobalt in Form von massiven Stücken von sehr langgestreckter oder ringförmiger Gestalt gegeben sind. Es ist nicht uninteressant, die magnetischen Eigen-

schaften eben dieser Substanzen zu bestimmen, wenn sie Pulverform haben und entweder homogene Pulver darstellen oder aber gemischt mit einem anderen unmagnetischen Pulver sind oder aber endlich in der Masse irgend eines weichen Körpers, z. B. in Fett eingebettet sind. Waltenhofen (1870), Börnstein (1875), Toepler und v. Ettinghausen (1877), Auerbach (1880), Haubner (1886), Kobylin und Tereschin (1886), Maurain (1903) und insbesondere Trenkle (1905) haben verschiedene hierher gehörige Fälle untersucht. Aus diesen Arbeiten geht hervor, daß die Größe J bei gegebenem H um so kleiner ist, je mehr das Pulver der ferromagnetischen Substanz durch das andere nicht magnetische Pulver verdünnt ist und um so geringer infolgedessen die Wechselwirkung zwischen den nächst gelegenen Molekülen ist. Kobylin und Tereschin haben gefunden, daß für Gemische aus Eisen- und Kohlenpulver das Maximum von μ (oder $\varkappa$) bei ein und demselben H eintritt, das jedoch kleiner ist als derjenige Wert von H, der für massives Eisen das Maximum von μ ergibt. Ferner haben sie gefunden, daß eine geringe Beimengung von Kohle zum Eisenpulver das Remanenzmoment vergrößert. Trenkle ist es gelungen, Pulver aus reinem Eisen (J_1) und Gemenge aus 60 Proz. Fe und 40 Proz. Bronze (J_2) bis zur Sättigung zu magnetisieren. Er fand, daß das Maximum $J_1 = 300$ bei $H = 2900$ erreicht wird, das Maximum $J_2 = 190$ aber erst bei $H = 3500$. Das Verhältnis $J_1 : J_2$, das für $H = 200$ gleich 2,46 ist, nimmt mit Anwachsen von H ab; aber von $H = 2400$ (untersucht bis $H = 3100$) an behält dieses Verhältnis den konstanten Wert 1,55.

Wir wollen erwähnen, obgleich dies eigentlich nicht ganz hierher gehört, daß Maurain (1901 bis 1902) die magnetischen Eigenschaften von elektrolytisch niedergeschlagenem Eisen untersucht und u. a. den Fall, wo ein Magnetfeld während des Niederschlagens wirkt, mit der Magnetisierung eines bereits gebildeten Niederschlages verglichen hat. Hierbei hat sich gezeigt, daß J im ersten Falle sehr schnell zugleich mit H wächst. Die Kurve $J = f(H)$ hat keinen Wendepunkt, welcher dem Übergange vom langsamen zum schnellen Wachstum entspricht; sie steigt steil an und macht bei $H = 10$ ebenfalls eine steile Wendung, wobei sie der Abszissenachse nahezu parallel wird. Im zweiten Falle ist die Gestalt der Kurve $J = f(H)$ die gewöhnliche: sie liegt viel niedriger als im ersten Falle.

Wir gehen jetzt zu Legierungen über, welche ferromagnetische Bestandteile enthalten. Es war bereits erwähnt worden, daß eine Beimengung von Kohle zum Eisen, sowie der Zustand, in welchem sich diese Kohle befindet, stark auf die magnetischen Eigenschaften einwirken. Kleine Beimengungen von Cr, Ni, W und Mo zum Eisen vergrößern die Koerzitivkraft und bringen auf die temporäre Magnetisierung eine nur geringe Einwirkung hervor; das letztere gilt,

wie Daubrée gezeigt hat, auch von einer Beimengung von Platin. Ein höherer Gehalt an Si (bis zu 5 Proz.) erhöht das Maximum von μ von 3000 bis auf 4000 und vermindert die Hysteresis W in hohem Grade.

Weiss hat die Legierungen Fe + Sb untersucht. Bei 56,8 Proz. Fe war $\mu = 14{,}3$; bei 42,7 Proz. Eisen war $\mu = 2{,}57$; bei 34 Proz. war bereits $\mu = 1{,}006$. Mangan übt einen geringen Einfluß aus, wenn es weniger als 2 Proz. beträgt; eine Legierung aber aus 12 Proz. Mn und 1 Proz. C hat für μ den Wert $\mu = 1{,}4$ und weist keinen remanenten Magnetismus auf.

Legierungen von Eisen und Aluminium sind von Parshall und namentlich von Richardson untersucht worden, der bis zu 18,47 Proz. Al und bis zu Temperaturen von -83^0 und $+940^0$ gegangen ist. Die erhaltenen Resultate waren sehr kompliziert; wir beschränken uns darauf hinzuweisen, daß eine Legierung mit 18,47 Proz. Al ein Maximum für μ bei einer Temperatur hat, die weit unter -90^0 liegt und bei $+25^0$ den kritischen Punkt aufweist, bei dem μ schnell abnimmt.

Die Legierung Ni + Cr verliert ihre magnetischen Eigenschaften, wenn sie 10 Proz. Cr enthält; die Legierung Fe + Co + Cr dagegen bleibt stark magnetisch, sogar bei 40 Proz. Chromgehalt. Die Legierungen Ni + Cu und Ni + Sn hat Hill (1902) untersucht. Er fand folgende Umwandlungstemperaturen t, bei denen die Induktion B sich schnell verringert und gleich Null wird.

Kupfergehalt:	0 Proz.	4 Proz.	8 Proz.	20 Proz.	40 Proz.
t	355^0	310^0	280^0	155^0	-100^0

Die Legierungen Cu + Co bleiben selbst bei 98,5 Proz. Cu noch magnetisch.

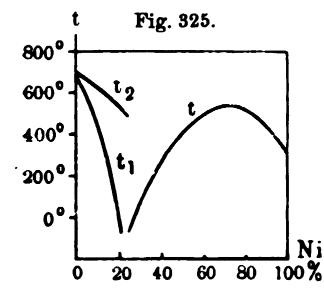
Amalgame sind von Nagaoka (Fe + Hg und Co + Hg zwischen -100^0 und $+250^0$ und bis zu $H = 3200$) und Wünsche (Ni + Hg) untersucht worden. Bemerkenswert ist, daß, obgleich für die Amalgame von Fe und Co ein nur geringer remanenter Magnetismus erhalten wird, die Koerzitivkraft dennoch ungeheuer groß ist. Für 2,3 Proz. Fe ist sie gleich 370, während ihr Maximalwert für Stahl gleich 80 ist; für Hg + Co geht sie bis zu 150. Im Zusammenhange hiermit ist auch die Hysteresis für die Amalgame außerordentlich groß. Bemerkenswert ist, daß die Amalgame Hg + Ni wenig magnetisch sind, wie man dies aus folgender Zusammenstellung (für $H = 8000$) ersieht:

Nickelgehalt in Prozenten:	0,5	1	2	3	3,5
$10^6 \varkappa$	24,9	49,3	121,9	249,1	349,8

Keinerlei Anwachsen ist bei -78^0 zu merken.

Von großem Interesse sind die Legierungen aus Eisen und Nickel, diese sind von Hopkinson, Guillaume, Osmond, Dumont, L. Dumas, Houllevigue, Abt u. a. untersucht worden. Zur Erläuterung der Eigenschaften dieser Legierungen kann die Fig. 325 dienen, in der die Abszissen dem Prozentgehalt an Nickel, die Ordinaten den Temperaturen entsprechen. Sämtliche Legierungen zerfallen in umkehrbare, die mehr als 25 Proz. Ni enthalten, und in nicht umkehrbare, in denen weniger als 25 Proz. Ni enthalten ist. Wir wollen mit den nicht umkehrbaren beginnen. Für diese sind zwei Temperaturen t_1 und t_2 vorhanden (s. Fig. 325), innerhalb derer die Legierung in zwei Zuständen existieren kann, einem magnetischen und einem unmagnetischen. Die magnetische Legierung wird bei der Erwärmung unmagnetisch bei t_2^0 und bleibt so bei Abkühlung bis auf t_1^0; bei Abkühlung unter t_1^0 erlangt die Legierung abermals die Fähigkeit, magnetisiert werden zu können und behält dieselbe bei der Erwärmung. Mit Zunahme des Nickelgehaltes sinkt die Temperatur t_2 langsam, die Temperatur t_1 aber sehr rasch (s. Fig. 325). Bei 4,7 Proz. Ni verschwindet die Magnetisierbarkeit bei $t_2 = 780^0$ und erscheint von neuem bei Abkühlung unter $t_1 = 650^0$; beide Zustände der Legierung sind in einem Intervalle von 130^0 möglich. Enthält die Legierung ungefähr 25 Proz. Ni, so ist $t_2 = 580^0$ und t_1 weit niedriger als 0^0, so daß eine Legierung, welche über 580^0 erhitzt worden war, bei Zimmertemperatur nicht magnetisiert werden kann; das Temperaturintervall beträgt 600^0. Man kann sagen, daß diese Legierungen eine gewaltig große Temperaturhysteresis besitzen. Legierungen, welche mehr als 25 Proz. Ni enthalten, verlieren ihre Magnetisierbarkeit bei einer gewissen Temperatur t^0; läßt man sie erkalten, so werden sie abermals magnetisch bei einer Temperatur t_1^0, die von t^0 nur wenig differiert, wenn die Legierung wenig mehr als 25 Proz. Ni enthält. So ist z. B. für 30 Proz. Ni $t = 140^0$, $t_1 = 125^0$. Für Legierungen mit größerem Nickelgehalt fallen beide Temperaturen zusammen; in Fig. 325 ist daher nur eine Kurve t dargestellt. Die Temperatur t wächst, während der Nickelgehalt bis 70 Proz. zunimmt, bis zu 600^0 und sinkt darauf bis 320^0 für reines Nickel.

Fig. 325.



Wir wenden uns jetzt den interessanten, unlängst entdeckten ferromagnetischen Legierungen aus nicht magnetischen Metallen zu. Bereits 1892 hat Hogg gefunden, daß, während die Legierungen 80 Proz. Fe + 20 Proz. Al und 88 Proz. Fe + 12 Proz. Mn vollkommen unmagnetisch sind, die Legierung 10,80 Proz. Fe + 54,86 Proz. Mn + 25,34 Proz. Al (die übrigen Bestandteile sind C, Si, P, S, Cu) und

14,80 Proz. Fe + 75,40 Proz. Mn + 3,05 Proz. Al fast ebensolche magnetische Eigenschaften besitzen wie das Eisen. Im Jahre 1900 hat Heusler (seine erste Arbeit erschien 1903) die Entdeckung gemacht, daß die unmagnetische Legierung 30 Proz. Mn + 70 Proz. Cu, die im Handel erhältlich ist (zu beziehen von der Isabellenhütte in Dillenburg bei Wiesbaden), magnetische Eigenschaften erlangt, wenn man ihr eines der Metalle Al, Sn, Sb, Bi, oder aber As und B hinzufügt. Eine Beimengung von C, Si, P oder auch von 1,2 Proz. Fe ruft keine magnetischen Eigenschaften hervor. Die stärksten ferromagnetischen Legierungen erhält man, wenn man Al hinzufügt, d. h. die Legierung Mn + Cu + Al herstellt. Dabei ist das günstigste Verhältnis dasjenige, das in bezug auf Mn und Al der Verbindung MnAl entspricht, wo der Gewichtsgehalt des Mangans ungefähr das Doppelte des Aluminiumgehalts beträgt. Die erste diesbezügliche Experimentaluntersuchung ist von Haupt und Stark unter der Leitung von Richarz ausgeführt worden. Sie fanden z. B. bei $H = 100$ für die Legierungen aus Cu und MnAl:

MnAl		28,8	36,6	39,7 Proz.
B =		3200	4645	5380.

Die letzte Zahl entspricht dem Werte $J = 430$. Eine Beigabe einer geringen Menge von Pb vergrößert noch die Magnetisierbarkeit der Legierung; es gab z. B. eine Legierung, welche 36,1 Proz. MnAl enthielt, B = 6480 bei $H = 150$, d. h. $J = 514$. Weitere Untersuchungen dieser und ähnlicher Legierungen wurden von sehr vielen Forschern ausgeführt. Wir geben in der Literaturübersicht ein vollständiges Verzeichnis bis Herbst 1907. Sehr groß und recht kompliziert ist der Temperatureinfluß. Bei einer gewissen „Umwandlungstemperatur" θ verschwinden die magnetischen Eigenschaften. Je nach der Zusammensetzung der Legierung schwankt θ zwischen 60° und 350°. Eine andauernde Erhitzung verändert die Eigenschaften der Legierungen; das Maximum der Magnetisierung erhält man, wenn man eine frische Legierung längere Zeit hindurch einer Temperatur von 110° (Siedetemperatur des Toluol) aussetzt. Austin hat eine beträchtliche Magnetostriktion gefunden; bei $H = 400$ beträgt die Längenzunahme $11 \cdot 10^{-7}$ der Länge, was $^1/_3$ von der größten Längenzunahme beim Eisen entspricht. In starken Feldern erfolgt Kontraktion, die proportional H^2 ist.

Gumlich hat für eine der Legierungen eine ebenso große Koerzitivkraft wie für die besten Stahlsorten gefunden.

Temperaturerniedrigung bis auf — 185° wirkt auf die magnetischen Eigenschaften dieser Legierungen nicht ein. Take hat gefunden, daß bei wiederholten Erhitzungen derjenigen Legierungen, welche Pb enthalten, die Umwandlungstemperatur θ sich stark erhöht, beispiels-

weise von 120° auf 240° oder von 75° auf 120°. Mit Hilfe eines Dilatometers konnte er eine Volumänderung bei θ^0 beobachten. Zwischen 400° und 500° erfolgten neue Umwandlungen, wobei einige Legierungen die Magnetisierbarkeit vollständig einbüßten, die sich dann bei — 185° nicht wieder einstellte. Hill hat gefunden, daß sich die magnetischen Eigenschaften bei starker Erhitzung nach erfolgter Abkühlung zuerst vermindern, jedoch bei noch stärkerer Erhitzung abermals vergrößern. In der folgenden kleinen Tabelle sind die Werte von J aufgeführt, die man nach Erhitzung bis auf t^0 ($H = 85$) erhält:

Vor der Erhitzung.	368°	500°	650°	850°
$J = 311$	267	27	90	155

Gumlich hat gefunden, daß obige Legierungen eine bedeutende „magnetische Nachwirkung" zeigen, d. h. bei Änderung von H tritt ihr neuer magnetischer Zustand keineswegs augenblicklich ein. Er fand auch, daß die Hysteresis der Legierungen bis zu 1520 Ergs pro Quadratcentimeter gehen kann und daß in der Steinmetzschen Formel (41), S. 850, $\eta = 0{,}0045$ ist.

Wir haben nun noch einige Worte über die ferromagnetischen Mineralien zu sagen. Zu ihnen gehören das Magneteisen (Magnetit Fe_3O_4), Pyrrhotin (etwa Fe_7O_8), Hämatit (FeO_2), Ilmenit ($FeTiO_3$), Limonit ($Fe_4H_6O_9$), Chromeisenerz ($FeCr_2O_4$), Almandin ($Fe_3Al_2Si_3O_{12}$), Kyanit, Augit u. a. Auf künstlichem Wege läßt sich das ferromagnetische Hydrat $Fe_3(OH)_8$ herstellen, das dem Magnetit entspricht. Einige von diesen Mineralien weisen eine deutliche magnetische Anisotropie auf; wir werden auf diese im letzten Paragraphen dieses Kapitels eingehen. An dieser Stelle wollen wir nur einige Hinweise geben. E. Becquerel (1845) hat gefunden, daß Magnetit ungefähr 0,48 der magnetischen Intensität des Eisens besitzt. Holz hat die Entdeckung gemacht, daß der remanente Magnetismus dieses Minerals das 1,5fache von demjenigen der härtesten Stahlsorten ist; die Koerzitivkraft desselben ist jedoch geringer als beim Stahl, was auch von Abt bestätigt wird, welcher gefunden hat, daß der remanente Magnetismus sogar das 2.75 fache von dem des Stahls betragen kann. Bei $H = 800$ ist der Magnetit gesättigt: die Koerzitivkraft ist gleich 50; für den Pyrrhotin ist sie gleich 200, für Hämatit etwa 150; letzterer ist bei $H = 1000$ noch nicht gesättigt. Der magnetithaltige Basalt ist von Pockels untersucht worden. Curie hat gefunden, daß für den Magnetit $\varkappa$ bei ungefähr 535° (dem kritischen Punkte) schnell abnimmt und darauf bei der Temperaturerhöhung noch weiter gleichmäßig abnimmt. Auf die Arbeiten von Weiss über die Kristalle des Magnetits und Pyrrhotins werden wir später zu sprechen kommen.

§ 10. Paramagnetismus und Diamagnetismus. Fundamentaleigenschaften. Auf S. 808 hatten wir erwähnt, daß hinsichtlich

ihrer magnetischen Eigenschaften alle Körper in stark- oder ferromagnetische und in schwachmagnetische Körper eingeteilt werden können; die letzteren wiederum zerfallen in paramagnetische und diamagnetische. Rein äußerlich genommen repräsentieren die ferromagnetischen Körper sehr stark paramagnetische, es ist aber sehr wohl möglich, daß zwischen Ferromagnetismus und Paramagnetismus nicht nur ein quantitativer, sondern auch ein viel tiefergehender qualitativer Unterschied besteht. Von rein quantitativer Seite her ist es nicht möglich, eine strenge Grenze zwischen den ferromagnetischen und den paramagnetischen Körpern zu ziehen, denn man kann beispielsweise Legierungen oder auch Mineralien finden, deren magnetische Suszeptibilität $\varkappa$ jeden beliebigen Zwischenwert zwischen dem größten für Fe geltenden Werte und den Werten für die schwächsten paramagnetischen Körper bildet.

Für diamagnetische Körper ist $\varkappa < 0$ und erhält man daher, weil $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ ist, $\mu < 1$. Man muß jedoch bemerken, daß selbst für die am stärksten diamagnetischen Substanzen $\varkappa$ sehr klein, von der Ordnung 10^{-5} ist, so daß μ niemals kleiner als ungefähr 0,9998 ist.

Beschränkt man sich auf die rein äußeren Erscheinungen, so kann man sagen, daß ein paramagnetischer Körper, etwa ein paramagnetisches Kügelchen, vom Pole eines Magneten angezogen, ein diamagnetisches dagegen abgestoßen wird. Diese Erscheinung ist zuerst von Brugmans (1778) beobachtet worden, als er den Pol eines Magneten einem auf Wasser oder Quecksilber in einem kleinen Behälter schwimmenden Stückchen Wismut näherte. Später hat E. Becquerel (1827) eine ähnliche Erscheinung am Antimon beobachtet. Im Jahre 1845 erschien der Anfang der klassischen Versuche von Faraday, welcher zeigte, daß ein Magnetfeld von hinreichender Stärke fast auf alle Körper einwirkt und daß letztere in paramagnetische und diamagnetische zerfallen. Dringt man in die Erscheinungen, welche im Magnetfelde beobachtet werden, etwas tiefer ein, so muß man sagen, daß sich die paramagnetischen Körper im magnetischen Felde von Stellen geringerer Intensität zu Stellen mit größerer Intensität, die diamagnetischen Körper aber in entgegengesetzter Richtung bewegen.

Ein ferneres äußeres Kennzeichen ist das folgende. Bringt man zwischen die Pole eines Magneten ein bewegliches horizontales Stäbchen aus der zu prüfenden Substanz, so nimmt die Achse dieses Stäbchens axiale Lage an, d. h. es stellt sich in der Richtung der Kraftlinien ein (in der Richtung einer die Pole verbindenden Geraden), wenn die Substanz paramagnetisch ist. Die Achse eines diamagnetischen Stäbchens stellt sich in die äquatoriale Lage ein, d. h. senkrecht zu den Kraftlinien (senkrecht zur Verbindungsgeraden der Pole).

Die Fig. 70 u. 71 auf S. 152 zeigen, in welcher Weise sich die Gestalt der geraden Kraftlinien ändert, wenn man in ein homogenes Magnetfeld einen diamagnetischen (Fig. 70) oder paramagnetischen

(Fig. 71) Körper einführt; hiervon ist bereits auf S. 400 die Rede gewesen. Berücksichtigt man indes den außerordentlich geringen Wert der Größe $\varkappa$ für die diamagnetischen Körper, so muß man an dieser Stelle hinzufügen, daß die Fig. 70 nicht den in Wirklichkeit vorkommenden Fällen entspricht, sondern daß die Divergenz der Kraftlinien im Inneren des Körpers übertrieben groß dargestellt ist; selbst in den am stärksten diamagnetischen Körpern ist diese Divergenz äußerst gering.

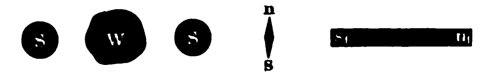
Ohne irgendwie tiefer auf das Wesen des Para- und Diamagnetismus einzugehen, kann man doch die Frage nach dem Einfluß des Mediums auf die magnetischen Eigenschaften eines beliebigen Körpers beantworten. Bringen wir irgend eine para- oder diamagnetische Flüssigkeit in ein Magnetfeld und denken wir uns irgend einen Teil M im Inneren der Flüssigkeit von ihr abgetrennt. Würde dieser Teil M in Wirklichkeit herausgenommen und in ein Magnetfeld gebracht, so würden sich seine para- oder diamagnetischen Eigenschaften dank der auf ihn einwirkenden ponderomotorischen Kräfte zeigen. Da aber dieser Teil M sich innerhalb der Flüssigkeit selbst befindet, so kann er offenbar keinerlei ponderomotorischen Wirkungen unterliegen. Hieraus ist bereits ersichtlich, daß jeder Körper, der in irgend ein Medium gebracht ist, einen scheinbaren Verlust an Diamagnetismus oder Paramagnetismus erleidet, der gleich ist dem Dia- oder Paramagnetismus des verdrängten Volumens des Mediums. Hierbei ist ein Verlust an Diamagnetismus gleichbedeutend mit einem Gewinn an Paramagnetismus und umgekehrt. In besonderen Fällen muß ein paramagnetischer Körper in einem stärker paramagnetischen Medium die Eigenschaften eines diamagnetischen Körpers zeigen und in ähnlicher Weise ein diamagnetischer Körper in einem stärker diamagnetischen Medium die Eigenschaften eines paramagnetischen Körpers. Ein diamagnetischer Körper in einem paramagnetischen Medium erscheint stärker diamagnetisch usw.; leicht lassen sich auch die sonstigen möglichen Fälle von scheinbaren Änderungen der magnetischen Eigenschaften von Körpern verständlich machen. Die Analogie dieser Fälle mit dem Archimedischen Prinzip ist offenbar. Faraday, Plücker, Becquerel u. a. haben die vorhergehenden Schlüsse experimentell bestätigt. Ein Glasröhrchen mit einer paramagnetischen Salzlösung erscheint paramagnetisch innerhalb einer verdünnteren Lösung und diamagnetisch innerhalb einer konzentrierteren Lösung.

Führt man Messungen in der Luft aus, so hat man zu beachten, daß die Luft ein paramagnetischer Körper ist und daß man demnach den Unterschied zwischen dem Magnetismus des Körpers und dem Magnetismus der Luft beobachtet. Wir werden im folgenden voraussetzen, daß für das Vakuum, d. h. für den Äther, nicht aber für die Luft, $\mu = 1$ und $\varkappa = 0$ ist. Der Bequemlichkeit halber kann man aber auch die Annahme gelten lassen, daß der Äther ein para-

magnetischer Körper ist und daß uns diamagnetisch bloß alle diejenigen Körper zu sein scheinen, die weniger paramagnetisch sind als der Äther. Eine derartige Auffassung bringt gleichsam eine bedeutende Vereinfachung mit sich, indem sie die Vorstellung von zwei wesentlich verschiedenen Gruppen magnetischer Körper beseitigt. Die Richtigkeit dieser Auffassung erscheint jedoch sehr zweifelhaft; gerade einige der neueren Theorien führen zu der Vorstellung, daß die paramagnetischen und diamagnetischen Körper (im Vakuum) sich voneinander ihrem Wesen nach unterscheiden und zwar dem Wesen derjenigen inneren Erscheinungen nach, durch die ihre magnetischen Eigenschaften bedingt sind.

Wenden wir uns wiederum der äußeren Seite der Erscheinungen zu, so können wir noch auf die sogenannte „diamagnetische Polarität" eingehen, die darin besteht, daß ein in ein Magnetfeld gebrachter diamagnetischer Körper im Außenraume Wirkungen hervorruft, welche dem Auftreten von zwei Polen an diesem Körper ent-

Fig. 326.



sprechen, wobei aber diese Pole entgegengesetzt denen liegen, die unter denselben Bedingungen in einem paramagnetischen Körper auftreten würden. Im besonderen Falle findet man z. B., daß sich an dem Ende eines diamagnetischen Stabes, das dem Magnetpole zunächst liegt, ein gleichnamiger Pol bildet und daß, falls man einen diamagnetischen Stab in eine Magnetisierungsrolle einführt, sich an ihm ungleichnamige Pole gegenüber den zunächst liegenden Polen jener Rolle bilden. W. Weber, Tyndall u. a. haben durch verschiedene Versuche die Existenz dieser diamagnetischen Polarität nachgewiesen. W. Weber (1848) brachte auf die eine Seite einer Magnetnadel ns (Fig. 326) einen kräftigen Elektromagneten NS und auf die andere Seite von ihr den kompensierenden Magneten $n_1 s_1$. Brachte er hierauf zwischen die Pole NS ein großes Stück Wismut (W), so wurde der n-Pol der Magnetnadel zum Elektromagneten hingelenkt, woraus folgt, daß sich an der dem S-Pole zugewandten Seite des Wismuts ein magnetischer Südpol gebildet hatte. Ferner hat W. Weber (1852) ein sogenanntes Diamagnetometer konstruiert, das aus zwei parallelen, vertikalen Magnetisierungsrollen bestand, innerhalb deren sich nach oben und unten Wismutstäbe verschieben konnten; die Einwirkung dieser Stäbe auf eine in der Nähe befindliche Magnetnadel zeigt das Vorhandensein einer diamagnetischen Polarität, welche der paramagnetischen Polarität direkt entgegengesetzt ist. Mit Hilfe eines anderen Apparates hat Weber gezeigt, daß die Induktionsströme (Bd. IV, 2), welche durch die Be-

wegung eines im Magnetfelde befindlichen Diamagnets hervorgerufen werden, die entgegengesetzte Richtung wie jene Induktionsströme haben, die unter denselben Verhältnissen durch einen paramagnetischen Körper wachgerufen werden. Tyndall hing einen Wismutstab im Innern einer horizontalen Magnetisierungsrolle auf, so daß er sich ein wenig in der einen oder anderen horizontalen Richtung senkrecht zu seiner Länge verschieben konnte. Auf die ins Freie hinausragenden Stabenden wirkten von den Seiten her die Pole zweier Elektromagnete. Die Bewegungsrichtung des Stabes bewies auch hier jene diamagnetische Polarität, von welcher im obigen die Rede war.

Der von uns betrachtete Einfluß des umgebenden Mediums gleichwie die Existenz der diamagnetischen Polarität können rein formal auf Grund folgender Betrachtungen erklärt werden. Es sei N (Fig. 327) der Nordpol eines Magneten, in dessen Nähe der paramagnetische Körper A gebracht ist, der von einem paramagnetischen Medium umgeben ist. An den Enden des Körpers A erhält man die fingierten Magnetismen s und n, an den Enden der Elemente aber, in die wir uns das Medium zerlegt denken, die fingierten Magnetismen n_1 und s_1. An den Enden des Körpers A kommen je zwei Magnetismen zusammen. Ist das Medium schwächer paramagnetisch, so entsteht z. B. am linken Ende des Körpers A ein Überschuß an Südmagnetismus und der Körper A bleibt paramagnetisch, indem er gerade so viel Paramagnetismus verliert, als das verdrängte Medium aufweisen würde. Ist jedoch das Medium stärker magnetisch als der Körper A, so bleibt am linken Ende Nordmagnetismus übrig, d. h. der Körper zeigt diamagnetische Polarität.

Fig. 327.

Sehen wir jetzt näher zu, welchen Einfluß das Medium auf die sich aus den Versuchen ergebenden Größen μ und $\varkappa$ ausübt. Es seien μ_0 und $\varkappa_0$ die wahren Werte dieser Größen für den gegebenen Körper (im Vakuum), μ' und $\varkappa'$ die gleichen Größen für irgend ein Medium; es mögen endlich sich die Größen μ und $\varkappa$ auf den Fall beziehen, wo der Körper von diesem Medium umgeben ist. Wir bezeichnen die Werte des Magnetfeldes an der Körperoberfläche selbst im Innern mit H, außerhalb des Körpers mit H'. Befindet sich der Körper im Vakuum, so ist

$$\mu_0 H = H'.$$

Ist der Körper vom Medium umgeben, so ist $\mu_0 H = \mu' H'$ oder

$$\frac{\mu_0}{\mu'} H = H'.$$

Hieraus ergibt sich für die scheinbare magnetische Permeabilität μ des Körpers, der vom Medium umgeben ist, $\mu = \mu_0 : \mu'$, oder $1 + 4\pi\varkappa = (1 + 4\pi\varkappa_0) : (1 + 4\pi\varkappa')$, d. h.

$$\varkappa = \frac{\varkappa_0 - \varkappa'}{1 + 4\pi\varkappa'} \quad \text{. . . . . (43)}$$

Für schwach magnetische Körper kann man die Größe $4\pi\varkappa'$ gegenüber der Eins vernachlässigen und

$$\varkappa = \varkappa_0 - \varkappa' \quad \text{. . . . . (43, a)}$$

setzen. Die Formeln, welche wir für die magnetische Induktion hergeleitet hatten, lassen sich ebenfalls alle vereinfachen, wenn man sie auf schwach magnetische Substanzen bezieht. So kann man z. B. in der Formel (12, b), S. 812,

$$J = \frac{\varkappa}{1 + \varkappa N} H_0$$

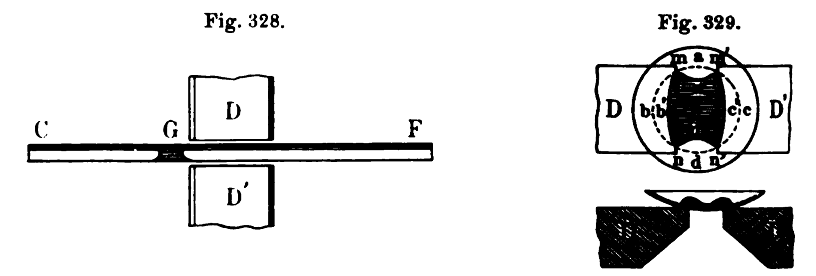
das Glied $\varkappa N$ fortlassen und demgemäß annehmen, daß die entmagnetisierende Wirkung des Oberflächenmagnetismus gleich Null ist. Dann erhält man unabhängig von der Körperform

$$J = \varkappa N_0 \quad \text{. . . . . (44)}$$

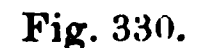
Alles bisher gesagte läßt die Frage nach dem Wesen der para- und diamagnetischen Erscheinungen noch unberührt. Auf diese Frage haben viele Forscher eine Antwort zu finden gesucht: W. Weber, Duhem. Richarz, B. Rosing, R. Lang, du Bois, Langevin, P. Weiss u. a. Von besonderem Interesse, nicht nur in historischem Sinne, ist die Theorie von W. Weber, deren Grundzüge die folgenden sind. Wie wir gesehen haben, werden die Moleküle eines paramagnetischen Körpers nach der Ampèreschen Theorie von beständigen Molekularströmen umkreist, die nicht verschwinden, da sie auf ihrem Wege keinem Widerstande begegnen. Die Magnetisierung besteht nach dieser Theorie in einer Drehung der Moleküle samt ihren Strömen, deren Ebenen sich der Lage nähern, in welcher sie senkrecht zu den Kraftlinien sind. W. Weber (1852) nahm an, daß die Moleküle diamagnetischer Körper nicht von Molekularströmen umkreist sind, daß aber solche Ströme induziert werden. wenn der Körper in ein Magnetfeld gebracht wird. Wie wir sehen werden, ist die Richtung der Ströme, welche beim Auftreten oder der Verstärkung eines Stromes induziert werden, von entgegengesetzter Richtung wie diejenigen Ströme, die das gegebene Feld hervorrufen könnten. Nimmt man an, daß solche Ströme rings um die Moleküle eines diamagnetischen Körpers induziert werden, so sieht man, daß ein solcher Körper eine entgegengesetzte Polarität zeigen muß wie ein in dasselbe Feld gebrachter paramagnetischer Körper. Ein induzierter Strom bleibt ungeändert, solange sich das Feld nicht ändert. Wenn

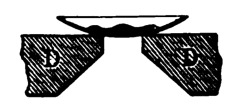
sich aber die Feldintensität vermindert, so erfolgt abermals Induktion, die der ersten entgegengesetzt ist und daher die ursprünglich aufgetretenen Ströme schwächt, bis zur vollständigen Vernichtung derselben, wenn die Feldintensität gleich Null wird. Die geistreiche Webersche Theorie war lange Zeit hindurch so gut wie ganz vergessen, doch sind in neuerer Zeit Theorien in Vorschlag gebracht worden, die man als eine Rückkehr zu jener Theorie mit Umarbeitung derselben im modernen Geiste ansehen kann. Hierher gehört insbesondere die Theorie von Langevin (1905), die sich auf die Lehre von den Elektronen stützt. P. Weiss hat (1906 bis 1907) diese Theorie noch weiter ausgebildet, doch können wir hierauf nicht näher eingehen. Unter den sonstigen oben erwähnten Theorien ist von besonderem Interesse die rein thermodynamische Theorie von Duhem.

§ 11. Untersuchung der paramagnetischen und diamagnetischen Körper. Wir wenden uns zur Betrachtung der experimentellen Untersuchungsmethoden für die schwach magnetischen Körper. Zur qualitativen Untersuchung an festen Körpern können die bereits erwähnten Methoden dienen: die Beobachtung der Wirkung eines



kräftigen Magnetpols auf einen kleinen Körper, beispielsweise ein Kügelchen oder die Beobachtung der Lage, die ein horizontales Stäbchen annimmt, das man zwischen den Polen eines Elektromagneten aufgehängt hat. Zur qualitativen Untersuchung von Flüssigkeiten kann ebenfalls die letztere Methode dienen, wenn man die Flüssigkeit in eine zugeschmolzene Glasröhre bringt, die dann zwischen den Polen aufgehängt wird; dabei muß die Wirkung des Feldes auf das Röhrchen selbst zuvor festgestellt sein.


Fig. 330.



Ferner kann man (Quet, 1854) einen Tropfen G (Fig. 328) der zu untersuchenden Flüssigkeit in einer horizontalen Röhre GF zwischen die Pole DD' eines Elektromagneten bringen. Ein diamagnetischer Tropfen bewegt sich nach Stromschluß in der Richtung nach C, ein paramagnetischer wird in den Raum zwischen den Polen hineingezogen. Gießt man die zu untersuchende Flüssigkeit auf ein Uhrgläschen, welches

auf die einander genäherten Polschuhe DD' eines Elektromagneten (Fig. 329 u. 330) gestellt ist, so wird eine paramagnetische Flüssigkeit,

Fig. 331.

I.





II.



III.





IV.



V.



die zuvor von einer Kreislinie *abdc* (Fig. 329, oben) umgrenzt war, herabgezogen, wobei ihre Umgrenzung von der Linie $a'b'd'c'$ gebildet ist; über den Kanten der Polschuhe sammelt sich die Flüssigkeit an und bildet daselbst kleine Erhebungen (Fig. 329, unten). Eine diamagnetische Flüssigkeit hingegen bildet über den Kanten der Polschuhe Vertiefungen (Fig. 330). Es hängt übrigens die Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche davon ab, wie

weit die Magnetpole einander genähert sind. Zur qualitativen Untersuchung von Gasen kann man die Wirkungen eines Magneten auf ein mit dem betreffenden Gase gefülltes Glaskügelchen beobachten, oder die Wirkungen auf eine das Gas enthaltende Seifenblase, die zwischen den Polen des Elektromagneten frei emporsteigt oder niedersinkt. Um die Wirkung des Magneten auf einen Gasstrom zu zeigen, der zwischen den Polen aufsteigt, mengte Faraday diesem Gase ein wenig HCl bei und brachte oberhalb des Gasstrahls eine Reihe von offenen Röhren an, die mit NH_3-Lösung benetzt waren. Die Seite, nach welcher ein kräftiger Elektromagnet den Gasstrahl ablenkte, wurde durch diejenige von den Röhren bestimmt, in der sich sichtbare Salmiaknebel zeigten. Es versteht sich von selbst, daß alle diese Methoden nur die Art des Magnetismus der gegebenen Substanz im Vergleich zur Luft angeben, die dank ihrem Gehalt an Sauerstoff paramagnetisch ist. Der sehr beträchtliche Diamagnetismus, den eine Flamme besitzt, kann leicht aus den Formenänderungen erkannt werden, die eine zwischen den Polen eines kräftigen Elektromagneten befindliche Flamme zeigt. In Fig. 331, I (a. v. S.) ist der äquatoriale, in Fig. 331, II der axiale Querschnitt der Flamme dargestellt; Fig. 331, III zeigt den äquatorialen Querschnitt bei höher gestellter Flamme; Fig. 331, IV gibt das Bild einer Flamme, die sich etwas seitlich von der Verbindungsgeraden der Polschuhenden befindet; eine stark rußende Flamme (von Terpentin) teilt sich in zwei Teile (V).

Wir wenden uns jetzt den Methoden zur quantitativen Untersuchung von schwach magnetischen Körpern zu, d. h. zur numerischen Bestimmung von $\varkappa$ und μ für diese Körper. Fast alle diese Methoden beruhen auf Messung der ponderomotorischen Kraft p, die auf den zu untersuchenden Körper einwirkt, wenn derselbe in ein inhomogenes Magnetfeld gebracht ist. Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Ein Körper von sehr kleinen Dimensionen, etwa ein kleines Kügelchen, ist in ein inhomogenes Feld H gebracht; bestimmt wird die Kraft p, die den Körper in einer gewissen Richtung x vorwärts bewegt; es sei p in Grammen ausgedrückt, g ist gleich 981. In diesem Falle hat man

$$p g = \varkappa v H \frac{\partial H}{\partial x} \quad \dots \dots \dots \quad (45)$$

wo v das Volumen des Körpers in Cubikcentimetern, H aber in C.G.S.-Einheiten ausgedrückt ist. Die Formel (45) kann man auf verschiedene Weise herleiten, z. B. folgendermaßen. Die Energie des kleinen Körperchens kann gleich

$$E = \frac{v}{2} J H = \frac{1}{2} \varkappa v H^2$$

gesetzt werden. Bewegt sich der Körper in der Richtung von x unter der Wirkung des Feldes, so muß die Arbeit $pg\,dx$ gleich der Zunahme dE der magnetischen Energie sein, was sogleich die Formel (45) ergibt.

2. Der Körper hat die Form eines Stabes, dessen Querschnittsfläche wir mit S bezeichnen. Eine der Grundflächen des Stabes wird an die Stelle gebracht, wo die Feldintensität einen sehr großen Wert H hat. Die Achse des Stabes ist senkrecht zu den Kraftlinien; es wird angenommen, daß sich die andere Grundfläche des Stabes an einer Stelle befindet, an der man die Feldwirkung vernachlässigen kann. Gemessen wird die Kraft p (in Grammen), welche auf den Körper in der Richtung seiner Achse wirkt. Man hat unter diesen Voraussetzungen

$$pg = \tfrac{1}{2} S \varkappa H^2$$

und hieraus

$$\varkappa = \frac{2pg}{SH^2} \quad \dots\dots\dots \quad (46)$$

In den Formeln (45) und (46) wird die Größe $\varkappa$ aus der Gleichung (43, a), S. 867, bestimmt,

$$\varkappa = \varkappa_0 - \varkappa' \quad \dots\dots\dots \quad (47)$$

wo sich $\varkappa_0$ auf denselben Körper im Vakuum bezieht, $\varkappa'$ aber für das umgebende Medium, beispielsweise die Luft, gilt.

Außer den beiden betrachteten Fällen sind auch noch andere kompliziertere Fälle möglich. Die Messung der ponderomotorischen Kraft p kann entweder mit Hilfe der Drehwage oder auch mit Hilfe einer gewöhnlichen Wage vorgenommen werden. In letzterem Falle wird der Körper an den Wagebalken gehängt; die Kraft p muß in vertikaler Richtung wirken.

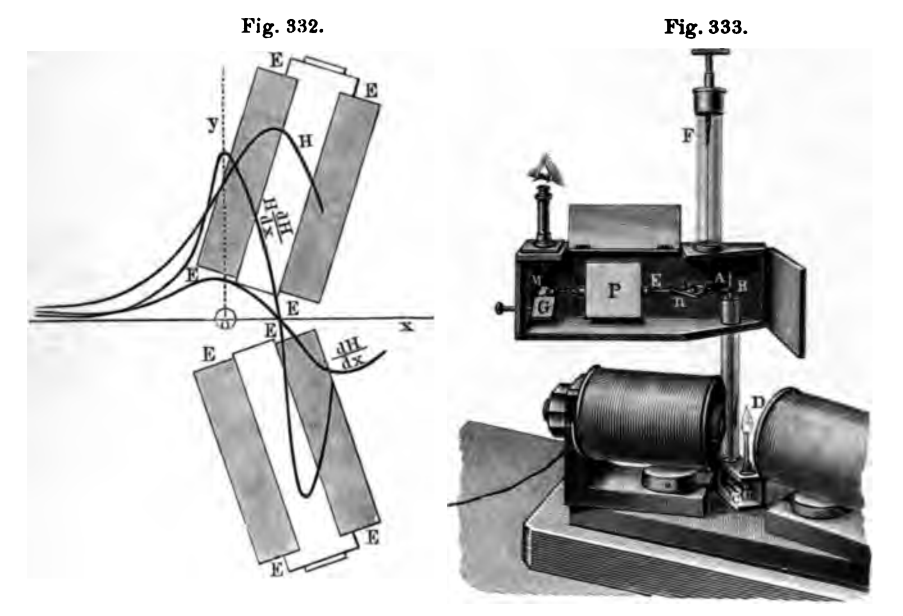
Die Formel (45) haben Curie (1895), Curie und Chéneveau und zuletzt Meslin (1906) angewandt; der Formel (46) haben sich viele Forscher bedient, namentlich Stefan Meyer.

Betrachten wir zunächst einige andere Methoden. E. Becquerel (1850) hängte ein horizontales Stäbchen zwischen den Polen eines Elektromagneten auf und brachte es durch Tordierung des Aufhängefadens dahin, daß das Stäbchen einen bestimmten Winkel mit den Kraftlinien bildete. Die Torsion des Fadens kann als relatives Maß für $\varkappa$ gelten, wenn man verschiedene Substanzen bei derselben Feldintensität untersucht. Boltzmann hat Formeln angegeben, die für einige Fälle gelten, in denen eine Magnetisierungsrolle auf einen magnetischen Körper einwirkt. Unter Benutzung einer von diesen Formeln hat Ettingshausen (1882) die Kraft gemessen, mit welcher die Rolle einen diamagnetischen Stab aus sich herausstößt, wenn sich der Stab innerhalb der Rolle in der Nähe eines ihrer Enden befindet; im Ausdruck für diese Kraft kommt die Größe $\varkappa$ vor, die somit berechnet werden kann.

Rowland und Jaques haben die Schwingungsdauer eines schwach magnetischen Stabes im Magnetfelde gemessen, woraus sich ebenfalls die Größe $\varkappa$ finden läßt.

Es sei bemerkt, daß A. Toepler eine Methode zur Vergleichung der magnetischen Eigenschaften von verschiedenen Körpern angewandt hat, die darauf beruht, daß man die Ströme mißt, welche von diesen Körpern bei ihrer Bewegung im Magnetfelde induziert werden. Zusammen mit Ettingshausen hat er nach dieser Methode eine Reihe

Fig. 332. Fig. 333.



von Messungen ausgeführt; unter anderem haben die beiden Genannten das Verhältnis der Magnetisierungen von gleichen Gewichtsmengen Eisen und Wismut bestimmt.

Wir gehen zur Beschreibung einiger Apparate über, die für die Untersuchungen in neuerer Zeit angewandt worden sind. Curie (1895) bediente sich einer Methode, die auf Anwendung der Formel (45) beruht; sein Apparat ist in Fig. 332 schematisch dargestellt. Zwei horizontale Elektromagnete EE bilden miteinander einen stumpfen Winkel; ox ist die Symmetrieachse, längs derer die ponderomotorische Kraft p wirkt. Curie hat zuerst untersucht, in welcher Weise die Größen H, $\frac{\partial H}{\partial x}$ und $H\frac{\partial H}{\partial x}$ sich über die Punkte der Geraden ox verteilen: das Resultat dieser Untersuchungen ist in unserer Figur durch drei Kurven angedeutet. Die Kraft H besitzt ein Maximum; dort ist $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$.

Das Maximum von $H \frac{\partial H}{\partial x}$, also auch das Maximum der Kraft p, entspricht dem Punkte o; in diesen Punkt wurde der zu untersuchende Körper gebracht. In Fig. 333 sind die Hauptbestandteile des Apparates selbst abgebildet. Der zu untersuchende Körper befindet sich in dem Glasbehälter D. Zur Messung der Kraft p dient die Drehwage AF; an einem der Hebelarme ist ein umgebogener Kupferstab ABC angebracht, an welchem D befestigt ist; der andere Hebelarm ist mit einer Skala M versehen, die vom Spiegel G beleuchtet wird und durch ein Mikroskop betrachtet werden kann. Die Aluminiumplatte P dient als Luftdämpfer; auf der Platte n sind Gewichtsstücke verschiebbar, die zur richtigen Einstellung des Apparates dienen. Der vertikale Teil, welcher das Reservoir D trägt, kann von einem elektrischen Ofen umgeben werden, dessen Beschreibung wir hier fortlassen. Später haben Curie und Chéneveau (1903) einen anderen Apparat mit ringförmigem Magneten konstruiert, den man senkrecht zur Verbindungslinie der Pole

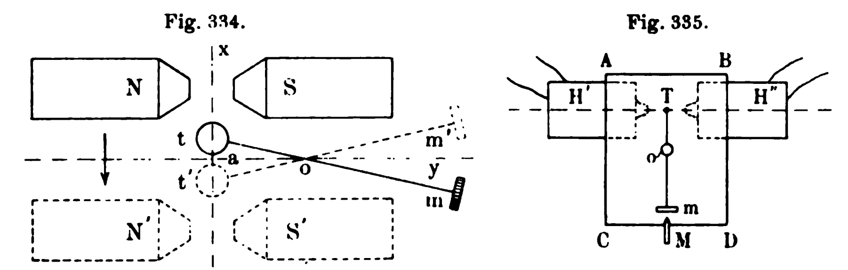


Fig. 334. Fig. 335.

verschieben konnte. Fig. 334 zeigt in schematischer Weise die Anfangslage des Magneten (oben); der zu untersuchende Körper befindet sich auf dem Durchschnitt der Achsen x und y. Punkt o ist der Spurpunkt des Fadens der Drehwage, m ein Zeiger, dessen Bewegungen man mit Hilfe des Mikroskops beobachtet. Wird der Magnet NS allmählich in die Lage $N'S'$ gebracht, so erhält man zuerst eine gewisse maximale Ablenkung t nach der einen und darauf eine ebensolche t' nach der anderen Seite. Die Größe dieser Ablenkung kann als Maß für den relativen Wert der Größe $\varkappa_0 - \varkappa'$ dienen, wo sich $\varkappa'$ auf Luft bezieht. Sieht man $\varkappa_0$ für einen Körper (für Wasser) als bekannt an, so kann man $\varkappa_0$ für alle anderen Substanzen finden. Meslin (1906) hat zuerst den Apparat von Curie und Chéneveau benutzt, dann aber einen anderen konstruiert: das Schema desselben ist in Fig. 335 angegeben. $H'H''$ sind die Schenkel eines Elektromagneten, T ist der zu untersuchende Körper; die Spur des Fadens der Drehwage befindet sich in o, M ist ein Mikroskop zur Beobachtung der Bewegung der Skala m. Der Strom wurde zuerst nur durch die eine, darauf nur durch die andere Rolle des Elektromagneten gesandt, was einen Ausschlag des Körpers T

nach der einen oder der anderen Seite zur Folge hatte. Eine sorgfältige Untersuchung des Feldes setzte in den Stand, die Formel (45) anzuwenden, in der jedoch x die Richtung der Geraden bedeutet, welche die Pole verbindet. Meslin hat $\varkappa$ für verschiedene Substanzen mit dem für Wasser angenommenen Werte dieser Größe verglichen.

Für Flüssigkeiten und Gase können alle früher angegebenen Methoden benutzt werden. So hat z. B. Curie Gase untersucht, indem er sie im Behälter D (Fig. 333) unter starkem Druck komprimierte. Schuhmeister hat die oben erwähnte Methode von Rowland und Jacques angewandt, indem er im magnetischen Felde die Schwingungsdauer von Röhrchen ermittelte, die mit den entsprechenden Flüssigkeiten angefüllt waren. Borgmann (1878) hat eine ballistische Methode angewandt (S. 835). Sein Apparat bestand aus zwei Hohlringen, die aus Messing geschliffen waren; die Wanddicke derselben betrug 2,5 mm, der innere Durchmesser 33 mm und der mittlere Durchmesser am Ringe selbst 246,5 mm. Die Ringe waren mit dickem Draht (1000 Windungen) umwickelt, der zur Magnetisierung diente, und mit einer sekundären Wickelung (2600 Windungen) aus dünnem Draht versehen, in der bei Richtungsänderung des Magnetisierungsstromes i ein Strom induziert wurde. Einer der Ringe wurde mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, während der andere leer blieb; am Galvanometer wurde der Unterschied J zwischen den Induktionsströmen gemessen. Sind die Größenverhältnisse der Ringe, die Windungszahlen beider Drähte, sowie auch das Verhältnis $J:i$ beider Ströme bekannt, so läßt sich hieraus der Wert von $\varkappa$ für die zu untersuchende Flüssigkeit finden.

Fig. 336.



Die ponderomotorische Kraft p hat mit Hilfe der Drehwage zuerst G. Wiedemann (1865) bestimmt. Ein Teil seines Apparates ist in Fig. 336 abgebildet. Am Faden der Drehwage ist das kleine Gefäß k, das die zu untersuchende Flüssigkeit enthält, befestigt, ebenso auch ein Gegengewicht, das kleine, zur Beobachtung der Drehung dienende Spiegelchen g und der Öldämpfer n; rechts ist der auf k einwirkende Elektromagnet aufgestellt. Die Beobachtungen nach dieser Methode

geben nur relative Werte für $\varkappa$. Schuhmeister hat diese Methode weiter ausgebildet; er gab dem Flüssigkeitsbehälter Kugelform, wodurch auch eine Bestimmung des absoluten Wertes von $\varkappa$ ermöglicht wurde. Wir wollen noch einige Methoden betrachten, die speziell für Flüssigkeiten und für Gase anwendbar sind.

Silow (1877) bediente sich eines astatischen Magnetnadelsystems, das angenähert senkrecht zum magnetischen Meridian aufgestellt wurde. Von unten her wurde an dasselbe ein Gefäß mit der zu untersuchenden Flüssigkeit herangebracht, die durch das Feld des Erdmagnetismus magnetisiert wurde, infolgedessen die Magnetnadeln abgelenkt wurden; aus der Größe der Ablenkung läßt sich die Größe $\varkappa$ durch Rechnung finden. Später (1879) hing Silow einen Magneten im Innern eines kugelförmigen Gefäßes mit Flüssigkeit auf; das Gefäß war mit Draht umwickelt, durch den der Magnetisierungsstrom hindurchgesandt wurde. Durch Beobachtung der Ablenkung des Magneten, welche die Flüssigkeit allein bewirkte, ließ sich $\varkappa$ finden. Bei einer anderen Versuchsreihe wurde der abzulenkende Magnet über die Kugel mit der Flüssigkeit gebracht.

Borgmann (1878) hat $\varkappa$ für eine Flüssigkeit bestimmt, indem er die Induktionsströme maß, die von einer in diese Flüssigkeit eingebetteten Drahtrolle ausgingen. Wie wir sehen werden, ist die elektromotorische Kraft E der Induktion proportional der Größe $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$. Mißt man die Differenz $\varDelta E$ der elektromotorischen Kräfte E in Luft ($\mu = 1$) und innerhalb der Flüssigkeit, so erhält man $\varDelta E : E = 4\pi\varkappa$, woraus sich die Größe $\varkappa$ finden läßt. Silow (1880) und Townsend (1896) haben die Induktionswirkung einer geradlinigen leeren Rolle und einer die zu untersuchende Flüssigkeit enthaltenden Rolle miteinander verglichen.

Zur Bestimmung von $\varkappa$ für Flüssigkeiten und Gase ist es sehr bequem, die Differentialmethode anzuwenden. Zu diesem Zwecke bestimmt man die magnetische Suszeptibilität $\varkappa_1$ irgend eines Körpers zuerst in Luft oder im Vakuum und hierauf in den zu untersuchenden Flüssigkeiten oder Gasen. Die Differenz der erhaltenen Größen ergibt den Wert von $\varkappa$ für das umgebende Medium. Diese Methode haben E. Becquerel (1851), Plücker, Jefimow (1888), Fleming und Dewar (1898, flüssiger Sauerstoff) u. a. angewandt.

Eine der gebräuchlichsten ist die Quinckesche Methode (1885), die auf der ponderomotorischen Wirkung im Magnetfelde beruht. Die Flüssigkeit wird in kommunizierende Röhren gebracht; die eine, weite, Röhre befindet sich außerhalb des Magnetfeldes, die andere, enge, wird derart aufgestellt, daß die Flüssigkeitsoberfläche sich in einem Felde von der Intensität H befindet. Es wird dann auf die Einheit der Flüssigkeitsoberfläche der Druck $\frac{1}{2}(\varkappa - \varkappa')H^2$ ausgeübt, wo sich $\varkappa$ auf die Flüssigkeit, $\varkappa'$ auf das Gas oberhalb der Flüssigkeit bezieht; infolge

dieses Druckes ändert sich die Lage des Flüssigkeitsniveaus um den Betrag h, wobei

$$\frac{1}{2}(\varkappa - \varkappa') H^2 = h g \delta \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

ist; hier bedeutet δ die Dichte der Flüssigkeit, g ist gleich 981. Die Röhre wird gegen den Horizont geneigt, damit die zu messende Verschiebung des Flüssigkeitsniveaus größer wird. Jäger und Stefan Meyer kompensierten den Druck, indem sie die Röhre mit einem großen Behälter verbanden, dessen Volumen dadurch geändert werden konnte, daß Quecksilber innerhalb einer mit dem Gefäße in Verbindung stehenden Kapillarröhre verschoben wurde. Du Bois (1881) schlug vor, wässerige Lösungen von paramagnetischen Substanzen herzustellen, für welche, da das Wasser diamagnetisch ist, $\varkappa = 0$ wird; kennt man dann $\varkappa$ für Wasser, so läßt sich $\varkappa$ leicht für die gelöste Substanz durch Rechnung finden. Liebknecht und Wills (1900) haben diese Methode so sehr verbessert (die Röhre ist fast horizontal), daß man die übrig gebliebene Magnetisierung (bei $H = 40\,000$) der Lösung bemerken konnte, wenn dieselbe nicht um ein Hunderttausendstel die Magnetisierung des Wassers übertraf. Die Methode von Quincke ist von Königsberger u. a. angewandt worden. Wie sich leicht einsehen läßt, kann man auf Grund von Formel (48) die Größe $\varkappa'$ für verschiedene Gase finden, wenn man das oberhalb der Flüssigkeit befindliche Gas wechselt. Du Bois, A. Toepler, Hennig u. a. haben sich dieser Methode bedient.

§ 12. Ergebnisse der Untersuchungen an schwach magnetischen Körpern. Die verschiedenen Autoren führen bei Mitteilung ihrer Messungsresultate durchaus nicht die gleichen physikalischen Größen an. Die Sachlage wird noch dadurch kompliziert, daß man bisweilen massive Substanzen, bisweilen die Substanz in Form von Pulvern oder Lösungen untersucht hat. Wir halten es daher für notwendig, vor allen Dingen eine vollständige Übersicht über die Größen zu geben, deren numerische Werte in den verschiedenen Arbeiten gemeint sind. Dabei wollen wir uns folgender Bezeichnungen bedienen:

$\varkappa$ die magnetische Suszeptibilität einer massiven Substanz: sie ist von der Wahl der Grundeinheiten unabhängig und hängt mit der magnetischen Permeabilität μ durch die Formel $\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ zusammen. Man kann sie als auf das Volumen bezogen betrachten, da das magnetische Moment $\mathfrak{M} = \varkappa H v$ ist, wo v das Volumen des in Gedanken vom Körper losgetrennten Teiles bedeutet.

δ ist die Dichte des massiven Körpers.

$\varkappa' = \varkappa : \delta$ ist die auf die Masse bezogene magnetische Suszeptibilität eines massiven Körpers: sie wird durch die Formel $\mathfrak{M} = \varkappa' H M$ bestimmt, wo M die Masse des losgetrennten Teiles des Körpers ist.

Die Versuche an Pulvern und an Lösungen haben gezeigt, daß $\varkappa$ proportional der Dichte der Substanz ist. Hieraus folgt, daß $\varkappa'$ demjenigen Werte von $\varkappa$ gleich ist, den man bei einer Kompression oder Verdünnung der Substanz erhielte, bei welcher sich in 1 ccm 1 g der Substanz befindet. Die Größe $\varkappa'$ wird z. B. von Curie, Curie und Chéneveau, Meslin u. a. angegeben.

$\varkappa_p$ ist die magnetische Suszeptibilität eines Pulvers.

δ_p ist die Dichte eines Pulvers; es ist offenbar

$$\frac{\varkappa_p}{\varkappa} = \frac{\delta_p}{\delta} \qquad (49)$$

m ist das Molekulargewicht oder das Atomgewicht der zu untersuchenden Substanz.

k — die molekulare (oder atomische) Suszeptibilität — ist gleich

$$k = \frac{\varkappa m}{\delta} = \frac{\varkappa_p m}{\delta_p} \qquad (50)$$

Wie man leicht einsieht, ist k gleich dem Werte von $\varkappa$, den man unter der Bedingung erhielte, daß sich ein Grammolekül der Substanz in 1 ccm vorfindet.

Die Größe $k(M)$ — der Buchstabe M soll an den Namen von Stefan Meyer erinnern — ist dieselbe molekulare oder atomische Suszeptibilität, die man erhält, wenn ein Grammolekül der Substanz in einem Liter enthalten ist; es ist offenbar

$$k(M) = \frac{\varkappa m}{1000\,\delta} = \frac{\varkappa_p m}{1000\,\delta_p} \qquad (51)$$

Zwischen den Größen $\varkappa$, $\varkappa_p$, $\varkappa'$, k und $k(M)$ bestehen folgende Beziehungen:

$$k(M) = \frac{\varkappa' m}{1000} \qquad (52, a)$$

$$\varkappa = \varkappa' \delta = \frac{1000\,\delta\, k(M)}{m} = \frac{k\delta}{m} \qquad (52, b)$$

$$\varkappa = \frac{\varkappa_p \delta}{\delta_p} \qquad (52, c)$$

Die Formel (52, b) dient zur Berechnung der gewöhnlichen (auf das Volumen bezogenen) Suszeptibilität mit Hilfe der Zahlenwerte von $\varkappa'$, die von Curie, der Werte von $k(M)$, die von Jäger und Stefan Meyer, oder endlich mit Hilfe der Werte für k, die beispielsweise von Liebknecht und Wills angegeben worden sind. Es ist offenbar $k(M) = k : 1000$.

Wir wollen vorerst bei einer rein qualitativen Einteilung der Körper bleiben.

Von Elementen sind nach den Untersuchungen von St. Meyer folgende paramagnetisch (eingeschlossen sind die ferromagnetischen

Substanzen): Be, B, O, Mg, Al, Si, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Y (?), Nb (?), Mo, Ru, Rh, Pd, Sn (?), Ce, Pr, Nd, Eu, Sa, Gd, Ho, Er, Yb, Ta (?), W, Os, Ir, Pt, Th (?), U. Diamagnetisch sind: Li, C, Fl, Na, P, S, Cl, K, Ca, Cu, Zn, Ga, Ge, Se, Br, Rb, Sr, Zr, Ag, Cd, In, Sb, Te, J, Cs, Ba, La, Au, Hg, Tl, Pb, Bi. Wählt man die Atomgewichte zu Abszissen, die Atomvolumina zu Ordinaten, so erhält man, wie Stefan Meyer gezeigt hat, eine Kurve, die aufeinander folgende Maxima und Minima hat; hierbei kommen die paramagnetischen Elemente auf die absteigenden, die diamagnetischen aber auf die aufsteigenden Zweige der Kurve zu liegen.

Über die sonstigen Substanzen wollen wir vorläufig nur erwähnen, daß Wasser, Alkohol, Äther und Schwefelkohlenstoff diamagnetisch sind. Von Gasen ist der Sauerstoff stärker paramagnetisch als die Luft; weniger magnetisch sind: CO_2, CO, NO, N_2O, H_2, C_2H_4, SO_2, HCl, HJ, NH_3, Cl, C_2N_2, die Dämpfe von Br, J u. a.

Wenden wir uns der Frage zu, in welcher Weise die Größe $\varkappa$ für schwach magnetische Substanzen von der Feldintensität und von der Temperatur abhängt.

Bereits E. Becquerel (1851), Tyndall (1851), Reich (1856) u. a. haben gefunden, daß das magnetische Moment schwach magnetischer Körper proportional der Feldintensität H ist, d. h. daß $\varkappa$ nicht von H abhängt. Zu demselben Resultate sind in der Folge auch viele andere Forscher gelangt, wie z. B. G. Wiedemann (1865, Eisenchloridlösung), Eaton, du Bois (1888, H von 700 bis 9800 für Wasser, Lösungen von $MnCl_2$, $FeCl_3$, $CuCl_2$ u. a.), Ettingshausen (1882), Curie (1892, von $H = 50$ bis 1350), Henrichsen (1892), Townsend (1896, von $H = 0{,}001$ bis 0,01), Königsberger (1898, H von 3400 bis 12510), St. Meyer (1899, verschiedene Salze, Oxyde usw., ausgenommen Fe_2O_3, von $H = 6000$ bis 10000), du Bois und Liebknecht (1900, H von 2000 bis 40000), Lombardi (1897, Eisenchloridlösungen) u. a. Andererseits haben einige Forscher den Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und H bestimmt. So hat z. B. Silow gefunden, daß $\varkappa$ für eine Eisenchloridlösung zuerst mit wachsendem H anwächst, danach aber abnimmt; das Maximum wird bei einem sehr kleinen Werte von H erreicht, nämlich für $H = 2{,}15\, H_0$, wo H_0 die Horizontalkomponente des Erdmagnetismus ist. Auch Schuhmeister hat für eine Reihe von Flüssigkeiten und Gasen eine Abnahme von $\varkappa$ bei Zunahme von H gefunden. Stefan Meyer (1899) fand, daß $\varkappa$ für Fe_2O_3 bei Zunahme von H abnimmt. Königsberger findet $\varkappa = Const$ für Flüssigkeiten und diamagnetische Substanzen; für zahlreiche paramagnetische Substanzen aber hängt $\varkappa$ von H ab. Heydweiller (1903) hat aus sämtlichen Untersuchungen von verschiedenen Forschern die Frage zu lösen gesucht, ob sich $\varkappa$ ändert, während H sich von 0,1 bis 40000 ändert. Seine eigenen Beobachtungen haben gezeigt, daß sich

für die Lösungen von $FeCl_3$, $MnCl_2$, $Fe_2(SO_4)_3$, $FeSO_4$ und $MnSO_4$ $\varkappa$ innerhalb der Grenzen $0,1 < H < 1,2$ nicht ändert. Wächst H bis 40000, so wächst $\varkappa$ für die genannten schwefelsauren Salze um 30 bis 40 Proz. Für $FeCl_3$ und $FeCl_2$ sind die Änderungen von $\varkappa$ sehr gering, für $MnCl_2$ sind sie etwas größer. Heinrich und Freitag fanden für eine Reihe von organischen Substanzen, daß $\varkappa$ indirekt proportional H ist. Diesem wenig wahrscheinlichen Resultat widersprechen die Beobachtungen von Henrichsen (1892) und St. Meyer.

Remanente Magnetisierung ist bei einigen wenigen schwach magnetischen Körpern beobachtet worden, jedoch in sehr geringem Grade. So hat z. B. Tumlirz dieselbe in Kristallen von Quarz und Bergkristall gefunden, Lodge in einigen Metallen und anderen Körpern. Königsberger hat die Beobachtungen von Tumlirz nicht bestätigt gefunden, hat aber remanente Magnetisierung beim Eisenoxyd beobachtet. Joubin hat beim Wismut Spuren von Hysteresis gefunden.

Wir gehen zur Frage nach der Abhängigkeit der magnetischen Eigenschaften schwach magnetischer Körper von der Temperatur über. Es seien $\varkappa_0$ und k_0 die Werte von $\varkappa$ und k bei 0°, wobei der Zusammenhang zwischen $\varkappa$ und k durch Formel (50) gegeben ist. Mit α, β und γ bezeichnen wir die Temperaturkoeffizienten des Volumens sowie der Größen $\varkappa$ und k. Dann erhält man für die Dichte $\delta = \delta_0 : (1 + \alpha t)$; ferner ist

$$\varkappa = \varkappa_0 (1 + \beta t), \qquad k = k_0 (1 + \gamma t) \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Formel (52, b) gibt $1 + \gamma t = (1 + \beta t) : (1 + \alpha t)$ oder angenähert

$$\gamma = \beta - \alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53, a)$$

Es ist zu beachten, daß einige Autoren die Größe β, andere die Größe γ angeben.

Die numerischen Werte werden wir weiter unten anführen; an dieser Stelle jedoch wollen wir nur auf die allgemeinen Resultate der entsprechenden Untersuchungen hinweisen. Bereits Faraday (1846), Plücker (1848) und Matteucci (1853) haben gefunden, daß mit Erhöhung der Temperatur der Magnetismus, sowohl der paramagnetischen, als auch der diamagnetischen Körper abnimmt; sie haben die Oxyde von Fe, Co und Ni, verschiedene Mineralien, Wismut, sowie auch Gase daraufhin untersucht. Weitere Untersuchungen haben G. Wiedemann, Plessner, Curie, Quincke, Henrichsen, Jäger und St. Meyer, Mosler, Piaggesi u. a. ausgeführt. G. Wiedemann und Plessner fanden, daß für Lösungen der Salze von Fe, Mn, Ni und Co die Größe $\beta = 0,00356$ ist, d. h. daß $\varkappa$ angenähert indirekt proportional der absoluten Temperatur ist. Curie leitete aus seinen Versuchen das Resultat ab, daß für diamagnetische Körper (wie z. B. für Wasser), deren Temperaturkoeffizient gleich γ ist, die Größe $\varkappa'$ offenbar von t gar nicht abhängt. Eine Ausnahme machen

Bi und Sb, für welche $\varkappa'$ sich recht rasch mit Zunahme der Temperatur verringert. Für paramagnetische Substanzen hat Curie gefunden, daß $\varkappa'$ indirekt proportional der absoluten Temperatur ist. Dieses Resultat gilt auch für den Sauerstoff; Formel (50) zeigt uns, daß die Größe $\varkappa$, die man bei Versuchen in Luft zu subtrahieren hat, indirekt proportional dem Quadrat der absoluten Temperatur ist.

Jäger und St. Meyer haben γ für eine ganze Reihe von Lösungen bestimmt und auch für Wasser, für welche sich ein negativer Temperaturkoeffizient ergab. Dieses Resultat hat Piaggesi bestätigt gefunden. Fleming und Dewar (1898) haben gezeigt, daß das Curiesche Gesetz für paramagnetische Substanzen bis zu sehr niedrigen Temperaturen in Geltung bleibt.

Wir führen im folgenden einige numerische Resultate, die für $\varkappa$ und k für schwach magnetische Körper gefunden worden sind, an, beschränken uns aber hierbei auf die allerneuesten Bestimmungen, die am meisten zuverlässig erscheinen. Es sei bemerkt, daß die unbenannte Zahl $\varkappa$ im allgemeinen gleich einigen Millionteln ist, weshalb überall der Zahlenwert von $10^6\varkappa$ angegeben ist. Wir betrachten zunächst einige einzelne Substanzen, die von besonderem Interesse sind.

Wasser ist diamagnetisch; seine Dichte ist $\delta = 1$, es ist daher $\varkappa' = \varkappa$. Wir führen einige der Bestimmungen von $-10^6\varkappa$ an: es läßt sich nicht leicht feststellen, welche von den Werten sich auf Luft, welche von ihnen sich auf das Vakuum beziehen.

Schuhmeister, 1881	0,44	Townsend, 1896	0,77
Wähner, 1887	0,54	Königsberger, 1898	0,80
Quincke, 1888	0,84	Jäger u. St. Meyer, 1899 (0°)	0.69
Du Bois, 1888 (15°)	0,84	Piaggesi, 1902	0.77
Henrichsen, 1892	0,75	Stearns, 1903	0,73
Curie, 1895 (Vakuum)	0,79	Scarpa, 1905 (Vakuum)	0.77

Für die Abhängigkeit der Werte von $\varkappa$ von der Temperatur t liegen drei Untersuchungen vor:

Du Bois, 1888 . . . . . $10^6\varkappa = -0,837\,\{1 - 0,0025\,(t - 15)\}$

Jäger u. St. Meyer, 1899 . $10^6\varkappa = -0,689\,\{1 - 0,0016\,t\}$

Piaggesi, 1903 . . . . . $10^6\varkappa = -0,80\,\{1 - 0,001\,75\,t\}$.

Quecksilber. $\varkappa' = \varkappa : \delta = -0,18 \,.\, 10^{-6}$.

Wismut, die am stärksten diamagnetische Substanz, ist vielfach untersucht worden. Seine Dichte ist $\delta = 9,82$, so daß $\varkappa = 9,82\,\varkappa'$ ist. Wir wollen nicht die einzelnen Messungsresultate anführen sondern nur angeben, daß man im Mittel

$$\varkappa' = -1,4 \,.\, 10^{-6}; \qquad \varkappa = -13,7 \,.\, 10^{-6}$$

setzen kann.

Curie hat das Bi bis zum Schmelzpunkte (273°) und noch weiter hinauf bis zu 408° untersucht. Zwischen 20° und 273° fand er

$$10^6 . \varkappa' = -1,35 \, [1 - 0,00115 \, (t - 20)].$$

Bei 273° ist für das feste Wismut $10^6 \varkappa' = -0,96$; für geschmolzenes Wismut ist, unabhängig von der Temperatur, $10^6 \varkappa' = -0,038$. Fleming und Dewar finden für dieselbe Größe $-1,37$ bei 15° und $-1,59$ bei $-182°$; die Curiesche Formel würde statt des letztgenannten Wertes $-1,68$ ergeben.

Das Eisen gehört, wie die bereits S. 857 erwähnten Versuche von Curie gezeigt haben, bei hohen Temperaturen zu den schwach magnetischen Substanzen. Für $10^6 \varkappa'$ findet Curie folgende Werte:

$t =$	756°	758	760	780	800	840	900	940	1280		1336
$10^6 \varkappa' =$	7500	5800	4680	1480	776	348	61	28,4	23,9	38,3	32,3

Wie man sieht, erfolgt schnelle Abnahme bis 940°, fast vollständige Konstanz zwischen 940 und 1280°, ein Sprung bei 1280° und darauf wieder langsame Abnahme bis 1336°. Für Gußeisen findet Curie $10^6 \varkappa' = 0,0385 : T$ zwischen 850 und 1267° (T bedeutet hier die absolute Temperatur); für Magneteisenerz $0,0280 : T$. Die in den Heuslerschen Legierungen (S. 860) vorkommenden Metalle besitzen eine sehr geringe magnetische Suszeptibilität. Für das Kupfer liegt $\varkappa . 10^6$ zwischen $-0,3$ und $-0,8$; für Aluminium ist $\varkappa = 1,9 . 10^{-6}$; für Mangan $\varkappa = 50 . 10^{-6}$; für Antimon $\varkappa = -5,2 . 10^{-6}$; für Zinn $\varkappa = +0,3 . 10^{-6}$; für Blei $\varkappa = 1,0 . 10^{-6}$. Alle diese Zahlen sind verschwindend klein im Vergleich zu den Werten von $\varkappa$, die für die Heuslerschen Legierungen gelten.

Die Elemente sind, wie bereits auf S. 877 gesagt war, zum Teil para-, zum Teil diamagnetisch. Wir wollen einige Zahlenwerte anführen, wobei wir jedoch die auf gasförmige Elemente bezüglichen Werte fortlassen.

Stefan Meyer hat die Größe $k(M)$, deren Zusammenhang mit $\varkappa$ durch Formel (52, b) gegeben ist, bestimmt. Er hat die Werte von $10^6 \varkappa$ für folgende Elemente berechnet (vgl. die Berichtigung von Auerbach in der Phys. Ztschr. 7, 175, 1906):

Sb	$-3,6$	Er	1260	Th	757
Be	142	Mg	1,0	Ti	70,6
B	10,5	Os	8,7	V	18,3
Ce	1627	P (roter)	$-0,5$	Bi	$-9,5$
Di	715	Si	0,5	Zr	$-0,65$

Hier überraschen die relativ sehr großen Werte für die paramagnetischen Elemente Ce, Er, Di (s. u. das weitere); es ist aber dennoch selbst für Ce bloß $\varkappa = 0,0016$, also $\mu = 1,02$; dieser Wert

von $\varkappa$ ist nur ein Hunderttausendstel von dem für Fe geltenden Werte. Für die Größe $k(M) . 10^6$ gibt St. Meyer noch folgende Werte an:

Selen	Yttrium	Niob	Osmium
— 0,0013	3,2	0,49	0,074

Königsberger hat $\varkappa . 10^6$ für folgende Elemente bestimmt:

Cu	— 0,30	Pb	— 1,1	Graphit	2,0
Cu′	— 0,82	Tl	— 4,61	Al	1,7
Zn	— 0,70	S	— 0,86	Pt	29,0
Sn	0,14	Se	— 1,28	Pd	55,0
Sn′	0,46	Te	— 2,10	W	14,0

Hier bedeuten Cu′ und Sn′ die auf elektrolytischem Wege dargestellten Metalle; Se ist reines, geschmolzenes Selen; S rhombischer Schwefel.

Curie gibt für $\varkappa' . 10^6 = \varkappa \delta . 10^6$:

Se	Te	Br	J	P (weißer)	Sb
— 0,31	— 0,31	— 0,41	— 0,385	— 0,92	— 0,47

Für Palladium findet Curie, daß bis zu 1370°

$$\varkappa' = \frac{0{,}001\,52}{T}$$

ist, woraus sich $10^6 . \varkappa = 61$ für 20° ergibt; für Pt findet er $10^6 . \varkappa = 29$.

Verschiedene feste Oxyde und Salze haben namentlich Liebknecht und Wills, Königsberger, St. Meyer, Curie und Chéneveau, sowie Meslin untersucht, in deren Arbeiten man ein sehr reichhaltiges, hierher gehöriges Material findet. Von besonderem Interesse sind die Oxyde und Salze seltener Metalle, die besonders eingehend von St. Meyer untersucht worden sind (unter anderem die Metalle La, Ce, Pr, Nd, Sa, Gd, Er, Yb, V, Ho, Y, Th, Eu). Wir wollen nur einige wenige Zahlen anführen, die sich auf Oxyde, Salze und einige andere feste Körper beziehen. Königsberger gibt für $\varkappa . 10^6$:

Quarz	Gips	Fluorit	Zelluloid	Turmalin	Glassorten
— 1,20	— 0,86	— 1,30	— 0,2	— 1,4	— 0,6 bis — 1,0.

Lombardi hat für Ebonit 34, für Argentan 4,8, für Messing — 1,3, für Paraffin — 0,78 angegeben; Wills gibt für Holz — 0,16 bis — 0,51; für Marmor — 0,8. Curie und Chéneveau (1903) fanden, daß reines Radiumchlorid paramagnetisch ist; für dasselbe ist $\varkappa' = \varkappa : \delta = 1{,}05 . 10^{-6}$; reines Baryumchlorid ist diamagnetisch und für dasselbe ist $\varkappa' = - 0{,}40 . 10^{6}$; für Baryumchlorid, das zu $1/_6$ Radiumchlorid enthält, ist $\varkappa' = - 0{,}20 . 10^{-6}$.

Von den St. Meyerschen Resultaten für $\varkappa . 10^6$ führen wir die folgenden an:

NaCl	— 0,89	Al_2O_3	— 1,50	$CaFl_2$	— 0,95
Na_2CO_3	— 0,47	KCl	— 0,94	$CaCl_2$	— 0,88
MgO	— 0,64	KBr	— 0,95	$CaSO_4$	— 1,13
$MgSO_4$	— 0,95	KJ	— 0,95	Cr_2O_3	+ 1,20
$MgCO_3$	— 1,22	CaO	— 0,86	CuO	+ 19,8

$CuSO_4$	+ 36	AgJ	— 1,62
$CuCl_2$	+ 3,5	HgO	— 2,22
Cu_2Br_2	— 0,76	HgCl	— 1,28
AgCl	— 1,56	$HgCl_2$	— 0,81
AgBr	— 1,64	PbO	— 1,1

Die magnetischen Eigenschaften der Lösungen sind von vielen Forschern studiert worden. Durch die Arbeiten von G. Wiedemann, Königsberger und insbesondere von Jäger und St. Meyer ist klargestellt worden, daß die magnetische Suszeptibilität vieler Lösungen sich aus den Suszeptibilitäten der gelösten Substanz und des Lösungsmittels additiv ergibt. Einige Forscher, beispielsweise Königsberger, haben gefunden, daß dies von der Größe $\varkappa : \delta = \varkappa'$ gilt. Jäger und St. Meyer haben aus ihren Versuchen den Schluß gezogen, daß $\varkappa$ für Lösungen eine lineare Funktion der Anzahl p der Grammolekel ist, die sich in einem Liter der Lösung befinden; für $p = 0$ erhält man den Wert von $\varkappa$ für Wasser. Für $p = 1$ erhält man offenbar gerade die Größe $k(M)$ für die gelöste Substanz, welche Größe mit $\varkappa$ durch die Formel (51) zusammenhängt.

Die ersten Bestimmungen von $\varkappa$ für Lösungen haben Borgmann und Silow ausgeführt. Erstgenannter fand für eine Chloreisenlösung von der Dichte $\delta = 1{,}487$ den Wert $10^6 . \varkappa = 48{,}8$; eine andere Methode ergab 37,0 bei $\delta = 1{,}52$; Silow fand Werte zwischen 72 und 179 bei $\delta = 1{,}475$ und Werte von 61 bis 157 bei $\delta = 1{,}52$ je nach der Feldintensität (s. o.). Ferner erhielt Borgmann den Wert 15,2 für eine Eisensulfatlösung ($\delta = 1{,}24$), Silow den Wert 185 für eine Lösung von Manganchlorid ($\delta = 1{,}25$).

Königsberger gibt die Resultate seiner Beobachtungen durch Formeln von folgender Gestalt wieder:

$$10^6 \varkappa' = \varkappa_1' \cdot \frac{p}{100} - 0{,}80 \left(1 - \frac{p}{100}\right),$$

wo sich $\varkappa'$ auf die Lösung, $\varkappa_1'$ auf die gelöste kompakte Substanz bezieht, p die Anzahl Gramme in 100 g der Lösung, die Zahl — 0,80 der Wert von $10^6 . \varkappa$ für reines Wasser ist. So ist z. B. für eine Kupfersulfatlösung:

$$\varkappa' = 10{,}4 \frac{p}{100} - 0{,}80 \left(1 - \frac{p}{100}\right).$$

Studley (1907) hat die Resultate von Königsberger für Lösungen von $CuSO_4$ und $MgSO_4$ bestätigt. Jäger und St. Meyer haben Lösungen von $FeCl_3$, $FeSO_4$, $Fe_2(NO_3)_6$, $FeCl_2$, $MnCl_2$, $MnSO_4$, $Mn(NO_3)_2$, $CoCl_2$, $CoSO_4$, $Co(NO_3)_2$, $NiCl_2$, $NiSO_4$, $Ni(NO_3)_2$, $CrCl_3$ und $Cr_2(SO_4)_3$ bei verschiedenen Konzentrationsgraden und verschiedenen Temperaturen, von nahe bei 0° bis nahe bei 90° liegenden, untersucht. Sie fanden, daß $\varkappa$ eine lineare, abnehmende Funktion der Temperatur ist: die Temperaturkoeffizienten der Größe $\varkappa$ schwanken zwischen — 0,0022 und — 0,0032. Ungefähr ebensolche Werte haben auch Mosler (zwischen — 0,00256 und — 0,00358) und Piaggesi (zwischen — 0,00271 und — 0,00293 für Eisensalze, zwischen — 0,00262 und 0,00301 für Salze von Mn und Co) gefunden.

Von unorganischen Flüssigkeiten erwähnen wir CS_2, für den $\varkappa = -0{,}77 . 10^{-6}$ ist. Für flüssigen Sauerstoff fanden Fleming und Dewar $\varkappa = 325 . 10^{-6}$, für flüssige Luft $\varkappa = 180 . 10^{-6}$; flüssiger Wasserstoff ist nach den Beobachtungen von Dewar schwach diamagnetisch. Organische Flüssigkeiten haben Henrichsen (1888), Königsberger (1898), St. Meyer (1904) und Meslin (1904) untersucht. Alle Flüssigkeiten erwiesen sich als diamagnetisch. Wir wollen einige der Werte für $-\varkappa . 10^6$ anführen:

Aceton	0,51	Glycerin	0,82
Äthyläther	0,61	Benzol	0,70
Äthylalkohol	0,67	Xylol	0,69
Methylalkohol	0,60	Essigsäure	0,61
Amylalkohol	0,69	Anilin	0,73
Chloroform (H.)	0,78	Paraffinöl	0,48
Chloroform (M.)	0,86	Vaselinöl	0,73
Bromoform	1,02		

Hier bedeutet H. = Henrichsen, M. = Meslin. Mischungen aus Wasser und Spiritus haben Meslin und March (1907) untersucht. Letzterer hat $\varkappa$ für Lösungen der Gemenge von $CuCl_2$, $MnCl_2$ und $AlCl_3$, sowie der Gemenge $CuSO_4$, $MnSO_4$ und $Al_2(SO_4)_3$ bestimmt, d. h. für Salze der drei Metalle, die in den Heuslerschen Legierungen vorkommen; es zeigte sich keine Zunahme der Magnetisierung, und $\varkappa$ für die Mischung war eine additive Eigenschaft. Für Gase ist die Größe $\varkappa$ direkt proportional der Dichte δ oder dem Drucke p, es ist daher $\varkappa' = \varkappa : \delta$ eine konstante Größe, die vom Drucke nicht abhängt. Wir führen hier einige Zahlen für den Sauerstoff (aus der Zusammenstellung von du Bois) an:

	Temp. Grad	Druck 1 = 750 mm	$\varkappa \cdot 10^6$ bei 750 mm	$\varkappa' \cdot 10^6$ bei 18°
Du Bois	15	1	+ 0,115	87
Quincke	16	1—8	0,121	91
Quincke	16	40	0,156	117
Curie	20	18	0,151	116
Hennig	25	1—4	0,119	95
Jefimow	—	—	0,125	—

Nach Curie ist $\varkappa'$ für O_2 gleich dem 145 fachen des für Wasser (gleiche Massen) geltenden Wertes. Für die Abhängigkeit von der absoluten Temperatur T gibt Curie die (zwischen 20 und 450° geltende) Formel:

$$10^6 \cdot \varkappa' = \frac{33700}{T} \cdot$$

Für Luft ist $10^6 \varkappa' = 7830 : T$ und bei dem Druck von 760 mm:

$$10^6 \cdot \varkappa = \frac{2760}{T^2} \cdot$$

Bei 20° erhält man $10^6 \cdot \varkappa = 0{,}0322$, was 4 Proz. des Wertes von $\varkappa$ für Wasser (gleiche Volumina) ausmacht. Die Korrektion, die man bei Bestimmung von $10^6 \varkappa$ für einen beliebigen Körper in Luft anzubringen hat, ist gleich $0{,}0322 : d$, wo d die Dichte des Körpers bedeutet. Quincke findet, daß der Temperaturkoeffizient von $\varkappa'$ für Luft zwischen — 0,0043 bei 20° und 0,0011 bei 100° variiert. Ozon ist noch stärker magnetisch als Sauerstoff. Hinsichtlich der übrigen Gase weisen wir darauf hin, daß Jefimow folgende relativen Werte angegeben hat:

Luft	O_2	NO	C_2H_4	CH_4	CO_2	N_2O	N	CO
1	4,83	1,60	— 0,068	— 0,063	— 0,033	— 0,018	0,015	— 0,009

Quincke gibt folgende Werte an:

	NO	N_2O	CO_2	CH_4	N	CO
$\varkappa \cdot 10^6 =$	0,053	0,0031	0,0029	0,0011	0,0009	0,0003

Viele Forscher haben danach gesucht, einen Zusammenhang zwischen den magnetischen Eigenschaften einer Substanz und ihrer chemischen Zusammensetzung zu finden. Wir wollen hier einige der diesbezüglichen Resultate anführen.

G. Wiedemann fand, daß in vielen Fällen die molekulare Suszeptibilität $\varkappa'_m$ (vgl. S. 876) sich additiv aus den atomischen Suszeptibilitäten $\varkappa'_i$ ergibt, so daß

$$\varkappa'_m = \Sigma\, p_i \varkappa'_i \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (54)$$

ist, wo p die Zahl der Atome von gegebener Art im Moleküle bedeutet. Ferner fand er, daß der molekulare Magnetismus von Salzen eines

und desselben Metalles nur wenig von der betreffenden Säure, d. h. von dem Anion abhängt.

Henrichsen hat gefunden, daß für Isomere $\varkappa'_m$ fast gleiche Werte besitzt und daß ferner eine jede Substitution der Gruppe CH_2 in das Molekül den molekularen Magnetismus um den gleichen Betrag vergrößert. Auf S. 883 hatten wir die Salze von Fe, Mn, Co, Ni und Cr angeführt, deren Lösungen Jäger und St. Meyer untersucht haben. (In der Folge hat St. Meyer auch noch V untersucht.) Hierbei fanden sie die sehr bemerkenswerte Tatsache, daß $\varkappa$ nur vom Kation abhängt, so daß z. B. für alle Eisensalze mit Ausnahme von $FeCl_3$ die Größe $\varkappa$ den gleichen Wert hat, wenn sich im Liter der Lösung die gleiche Eisenmenge befindet, oder, was dasselbe besagt, die gleiche Anzahl Grammoleküle des gelösten Salzes, vorausgesetzt natürlich, daß die Valenz des Metalles in allen Salzen die gleiche ist.

Bezeichnen wir als Atommagnetismus $\varkappa(a)$ eines Metalles den Wert von $\varkappa$ für eine Lösung, wenn sich ein Grammatom des Metalles in einem Liter der Salzlösung befindet; es ist dann

	V	Ni	Cr	Fe($FeCl_2$)	Co	Fe (die übrigen Salze s. o.)	Mn
$10^6 \varkappa(a)$	1,25	4,95	6,25	7,5	10,0	12,5	15,0
oder	$^1/_2 . 2,5$	2 . 2,5	2,5 . 2,5	3 . 2,5	4 . 2,5	5 . 2,5	6 . 2,5

Die Gesetzmäßigkeit ist klar. St. Meyer hat aus seinen zahlreichen Messungen eine Reihe von sonstigen Schlüssen gezogen, von denen hier einige angegeben sein mögen:

Eine Verbindung von zwei diamagnetischen Elementen ist immer diamagnetisch.

Eine Verbindung von zwei paramagnetischen Elementen ist meist paramagnetisch; es gibt aber auch Ausnahmen, z. B. sind Be_2O_3, MgO, Al_2O_3, SiO_2, Mo_2O_3, WO_3, ThO_2 diamagnetisch.

Die seltenen Metalle V, Pr, Eu, Nd, Yb, Sa, Gd, Er, Ho sind in ihren Verbindungen stark paramagnetisch. Am stärksten paramagnetisch von sämtlichen Elementen in analogen Verbindungen ist Ho. Die relativen Werte der molekularen Suszeptibilitäten dieser seltenen, sowie auch der ferromagnetischen Metalle sind die folgenden:

V	Pr	Eu	Ni	Nd	Yb	Cr	Co	Sa	Fe	Mn	Gd	Er	Ho
1,3	3,3	4,9	5	5,2	6	6,3	10	11,2	12,5	15	27,3	38,2	50

Das Kristallwasser ist von geringem Einfluß auf den Magnetismus; dafür aber ändert das Hinzutreten von Wasser, welches hydroxyle Gruppen bildet, in hohem Grade den molekularen Magnetismus beispielsweise von CaO und $Ca(OH)_2$. Hinsichtlich der Formel (54) ist St. Meyer zu folgendem Resultat gelangt: sind alle $\varkappa'_i > 0$, so ist der molekulare Magnetismus $\varkappa'_m$ kleiner als die Summe der Atommagnetismen. Sind aber alle $\varkappa'_i < 0$, so ist $\varkappa'_m$ größer oder kleiner als diese

Summe, je nachdem das Molekularvolumen kleiner oder größer als die Summe der Atomvolumina ist.

§ 13. Magnetismus der anisotropen Körper. Die anisotropen Körper zerfallen in künstlich anisotrope, wie z. B. in einer Richtung komprimierte Körper, gehärtetes Eisen u. a., und in natürlich anisotrope, zu denen die kristallischen Substanzen gehören. Hinsichtlich ihrer magnetischen Eigenschaften unterscheiden sich die anisotropen ferromagnetischen und schwach magnetischen Körper wesentlich voneinander; wir wollen zunächst die letzteren betrachten.

In anisotropen Körpern ist die durch die Größe $\varkappa$ charakterisierte Magnetisierbarkeit in verschiedenen Richtungen verschieden. Es sind in jedem derartigen Körper drei zueinander senkrechte Richtungen vorhanden, wir wollen sie die magnetischen Hauptachsen nennen, die folgende Eigenschaften besitzen: diesen drei Richtungen entsprechen drei bestimmte Größen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$; hat das Feld H die Richtung einer dieser Achsen, so erfolgt in dieser Richtung die Magnetisierung des anisotropen Körpers, d. h. ordnet sich in dieser Richtung die magnetische Achse des magnetisierten Körpers selbst an. Das magnetische Moment m des letzteren ist gleich $m = \varkappa_i v H$, wo v das Volumen des Körpers und $\varkappa_i$ diejenige der drei genannten Größen ist, die der gewählten Achse entspricht. Bei jeder anderen Richtung des Feldes H erhält man ein magnetisches Moment, dessen Richtung mit H einen gewissen Winkel ω bildet, dessen Größe wir weiter unten berechnen wollen.

Bringt man in ein homogenes Feld einen anisotropen Körper, so sucht sich die Achse des größten absoluten Wertes $\varkappa_i$ axial einzustellen, d. h. in der Richtung der Kraftlinien, wenn der Körper paramagnetisch ist; sie sucht sich äquatorial einzustellen, d. h. senkrecht zu den Kraftlinien, wenn der Körper diamagnetisch ist. Die Richtung der Achse, welche der stärksten Magnetisierung entspricht, braucht nicht mit der Richtung der größten linearen Ausdehnung des Körpers zusammenzufallen und es kann daher eintreten, daß sich ein paramagnetisches Stäbchen äquatorial, ein diamagnetisches axial einstellt.

In einachsigen Kristallen (Bd. I und III; quadratisches und hexagonales System) ist nur eine vollständig bestimmte magnetische Hauptachse vorhanden, die, wie es scheint, stets mit der optischen Achse zusammenfällt; es sei die ihr entsprechende Größe mit $\varkappa_1$ bezeichnet. In allen Richtungen senkrecht zu dieser Achse hat $\varkappa$ denselben Wert $\varkappa_2$, so daß man $\varkappa_3 = \varkappa_2$ setzen kann, wobei die Richtungen der zweiten und dritten magnetischen Hauptachse unbestimmt werden. Hat H die Richtung der optischen Achse (der Kristallachse), so ist das magnetische Moment $m_1 = \varkappa_1 v H$; ist das Feld H senkrecht zur Achse, so hat man unabhängig von seiner speziellen Rich-

tung das magnetische Moment $m_2 = \varkappa_2 v H$. Ein Kristall heißt positiv, wenn seine para- oder diamagnetischen Eigenschaften in der Achsenrichtung stärker ausgesprochen sind, als senkrecht zu derselben; im entgegengesetzten Falle heißt er negativ. Auf Grund des oben Gesagten kann man sich leicht vorstellen, wie sich die optische Achse eines Kristalles einstellen muß, der in ein homogenes Magnetfeld gebracht ist.

Art der Magnetisierung	Vorzeichen	Suszeptibilität	Einstellung
Paramagnetisch	+	$\varkappa_1 > \varkappa_2$	axial
Paramagnetisch . . .	—	$\varkappa_1 < \varkappa_2$	äquatorial
Diamagnetisch . . .	+	$-\varkappa_1 > -\varkappa_2$	äquatorial
Diamagnetisch . . .	—	$-\varkappa_1 > -\varkappa_2$	axial

Zu den positiven paramagnetischen Kristallen gehört der Eisenspat ($FeCO_3$), Korund (Al_2O_3), Zinnerz (SnO_2), Rutil (TiO_2); zu den negativen der Turmalin, Beryll, Dioptas, Vesuvian, $NiSO_4 . 6 H_2O$, NH_4Cl, $CuCl . 2 H_2O$; zu den positiven diamagnetischen gehört der Kalkspat, $NaNO_3$, $CaSO_4 . 4 H_2O$; zu den negativen Bi, Sb, As. Eis, HgCl, Zr, $H_2(NH_4)AsO_4$, $Hg(CN)_2$, $MgPt(CN)_4 . 7 H_2O$, $H_2NH_4PO_4$, H_2KPO_4, H_2KAsO_4, Harnstoff (CH_4N_2O).

Die magnetischen Eigenschaften der Kristalle sind von Plücker (1847) und Faraday (1848) entdeckt worden. Ersterer machte die Beobachtung, daß die Achse des paramagnetischen Turmalins sich äquatorial einstellt und daß dasselbe von der Achse eines Zylinders aus paramagnetischem, gehärtetem Glase gilt. Faraday beobachtete, daß die Achse eines Kristalles des diamagnetischen Wismuts sich axial einstellt. Knoblauch und Tyndall stellten sich Stäbchen aus Mehl, Gummi und Wasser her, die sich äquatorial einstellten; wurden diese Stäbchen in der Längsrichtung zusammengepreßt, so daß sich eine Kreisscheibe bildete, so verblieben die Grundflächen der Scheibe in der axialen Lage, obgleich die Scheibenachse kleiner als der Durchmesser der Grundfläche war; es erklärt sich dies dadurch, daß die Substanz in der Richtung, in welcher die Kompression erfolgt war, einen größeren absoluten Wert für $\varkappa$ hat. Das gleiche Verhalten wurde an einem Stäbchen aus Wismutpulver und Leim beobachtet. Umgekehrt stellte sich die Grundfläche einer Scheibe, die durch Zusammendrückung eines Eisen enthaltenden Stäbchens hergestellt war, äquatorial ein. Tyndall fand, daß sich bei Holz die Fasern äquatorial einstellen.

Ein besonderes Verhalten zeigt der paramagnetische Cyanit, bei welchem $\varkappa_1$ sehr groß und bedeutend größer als $\varkappa_2$ ist, so daß die Achse eines beweglichen Kristalles sich selbst in die Ebene des magnetischen Meridians einstellt. Gerade das entgegengesetzte Verhalten zeigt Pyrrhotin, für den $\varkappa_1$ nahezu gleich Null ist; in der Achsenrichtung kann er nicht magnetisiert werden, dagegen läßt er sich aber

sehr stark in jeder beliebigen, zur Achse senkrechten Richtung magnetisieren; seine Koerzitivkraft geht bis zu 200 C.G.S. Dieses Mineral haben Abt, Streng und besonders eingehend P. Weiss (seit 1899) untersucht; letzterer hat die sehr komplizierten Gesetzmäßigkeiten festgestellt, nach denen die Magnetisierung in den verschiedenen, zur Achse senkrechten Richtungen erfolgt.

Tyndall (1851) hat unmittelbar die Anziehungen und Abstoßungen gemessen, welche ein Magnetpol auf Kristalle ausübt, die verschiedene Lagen zu diesem Pole innehaben; es wurde beispielsweise ein Würfel aus Eisensulfat in der Richtung seiner Achse mit einer Kraft gleich 41,5, in hierzu senkrechter Richtung mit einer Kraft gleich 35,4 angezogen; ähnliche Messungen hat Hankel (1851) am Wismut ausgeführt. Rowland und Jacques (1879) haben zuerst den Wert gemessen, den $\varkappa$ in verschiedenen Richtungen im Bi und Kalkspat hat.

Bereits Faraday hat beobachtet, daß mit Zunahme der Temperatur die Werte $\varkappa$ abnehmen. Eine sehr eingehende Untersuchung über den Einfluß der Temperatur hat Lutteroth (1879) ausgeführt, welcher fand, daß die Differenzen zweier von den Größen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ lineare Funktionen der Temperatur sind (zwischen 0 und 50°); für isomorphe Kristalle sind die Verhältnisse der Temperaturkoeffizienten jener Größen einander gleich. Für $NiSO_4$ und $ZnSO_4$ haben diese Koeffizienten entgegengesetzte Vorzeichen, ihr Verhältnis ist gleich — 0,37.

Die zweiachsigen Kristalle sind von Plücker und Beer, Grailich und v. Lang u. a. untersucht worden, wir wollen jedoch nicht auf die Ergebnisse dieser Untersuchungen eingehen.

Die Kristalle des regulären Systems, welche optisch isotrop (Bd. II) sind, hinsichtlich der Elastizität aber anisotrop, hat man in bezug auf die magnetischen Erscheinungen als isotrop betrachtet. Indessen hat P. Weiss (1896) gezeigt, daß die Kristalle des Magneteisenerzes, die doch zum regulären Systeme gehören, magnetisch anisotrop sind, insbesondere in schwachen Feldern.

O. Lehmann hat gezeigt, daß das Magnetfeld auf die von ihm entdeckten flüssigen Kristalle einwirkt; unter der Einwirkung des Feldes erfolgt Drehung der Kristallmoleküle und zu gleicher Zeit zeigt der ganze Tropfen das Bestreben, sich derart zu kehren, daß die optische Achse die äquatoriale Lage erhält.

Wir wollen in Kürze auf die Grundlagen der Theorie der magnetischen Induktion in schwach magnetischen, anisotropen Körpern eingehen; diese Theorie hat W. Thomson (Lord Kelvin) im Jahre 1851 entworfen. Ziehen wir Koordinatenachsen und bezeichnen wir mit α, β, γ die Winkel zwischen der Richtung des Feldes H und diesen Achsen. W. Thomson macht die Annahme, daß jede der drei Komponenten m_1, m_2, m_3 des magnetischen Momentes m

des Körpers eine lineare Funktion der drei Komponenten der Kraft H ist, so daß in den Formeln neun Koeffizienten auftreten. Eine einfache Überlegung aber zeigt, daß sechs von ihnen paarweise gleich sind und daß ferner drei Richtungen vorhanden sein müssen, in denen die Richtungen von m und H zusammenfallen. Zieht man die Koordinatenachsen in diesen Richtungen, so erhält man anstatt sechs nur drei Koeffizienten $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$, welches dann die magnetischen Suszeptibilitäten in diesen drei Richtungen sind. Es ist alsdann (v bedeutet das Volumen des Körpers):

$$m_1 = v\varkappa_1 H \cos\alpha, \quad m_2 = v\varkappa_2 H \cos\beta, \quad m_3 = v\varkappa_3 H \cos\gamma \qquad (55)$$

Hieraus erhält man das magnetische Moment

$$m = vH\sqrt{\varkappa_1^2 \cos^2\alpha + \varkappa_2^2 \cos^2\beta + \varkappa_3^2 \cos^2\gamma} \quad . \quad . \qquad (55,a)$$

Die Winkel φ, ψ, θ zwischen der magnetischen Achse des Körpers, d. h. dem Momente m und den Koordinatenachsen sind durch die Formeln

$$\cos\varphi = \frac{m_1}{m} = \frac{vH\varkappa_1 \cos\alpha}{m} \text{ usw.} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (55,b)$$

bestimmt. Für den Winkel ω zwischen H und m erhält man

$$\cos\omega = \frac{\varkappa_1 \cos^2\alpha + \varkappa_2 \cos^2\beta + \varkappa_3 \cos^2\gamma}{\sqrt{\varkappa_1^2 \cos^2\alpha + \varkappa_2^2 \cos^2\beta + \varkappa_3^2 \cos^2\gamma}} \quad . \quad . \quad . \qquad (55,c)$$

Es sei m_H die Komponente des Momentes m in der Richtung von H; dann ist $m_H = m \cos\omega$. Setzt man $m_H = v\varkappa H$, so erhält man aus (55, b) und (55, c)

$$\varkappa = \varkappa_1 \cos^2\alpha + \varkappa_2 \cos^2\beta + \varkappa_3 \cos^2\gamma \quad . \quad . \quad . \qquad (55,d)$$

Zieht man aus einem beliebigen Punkte Radienvektoren $r = 1 : \sqrt{\varkappa}$, so liegen ihre Endpunkte auf der Oberfläche des Ellipsoids $\varkappa_1 x^2 + \varkappa_2 y^2 + \varkappa_3 z^2 = 1$, das völlig analog ist dem Elastizitätsellipsoide in der Fresnelschen Theorie (Bd. II, Kap. 16); man kann es das Magnetisierungsellipsoid nennen.

Ein Körper, der in ein homogenes Magnetfeld gebracht ist, muß einem Kräftepaar unterliegen, dessen Moment M gleich

$$M = mH \sin\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (56)$$

ist. Die Achse dieses Drehungsmomentes ist senkrecht zur Ebene, welche durch H und m hindurchgeht. Eine einfache Rechnung ergibt für M und seine Komponenten M_1, M_2 und M_3 die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= vH^2(\varkappa_2 - \varkappa_3) \cos\beta \cos\gamma \\ M_2 &= vH^2(\varkappa_3 - \varkappa_1) \cos\gamma \cos\alpha \\ M_3 &= vH^2(\varkappa_1 - \varkappa_2) \cos\alpha \cos\beta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (56,a)$$

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (56,b)$$

Da in diesen Formeln nur die Differenzen der drei Größen $\varkappa_i$ vorkommen, so ist klar, daß die Werte der Drehmomente nicht vom umgebenden Medium abhängen.

Wenn sich ein Körper um eine von den drei Achsen drehen kann und diese Achse senkrecht zu dem homogenen Felde H ist, so tritt stabiles Gleichgewicht ein, wenn die Achse, welcher das größere $\varkappa$ entspricht, parallel zum Felde H wird. Hängt man einen Körper bifilar (Bd. I) auf, wobei der Doppelfaden beispielsweise parallel zur z-Achse ist, und tordiert den Doppelfaden um den Winkel θ, so dreht sich der Körper aus der Gleichgewichtslage um einen gewissen Winkel α, wobei ($\beta = 90 - \alpha$)

$$C \sin(\theta - \alpha) = v H^2 (\varkappa_1 - \varkappa_2) \cos\alpha \sin\alpha \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

ist; C ist hier der Torsionskoeffizient des Doppelfadens und es ist der Annahme nach $\varkappa_1 > \varkappa_2$. Die Dauer T_3 sehr kleiner Schwingungen ($\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = \alpha$) ist gleich

$$T_3 = \frac{\pi}{H} \sqrt{\frac{K}{v(\varkappa_1 - \varkappa_2)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

wo K das Trägheitsmoment in bezug auf die Drehungsachse ist. Sind n_1, n_2 und n_3 ($= 1 : T_3$) die Schwingungszahlen der um die drei Achsen eines kugelförmigen Körpers erfolgenden Schwingungen, so erhält man leicht die Gleichungen:

$$\frac{\varkappa_2 - \varkappa_3}{n_1^2} = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_3}{n_2^2} = \frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{n_3^2},$$

woraus unter der Bedingung, daß $\varkappa_1 > \varkappa_2 > \varkappa_3$ ist,

$$n_2^2 = n_1^2 + n_3^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

folgt. Plücker hat die letztgenannte Formel für ameisensaures Kupfer geprüft. Die Formeln (57) und (58) können dazu dienen, die Differenzen der drei Größen $\varkappa_i$ zu bestimmen.

In einachsigen Kristallen ist $\varkappa_3 = \varkappa_2$, wenn man annimmt, daß $\varkappa_1$ sich auf die Richtung der Kristallachse bezieht. Wählt man die Drehungsachse des Kristalles senkrecht zur Kristallachse, und, wie früher, zum Felde H, so bleiben die Formeln (57) und (58) in Geltung, wobei man jedoch anstatt $\varkappa_1 - \varkappa_2$ hier $\varkappa_2 - \varkappa_1$ setzen muß, falls $\varkappa_2 > \varkappa_1$ ist. Diese Formeln können zur Bestimmung der Differenz $\pm(\varkappa_1 - \varkappa_2)$ dienen. Man sieht leicht, daß sich alle von uns hergeleiteten Formeln für den Fall vereinfachen, daß der Kristall einachsig ist.

Die Thomsonsche Theorie ist von W. König, Stenger u. a. geprüft worden; Lutteroth hat gezeigt, daß man seine Formeln aus der Vorstellung von drehbaren Molekularmagneten herleiten kann. Duhem hat eine Theorie aufgestellt, die sich auf die Prinzipien der Thermodynamik stützt.

Die Thomsonsche Theorie ist nicht anwendbar auf die ferromagnetischen Kristalle, für welche die Größen $\varkappa$ Funktionen der Feldintensität H sind und in denen remanenter Magnetismus vorhanden ist. Für diese Körper hat Voigt eine spezielle Theorie entwickelt; dieselbe ist von Sano, Wallerant, Bavink, P. Weiss (1904) u. a. weiter geführt worden; wir werden auf diese Arbeiten nicht eingehen.

Literatur.

Zu § 2.

Poisson: Mém. de l'Acad. 5, 248, 488, 1824; 6, 441, 1827; Ann. d. chim. et phys. (2) 25, 113, 1824; 28, 1, 1825.
W. Thomson: Phil. Mag. (4) 1, 177, 1851.
F. Neumann: Crelles Journ. 37, 44, 1848.
Kirchhoff: Crelles Journ. 48, 348, 1854; P. A. Ergbd. 5, 1, 1870.
Stefan: Wien. Ber. (2) 69, 168, 1874.
Beer: P. A. 94, 192, 1855.
Plücker: Phil. Trans. 2, 255, 1858.
Greenhill: Journ. d. Phys. 10, 294, 1881.
Riecke: W. A. 13, 465, 1881.
Duhem: De l'aimantation par l'influence, Paris 1888.
Green: Crelles Journ. 47, 215, 1852.
Lipschitz: Diss., Berlin 1857; Crelles Journ. 58, 1, 1859.
Sauter: W. A. 62, 85, 1897.
Mues: Diss., Greifswald 1893.
Schütz: Journ. f. Math. 113, 161, 1894.
Bulgakow: Magnetisierung eines Ringes usw. (russ.), St. Petersb. 1901.
Du Bois (Offener Ring): W. A. 46, 493, 1892; Verh. d. phys. Ges. 9, 84, 1890.
Wassmuth (Offener Ring): Wien. Ber. 102, 81, 1893.
Stefan (Schirmwirkung): W. A. 17, 928, 1882.
Du Bois (Schirmwirkung): W. A. 46, 494, 1892; 63, 348, 1897; 65, 1, 1898.
Du Bois u. Wills: Ann. d. Phys. (4) 2, 78, 1900.
Wills: Phys. Rev. 9, 193, 1899.
Föppl: W. A. 48, 252, 1893.
H. Lehmann: W. A. 48, 406, 1893.

Theorie der drehbaren Molekularmagnete.

W. Weber: Elektrodyn. Maßbest. 3, 566, 1864; Abh. d. k. sächs. Ges. 1, 458, 1852; P. A. 87, 167, 1852.
Maxwell: Treatise on Electr. and Magnet. 2, 79, 1881.
Chwolson: Über den Mechanismus der magnetischen Induktion im Stahl (russ.), St. Petersb. 1876.
Righi: Mem. di Bologna (4) 1, 433, 1880.
Stefan: Wien. Ber. 69, 165, 1874.
W. Siemens: Berl. Ber. 1881, 1884; W. A. 14, 642, 1882.

Ewing: Phil. Mag. (5) **30**, 205, 1890; Phil. Trans. **2**, 523, 1885; Proc. R. Soc. **48**, 342, 1890.
Du Bois: Ann. d. Phys. (4) **13**, 289, 1904; **14**, 209, 1904; Boltzmann, Festschrift 1904, S. 809.
Holborn: Berl. Ber. 1896, S. 173.
Martens, W. A. **60**, 61, 1897.
Klemenčič: W. A. **62**, 68, 1897.
Gildemeister: Ann. d. Phys. (4) **23**, 401, 1907.

Zu § 3.

Sturgeon: Proceedings of the Soc. of Arts 1825; Phil. Mag. **11**, 194, 1832; P. A. **24**, 632, 1832.
Brewster: Edinb. Journ. of Science No. 6, p. 216, 1826.
Joule: Ann. of Electr. **5**, 187, 1840; P. A. **51**, 371, 1840.
Ruhmkorff: Compt. rend. **23**, 417, 538, 1846.
Du Bois: W. A. **51**, 537, 1894; Ann. d. Phys. (4) **1**, 199, 1900.
Stefan: Wien. Ber. **97**, 176, 1888; W. A. **38**, 440, 1889.
Ewing and Low: Proc. R. Soc. **45**, 40, 1888; Phil. Trans. **180**, 227, 1889.
Walter: Ann. d. Phys. (4) **14**, 106, 1904.
Lenz u. Jacobi: P. A. **47**, 225, 415, 1839; **61**, 255, 1844; Bull. de l'Acad. de St. Pétersb. 1838.
J. Müller: P. A. **79**, 337, 1850; **82**, 181, 1851.
Lamont: Handbuch des Magnetismus, 1867, S. 41.
O. Frölich: Elektrotechn. Ztschr. 1881, S. 141, 170; 1882, S. 73; 1886, S. 160; 1894, S. 368.
Sohncke: Elektrotechn. Ztschr. 1883, S. 160.
Ruths: Magn. weicher Eisenzylinder, Dortmund 1876.
Müllendorf: Elektrotechn. Ztschr. 1901, S. 925; 1902, S. 25.
Kapp: Elektrician **18**, 21, 1886.
Dub: P. A. **86**, 553, 1852; **90**, 250, 441, 1853; **94**, 580, 1855; **102**, 208, 1857; **120**, 573, 1863.
G. Wiedemann: P. A. **117**, 236, 1862.
Waltenhofen: Wien. Ber. **48**, 518, 1864; **52**, 87, 1865; **61**, 739, 771, 1870; P. A. **121**, 450, 1864; W. A. **27**, 630, 1886; **32**, 133, 1887.
Fechner: Schweigg. Journ. **69**, 277, 316, 1833.
Joule: Phil. Mag. (4) **2**, 306, 447, 1851; **3**, 32, 1852.
Siemens: W. A. **14**, 640, 1881.
Stefan: Wien. Ber. **81**, 89, 1880.
Wassmuth: Wien. Ber. **85**, 327, 1882.
Bosanquet: Phil. Mag. (5) **22**, 535, 1886.
Bidwell: Proc. R. Soc. **40**, 486, 1881.
Threlfall: Phil. Mag. (5) **38**, 89, 1894.
E. Jones: W. A. **54**, 641, 1895; **57**, 258, 1896.
J. u. E. Hopkinson: Phil. Trans. **177**, 331, 1886; Electr. Rev. **19**, 472, 1886.
Kapp: Electrician 1885, p. 14, 15, 16; Journ. Soc. Tel. Eng. **15**, 518, 1886.
Kahle: Diss., Marburg 1890.

Zu § 4.

Maxwell: Trans. R. Soc. 1865.
Helmholtz: Berl. Ber. 1881; W. A. **13**, 385, 1881.
Boltzmann: Wien. Ber. **80**, 1879; **82**, 826, 1157, 1880.



Cantone: Mem. Acc. di Lincei **6**, 252, 487, 1896.
Gans: Ann. d. Phys. (4) **13**, 634, 1904; **14**, 638, 1904.
Rensing: Ann. d. Phys. (4) **14**, 363, 1904.
Nagaoka and Jones: Phil. Mag. (5) **41**, 454, 1891.
Nagaoka and Honda: Phil. Mag. (5) **46**, 261, 1898.
Nagaoka: Boltzmann-Festschrift 1904, S. 916.
E. Jones: Proc. R. Soc. **63**, 44, 1898.
Quincke: W. A. **24**, 347, 1885; **34**, 401, 1888.
Beltrami: Rend. Instit. Lombard. (2) **16**, 1884; Mem. Acad. 1886.
Drude: W. A. **63**, 9, 1897.
Nagaoka: Rapp. prés. au Congrès internat. de phys. **2**, 536, 19
Sano (Flüssigkeiten): Phys. Ztschr. **6**, 566, 1905; Tokyo K. **2**, 2 1905.
Joule: Phil. Mag. **30**, 76, 225, 1847.
A. Mayer: Phil. Mag. (4) **46**, 177, 1873.
Barrett: Phil. Mag. (4) **47**, 51, 1874; Nature **26**, 515, 586, 188
Bidwell: Proc. R. Soc. **38**, 265, 1885; **40**, 109, 257, 1886; 4 **47**, 469, 1890; **51**, 495, 1892; **56**, 94, 1894; **74**, 60, 1905; T 1888, p. 205; Nature **38**, 224, 1888.
Berget: Compt. rend. **115**, 722, 1892; Journ. de phys. (3) **2**, 17
Righi: Mem. di Bologna **4**, 1879.
Nagaoka: Phil. Mag. (5) **37**, 131, 1894; W. A. **53**, 487, 1894.
Nagaoka u. Honda: Phil. Mag. (5) **46**, 261, 1898; (6) **4**, 45, 1 **65**, 246, 1902; Compt. rend. **134**, 536, 1902; Journ. d. Phy 1902.
Honda u. Shimizu: Phil. Mag. (6) **4**, 338, 1902; **6**, 392, 1903; **3**, 378, 1902; **4**, 499, 1903.
Rosing: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **26**, 253, 1894.
Bachmetjew: Wien. Ber. **104**, 71, 1895.
More: Phil. Mag. (5) **40**, 345, 1895.
Klingenberg: Diss., Rostock 1897.

Knott and Shand: Proc. Edinb. Soc. **19**, 85, 249, 1892; **20**, 295, 1893; **22**, 216, 1898.
Hurmuzescu: Arch. Sc. phys. et nat. **4**, 431, 1897.
Maurain: Ecl. électr. **32**, 325, 1902.
Quincke: Berl. Ber. 1884, S. 17; 1900, S. 391.
Sluginow: Diss. (russ.), St. Petersb. 1895.
Page: P. A. **43**, 411, 1838.
Delezenne: Bibl. univ. nouv. **16**, 406, 1838.
Marrian: Phil. Mag. **25**, 382, 1844; P. A. **63**, 530, 1838.
Matteucci: Arch. Sc. phys. **5**, 389, 1845.
Wertheim: P. A. **77**, 43, 1848; Ann. d. chim. et phys. (3) **23**, 302, 1848.
De la Rive: Arch. sc. phys. **25**, 311, 1866; Ann. d. chim. et phys. (4) **8**, 305, 1866; P. A. **65**, 637, 1845; **76**, 270, 1847; **128**, 452, 1866; Compt. rend. **20**, 1287, 1845.
Ader: Compt. rend. **88**, 641, 1879.
Ferguson: Proc. R. Soc. Edinb., 6. März 1878.
Trowbridge: Proc. Amer. Acad. **11**, 114, 1878.
Bachmetjew: Repert. d. Phys. **26**, 137, 1890.
Honda and Shimizu: Phil. Mag. (6) **4**, 645, 1902.

Zu § 5.

Ewing: Magnet. Induct. in iron and other metals **39**, 1891; Deutsche Ausg. 1882, S. 44.
Stoletow: P. A. **146**, 439, 1872.
Rowland: Phil. Mag. (4) **46**, 140, 1873; **48**, 321, 1874.
J. Hopkinson: Phil. Trans. **176**, 455, 1855.
Corsepius: Unters. zur Konstruktion magnet. Maschinen, S. 46—61, Berlin 1891.
Behn-Eschenburg: Elektrotechn. Ztschr. **14**, 330, 1893.
Kapp: Electr. Engin. **23**, 199, 1894.
Drysdale: Electrician **28**, 267, 1901.
Ewing and Low: Proc. R. Soc. **42**, 200, 1887; Phil. Trans. **180**, 221, 1889.
Du Bois: Phil. Mag. (5) **29**, 293, 1890; W. A. **39**, 25, 1890; **46**, 545, 1892.
Silv. Thompson: Dynamo-electric. Machinery, 4. Aufl., p. 138, 1892.
Du Bois (Wage): Elektrotechn. Ztschr. 1892, S. 579; Instr. **12**, 404, 1892; **20**, 113, 129, 1900; Ann. d. Phys. (4) **2**, 317, 1900.
Bruger: Berichte d. Sektions-Sitzung d. Elektrotechn. Kongresses (1891) in Frankfurt, S. 87, 1892.
Siemens u. Halske: Instr. Febr. 1898.

Zu § 6.

Ewing and Low: Trans. R. Soc. **180**, 221, 1889.
E. T. Jones: W. A. **57**, 273, 1896.
Wilson: Proc. R. Soc. **62**, 369, 1898.
Stoletow: P. A. **146**, 439, 1872.
Baur: W. A. **11**, 399, 1880.
Lord Rayleigh: Phil. Mag. (5) **225**, 1887.
Holborn: W. A. **61**, 281, 1897.
Culmann: W. A. **56**, 602, 1885.
Werner Schmidt: W. A. **54**, 655, 1895.
Rössler: Elektrotechn. Ztschr. 1893, S. 134.
Weiss: Éclair. électr. **8**, 436, 1896.
Bouty: Compt. rend. **80**, 650, 879, 1875; **81**, 88, 1875; Ann. d. l'École norm. (2) **4**, 9, 49, 1875.

Waltenhofen: Wien. Ber. **48**, 504, 1863; P. A. **120**, 650, 1863.
Fromme: W. A. **5**, 345, 1878; **13**, 326, 1881; **18**, 442, 1883; **33**, 236, 1888; **44**, 138, 1891.
Auerbach: W. A. **14**, 308, 1881; **16**, 554, 1882.
Righi: Compt. rend. **90**, 688, 1880; Mém. di Bologna (4) p. 1, 1880.
Peuckert: W. A. **32**, 291, 1887.
Warburg: Freiburger Ber. **8**, 8. Dez. 1880; W. A. **13**, 141, 1881.
Ewing: Proc. R. Soc. **34**, 39, 1882; Phil. Trans. **176**, 523, 1885.
Hopkinson: Phil. Trans. **176**, 455, 1885; Proc. R. Soc. **47**, 23, 138, 1889; **48**, 1, 1890.
Oberbeck: W. A. **21**, 672, 1884.
Tanakadaté: Phil. Mag. (5) **28**, 207, 1889.
Niethammer: W. A. **66**, 29, 1898.
M. Wien: W. A. **66**, 859, 1898.
Ångström: Öfvers. K. Vetens. Ak. Förhandl. **56**, 251, 1899.
Maurain: Compt. rend. **137**, 914, 1903.
Schames: Ann. d. Phys. (4) **22**, 448, 1907.
Wilson and Lydall: Proc. R. Soc. **53**, 352, 1892.
Warburg u. Hönig: W. A. **20**, 814, 1883.
Weihe: W. A. **61**, 578, 1897.
Searle: Proc. Phil. Soc. Cambr. **7**, 330, 1892.
Madelung: Phys. Zeitschr. **8**, 72, 1907.
Piola: Atti Acad. d. Lincei (5) **15**, 222, 1906.

Zu § 7.

Warburg, Hopkinson, vgl. § 6.
Adler: W. A. **46**, 503, 1892.
Duhem: Théorie nouv. de l'aimant. etc., Paris 1888; Leçons sur l'électr. et le magn. 2, Paris 1892.
Steinmetz: Elektrotechn. Ztschr. **12**, 62, 1891; **13**, 519, 1892; Electrician **28**, 408, 425, 1892; Transact. amer. Inst. of elect. eng. **9**, 1, 1892.
Baily: Electrician **36**, 118, 1895.
Maurach: Ann. d. Phys. (4) **6**, 580, 1901.
Gray: Proc. R. Soc. **56**, 48, 1894.
Weiss: Éclair. électr. **8**, 436, 1896.
Ewing and Miss Klaassen: Electrician, 6. April 1894; Phil. Trans. 1894; Proc. R. Soc. **54**, 75, 1893.
Holden: The Electrical World, 15. Juni 1895.
Marcel Deprez: Compt. rend. **128**, 61, 1899; Éclair. électr. **17**, 148, 1899.
Blondel: Compt. rend. **128**, 358, 1898; Éclair. électr. **17**, 437, 1898; **18**, 227, 1899.
Ewing: Éclair. électr. **3**, 427, 1895.
Joule: Phil. Mag. (3) **23**, 263, 347, 435, 1843.
Cazin: Ann. d. chim. et phys. (5) **6**, 493, 1875; Compt. rend. **78**, 845; **79**, 290, 1874; Journ. d. phys. (1), **5**. 111, 1876.
Grove: P. A. **78**, 567, 1849; Phil. Mag. **35**, 153, 1849.
Warburg: W. A. **13**, 141, 1881.
Edlund: P. A. **123**, 285, 1864.
Jamin et Roget: Compt. rend. **68**, 682, 1017, 1211, 1471, 1869.
Herwig: W. A. **4**, 177, 1878.
Borgmann: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **14**, 67, 1882; Journ. d. phys. (2) **2**, 574, 1883.
Warburg u. Hönig: W. A. **20**, 814, 1883.

Pilleux: Compt. rend. **94**, 946, 1882.
Trowbridge: Proceed. Amer. Acad. 1878, p. 114.
R. Strauss: Diss., Zürich 1896.
M. Wien: W. A. **66**, 859, 1898.
Maurain: Ann. de chim. et phys. (7) **14**, 208, 1898; Journ. d. phys. (3) **7**, 274, 1898.

Zu § 8.

Ewing: Trans. R. Soc. **176**, 535, 564, 1885.
G. Wiedemann: P. A. **100**, 241, 1857.
Fromme: W. A. **4**, 76, 1878; **5**, 345, 1878; **45**, 798, 1892; **61**, 55, 1897; **63**, 314, 1898.
Villari: Nuov. Cim. 27, Mai-Juni 1868; P. A. **137**, 569, 1869.
Berson: Compt. rend. **106**, 592, 1888; **108**, 94, 1889.
Ascoli: Nuov. Cim. (5) **3**, 5, 1902.
Matteucci: Ann. d. chim. et phys. (3) **53**, 416, 1858.
Wertheim: Compt. rend. **35**, 702, 1852; Ann. d. chim. et phys. (3) **50**, 385, 1857.
Villari: P. A. **126**, 87, 1868.
Tomlinson: Phil. Mag. (5) **29**, 394, 1890; Proc. R. Soc. **42**, 224, 1887; **47**, 13, 1889; **56**, 103, 1894.
Chree: Phil. Trans. **181**, 329, 1890; Proc. R. Soc. **47**, 41, 1889.
W. Thomson: Proc. R. Soc. **23**, 445, 473, 1875; **27**, 439, 1878; Trans. R. Soc. **166**, 693, 1877.
Heydweiller: W. A. **52**, 462, 1894; Phys. Ztschr. **5**, 255, 1904.
Honda u. Shimizu: Ann. d. Phys. (4) **14**, 791, 1904; Phys. Ztschr. **5**, 254, 1904.
Nagaoka and Honda: Phil. Mag. (6) **4**, 45, 1902.
G. S. Meyer: W. A. **59**, 142, 1896.
Wertheim (Torsion): Compt. rend. **22**, 336, 1846; **35**, 702, 1852; Ann. d. chim. et phys. (3) **23**, 302, 1848; **50**, 385 1857.
G. Wiedemann: P. A. **103**, 563, 1858; **106**, 161, 1859; **117**, 195, 1862; W. A. **27**, 376, 1886; **37**, 610, 1889.
Knott: Trans. R. Edinb. Soc. **35**, 377, 1889; **36**, 1891; Phil. Mag. (5) **37**, 141, 1894.
Zehnder: W. A. **41**, 210, 1890.
Nagaoka: Phil. Mag. (5) **29**, 123, 1890; W. A. **53**, 481, 1894; Journ. of Coll. of Sc. Tokyo **2**, 304, 1888; **3**, 189, 335, 1889; **4**, 323, 1891.
Moreau: Compt. rend. **122**, 1192, 1896; **126**, 463, 1898; Journ. d. Phys. (3) **7**, 125, 1898.
Schreber: Phys. Ztschr. **2**, 18, 1900.
Barus: Amer. Journ. of Sc. **10**, 407, 1900; **11**, 97, 1901.
Nagaoka and Honda: Journ. of Coll. of Sc. Tokyo **13**, 263, 1900.

Einfluß der Temperatur.

Kupfer: P. A. **17**, 405, 1829.
G. Wiedemann: P. A. **122**, 346, 1864.
Perkins: Amer. Journ. of Sc. (3) **30**, 218, 1885.
Baur: W. A. **11**, 394, 1880.
Hopkinson: Proc. R. Soc. **44**, 317, 1888; **45**, 318, 1889; **47**, 23, 138, 1889; **48**, 1, 442, 1890; Trans. R. Soc. **180**, 443, 1889.
Tomlinson: Phil. Mag. (5) **25**, 372, 1888; **26**, 18, 1888.
Van't Hoff: Rapports présentés au Congrès internat. de Phys. **2**, 532, 1900.

Curie: Compt. rend. **118**, 796, 859, 1134, 1894; Journ. d. Phys. (3) **4**, 197, 263, 1895.
Kunz: Progr. Ludw.-Georgs-Gymn. Darmstadt; Dissert., Tübingen 1893.
Wills: Phil. Mag. (5) **50**, 1, 1900.
Le Chatelier: Compt. rend. **119**, 272, 1894.
Berson: Ann. d. chim. et phys. (5) **8**, 433, 1866.
Honda u. Shimizu: Phys. Ztschr. **5**, 816, 1904.
Du Bois: Phil. Mag. (5) **29**, 293, 1890.
Gaugain: Journ. d. Phys. (2) **7**, 186, 1888.
Ledeboer: Journ. d. Phys. (2) **7**, 199, 1888; Compt. rend. **106**, 129, 1888.
Barrett: Phil. Mag. (4) **46**, 472, 1873.
Osmond (Rekaleszenz): Compt. rend. **106**, 1156, 1888; Mém. de l'artill. d. la marine **15**, 131, 1887.
Claude: Compt. rend. **129**, 409, 1899.
Fleming and Dewar: Proc. R. Soc. **60**, 57, 1897.
Osmond: Compt. rend. **128**, 1395, 1899.
Morris: Phil. Mag. **44**, 213, 1897.
Roget: Proc. R. Soc. **63**, 258, 1898.
Rowland: (Ni): Phil. Mag. (4) **48**, 321, 1874.

Zu § 9.

Waltenhofen: Wien. Ber. **61**, 771, 1870; **89**, 1873; W. A. **7**, 415, 1879.
Börnstein: P. A. **154**, 336, 1875; Ber. d. sächs. Ges., 29. Juni 1874.
Toepler u. v. Ettingshausen: P. A. **160**, 1, 1877.
Auerbach: W. A. **11**, 353, 1880.
Haubner: Repert. d. Phys. **22**, 71, 1886; Wien. Ber. **83**, 1167, 1881.
Kobylin u. Tereschin: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. **18**, 107, 1886.
Trenkle: Ber. d. phys.-med. Soz. in Erlangen **37**, 161, 1905; Ann. d. Phys. (4) **19**, 692, 1906.
Maurain: Éclair. électr. **34**, 465, 1903; Compt. rend. **131**, 410, 880, 1900; Journ. d. Phys. (3) **10**, 123, 1901; (4) **1**, 151, 1902; Rev. gén. d. Sc. **12**, 1059, 1901.
Baur: W. A. **11**, 411, 1880.

Legierungen.

Daubrée: Compt. rend. **80**, 526, 1875.
Weiss: Éclair. électr. **8**, 30, 248, 443, 1896; Thèse No. 890, Paris 1896.
Parshall: Proc. Inst. Civ. Eng. **126**, 50, 1896.
Richardson: Phil. Mag. (5) **49**, 121, 1900.
Richardson and Lownds: Phil. Mag. (6) **1**, 601, 1901.
Richardson and Laws: Phil. Mag. (6) **1**, 296, 1901.
Hill: Verhandl. d. deutschen phys. Ges. **4**, 194, 1902.
Nagaoka: W. A. **59**, 66, 1896; Ztschr. f. phys. Chem. **22**, 641, 1897.
Wünsche: Ann. d. Phys. (4) **7**, 116, 1902; Dissert., Rostock 1901.
Hopkinson: Proc. R. Soc. **47**, 23, 1890; **48**, 1, 1890.
Osmond: Compt. rend. **118**, 532, 1894; **128**, 304, 1396, 1899.
Guillaume: Compt. rend. **124**, 176, 1515, 1897; **125**, 235, 1897; **126**, 738, 1898; Les aciers au nickel, Paris 1898; Journ. de phys. (3) **7**, 262, 1898.
Dumont: Compt. rend. **126**, 741, 1898.
L. Dumas: Compt. rend. **130**, 357, 1900.
Houllevigue: Journ. d. phys. (3) **8**, 89, 1899.
Abt: Ann. d. Phys. (4) **6**, 774, 1901.

Heuslersche Legierungen.

Heusler: Verhandl. d. deutschen phys. Ges. **5**, 219, 220, 1903; Marburger Schriften **7**, 98, 1905.
Stark u. Haupt: Verhandl. d. deutschen phys. Ges. **5**, 224, 1903.
Heusler, Richarz, Stark u. Haupt: Marburger Schriften **13**, 237, 1904; Ztschr. f. angew. Chem. 1904, S. 260.
Hogg: Chem. News **66**, 140, 1892; Chem. Zentralbl. **63**, II, 734, 1892.
Austin: Verhandl. d. deutschen phys. Ges. **6**, 211, 1904.
Hadfield: Chem. News **90**, 180, 1904; Chem. Zentralbl. **2**, 1440, 1627, 1904.
Fleming and Hadfield: Electrician **9**, 329, 1905; Proc. R. Soc. **76**, 271, 1905.
Binet du Jassoneix: Compt. rend. **142**, 1336, 1906.
Wedekind: Ztschr. f. Elektrochem. **11**, 850, 1905; Verh. d. deutschen phys. Ges. **8**, 412, 1906; Phys. Zeitschr. **7**, 850, 1906.
Gumlich: Ann. d. Phys. (4) **16**, 535, 1905; Elektrotechn. Ztschr. 1905, S. 203.
Gray: Proc. R. Soc. **77**, 256, 1906.
Hill: Phys. Rev. **21**, 335, 1905; **23**, 498, 1906.
Take: Dissert., Marburg 1904; Verhandl. d. deutschen phys. Ges. **7**, 133, 1905; Marburger Schriften **14**, 35, 1905; **15**, 299, 1905; Ann. d. Phys. (4) **20**, 849, 1906.
Haupt: Dissert., Marburg 1904; Naturw. Rundschau **21**, 69, 1906.
March: Phys. Rev. **26**, 29, 1907.
Mc Lennan and Wright: Phys. Rev. **24**, 276, 1907.
Ingersoll: Phil. Mag. (6) **11**, 41, 1906.
Zahn u. Schmidt: Verh. d. deutschen phys. Ges. **9**, 98, 1907.
Mc Lennan: Phys. Rev. **24**, 449, 1907.
Ross: Edinb. Proc. **27**, 88, 1907.
Guthe and Austin: Bull. Bur. of Standards **2**, 297, 1906.

Mineralien.

Holz: W. A. **5**, 169, 1878.
E. Becquerel: Compt. rend. **20**, 1708, 1845.
Abt: W. A. **45**, 80, 1892; **52**, 749, 1894; **57**, 135, 1896; **66**, 119, 1898; **68**, 658, 1899; Ann. d. Phys. (4) **6**, 782, 1901.
Curie: Compt. rend. **118**, 796, 859, 1134, 1894.
Pockels: W. A. **63**, 195, 1897.
Weiss: Journ. d. phys. (3) **5**, 435, 1896; **8**, 542, 1899; (4) **4**, 469, 1905.
Du Bois: W. A. **39**, 36, 1890; Phil. Mag. (5) **29**, 262, 301, 1890.

Zu § 10.

Brugmans: Magnetismus seu de affinitatibus magneticis observationes. Lugd. Batav. **40**, 130, 1778.
E. Becquerel: Bull. univ. d. sciences **7**, 371, 1827; P. A. **10**, 292, 1827.
Faraday: Exp. Res. Ser. **20**, 1845; Ser. **25**, 1850.
Plücker: P. A. **73**, 580, 1848; **77**, 578, 1849.
E. Becquerel: Ann. d. chim. et phys. (3) **28**, 283, 1850.
W. Weber: P. A. **73**, 241, 1848; Elektrodyn. Maßbest. 1852, S. 3.
Tyndall: Phil. Mag. (4) **2**, 333, 1851; **10**, 257, 1855; P. A. **87**, 189, 1852; Phil. Trans. 1855, p. 24; 1856, p. 237.
W. Weber (Theorie des Magnetismus): Abhandl. d. sächs. Ges. d. Wiss. **1**, 485, 1852; P. A. **87**, 145, 1852.
Duhem: Compt. rend. **108**, 1042, 1889; Théorie nouv. d. l'aimantation par influence, fondée s. la thermodynamique, Paris 1888; Mém. d. la faculté de Lille 1889.

Richarz: W. A. 52, 410, 1894.
R. Lang: Ann. d. Phys. (4) 2, 483, 1900.
Rosing: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 24, 105, 1892.
Du Bois: Arch. Néerl. (2) 5, 242, 1901.
Langevin: Ann. d. chim. et phys. (8) 5, 70, 1905; Compt. rend., p. 1204, 1904.
P. Weiss: Compt. rend. 143, 1136, 1896; 144, 25, 1907.

Zu § 11.

Quet: Compt. rend. 38, 562, 1854.
Curie: Journ. d. phys. (3) 4, 197, 263, 1895; Compt. rend. 116, 136, 1893.
Curie et Chéneveau: Journ. d. phys. (4) 2, 796, 1903.
Meslin: Ann. d. chim. et phys. (8) 7, 145, 1906.
E. Becquerel: Ann. d. chim. et phys. (3) 28, 283, 1850; 32, 68, 1851; 44, 209, 1855.
Boltzmann: Wien. Ber. 80, 687, 1879; 83, 576, 1881.
Ettingshausen: Wien. Ber. 85, 37, 1882; 96, 777, 1887; W. A. 17, 272, 1882.
Rowland and Jaques: Amer. Journ. of sc. 18, 360, 1879.
Schuhmeister: Wien. Ber. 83, 45, 1881.
Borgmann: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 10, 155, 1878.
G. Wiedemann: P. A. 126, 1, 1865; 135, 177, 1868.
Henrichsen: W. A. 22, 121, 1884; 34, 180, 1888; 45, 38, 1892.
Silow: W. A. 1, 481, 1877; 11, 324, 1880; 16, 247, 1882; Diss., Moskau 1880; Bull. de Moscou 53, 398, 1879; Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 9, 308, 1877.
Borgmann: Journ. d. russ. phys.-chem. Ges. 9, 285, 1878; 10, 129, 1879; Beibl. 3, 812—818, 1879.
Townsend: Proc. R. Soc. 60, 186, 1896.
Plücker: P. A. 77, 578, 1849; 83, 299, 1851.
Jefimow: Zur Frage nach dem Magnetismus der Gase (russ.). Dissert., St. Petersburg 1888.
Fleming and Dewar: Proc. R. Soc. 63, 311, 1898.
Quincke: W. A. 24, 347, 1885; 34, 403, 1888.
Jäger u. Stefan Meyer: Wien. Ber. 106, 594, 1897.
Du Bois: W. A. 35, 154, 1888; 65, 38, 1898.
Liebknecht u. Wills: Ann. d. Phys. (4) 1, 178, 1900.
Königsberger: W. A. 66, 698, 1898.
Toepler u. Hennig: W. A. 34, 790, 1888.
Hennig: W. A. 50, 485, 1893.

Zu § 12.

Reich: P. A. 97, 283, 1856.
G. Wiedemann: P. A. 126, 8, 1865.
Eaton: W. A. 15, 225, 1882.
Du Bois: W. A. 35, 137, 1888.
Ettingshausen: W. A. 17, 304, 1882.
Henrichsen: W. A. 22, 121, 1884; 31, 180, 1887; 34, 180, 1888; 45, 38, 1892.
Du Bois u. Liebknecht: Ann. d. Phys. (4) 1, 189, 1900; Verhandl. d. deutsch. phys. Ges. 1, 236, 1899.
G. Jäger u. Stefan Meyer: Wien. Ber. 106, 594, 623, 1897; 107, 5, 1898; W. A. 67, 427, 707, 1899; Ann. d. Phys. (4) 6, 870, 1901.
Stefan Meyer: Wien. Ber. 108, 171, 861, 1899; 109, 284, 400, 1900; 110, 541, 1901; 111, 38, 1902; 113, 1007, 1904; W. A. 68, 325, 1899; 69, 236, 1899; Ann. d. Phys. (4) 1, 664, 668, 1900; Verhandl. d. deutschen phys. Ges. 1, 275, 1899; Phys. Ztschr. 1, 433, 1900.

Heydweiller: Ann. d. Phys. (4) **12**, 608, 1903.
Heinrich: Münch. Ber. 1900, S. 35.
Freitag: Münch. Ber. 1900, S. 36.
Tumlirz: W. A. **27**, 133, 1886.
Lodge: Nature **33**, 484, 1886.
Joubin: Compt. rend. **106**, 735, 1888.
Plessner: W. A. **39**, 336, 1890.
Mosler: Ann. d. Phys. (4) **6**, 84, 1901.
Piaggesi: N. Cim. (5) **4**, 247, 1902; Phys. Ztschr. **4**, 347, 1903.
Fleming and Dewar: Proc. R. Soc. **63**, 311, 1898.
Liebknecht u. Wills: Ann. d. Phys. (4) **1**, 178, 1900; Verhandl. d. deutsch. phys. Ges. **1**, 170, 1899.
Stearns: Phys. Rev. **16**, 1, 1903.
Scarpa: N. Cim. (5) **10**, 155, 1905.
Lombardi: Mem. Acc. Sc. Torino (2) **47**, 1897.
Studley: Phys. Rev. **24**, 22, 1907.
March: Phys. Rev. **24**, 29, 1907.
Curie: Compt. rend. **115**, 803, 1892; **116**, 137, 1892.

Zu § 13.

Plücker: P. A. **72**, 315, 1847; **75**, 108, 1848; **76**, 576, 1849; **77**, 447, 1849; **78**, 428, 1849; **110**, 397, 1860; Phil. Trans. 1858, p. 570.
Faraday: Exper. Research. Ser. **22**, 1848; **30**, 1855.
Knoblauch u. Tyndall: P. A. **79**, 233, 1850; **81**, 481, 1850; Phil. Mag. (3) **36**, 178, 1850.
Tyndall: Phil. Mag. (4) **2**, 183, 1851; **10**, 180, 1855; **11**, 125, 1856; P. A. **83**, 384, 1851.
Plücker u. Beer: P. A. **81**, 115, 1850; **82**, 42, 1851.
W. Thomson: Phil. Mag. (4) **1**, 177, 1851.
Duhem: Leçons sur l'électr. et le magnétism **2**, 289, 1892.
Hankel: Ber. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. 1851, S. 99.
Rowland and Jacques: Amer. Journ. of sc. (3) **18**, 360, 1879.
Lutteroth: W. A. **66**, 1081, 1898; Diss., Leipzig 1898.
Voigt: Die fundam. Eigensch. d. Kristalle, Leipzig 1898; Gött. Nachr. 1900, S. 331; 1903, S. 1.
Sano: Phys. Ztschr. **3**, 401, 1901/2; **4**, 8, 1902/3.
Stenger: W. A. **20**, 304, 1883; **33**, 312, 1888; **35**, 331, 1888.
W. König: W. A. **31**, 273, 1887; **32**, 222, 1887.
Wallerant: Compt. rend. **133**, 630, 1901; Bull. Soc. miner. **24**, 404, 1901.
Beckenkamp: Ztschr. f. Kristallogr. **36**, 102, 1902.
O. Lehmann: Ann. d. Phys. (4) **2**, 675, 1900.
P. Weiss: Thèse No. 890, Paris 1896; Journ. d. phys. (3) **5**, 435, 1896; **8**, 542, 1899; (4) **3**, 194, 1904; **4**, 469, 829, 1905; Compt. rend. **126**, 1099, 1898; **138**, 35, 1904; **140**, 1532, 1587, 1905; **141**, 182, 245, 1905; Ztschr. f. Kristallogr. **29**, 411, 690; Éclair. électr. **8**, 56, 105, 436, 1896; Arch. sc. phys. et nat. (4) **19**, 537; **20**, 213, 1905; Phys. Ztschr. **6**, 779, 1905; Verhandl. d. deutschen phys. Ges. **7**, 325, 1905.
Abt: W. A. **45**, 80, 1892; **52**, 749, 1894; **57**, 135, 1896; **68**, 658, 1899.
Du Bois: W. A. **39**, 36, 1890; Phil. Mag. (5) **29**, 262, 301, 1890.
Grailich u. v. Lang: Wien. Ber. **32**, 43, 1858.
V. v. Lang: Wien. Ber. **108**, 557, 1900.
Bavink: Diss., Göttingen 1904.
Kunz (Hématite): Arch. sc. phys. et natur. (4) **23**, 137, 1907.

NAMENREGISTER

der im Text zitierten Autoren.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

J.

K.

L.

M.

R.

S.

T.

SACHREGISTER.

A.

B.

C.

D.

E.

F.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

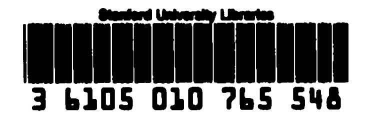
V.

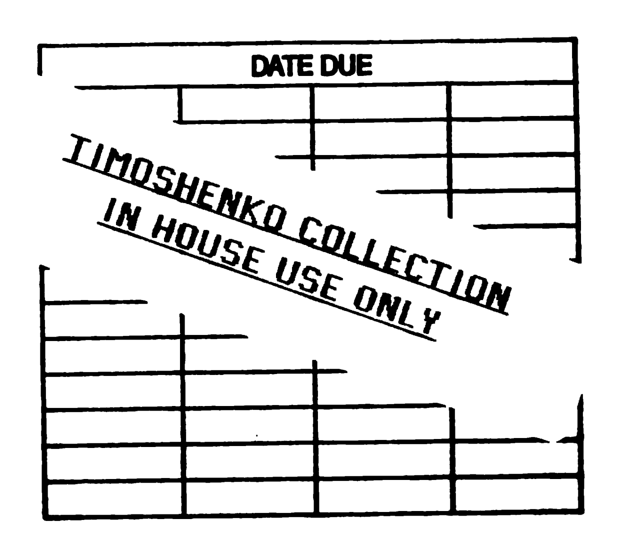
W.

Z.

Berichtigungen.

Seite 33, Überschrift lies: Leitern statt Leiter.
Seite 44, Zeile 16 von unten lies: Ψ_i statt Ψ.
Seite 44, Zeile 17 von unten lies: Φ_i statt Φ.
Seite 51, Zeile 4 von unten bis Seite 52, Zeile 2 von oben muß es heißen: „zu machen. Alle vorhergehenden Formeln stützen sich offenbar auf das Coulombsche Gesetz, d. h. auf die Formeln (10) und (11), die nur für Dielektrika einen Sinn haben. Daher haben wir auch kein Recht, die aus jenen abgeleiteten Formeln auf Leiter anzuwenden."
Seite 160, Zeile 3 von oben lies: Priestley statt Prisley.
Seite 621 und 622 lies: Grotthuss statt Grothus.


Stanford University Libraries
3 6105 010 765 548


DATE DUE
TIMOSHENKO COLLECTION
IN HOUSE USE ONLY





